

ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ ЭВМ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ АКТИВНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Методы активного эксперимента занимают важное место в деятельности инженера. Их применение позволяет получать математические модели, описывающие свойства широкого класса объектов исследований.

При этом не возникает необходимость в оценке процессов, протекающих внутри объекта. Получение математической модели обеспечивается четким выполнением алгоритма исследований и надежным определением значений функции отклика объекта.

В этом случае задачей исследователя является реализация алгоритма активного эксперимента с помощью различных средств обработки данных.

Выполнение этой задачи позволяет реализовать все этапы работы с математической моделью эксперимента

Цель и задачи работы

Целью работы является ознакомление студентов с использованием вычислительной техники для обработки экспериментальных данных, полученных в результате проведения активного эксперимента при исследовании технологических процессов.

В ходе лабораторной работы студенты должны приобрести навыки использования вычислительной техники и специального программного обеспечения, а именно программных пакетов MathCad, Microsoft Excel, для обработки экспериментальных данных, полученных при проведении полного факторного эксперимента и при ортогональном планировании эксперимента.

При выполнении работы студенты должны научиться работать с полученными математическими моделями.

Перед студентами стоит задача изучения использования средств ЭВМ при проведении методов планирования активного эксперимента применительно к технологическим задачам.

Студенты должны освоить принципы составления матрицы планирования полного факторного эксперимента, проводить расчет коэффициентов регрессии, использовать статистические критерии для оценки однородности, нормальности экспериментальных данных, значимости коэффициентов и адекватности полученной математической модели, а также проводить ее оптимизацию с использованием программных средств.

Теоретическая часть

Планирование эксперимента - это оптимальное (наиболее эффективное) управление ходом эксперимента с целью получения максимально возможной информации на основе минимально допустимого количества опытных данных.

Под экспериментом будем понимать систему операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.

Эксперимент, в котором исследователь по своему усмотрению может изменять условия его проведения, называется активным экспериментом.

Эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются им, является пассивным .

Перед проведением планирования активного эксперимента необходимо собрать дополнительную информацию об исследуемом объекте.

Для получения дополнительной информации можно использовать результаты пассивного эксперимента, осуществлявшегося в предыдущих исследованиях или описанного в литературе.

Планирование эксперимента позволяет варьировать все факторы и получать одновременно оценки их влияния.

При этом важно учитывать следующее:

- стремление к минимизации числа опытов;
- одновременное варьирование всех переменных, определяющих процесс;
- выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

Активные эксперименты обладают следующими достоинствами:

- 1) результаты наблюдений y_1, y_2, \dots, y_n представляют собой независимые, нормально распределенные случайные величины;
- 2) дисперсии равны друг другу (выборочные оценки однородны);
- 3) независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_p измеряются с пренебрежимо малой погрешностью по сравнению с погрешностью в определении y ;
- 4) активный эксперимент лучше организован: оптимальное использование факторного пространства позволяет при минимальных затратах получить максимум информации об изучаемых явлениях.

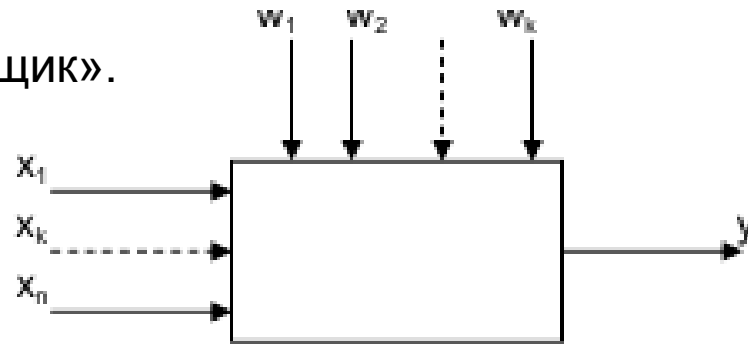
При планировании эксперимента удастся избежать корреляции между коэффициентами уравнения регрессии.

