

## **Факторы и требования к ним**

После того, как выбран объект исследования и определен параметр оптимизации, необходимо определиться с величинами, которые могут влиять на процесс.

В «Планировании и организации эксперимента» эти величины называются факторами. Упущенный существенный фактор ведет к абсолютно неправильным прогнозам и модели эксперимента, а лишний несущественный фактор только добавит хлопот при исследовании модели.

Обычно рекомендуется использовать при планировании не более 15 факторов, если же их больше – выбирать наиболее значимые, оставляя менее значительные факторы в стороне.

**Фактор – измеряемая величина, описывающая влияние на объект исследования.  
Каждое значение, принимаемое фактором, называется уровнем фактора.**

Так же как и параметр оптимизации, каждый фактор имеет область определения – совокупность всех значений, которые может принимать данный фактор.

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений.

Фиксированный набор уровней нескольких факторов, т.е. их определенных фиксированных значений, будет определять какие-то конкретные условия проведения эксперимента.

При изменении хотя бы одного из факторов в таком наборе приведет к изменению и условий и, как следствие, к изменению значения параметра оптимизации.

Для иллюстрации вернемся к примеру с кипящей водой, описанному в предыдущем параграфе.

В рассмотренном примере используются два фактора – температура и давление, каждый из которых принимает определенные значения, т.е. принимает определенные уровни.

Например, для давления – нормальное давление (760 мм рт. ст.), повышенное давление (скажем, 900 мм рт. ст.), пониженное давление (700 мм рт. ст.); для температуры – 50, 100, 1000 °C. Задавая те или иные значения температуры и давления, мы получим, что в одних случаях вода испариться почти мгновенно, в других – лишь слегка нагреется, в третьих – она закипит.

Таким образом, меняя комбинации давления и температуры, говоря научным языком используя разные комбинации уровней двух факторов, мы определяем новые условия для проведения эксперимента и в то же время получаем другой результат.

Если перебрать все возможные наборы состояний, мы получим полное число возможных различных опытов. При этом число различных состояний системы определяет ее сложность.

Если обозначить число факторов, оказывающих влияние на эксперимент, как  $k$ , а число уровней, принимаемых каждым из факторов, буквой  $m$ , то число возможных состояний системы, т.е. число всех возможных опытов, определяется формулой:

$$N = m^k.$$

Факторы бывают двух типов:

количественные — их можно оценивать количественно: измерять, взвешивать, титровать и т.п.;

качественные — количественно данный фактор задать не удастся. Это разные вещества, технологические способы и т.п.

Требования, предъявляемые к факторам.

## **Требование №1.**

Факторы должны быть управляемыми, т.е. экспериментатор должен иметь возможность, выбрав нужное значение фактора, поддерживать его постоянным на протяжении всего эксперимента.

Например, температура конфорки, на которую поставили подогревать воду – управляемая величина, мы можем ее величину менять самостоятельно и поддерживать постоянной сколько нам угодно; температура в комнате, где проходит эксперимент – неуправляемая величина, т.к. способов воздействовать на нее у нас практически нет и поддерживать ее на том или ином уровне для экспериментатора проблематично.

В этом случае, при планировании эксперимента по нагреву воды мы в качестве фактора можем учитывать лишь первую температуру. Второй же показатель мы можем лишь принять во внимание.

## **Требование №2.**

Для того, чтобы переключить регулятор температуры на конфорке, каждый из нас предпринимает определенную последовательность действий, и мы можем ее точно описать (подойти к конфорке, повернуть регулятор и т.д.).

А попробуйте маленькому ребенку лет трех-четырех просто сказать:

- Включи чайник!

Если он делает это впервые, он просто-напросто вас не поймет. Во втором случае мы имеем дело с нарушением принципа операциональности.

## **Требование №3.**

Точность замера фактора должна быть как можно выше. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов.

#### **Требование №4.**

Факторы должны быть однозначны, т.е. непосредственно влиять на объект исследования. Трудно изменять фактор, который является функцией других факторов.

Например, в качестве влияющего фактора мы бы очень не рекомендовали использовать женское настроение, поскольку трудно понять, что именно влияет на него в ту или иную минуту.

А даже если и поймете, то в этом случае в качестве фактора лучше выбрать именно то, что влияет, дабы регулировать это настроение.



