

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
по дисциплине
«Теория и методы инженерного
эксперимента»»»
(для студентов горных специальностей)**

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры
охраны труда и аэрологии.
Протокол № 2 от 3.10.2016 г.

УТВЕЖДЕНО
на заседании
учебно-издательского сонета
ДОННТУ
Протокол № 6 от 15.12.2016 г.

Донецк
2016

ББК 65в6

Методические рекомендации и задания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Теория и методы инженерного эксперимента» (для студентов горных специальностей всех форм обучения)/ сост.: В.П. Овсянников – Донецк: ДОННТУ, 2016. – 12 с.

Приведены необходимые теоретические сведения контрольное задание и вопросы для самостоятельной работы студентов по курсу «Теория и методы инженерного эксперимента». Даны рекомендации и алгоритмы для выполнения контрольного задания. Детально описан ход выполнения работ на ПЭВМ.

Учебно-методические рекомендации могут быть использованы студентами горных специальностей всех форм обучения при подготовке и выполнении самостоятельных и контрольных работ.

Составитель: к.т.н., доц.. Овсянников В.П.

Рецензенты: к.т.н., доц. Кавера А.Л.
к.т.н., доц. Скаженик В.Б.

Ответственный за выпуск: д.т.н., проф. Булгаков Ю.Ф.

Ц Е Л Ь Р А Б О Т Ы

Изучение основных понятий, определений, принципов теории планирования экспериментов, приобретение навыков проведения экспериментов по построению математических моделей, ознакомление с методикой построения регрессионных моделей.

Основные понятия

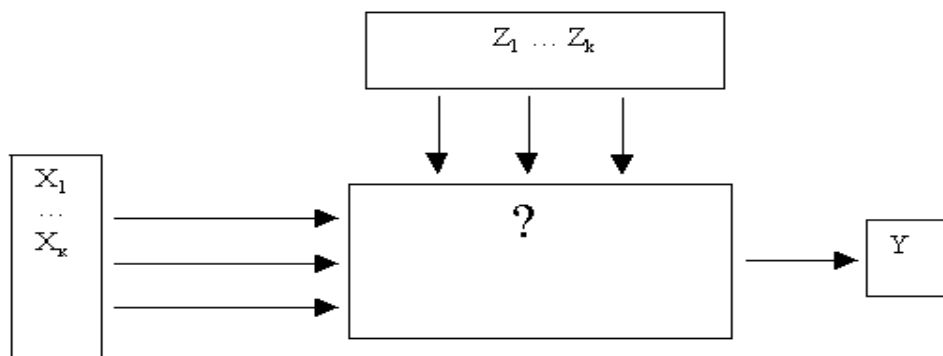
Эксперимент – метод научного исследования, когда исследователь активно и целенаправленно воздействует на объект исследования путем создания искусственных условий или использования естественных условий, необходимых для выявления конкретных свойств объекта.

Эксперименты делятся на пассивные и активные (управляемые). В пассивном эксперименте контролируемые (входные) параметры нельзя изменять, в активном – можно.

Планирование эксперимента – область знания, связанная с построением и оптимизацией математических моделей.

Объект исследования рассматривается как носитель некоторых неизвестных или подлежащих исследованию свойств и качеств – своеобразный «черный ящик». При этом вектор $X_1 \dots X_k$ представляет собой группу контролируемых и управляемых величин, которые могут изменяться определенным образом в ходе эксперимента, а $Z_1 \dots Z_k$ контролируемые характеристики. Характеристики ($X_1 \dots X_k$) также называют факторами или управляемыми воздействиями. Функция Y – функция отклика (поверхность отклика), представляет собой реакцию системы на воздействие факторов. Также можно выделить и третью, не обозначенную на идеальной модели систему входных сигналов – это шумы или помехи, которые обусловлены многими факторами: ошибками обслуживающего персонала, влиянием внешней среды, погрешностью приборов и т.д. К этой же группе относятся воздействия, которые не могут контролироваться либо из-за их сложности, либо из-за незнания их природы и невозможности контроля.

Характеристики объектов имеют различную физическую природу, а, следовательно, и размерность, что затрудняет построения модели. Поэтому на практике значения факторов, которые имеют реальный физический смысл, нормируют (приводят к определенному ранее заданному набору значений). Для любого фактора X существует нижний X_{\min} и верхний X_{\max} уровни изменения значений.



**Структурная схема объекта (процесса)
при проведении активного эксперимента**

Факторное пространство

Приведем алгоритм нормировки фактора:

- выбираем масштаб и положение осей координат таким образом, чтобы $X_{i \min}$ соответствовало -1 , а $X_{i \max}$ $+1$.