В случае статистического подхода математическая модель объекта или процесса представляется в виде полинома, т.е. отрезка ряда Тейлора, в который разлагается неизвестная функция

$$y(x_1, \dots, x_k) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq u}}^k b_{iju} x_i x_j x_u + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots$$

где b_0 - свободный член; b_i — линейные эффекты; b_{ij} — эффекты парного взаимодействия; b_{ii} — квадратичные эффекты; b_{iju} — эффекты тройного взаимодействия.

Система «Черный ящик».



Объект исследования можно представить в виде системы «черный ящик» (рис.).

Суть системы «черный ящик» состоит в изучении зависимости отклика системы Y на изменение входных измеряемых и управляемых параметров $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при действии случайных факторов $W(w_1, w_2, \dots, w_k)$, которые называют «шумом» объекта.

Комплекс параметров X называют основным, он определяет условия эксперимента.

Выходным параметром Y может являться любые технологические или технические показатели исследуемого процесса.

Случайным будет считаться любой фактор, не вошедший в основной комплекс входных параметров

Полный факторный эксперимент

При полном факторном эксперименте полученное уравнение регрессии принимает вид полинома первой степени

$$y(x_1, \dots, x_k) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq \dots \neq n}}^k b_{ijn} x_i x_j \dots x_n$$

Уровни факторов для ПФЭ представляют собой границы исследуемой области по выбранному параметру (минимальное и максимальное значение фактора).

Зная максимальное z_{\max}^i и минимальное z_{\min}^i значения технологического параметра (фактора) можно определить координаты центра плана, так называемый основной уровень z_i^0 , а также интервал (шаг) варьирования Δz_i :

$$z_i^0 = \frac{z_i^{\max} + z_i^{\min}}{2}, \quad \Delta z_i = \frac{z_i^{\max} - z_i^{\min}}{2} \quad \text{где } i=1, 2, 3, \dots, k,$$

где k – число факторов.

От систем координат z_1, \dots, z_k необходимо перейти к новой безразмерной системе координат x_1, \dots, x_k с помощью линейного преобразования:

$$x_i = \frac{z_i - z_i^0}{\Delta z_i}, \quad \text{где } i=1, 2, 3, \dots, k.$$

При планировании по схеме полного факторного эксперимента (ПФЭ) реализуются все возможные комбинации факторов на всех выбранных для исследования уровнях.

Количество опытов N при ПФЭ определяется по формуле:
 $N=n^k$, где n - количество уровней.

В таблице представлена расширенная матрица планирования для двухфакторного полнофакторного эксперимента с использованием безразмерной системой координат.

Любой коэффициент уравнения регрессии b_j определяется скалярным произведением столбца y на соответствующий столбец x_j , отнесенным к числу опытов в матрице планирования N :

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij} y_j$$

Расширенная матрица планирования полного факторного эксперимента 2^2

Номер опыта	x0	x1	x2	x1x2	y
1	2	3	4	6	10
1	1	-1	-1	1	y1
2	1	1	-1	-1	y2
3	1	-1	1	-1	y3
4	1	1	1	1	y4

Расширенная матрица планирования полного факторного эксперимента 2²

Номер опыта	x0	x1	x2	x1x2	y
1	2	3	4	6	10
1	1	-1	-1	1	y1
2	1	1	-1	-1	y2
3	1	-1	1	-1	y3
4	1	1	1	1	y4

Для изучения зависимости соотношения между теплотой сгорания угля от зольности и содержания серы был проведен полный факторный эксперимент 2².

Каждый опыт повторялся два раза. Определить уравнение регрессии в безразмерном масштабе.

1.Ввод начальных данных — минимальные и максимальные значения входящих параметров, в данном случае — зольности (z1) и содержания серы (z2), вычисление основного уровня (z0) и интервала варьирования (Δz). (рис.)

	A	B	C	D	E
1	Вычисление основного уровня				
2					
3	Z1 max	80	Z1-0	50	(B3+B4)/2
4	Z1 min	20	$\Delta z1$	30	B3-D3
5	Z2 max	11,34	Z2-0	10,545	
6	Z2 min	9,75	$\Delta z2$	0,795	
7					
8					

- Расчет основного уровня и интервала варьирования.

