

АППРОКСИМАЦИЯ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА АНАЛИТИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ В СЛУЧАЕ СЛОЖНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

О.А. Погорелов

Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля

В і обґрунтовується метод приблизного зворотнього перетворення складних зображень за Лапласом, які не мають аналітичних функцій-оригіналів. Аналітична апроксимація оригіналу залежить від змінної, яка визначається аналітично (для вузького діапазону апроксимації), або чисельно (для більш широкого діапазону).

Математические модели линейных систем чаще всего записываются в виде передаточных функций, представляющих собой изображения по Лапласу импульсных весовых функций. Переход от изображения к оригиналу является символьным преобразованием, оригинал и изображение должны быть аналитическими функциями. Однако существуют сложные изображения, оригиналы которых не могут быть представлены аналитически. В этом случае приходится использовать аппроксимацию обратного преобразования Лапласа аналитической функцией, при этом, удовлетворительную точность можно обеспечить лишь в ограниченном диапазоне изменений аргумента [1]. Для некоторых приложений этого вполне достаточно.

Рассмотрим следующую задачу. Необходимо получить обратное преобразование Лапласа функции $F(p, x)$, где $p = \sigma + i\omega$ – комплексный параметр преобразования Лапласа, действительная часть которого равна σ , а мнимая: ω (i – мнимая единица); второй аргумент x означает либо: $x = \mu \cdot p$, либо $x = \frac{\mu}{p}$, где μ – малый параметр (вещественное положительное число, меньше единицы). Если $\mu = 0$, то обратным преобразованием функции $F(p, 0)$, по условию, является аналитическая функция $f_0(t)$ действительного переменного t . Если же $\mu \neq 0$, то оригинал $f(t)$ изображения $F(p, x)$ не может быть представлен в аналитическом виде. Данная статья посвящена изложению и обоснованию метода аналитической аппроксимации обратного преобразования в этом случае.

Рассмотрим изображение $\Phi(p, y)$, которое отличается от изображения $F(p, x)$ только вторым аргументом, который равен либо: $y = \mu \cdot \sigma$, либо $y = \frac{\mu}{\sigma}$. Поскольку функция $f_0(t)$ – аналитическая, то оригинал $\varphi(t, \sigma)$ изображения $\Phi(p, y)$ также является аналитической функцией (y не зависит от переменной ω).

Теорема 1. Если $f(t)$ и $\varphi(t, \sigma)$ – обратные преобразования изображений $F(p, x)$ и $\Phi(p, y)$ соответственно, то справедливо равенство:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \varphi(t, \sigma) dt. \quad (1)$$

Доказательство. Запишем преобразования Лапласа в следующем виде

$$F(p, x) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} f(t) dt; \quad \Phi(p, y) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} \varphi(t, \sigma) dt.$$

В соответствии с определением функций $F(p, x)$ и $\Phi(p, y)$ для $\omega = 0$ имеем $F(\sigma + i \cdot 0) = \Phi(\sigma + i \cdot 0)$, откуда следует равенство (1).

Следствие. Из-за того, что подынтегральные функции $e^{-\sigma t} f(t)$ и $e^{-\sigma t} \varphi(t, \sigma)$ имеют общий множитель $e^{-\sigma t}$, они практически не равны нулю лишь на ограниченном интервале: $0 \leq t \leq T$.

$$T = T(\sigma) = \frac{\Lambda}{\sigma - \sigma_0}, \quad (2)$$

где Λ – достаточно большое вещественное положительное число, σ_0 – вещественное положительное число, задающее область определения функции $F(p, x)$ (в полуплоскости $\text{Re } p > \sigma_0$). В силу равенства (1) непрерывные вещественные функции $f(t)$ и $\varphi(t, \sigma)$ должны иметь на интервале $0 \leq t \leq T$ хотя бы одну общую точку t_c (точку пересечения). Можем записать

$$f(t_c) = \varphi(t_c, \sigma). \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует: $\sigma = \sigma(t_c)$. Свойства функции $\sigma(t_c)$ можно установить на основании следующих соображений. Увеличивая переменную σ , мы сужаем интервал $0 \leq t \leq \frac{\Lambda}{\sigma - \sigma_0}$ и соответственно уменьшаем значение t_c . Если $\sigma = \infty$, то $t_c = 0$ (величина интервала T при этом также равна нулю). Таким образом,

