УДК 681.5

КЛАССИФИКАЦИЯ БЛОЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.П. Фельдман
Донецкий национальный технический университет

Стаття містить узагальнення результатів досліджень, присвячених паралельним методам чисельного розв'язання задачі Коші для систем звичайних диференційних рівнянь. У ній пропонується класифікація блокових різницевих методів для розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь, приводиться доказ стійкості паралельних блокових методів.

В статье рассматриваются параллельные блочные или многоточечные неявные методы решения жестких задач Коши, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с заданными начальными условиями:

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0 .$$

Блочные методы решения ОДУ особенно актуальны, поскольку хорошо согласуются с архитектурой параллельных вычислительных систем и не требуют вычисления значений в промежуточных точках. Методы обладают высокой устойчивостью, являются изначально параллельными, так как позволяют получать решение одновременно в нескольких точках сетки интегрирования.

Блочные, как и последовательные методы решения задачи Коши, разделяются на два класса: многошаговые и одношаговые. В свою очередь, каждый из этих классов содержит канонические, коллокационные методы, методы с контролем локальной погрешности, со второй производной.

Рассмотрим подробнее блочные многошаговые методы. Уравнения многошаговых разностных методов для блока из k точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах имеют вид [1]:

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=1-m}^{k} a_{i,j}u_{n,j} = \sum_{j=1-m}^{k} b_{i,j} f_{n,j} \ , i=\overline{1,k}, n=1,2. \tag{1}$$

Формулы (1) определяют m-шаговый k-точечный разностный метод. В нем множество точек $T_n^{(k)} = \{ t_{n,1}, t_{n,2}, ..., t_{n,k} \}$, в которых по формулам (1) определяются приближенные значения решения.

Множество $T_{n-1}^{(m)} = \{ t_{n,1-m}, t_{n,2-m}, ..., t_{n,0} \}$, содержит точки, приближенное значение решения в которых, было вычислено на предыдущем этапе. Обозначим матрицы коэффициентов: $B = (b_{i,j}), i = \overline{1,k}, j = \overline{-(m-1),k}$.

Разобьем каждую из матриц на две части:

$$A_1 = (a_{i,j}),\ B_1 = (b_{i,j}), i = \overline{1,k}, j = \overline{-(m-1),0},$$

$$A_2 = (a_{i,j}),\ B_2 = (b_{i,j}), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,k}$$

Введем соответствующие им вектора:

$$U_n = (u_{n,j}), j = \overline{1-m,0}, V_{n+1} = (u_{n+1,j}), n = 1,2,...,, j = \overline{1,k}.$$

$$F_n = (f_{n,j}), j = \overline{1-m,0}, F_{n+1} = (f_{n+1,j}), j = \overline{1,k}.$$

В векторной форме уравнение (1) будет иметь вид:

$$A_1 U_n + A_2 V_{n+1} = \tau(B_1 F_n + B_2 F_{n+1}) \qquad (2)$$

Чтобы система однородных разностных уравнений, соответствующая (2) была линейно независима, потребуем, чтобы матрица A_2 была невырожденной, и разрешим систему относительно V_{n+1}:

$$V_{n+1} = S U_n + \tau(\Phi F_n + \Psi F_{n+1}), \qquad (3)$$

где $S = -A_2^{-1} A_1, \Phi = A_2^{-1} B_1, \Psi = A_2^{-1} B_2$.

Задав стартовые значения, полученные, например, с помощью явных формул Рунге – Кутта: $U_0 = (u_{0,j}, j = \overline{0,m-1})$. Необходимо на каждом последующем этапе решить нелинейное уравнение (3), определив последовательно вектора $V_1, V_2, ...$.

Представление общих блочных разностных многошаговых многоточечных уравнений в виде (3) будем называть *канонической формой* их записи. Получим коэффициенты уравнений, позволяющие представлять общие многошаговые многоточечные методы (1) в канонической форме (3). Каждое i-ое разностное уравнение (4)

$$u_{n,i} = \sum_{j=1-m}^{0} s_{i,j} u_{n,j} + \tau\Big(\sum_{j=1-m}^{0} \varphi_{i,j} f_{n,j} + \sum_{j=1}^{k} \psi_{i,j} f_{n,j} \Big), i = \overline{1,k}. \qquad (4)$$