При планировании эксперимента редко рассматривается один фактор, обычно берется в рассмотрение сразу несколько факторов.

Поэтому возникает необходимость формулировать требования, предъявляемые к совокупности факторов.

## Требование №1.

Прежде всего, факторы должны быть совместимы.

Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны.

Несовместимость факторов может наблюдаться на границах областей их определения.

Избавиться от несовместимости можно, если в каждой области брать подобласть несколько меньшего размера. Положение усложняется, если несовместимость наблюдается внутри областей определения факторов. В этом случае приходится производить разбиение областей определения на несколько подобластей, «вырезая» кусок несовместимости, и ставить несколько планов экспериментов.

## Требование №2.

При планировании также важна независимость факторов, т.е. возможность установления факторов на каком-либо уровне вне зависимости от значений уровней других факторов.

Иначе это требование называют требованием отсутствия корреляции между факторами.

Если между факторами наблюдается зависимость среднего или высокого уровня, один из двух факторов не принимают в рассмотрение.

Нередко при построении модели приходится принимать решение о выборе самого объекта, а именно, какие его характеристики и поведенческие функции следует учитывать, а какие – не вписываются в рамки поставленной задачи.

В планировании эксперимента любого исследователя, прежде всего, интересует как поведет себя система, если на нее подействовать определенным образом. При этом ни одного из экспериментаторов абсолютно не интересует, что при этом «чувствует» сама система.

Модели подобного рода, когда рассматривается только влияние на объект и его ответ на это влияние без учета внутренних процессов объекта, часто представляются так называемым черным ящиком.

При этом, воздействие на систему интерпретируется как входы черного ящика, а ответ системы на влияние – его выход, рисунок

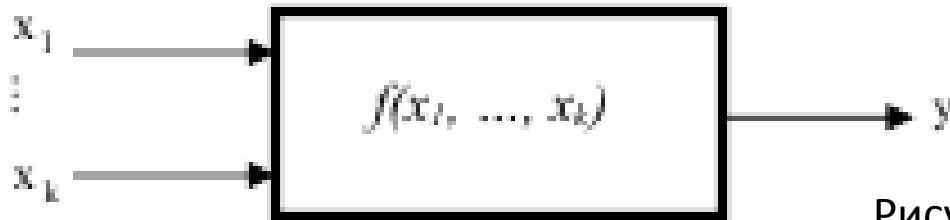


Рисунок Модель объекта исследования в виде черного ящика,  
(  $x_1 x_k$  – факторы, действующие на объект,  $y$  – отклик системы)

В изучаемой нами теории под моделью также часто понимают модель черного ящика, в которой используется функция, устанавливающая зависимость между параметром оптимизации и факторами, рисунок 1.1:

$$Y=f(x_1,x_2, \dots, x_k ).$$

Данная функция носит название функции отклика.

С этих позиций, выбрать модель – значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение.

Тогда только останется провести эксперимент по вычислению численных коэффициентов данной модели.

Иногда вместо алгебраической формы, т.е. уравнения, функцию отклика удается представить в геометрической форме.

В этом случае речь заходит о поверхности отклика.

Поиск решения в геометрической форме намного более нагляден, чем в виде уравнения. Однако, если число фактора больше двух, построение функции отклика невозможно, и приходится ограничиваться только алгебраической формой.

Остановимся на поверхности отклика подробнее. Для удобства рассмотрения представим систему, на которую влияют два фактора –  $x_1$  и  $x_2$ .

Для того чтобы отобразить модель, достаточно располагать плоскостью с обычной Декартовой системой координат, по осям которых располагаются уровни каждого из факторов. Тогда каждому состоянию системы, т.е. «ящика» будет соответствовать точка на плоскости.

Так как для каждого из факторов существуют области определения, у каждого фактора есть максимальное и минимальное возможные значения, между которыми и изменяется тот или иной фактор.