- вычисляем значение X_{i0} для данного фактора следующим образом

$$X_{i0} = \frac{X_{i \max} + X_{i \min}}{2}.$$

- вычисляем интервал изменения фактора $dx_i = X_{i0} - X_{i \min} = X_{i \max} - X_{i0}$.

- находим нормированное значение X_{in} для каждого фактора

$$X_{in} = \frac{X_i - X_{i0}}{dx_i}.$$

Зависимость реакции объекта от точки факторного пространства называется функцией отклика Y , а ее геометрическое представление $Y(x_1, x_2, \dots, x_i)$ – поверхностью отклика. Векторов значений функции отклика может быть столько, сколько опытов.

Проведение эксперимента

Эксперимент состоит из опытов (воспроизведение исследуемого явления). Под планированием эксперимента понимают выбор плана эксперимента – совокупности данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов. Каждый опыт эксперимента характеризуется

$$X_q = (X_{1q}, X_{2q}, X_{3q} \dots X_{nq})$$

определенным набором значений факторов.

Вектор, содержащий некоторый набор конкретных значений факторов X_i , определяет q -ю точку плана эксперимента. Совокупность векторов X_q ($q = 1, 2, \dots, n$) образует план эксперимента (матрица, содержащая k строк и n столбцов, каждая строка которой образует точку плана эксперимента, а столбец фактор эксперимента).

X_{11}	X_{21}	X_{31}	...	X_{N1}
X_{12}	X_{22}	X_{32}	...	X_{N2}
...
X_{1K}	X_{2K}	X_{3K}	...	X_{NK}

Совокупность всех точек плана, отличающихся уровнем хотя бы одного фактора (различных строк матрицы планирования), называется спектром плана. Матрица, получаемая из всех различных строк плана - матрица спектра плана. Она отличается от приведенной выше матрицы только числом строк (из-за отсутствия повторяющихся точек плана). При количестве точек спектра плана G , ее размерность будет составлять: G строк на N столбцов. Применяется также матрица дублирования, размерность которой совпадает с размерностью матрицы спектра плана. Она имеет вид:

K_1	0	0	...	0
0	K_2	0	...	0
...
0	0	0	...	K_g

Здесь K_j - число параллельных опытов в точке спектра плана с номером j ($j = 1, 2, \dots, N$). Т.е. это число характеризует дублирование соответствующей строки в матрице спектра плана.

Построение регрессионных моделей

Для описания объектов управления часто используются полиномиальные модели. При этом в качестве базисного выражения используется ряд Тейлора, имеющий конечное число членов.

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1!} F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} F^{(n)}(a)$$

Но при использовании аппроксимирующего полинома Тейлора в приведенном выше виде возникает ряд проблем, связанных с нахождением производных, так как неизвестна функция, а известен только ряд ее значений. Поэтому заменим полином Тейлора на аналогичное ему уравнение регрессии

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_{1i} X_i + \sum_{i,j=1}^k b_{1,ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k b_{1,i} X_i^2 + \sum_{i,j,n=1}^k b_{1,ijk} X_i X_j X_n + \dots$$

где k - число столбцов в матрице планирования. Построим линейную регрессионную модель. Для ее экспериментального получения используем план первого порядка (факторный эксперимент первого порядка).

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_{1i} X_i$$

Для k -факторного эксперимента достаточно $k+1$ опытов. При определении коэффициентов регрессии должны выполняться необходимые и достаточные условия:

Свойства полного факторного эксперимента

Матрица планирования ПФЭ обладает рядом свойств:

- 1) симметричность плана относительно центра эксперимента –

$$\sum_{i=1}^n x_{ji} = 0,$$

то есть сумма значений уровней любого фактора (столбца) равна 0 ;

- 2) нормировка плана –

$$\sum_{i=1}^n x_{ji}^2 = N,$$

сумма квадратов значений уровней любого фактора равна N (числу строк матрицы планирования ПФЭ);

- 3) ортогональность плана –

$$\sum_{i=1}^n x_{ji} \cdot x_{ui} = 0,$$

сумма по парным произведениям значений уровней любых 2 факторов (кроме $j=u$) равна 0;

- 4) рототабельность плана – точность предсказания значений функции отклика одинакова на равном расстоянии от центра и не зависит от направления обхода.

Свойства ортогональности и рототабельности взаимоисключающие.

Дробный факторный эксперимент

В некоторых случаях нет необходимости использовать полный факторный эксперимент. В таких случаях усекают количество строк матрицы ПФЭ до количества коэффициентов регрессионной модели. Это производится в случаях линейной регрессионной модели. Дробный факторный эксперимент удовлетворяет всем свойствам полного факторного эксперимента.