зависимость между переменными σ и t_c близка к обратно-пропорциональной. Перепишем уравнение (1) в следующей форме:

$$\int_0^{t_c} e^{-\sigma\tau} [f(\tau) - \varphi(\tau, \sigma)] d\tau = - \int_{t_c}^T e^{-\sigma\tau} [f(\tau) - \varphi(\tau, \sigma)] d\tau. \quad (4)$$

Для того чтобы равенство (4) выполнялось, произведение $\sigma \cdot t_c$ должно быть порядка единицы. Точнее: $\sigma(t_c) \cdot t_c = \lambda(t_c)$, где $\lambda(t_c)$ – медленно меняющаяся функция t_c , конкретный вид которой зависит от вида изображения $F(p, x)$. Если $t_c = 0$, то и $T = 0$. Когда $t_c > 0$, $T > t_c$. Значит, в области малых значений переменная t_c растет медленнее, чем интервал T . Оригиналы рациональных изображений $\Phi(p, y)$ имеют следующий вид

$$\varphi(t, \sigma) = \sum_{k=1}^N A_k e^{-\alpha_k t}, \quad (5)$$

где A_k – коэффициенты, $-\alpha_k$ – полюсы функции $\Phi(p, y)$ (некоторые из коэффициентов и полюсов зависят от σ). Функция $f(t)$ на определенном отрезке изменений аргумента также может быть аппроксимирована выражением вида (5). Поэтому при больших значениях t_c уравнение (3) приводит к асимптотическим зависимостям вида: $\sigma = \sigma_0 + A \cdot e^{-\alpha t}$, где $-\alpha$ – наименьший по

модулю полюс. Отсюда следует: $t_c = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{A}{\sigma - \sigma_0} \right)$. Сравнивая эту

формулу с уравнением (2), видим, что и в области больших значений t_c эта переменная также «отстает» в росте от T при изменении σ .

Поэтому можем записать: $T(t_c) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t_c^k$, где $c_k \geq 0$ – положительные коэффициенты. Тогда из (2) следует

$$\lambda(t_c) = \sigma_0 t_c + \frac{\Lambda}{c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k t_c^{k-1}}.$$

Следовательно, если $\sigma_0 > 0$, то функция $\lambda(t_c)$ неограниченно увеличивается. Если же $\sigma_0 \leq 0$, то функция $\lambda(t_c)$ монотонно уменьшается. Введем функцию комплексного переменного

$$H(p, \sigma) = \frac{P}{p - \sigma} [F(p, x) - \Phi(p, y)]. \quad (6)$$

Поскольку функции $F(p, x)$ и $\Phi(p, y)$ – изображения по Лапласу, то изображением по Лапласу будет и функция $H(p, \sigma)$. Это

означает, что существует оригинал: $h(t, \sigma) \div H(p, \sigma)$. Из уравнения

(6) следует: $f(t) - \varphi(t, \sigma) = h(t, \sigma) - \sigma \int_0^t h(\tau, \sigma) d\tau$. В точке пересечения

$$\lambda(t_c) = \sigma \cdot t_c = \frac{t_c \cdot h(t_c, \sigma)}{\int_0^{t_c} h(\tau, \sigma) d\tau}. \quad (7)$$

Теорема 2. $\lambda(0)$ – натуральное число.

Доказательство. Разложим оригинал $h(t, \sigma)$ в степенной ряд

$$h(t, \sigma) = a_0(\sigma) + a_1(\sigma)t + a_2(\sigma)t^2 + a_3(\sigma)t^3 + \dots$$

Тогда из (7) следует

$$\lambda(t) = \frac{a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + \dots}{a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + a_3 \frac{t^4}{4} + \dots}.$$

Если $a_0 \neq 0$, то $\lambda(0) = 1$. Если $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$, то $\lambda(0) = 2$. Если $a_0 = 0$ и $a_1 = 0$, а $a_2 \neq 0$, то $\lambda(0) = 3$ и т.д..