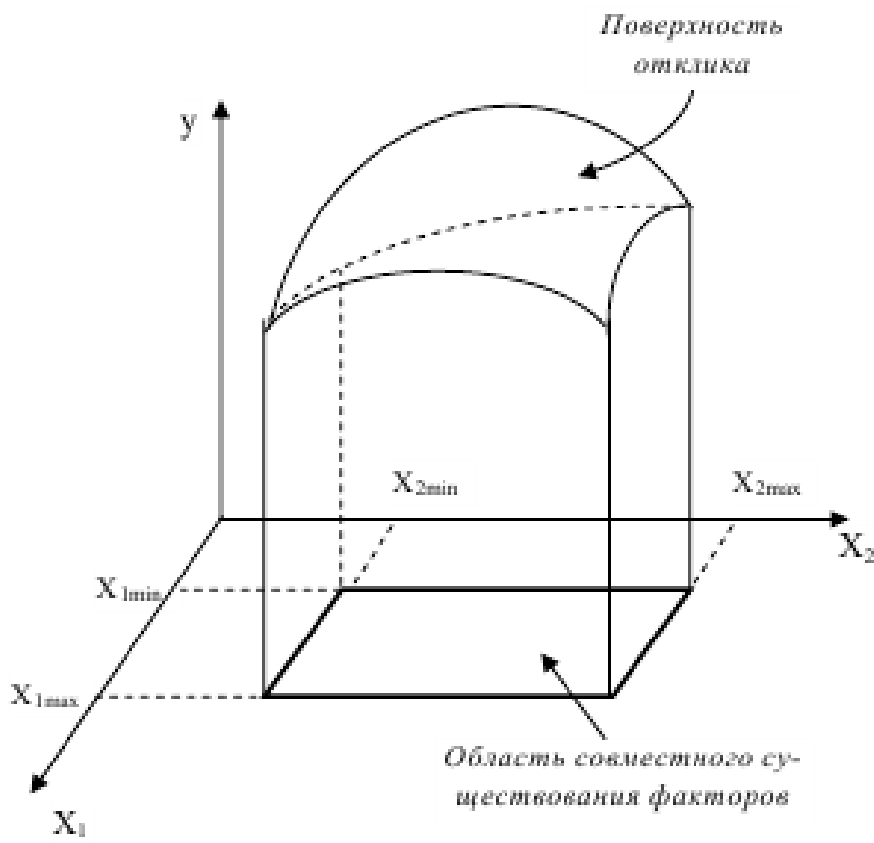
Если факторы совместимы, границы их областей определения образуют на плоскости некоторый прямоугольник – область совместного существования факторов, рисунок



Рисунок . Пример факторного пространства

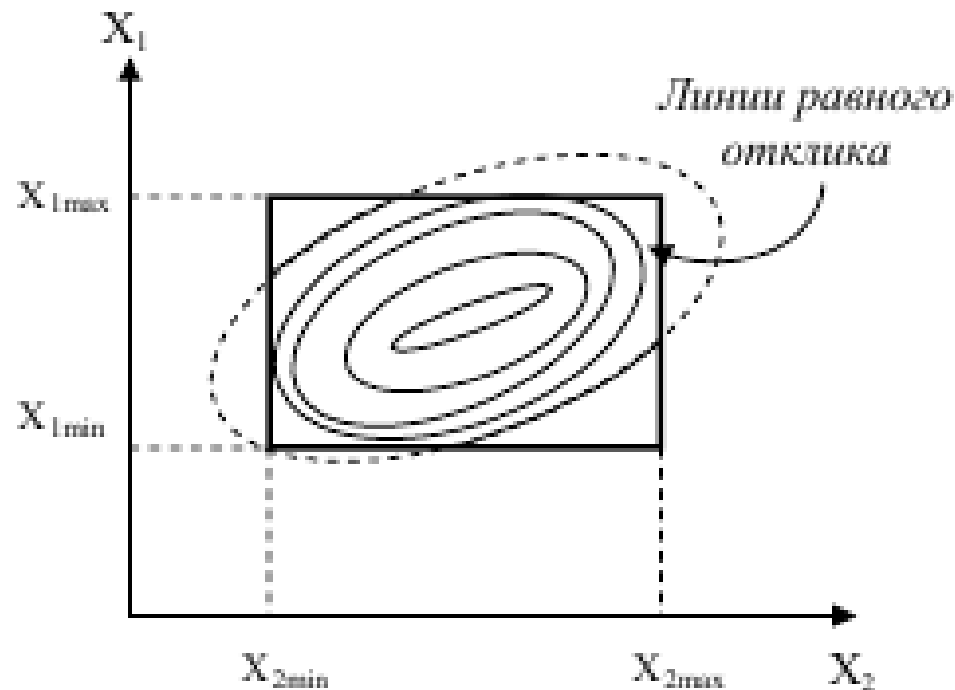
Пространство, образованное осями факторов (иногда осями факторов и осью параметра оптимизации), называется факторным пространством.