Определение коэффициентов уравнения регрессии

После проведения опытов во всех точках факторного пространства необходимо найти коэффициенты уравнения регрессии. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2 \rightarrow \min;$$

$$\hat{Y}_i = \varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k) - Y_i)^2, \text{ поскольку } \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = 0 \end{cases},$$

то после дифференцирования получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (\varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k) - Y_i) \frac{\partial \varphi}{\partial b_0} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = 2 \sum_{i=1}^n (\varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k) - Y_i) \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} = 0. \end{cases}$$

Для линейной регрессии при $k=2$:

$$Y_i = \varphi(X_{1i}, X_{2i}, b_0, b_1, b_2), Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i};$$

продифференцировав по коэффициентам, получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_0} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} = X_{1i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} = X_{2i}.$$

Запишем уравнения в полной форме:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} - Y_i) * 1 = 0, \\ \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} - Y_i) * X_{1i} = 0, \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} - Y_i) * X_{2i} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^n 1) b_0 + (\sum_{i=1}^n X_{1i}) b_1 + (\sum_{i=1}^n X_{2i}) b_2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \\ (\sum_{i=1}^n X_{1i}) b_0 + (\sum_{i=1}^n X_{1i}^2) b_1 + (\sum_{i=1}^n X_{2i} X_{1i}) b_2 = \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i, \\ (\sum_{i=1}^n X_{2i}) b_0 + (\sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i}) b_1 + (\sum_{i=1}^n X_{2i}^2) b_2 = \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i. \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^n 1 = n$, разделим каждое уравнение на n

$$\begin{cases} b_0 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i}\right) b_1 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i}\right) b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \\ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i}\right) b_0 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i}^2\right) b_1 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{1i}\right) b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i, \\ \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i}\right) b_0 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i}\right) b_1 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i}^2\right) b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i. \end{cases}$$

Отсюда, принимая в расчет свойства матрицы планирования, получим следующие формулы для вычисления коэффициентов

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \\ b_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i, \\ b_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i. \end{aligned}$$

П О Р Я Д О К П Р О В Е Д Е Н И Я Р А Б О Т Ы

1. Используя генератор случайных чисел, найти значения факторов в точках, а также функцию отклика. Определить нулевой уровень фактора, провести нормировку.
2. Составить матрицу планирования для полного трехфакторного эксперимента с использованием дополнительного нулевого фактора ($X_0=1$), и заполнить таблицу кодированными значениями X_1 , X_2 и X_3 .

	X_0	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$	$Y_{1,j}$	$Y_{2,j}$	$Y_{3,j}$	Y_j
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												

3. Составить матрицу планирования для дробного трехфакторного эксперимента, пренебрегая взаимодействием факторов.
4. Провести эксперимент во всех точках ДФЭ (найти значения функции отклика Y). Для каждой точки плана провести по три

эксперимента, значения функции отклика брать из таблицы 1 в соответствии с вариантом.

5. Получаем коэффициенты регрессии после упрощения системы уравнений b_0, b_1, b_2, b_3 . Уравнение регрессии будет иметь вид

$$Y = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 ; (X_0=1).$$

6. Полученное в кодированном виде уравнение регрессии преобразовать в натуральный, используя значения интервалов варьирования.