содержит $2m + k$ неизвестных коэффициентов $s_{i,j}, \varphi_{i,j}, j = \overline{1-m,0}$, $\psi_{i,j}, j = \overline{1,k}$. Для их определения следует использовать $2m + k$ уравнений условий аппроксимации. Выражения для невязок на решении *x(t)* исходного дифференциального уравнения имеют вид:

$$r_{n,i} = \frac{1}{\tau}\Big(-x_{n,i} + \sum_{j=1-m}^{0} s_{i,j} x_{n,j}\Big) + \sum_{j=1-m}^{0} \varphi_{i,j} x'_{n,j} + \sum_{j=1}^{k} \psi_{i,j} x'_{n,j}, i = \overline{1,k}, \qquad (5)$$

где

$$x_{n,j}=x(t_n+j\tau),x_{n-1,m}=x_{n,0},x'_{n,j}=x'(t_n+j\tau)=f(t_n+j\tau,x_{n,j}),$$
$$x'_{n-1,m}=x'_{n,0}.$$

Для i-го уравнения потребуем его аппроксимации в точке $t_{n,0}$:

$$x_{n,j}=x(t_{n,0}+j\tau),x'_{n,j}=x'(t_{n,0}+j\tau)=f(t_{n,0}+j\tau,x_{n,j}).$$

Разлагая $x(t_{n,0}\pm j\tau)$ и $x'(t_{n,0}\pm j\tau)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $t_{n,0}$, получим

$$x_{n,j}=x_{n,0}+\sum_{q=1}^{p}\frac{(j\tau)^q}{q!})x^{(q)}{}_{n,0},$$
$$x'_{n,j}=x^{(1)}_{n,0}+\sum_{q=2}^{p}\frac{(j\tau)^{q-1}}{(q-1)!}x^{(q)}{}_{n,0}+O(\tau^p),\ j=\overline{1-m,k}.$$

Подставляя эти разложения в выражение (5), будем иметь:

$$r_{n,i}=\frac{1}{\tau}[x_{n,0}(-1+\sum_{j=1-m}^{0}s_{i,j})+(-\frac{(i\tau)^q}{q!}+\sum_{j=1-m}^{0}s_{i,j}\sum_{q=1}^{p}\frac{(j\tau)^q}{q!})x^{(q)}{}_{n,0}+\ldots]+$$
$$+x^{(1)}_{n,.0}[\sum_{j=1-m}^{0}\phi_{i,j}+\sum_{j=1}^{k}\psi_{i,j}],$$
$$\sum_{\substack{j=1-m\\ j\neq 0}}^{0}\phi_{i,j}\sum_{q=2}^{p}\frac{(j\tau)^{q-1}}{(q-1)!}x^{(q)}{}_{n,0}+\sum_{j=1}^{k}b_{i,j}\sum_{q=2}^{p}\frac{(j\tau)^{q-1}}{(q-1)!}x^{(q)}{}_{n,0}+\ldots,i=\overline{1,k}.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями τ, тогда получим (6):

$$r_{n,i}=\frac{x_{n,0}}{\tau}(-1+\sum_{j=1-m}^{0}s_{i,j})+x^{(1)}_{n,0}[-i+\sum_{j=1-m}^{0}(js_{i,j}+\varphi_{i,j})+\sum_{j=1}^{k}\psi_{i,j}]+$$
$$+\sum_{q=2}^{p}\frac{\tau^{q-1}}{(q-1)!}[\sum_{j=1-m,}^{0}[s_{i,j}\frac{j^q}{q}+\varphi_{i,j}j^{q-1}]++\sum_{j=1}^{k}\psi_{i,j}j^{q-1}]x^{(q)}_{n,i-1},i=\overline{1,k}. \quad (6)$$

Приравняв нулю, коэффициенты при τ^q в разложении получим систему уравнений:

$$\sum_{j=1-m}^{0}s_{i,j}=1;\quad \sum_{j=1-m,}^{0}[js_{i,j}+\varphi_{i,j}]+\sum_{j=1}^{k}\psi_{i,j}=i,$$
$$\sum_{j=1-m,}^{0}\frac{s_{i,j}j^l}{l}+\sum_{l=1-m}^{0}\varphi_{i,j}j^{l-1}+\sum_{l=1}^{k}\psi_{i,j}j^{l-1}=\frac{i^l}{l},l=\overline{2,p},i=\overline{1,k}. \quad (7)$$

Поскольку каждое i-тое разностное уравнение (4) содержит $2m+k$ неизвестных коэффициентов, отсюда следует, что максимальный порядок аппроксимации рассматриваемого m-шагового k-точечного разностного метода равен: $p=2m+k$ [2-3].