Чтобы указать значения параметра оптимизации требуется еще одна ось координат – **ось отклика**. Если ее добавить, графическая модель эксперимента примет вид, представленный на рисунке. Объект подобного вида носит название поверхности отклика.





Но для двух факторов можно даже не переходить к трехмерному пространству, а ограничиться плоскостью. Для этого достаточно произвести сечение поверхности отклика плоскостями, параллельными плоскости  $x_1Ox_2$ , и полученные в сечениях линии спроектировать на эту плоскость, рисунок .



Каждая линия, полученная в результате сечения, соответствует постоянному значению параметра оптимизации. Такая линия называется линией равного отклика.

Как же найти те оптимальные условия эксперимента, которые нас интересуют?

Причем было бы неплохо, чтобы этот поиск не требовал особых затрат.

В этом случае мы прибегаем к математической модели эксперимента, с помощью которой можно предсказывать отклик системы в тех состояниях, которые экспериментально не изучались.

В этом случае появляется возможность прогнозирования результатов эксперимента в точках, являющихся оптимальными в рамках поставленной задачи. И здесь мы переходим к пошаговому принципу.

Однако, прежде, чем приступать к моделированию, необходимо определиться с основными требованиями к поверхности отклика, на основе которой мы и собираемся делать прогнозы.

## **Требование №1.**

Непрерывность поверхности – если к какой-либо точке факторного пространства функция отклика терпит разрыв, нет никакой гарантии, что при реальном осуществлении эксперимента данное состояние либо вообще невозможно, либо приведет к фатальным последствиям.

При выборе большого шага перебора уровней факторов можно просто не заметить этот разрыв, «перешагнув» через него, однако вероятность попадания в эту критическую область на практике довольно-таки велика, и результат будет самым непредсказуемым.

## **Требование №2.**

Гладкость поверхности отклика (соображения те же, что и в предыдущем пункте).

### **Требование №3.**

Наличие единственного оптимума.

Данное требование, пожалуй, одно из самых важных.

При планировании эксперимента поиск оптимума может вестись в разных направлениях – и вправо, и влево.

Если же оптимумов несколько, да они еще и неравноценны, нет никакой гарантии, что наткнувшись на один из них, мы посчитаем данный оптимум именно тем решением, которое мы ищем, в то время, как это предположение неверно. Если же оптимум будет единственным, неважно с какой стороны мы будем к нему приближаться.

Суть шагового принципа сводится к следующему. Если нам известен вид поверхности отклика, кроме того, выполняются все требования для нее, можно заранее теоретически выбрать направление, в котором следует двигаться в поисках оптимального решения, будь то максимум или минимум функции отклика (в зависимости от поставленной цели).

Проведя эксперимент в выбранном направлении, по результатам определяемся, в каком направлении двигаться дальше. В конце концов, рано или поздно, реализовывая такие серии экспериментов и постоянно согласовываясь с видом поверхности отклика, мы найдем требуемый максимум.

Вообще говоря, моделей существует великое множество, а нам нужна одна единственная.

Чтобы выбрать ее необходимо определиться, какие требования нужно предъявлять к модели.

### **Требование №1.**

Главное требование к модели эксперимента – способность предсказывать дальнейшее направление опытов с требуемой точностью. При этом точность предсказания не должна зависеть от направления, в котором мы движемся при планировании, т.е. точность предсказания должна быть одинакова во всех направлениях.

### **Требование №2.**

Адекватность модели. Данное требование означает, что модель действительно должна предсказывать экспериментальные данные.

### Требование №3.

Среди всех моделей необходимо выбирать ту, которая является наиболее простой. При этом понятие простоты довольно-таки относительно и зависит от решаемой проблемы. Прежде чем выбирать ту или иную функции нужно дополнительно задаться вопросом, а что подразумевается в данном случае под простотой – вид уравнения или легкость описания?

Наиболее часто в планировании эксперимента останавливаются на полиномиальных моделях вида

$y = b_0$  – полином нулевой степени;

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  – полином 1-ой степени (линейный);

$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$  – полином 2-ой степени.