Вариант 1					Вариант 12				
3,004	3,031	3,035	3,039	3,001	2,788	2,823	2,815	2,777	2,773
5,193	5,152	5,177	5,209	5,151	4,491	4,467	4,492	4,473	4,460
3,927	3,950	3,936	3,898	3,897	3,485	3,510	3,515	3,524	3,475
7,141	7,099	7,111	7,138	7,097	5,883	5,879	5,863	5,870	5,877
Вариант 2					Вариант 13				
3,651	3,605	3,653	3,592	3,627	2,132	2,114	2,160	2,146	2,120
6,547	6,514	6,535	6,562	6,581	3,373	3,324	3,377	3,327	3,385
4,761	4,793	4,816	4,792	4,801	3,978	3,928	3,905	3,948	3,904
9,515	9,566	9,534	9,552	9,528	6,898	6,908	6,887	6,940	6,904
Вариант 3					Вариант 14				
2,124	2,150	2,139	2,140	2,157	2,567	2,587	2,585	2,527	2,583
3,382	3,394	3,368	3,374	3,372	4,148	4,183	4,155	4,144	4,169
2,705	2,652	2,655	2,674	2,713	4,998	4,949	4,950	4,947	4,968
4,307	4,242	4,276	4,317	4,255	9,758	9,689	9,701	9,711	9,686
Вариант 4					Вариант 15				
2,588	2,597	2,542	2,537	2,539	3,073	3,033	3,062	3,065	3,029
4,191	4,165	4,152	4,129	4,138	5,191	5,186	5,221	5,156	5,198
3,201	3,231	3,202	3,199	3,248	3,884	3,932	3,929	3,914	3,899
5,509	5,453	5,448	5,511	5,445	14,701	14,690	14,734	14,754	14,674
Вариант 5					Вариант 16				
3,072	3,028	3,080	3,049	3,069	8,346	8,241	8,242	8,247	8,244
5,193	5,159	5,163	5,220	5,168	17,731	17,736	17,781	17,709	17,863
3,932	3,955	3,893	3,915	3,939	14,306	14,165	14,262	14,254	14,173
7,094	7,126	7,149	7,102	7,158	22,574	22,715	22,599	22,579	22,569
Вариант 6					Вариант 17				
4,292	4,285	4,333	4,304	4,277	8,439	7,904	8,440	8,473	7,916
8,385	8,390	8,404	8,421	8,390	10,523	10,650	10,778	10,273	10,631
5,881	5,886	5,847	5,900	5,909	9,401	9,168	9,534	9,249	9,306
13,349	13,332	13,357	13,342	13,356	14,120	14,376	14,486	14,175	13,952
Вариант 7					Вариант 18				
4,307	4,284	4,284	4,316	4,286	7,939	7,903	7,980	7,619	7,750
8,387	8,396	8,430	8,389	8,404	12,365	12,356	12,004	12,037	12,409
5,832	5,873	5,856	5,843	5,862	14,245	14,808	14,494	14,786	14,449
13,329	13,304	13,328	13,340	13,312	26,177	26,630	26,707	26,237	26,481
Вариант 8					Вариант 19				
3,583	3,605	3,623	3,623	3,587	3,759	3,709	3,745	3,768	3,740
6,555	6,564	6,523	6,559	6,511	4,828	4,801	4,845	4,845	4,845
4,795	4,790	4,776	4,798	4,744	4,243	4,253	4,242	4,300	4,275
9,504	9,530	9,524	9,557	9,530	6,612	6,613	6,563	6,598	6,575
Вариант 9					Вариант 20				
3,054	3,032	3,024	3,046	3,019	2,872	2,904	2,841	2,888	2,896
5,147	5,170	5,178	5,190	5,177	4,125	4,147	4,105	4,153	4,152
3,926	3,895	3,937	3,931	3,915	3,810	3,779	3,755	3,803	3,759
7,117	7,121	7,101	7,130	7,091	4,532	4,477	4,472	4,505	4,513
Вариант 10					Вариант 21				
2,549	2,537	2,563	2,564	2,569	1,612	1,370	1,569	1,655	2,037
4,118	4,164	4,155	4,126	4,151	2,440	2,019	2,027	2,398	2,223
3,236	3,220	3,202	3,212	3,207	2,067	1,893	2,378	2,152	2,040
5,445	5,485	5,449	5,472	5,455	2,444	2,476	2,761	2,346	2,312
Вариант 11					Вариант 22				
2,164	2,165	2,145	2,150	2,163	8,952	8,889	9,235	9,122	9,222
3,347	3,338	3,322	3,318	3,358	12,258	12,452	12,044	12,152	12,392
3,950	3,932	3,908	3,935	3,901	10,323	10,376	10,268	10,647	10,452
6,855	6,870	6,875	6,872	6,907	14,357	14,050	14,109	14,339	14,421

СОДЕРЖАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Титульный лист, содержащий информацию о студенте (группа, фамилия, номер варианта);
2. Результаты подготовки (выбранные по варианту значения экспериментальных данных);
3. Основные теоретические положения (используемые формулы);
4. Результаты подготовки (матрица планирования в виде таблицы);
5. Результат выполнения работы;
6. Ответы на контрольные вопросы;
7. Выводы.

К О Н Т Р О Л Ь Н Ы Е В О П Р О С Ы

1. Что называется экспериментом?
2. Какие бывают эксперименты?
3. Что называется планированием эксперимента?
4. Что образует план эксперимента?
5. Что называется спектром плана?
6. Чем характеризуется объект исследования? Дайте определение факторному пространству.
7. Что такое регрессионные полиномы и где они применяются?
8. Перечислите условия, необходимые для определения коэффициентов регрессии.
9. Что называется полным факторным экспериментом?

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976.
2. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента: Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1983.
3. Налимов В.В. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971.
4. Планирование и организация измерительного эксперимента / Е.Т. Володарский, Б.Н. Малиновский, Ю.М. Туз.-К.: В.ш. Головное изд-во, 1987.