Составление матрицы планирования ПФЭ.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Вычисление основного уровня									
2										
3	Z1 max	80	Z1-0	50	(B3+B4)/2					
4	Z1 min	20	$\Delta z1$	30	B3-D3					
5	Z2 max	11,34	Z2-0	10,545						
6	Z2 min	9,75	$\Delta z2$	0,795						
7										
8										
9	Факторы в натуральном масштабе		факторы в безразмерной системе координат			Выходной параметр				
10	Номер									
11	опыта	z1	z2	x0	x1	x2	y1	y2	уср	
12	1	80	11,34	0	1	1	86,1	82,2	84,15	
13	2	20	9,75	0	-1	-1	60,6	62,5	61,55	
14	3	80	9,75	0	1	-1	71,8	73,9	72,85	
15	4	20	11,34	0	-1	1	83,7	81,9	82,8	

Составление матрицы планирования ПФЭ

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Вычисление основного уровня									
2										
3	Z1 max	80	Z1-0	50	(B3+B4)/2					
4	Z1 min	20	Δz1	30	B3-D3					
5	Z2 max	11,34	Z2-0	10,545						
6	Z2 min	9,75	Δz2	0,795						
7										
8										
9	Номер опыта	Факторы в натуральном масштабе		факторы в безразмерной системе координат			Выходной параметр			
10		z1	z2	x0	x1	x2	y1	y2	уср	
11	1	80	11,34	0	1	1	86,1	82,2	84,15	
12	2	20	9,75	0	-1	-1	60,6	62,5	61,55	
13	3	80	9,75	0	1	-1	71,8	73,9	72,85	
14	4	20	11,34	0	-1	1	83,7	81,9	82,8	
15										
16										
17	Номер опыта									
18										
19		x1	x2	x1x2	уср	x1*уср	x2*уср	x1x2уср		
20	1	1	1	1	84,15	84,15	84,15	84,15		
21	2	-1	-1	1	61,55	-61,55	-61,55	61,55		
22	3	1	-1	-1	72,85	72,85	-72,85	-72,85		
23	4	-1	1	-1	82,8	-82,8	82,8	-82,8		
24	Σ				301,35	12,65	32,55	-9,95		
25	Вычисление коэффициентов регрессии для ПФЭ.									
26	b0	75,3375								
27	b1	3,1625								
28	b2	8,1375								
29	b12	-2,4875								
30										
31										

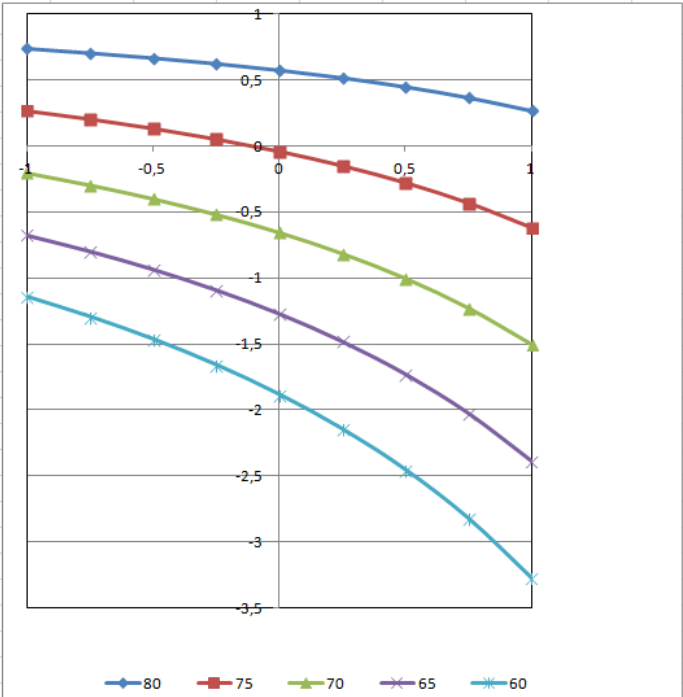
$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij} y_j$$