Каноническая форма одношаговых многоточечных уравнений будет иметь соответственно вид:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau(\varphi_{i,0} f_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} \psi_{i,j} f_{n,j}). i = \overline{1,k}. \quad (8)$$

Рассмотрим частный вид многошаговых канонических $m > 1, k = 1,2,...$ блочных методов, определяемых следующей формулой:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau(\sum_{j=1-m}^{0} \varphi_{i,j} f_{n,j} + \sum_{j=1}^{k} \psi_{i,j} f_{n+1,j}). \quad (9)$$

Очевидно, что эти методы устойчивы по начальным данным и максимальный порядок их аппроксимации равен $p = m + k$. Определить коэффициенты разностных коллокационных уравнений можно по формулам (5), использовав их для частного случая формул вида (9) при $s_{i,0=1,}\ s_{i,j} = 0, i = \overline{1,k}, j = \overline{1-m,-1}$. Коэффициенты формул (9) можно также получить интегро-интерполяционным методом. Построим интерполяционный многочлен $L_{m+k-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующим им значениям правой части уравнения (1) $f_{n,j-m} = f(t_{n,j-m}, u_{n,j-m})$, $j = \overline{1,m+k}$. Проинтегрировав его в пределах $(t_{n,0}, t_{n,i})$, $i = \overline{1,k}$: $u_{n,i} = u_{n,0} + \int_{t_{n,0}}^{t_{n+i}} L_{m+k-1}(t)dt$, получим уравнения (9) для выбранных m и k.

Блочные методы дифференцирования, являются частным случаем общих многошаговых методов решения (1). Их также можно рассматривать как обобщение соответствующих последовательных методов ФДН Гира. Эти методы предложены Биккартом и рассмотрены в статье [4]. Уравнения многошаговых разностных методов типа Биккарта для блока из k точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах, можно записать в виде:

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=1-m}^{k} a_{i,j} u_{n,j} = f_{n,i}, i = \overline{1,k},, i = \overline{1,k}, n=1,2,\ldots \quad (10)$$

Определить коэффициенты разностных уравнений (10) можно, используя формулы (7) для общих многошаговых блочных методов учитывая их частный вид, или интегро-интерполяционным методом. Для этого построим интерполяционный многочлен $L_{m+k-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующим им значениям сеточной функции $u_{n,j}, j = \overline{1-m,k}$. Найдем производные полученного интерполяционного многочлена в узлах сетки $t_{n,i}\ i=\overline{1,k}$, приравняв их соответствующим значениям правой части дифференциального уравнения, получим разностные уравнения для блока. Наивысший порядок аппроксимации многошаговых разностных методов дифференцирования, рассматриваемых как частный вид общих многошаговых методов, равен $O(\tau^{m+k-1})$. Многошаговые блочные методы Биккарта записанные в виде (10) не являются каноническими. Однако эти методы могут быть преобразованы в каноническую форму.

Проведенный анализ существующих блочных разностных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений позволил систематизировать и ввести их классификацию. При этом были установлены совпадения между разностными уравнениями, представленными в различной форме и носящими разные названия. Введенная систематизация позволила облегчить анализ существующих блочных методов, используя общие подходы. Полученные результаты представляют возможность построения новых более эффективных блочных алгоритмов и их реализации на мультипроцессорных системах.

Литература

1. Feldman L.P., Dmitrieva O.A., Gerber S.. Abbildung der blockartigen Algorithmen auf Parallelrechnerarchitekture. In: Tavangarian,D., Grützner,R. (Hrsg.): Tagungs-band 15. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Rostock, September 2002, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium, 2002, S. 359-364.

2. Feldmann L.P. Implementierung und Effizienzanalyse von parallelen blockartigen Simulati onsalgorithmen für dynamische Systeme mit konzentrierten Parametern. In: Möller, D.P.F. (Hrsg.): Tagungsband 14. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Hamburg, September 2000, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium 2000, S. 241-246.

3. Фельдман Л.П., Дмитриева. О.А. Разработка и обоснование параллельных блочных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD–структурах // Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: ПМ и АПДС, выпуск 29:- Донецк: ДонГТУ, 2001, С. 70-79.

4. Bickart T.A., Picel Zd. High order stiffly stable composite multistep methods for numerical integration of stiff differential equations, bit 13 (1973), P. 272-286.

Получено 26.05.09