Разложим функции $F(p, x)$ и $\Phi(p, y)$ в ряд Маклорена по «неудобным» параметрам x и y соответственно

$$F(p, x) = F(p, 0) + \frac{\partial F(p, 0)}{1! \partial x} x + \frac{\partial^2 F(p, 0)}{2! \partial x^2} x^2 + \frac{\partial^3 F(0)}{3! \partial x^3} x^3 + \dots$$

$$\Phi(p, y) = F(p, 0) + \frac{\partial F(p, 0)}{1! \partial x} y + \frac{\partial^2 F(p, 0)}{2! \partial x^2} y^2 + \frac{\partial^3 F(0)}{3! \partial x^3} y^3 + \dots$$

и вычтем одну функцию из другой

$$\begin{aligned} F(p, x) - \Phi(p, y) &= \frac{\partial F(p, 0)}{1! \partial x} (x - y) + \frac{\partial^2 F(p, 0)}{2! \partial x^2} (x - y)(x + y) + \dots = \\ &= (x - y) \left[\frac{\partial F(p, 0)}{1! \partial x} + \frac{\partial^2 F(p, 0)}{2! \partial x^2} (x + y) + \frac{\partial^3 F(0)}{3! \partial x^3} (x^2 + xy + y^2) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Если $x = \frac{\mu}{p}$ и $y = \frac{\mu}{\sigma}$, то $(x - y) = \frac{\mu}{p} - \frac{\mu}{\sigma} = \mu \frac{\sigma - h}{p\sigma}$. Если $x = \mu \cdot p$ и $y = \mu \cdot \sigma$, то $(x - y) = \mu(p - \sigma)$. Для первого и второго случаев соответственно имеем

$$H(p, \sigma) = -\frac{\mu}{\sigma} \cdot \left[\frac{\partial F(p, 0)}{1! \partial x} + \frac{\partial^2 F(p, 0)}{2! \partial x^2} (x + y) + \frac{\partial^3 F(0)}{3! \partial x^3} (x^2 + xy + y^2) + \dots \right].$$

$$H(p, \sigma) = \mu \cdot p \cdot \left[\frac{\partial F(p, 0)}{1! \partial x} + \frac{\partial^2 F(p, 0)}{2! \partial x^2} (x + y) + \frac{\partial^3 F(0)}{3! \partial x^3} (x^2 + xy + y^2) + \dots \right].$$

Если параметр μ достаточно мал, то можно ограничиться

первым членом ряда в квадратных скобках. Это позволяет получить приближенное выражение для оригинала $h(t, \sigma)$ в аналитическом виде. Далее по формуле (7) определяем функцию $\lambda(t)$. Тогда функция $\varphi\left(t, \frac{\lambda(t)}{t}\right)$ является аналитической аппроксимацией искомой функции $f(t)$ в ограниченном диапазоне, примыкающем к началу координат. Если мы хотим увеличить диапазон аппроксимации, при определении $H(p, \sigma)$ необходимо учитывать другие члены ряда в квадратных скобках. Поскольку переменная $\lambda(t)$ фигурирует в левой и правой частях выражения (7), в этом случае для ее вычисления нужно использовать метод последовательных приближений. В качестве примера на рис. 1 показан график функции-оригинала $f(t)$ для изображения $F(p, x) = \frac{1}{(p + 0.1)\left(p + \frac{0.5}{1+x}\right)}$, $x = \frac{0.1}{p}$. Рядом показаны

график функции $f_0(t)$ и график аналитической аппроксимации по предложенному методу $\varphi(t, \lambda(t))$ (в первом приближении). Как можно видеть, по сравнению с «нулевым приближением» диапазон аппроксимации увеличился более чем в три раза.

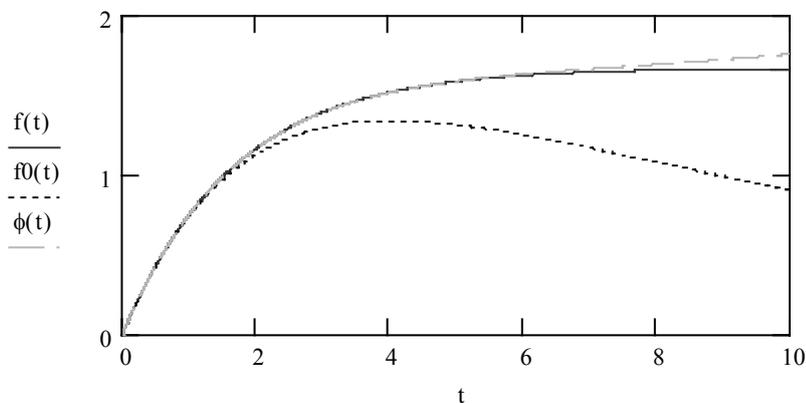


Рис. 1

Литература

1. Погорелов О.А. Приближенное обращение сложных изображений по Лапласу// Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія, № 3, 2005. – С. 178-182.

Получено 01.06.07