После того как получено уравнение регрессии, построим линии равного уровня. Для этого выразим x_2 через значения x_1 :

$$x_2 = (y - b_0 - b_1 \cdot x_1) / (b_2 + b_{12} \cdot x_1) /$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
7																							
8																							
9																							
10	Номер	Факторы в натуральном масштабе		факторы в безразмерной системе координат			Выходной параметр																
11	опыта	z1	z2	x0	x1	x2	y1	y2	уср														
12	1	80	11,34	0	1	1	86,1	82,2	84,15														
13	2	20	9,75	0	-1	-1	60,6	62,5	61,55														
14	3	80	9,75	0	1	-1	71,8	73,9	72,85														
15	4	20	11,34	0	-1	1	83,7	81,9	82,8														
16																							
17																							
18	Номер																						
19	опыта	x1	x2	x1x2	уср	x1*уср	x2*уср	x1x2уср															
20	1	1	1	1	84,15	84,15	84,15	84,15															
21	2	-1	-1	1	61,55	-61,55	-61,55	61,55															
22	3	1	-1	-1	72,85	72,85	-72,85	-72,85															
23	4	-1	1	-1	82,8	-82,8	82,8	-82,8															
24	Σ				301,35	12,65	32,55	-9,95															
25	Вычисление коэффициентов регрессии для ПФЭ.						80	75	70	65	60												
26	b0	75,3375					-1	0,736471	0,265882	-0,20471	-0,67529	-1,14588											
27	b1	3,1625					-0,75	0,703218	0,203374	-0,29647	-0,79631	-1,29616											
28	b2	8,1375					-0,5	0,665556	0,132578	-0,4004	-0,93338	-1,46636											
29	b12	-2,4875					-0,25	0,622547	0,05173	-0,51909	-1,0899	-1,66072											
30							0	0,572965	-0,04147	-0,65591	-1,27035	-1,88479											
31							0,25	0,515177	-0,1501	-0,81538	-1,48067	-2,14595											
32							0,5	0,446963	-0,27833	-1,00363	-1,72892	-2,45422											
33							0,75	0,365222	-0,43199	-1,2292	-2,02641	-2,82362											
34							1	0,265487	-0,61947	-1,50442	-2,38938	-3,27434											
35																							
36																							
37																							
38																							
39																							
40																							
41																							

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij} y_j$$



Ортогональное планирование

При описании области, близкой к экстремуму, чаще других применяют полиномы второго порядка, что связано в первую очередь с тем, что полиномы второго порядка легко поддаются систематизации и исследованию на экстремум.

При этом число опытов N должно быть не меньше числа определяемых коэффициентов в уравнении регрессии второго порядка для k факторов:

$$y(x_1, \dots, x_k) = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2.$$

Для описания поверхности отклика полиномами второго порядка независимые факторы должны принимать не менее трех разных значений.

С целью сокращения числа опытов используют композиционные (последовательные) планы.

Композиционный план состоит из экспериментов ПФЭ 2^k ($k \leq 5$), к которым добавляют эксперимент в центре плана и в $2k$ звездных точках, расположенных на осях фиктивного пространства, координаты которых: $(\pm\alpha, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm\alpha, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, \pm\alpha)$, где α - расстояние от центра плана до звездной точки – «звездного плеча».

Общее количество опытов рассчитывается по формуле :

$$N = N_0 + 2k + n_0,$$

где n_0 - количество опытов в центре плана, k – число факторов, N_0 – число опытов полного факторного эксперимента 2^k .

Композиционные планы легко приводятся к ортогональным выбором звездного плеча α . Длина «звездного плеча» α рассчитывается по формуле:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{N_0 N} - N_0}{2}}$$

Значение «звездного плеча» зависит от числа полных повторений эксперимента в центре плана (N=9).

Композиционный план второго порядка для двух факторов

Номер опыта	Факторы в натуральном масштабе		Факторы в условных единицах		y
	Z ₁	Z ₂	X ₁	X ₂	
1	min Z ₁	min Z ₂	-1	-1	Y ₁
2	max z ₁	min Z ₂	+1	-1	Y ₂
3	min z ₁	max Z ₂	-1	+ 1	Y ₃
4	max z ₁	max Z ₂	+1	+ 1	Y ₄
5	0 z ₁	0 Z ₂	0	0	Y ₅
6	+ α z ₁	0 Z ₂	+1	0	Y ₆
7	- α z ₁	0 Z ₂	-1	0	Y ₇
8	0 z ₁	+ α Z ₂	0	+1	Y ₈
9	0 Z ₁	- α Z ₂	0	-1	Y ₉

В таблице представлен композиционный план второго порядка для двух факторов.