Увеличивая степень полинома, можно задать приблизительное описание (аппроксимацию) функции любой сложности.

Для экспериментатора же выбор полиномиальной модели позволяет значительно упростить поиск числовых коэффициентов.

При выборе степени полинома нужно не забывать о простоте описания. Слишком высокие степени, несмотря на увеличение точности предсказания, редко приветствуется, поскольку с каждой новой степенью затрудняется поиск числовых коэффициентов.

При увеличении коэффициентов растет и число опытов, необходимых для их вычисления. Чаще всего экспериментаторы стараются ограничиваться линейными полиномами, а если они недостаточно точны, полиномами второй степени (квадратичными).

Дальнейшее увеличение степени полинома ведет, как правило, только к увеличению сложности прогнозирования и не больше.

## Принятие решений перед планированием

Подытоживая все выше сказанное, отмечу, что прежде чем заниматься планированием эксперимента, необходимо определиться с некоторыми вопросами.

- I. Во-первых, следует точно определиться с понятием объекта исследования, дав ему точное формальное определение.
- II. Во-вторых, прежде чем приступить к эксперименту, необходимо однозначно и непротиворечиво сформулировать основную цель эксперимента, определиться с параметром оптимизации. Параметр оптимизации должен быть единственным, хотя он и может принимать различные значения.
- III. В-третьих, необходимо определиться с факторами, влияющими на ход эксперимента и с тем, какие значения принимают эти факторы.

Влияющих факторов, вообще говоря, может быть сколько угодно, при этом каждый из них может принимать бесконечное число значений. Однако не следует забывать, что в зависимости от числа факторов и их уровней катастрофически растет и число экспериментов. Выбирая, скажем, порядка двадцати факторов, каждый из которых имеет, например, по два уровня, мы можем обречь себя на долгие годы «мучений».



IV. В-четвертых, необходимо озадачиться поиском области проведения эксперимента. И здесь должны учитываться следующие соображения.

1. Прежде всего необходимо оценить границы областей определения факторов. При выборе границ учитываются ограничения нескольких типов:

- а) принципиальные ограничения – для значений факторов, которые ни при каких условиях не могут быть нарушены. Например, температура никак не может по значению оказаться ниже абсолютного нуля;
- б) технико-экономические ограничения. Например, стоимость сырья, дефицитность отдельных компонентов, время протекания процесса;
- с) конкретные условия проведения процесса – наиболее часто встречающийся тип ограничений. Например, существование аппаратуры, стадия разработки технологии и т.п.

Таким образом, выбор экспериментальной области факторного пространства связан с тщательным анализом априорной информации.

2. На втором этапе необходимо найти локальную область для планирования эксперимента. Данная процедура включает в себя два этапа:

а) выбор основного уровня.

Наилучшим условиям, определенным из анализа априорной информации, соответствует одна или несколько комбинаций уровней факторов. Каждая комбинация является многомерной точкой в факторном пространстве. Ее можно рассматривать как исходную точку для построения плана эксперимента. Такая точка называется основным или нулевым уровнем. Построение плана сводится к выбору точек, симметричных относительно основной. В разных условиях мы обладаем различной информацией об области наилучших условий. Выбор основной точки легко представить в виде схемы, рисунок

b) Выбрав основной уровень, необходимо провести выбор интервалов варьирования.

Необходимо выбрать два уровня, желательно симметричных относительно основного, которые называют верхним и нижним уровнями. Обычно за верхний уровень принимается тот, который соответствует наибольшему значению фактора, хотя данное требование и не является обязательным.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень, а вычитание – нижний уровень.



Схема выбора основного уровня

Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются таким образом, чтобы верхний уровень соответствовал (+1), нижний (−1), а основной – нулю.

Это всегда можно сделать с помощью преобразования

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - x_0}{m_i},$$

где  $\tilde{x}_i$  – кодированное значение фактора,  
 $x_i$  – истинное значение фактора,  
 $x_0$  – истинное значение нулевого уровня,  
 $m_i$  – интервал варьирования,  
 $i$  – номер фактора.

Для качественных факторов, имеющих два уровня, один уровень обозначается (+1), другой (−1); порядок значения не имеет.

Графически процедуру перекодировки можно представить как смещение осей факторного пространства в центр области проведения эксперимента, рисунок (представлен случай двух факторов).-

Графическое изображение процедуры кодировки факторов