Для того, чтобы матрица планирования обладала свойством ортогональности, необходимо ввести столбцы с скорректированными значениями уровня x' , которые вычисляются по формуле :

$$\left(x_i'\right)^2 = x_i^2 - \frac{\sum x_i^2}{N}$$

Матрица расчетов коэффициентов уравнения представлена в таблице, в которой столбцы 2-7 представляют собой ортогональную матрицу планирования, столбец 8 – значения отклика системы; первые четыре опыта – это матрица полного факторного эксперимента 2².

Экспериментальные данные должны быть однородными и нормально распределенными.

В соответствии с данными таблицы рассчитывают коэффициенты уравнения регрессии. Величины коэффициентов уравнения регрессии характеризуют вклад каждого фактора в значение функции отклика.

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_1x_2	y
1	2	3	4	5	6	7	8
1	+1	-1	-1	+0,33	+0,33	+1	y_1
2	+1	+1	-1	+0,33	+0,33	-1	y_2
3	+1	-1	+1	+0,33	+0,33	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+0,33	+0,33	+1	y_4
5	+1	0	0	-0,67	-0,67	0	y_5
6	+1	+1	0	+0,33	-0,67	0	y_6
7	+1	-1	0	+0,33	-0,67	0	y_7
8	+1	0	+1	-0,67	+0,33	0	y_8
9	+1	0	-1	-0,67	+0,33	0	y_9
X	9	6	6	2	2	4	

Коэффициенты рассчитываются по следующим формулам

$$b_1 = \frac{\sum (x_1 y)}{6}$$
$$b_2 = \frac{\sum (x_2 y)}{6}$$
$$b_{11} = \frac{\sum ((x_1')^2 y)}{2}$$
$$b_{22} = \frac{\sum ((x_2')^2 y)}{2}$$

$$b_{12} = \frac{\sum (x_1 x_2 y)}{4}$$
$$b_0 = \frac{\sum (x_0 y)}{9} - 0,67b_{11} - 0,67b_{22}$$

Пример расчета активного эксперимента при ортогональном планировании с помощью MathCad.

M1 :=

20	■	■	■
80	■	■	■
20	■	■	■
80	■	■	■
50	■	■	■
80	■	■	■
20	■	■	■
50	■	■	■
50	■	■	■

[Ctrl + 6]

$x1 := M1^{\langle 3 \rangle}$ $x2 := M1^{\langle 4 \rangle}$

$$\left(x_i'\right)^2 = x_i^2 - \frac{\sum x_i^2}{N}$$

$$N = 9$$

$$x1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X1_i := x1^2 - \frac{\sum_{i=1}^N \left[\left[\begin{matrix} j := 1 \\ (x1)^2 \end{matrix} \right]_i \right]}{N}$$

$$X2_i := x2^2 - \frac{\sum_{i=1}^N \left[\left[\begin{matrix} j := 1 \\ (x2)^2 \end{matrix} \right]_i \right]}{N}$$

$$aa1 := (x1^2) \quad aa2 := (x2^2)$$

$$aa3 := X1_i^2 \quad aa4 := X2_i^2$$

$$b1 := \frac{\sum_{i=1}^N (x1_i Y_i)}{\sum_{k=1}^N aa1_k}$$

$$b2 := \frac{\sum_{i=1}^N (x2_i Y_i)}{\sum_{k=1}^N aa2_k}$$

$$b11 := \frac{\sum_{i=1}^N (X1_i Y_i)}{\sum_{k=1}^N aa3_k}$$

$$b22 := \frac{\sum_{i=1}^N (X2_i Y_i)}{\sum_{k=1}^N aa4_k}$$

$b1 = -1.055$ $b2 = 4.322$ $b11 = -0.102$ $b22 = 0.048$

$$b0 := \frac{\sum_{i=1}^N ((Y_i))}{N} - 0.67b11 - 0.67b22$$

$$b12 := \frac{\sum_{i=1}^N (x1_i x2_i Y_i)}{\left[\sum_{k=1}^N (aa3_k) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^N (aa4_k) \right]}$$

$b0 = 75.408$ $b12 = 8.138$