

УДК 514.123

ГАЙДАРЬ О.Г., к.т.н., зав. каф. (Донецкий национальный технический университет)
СТРЕБИЖ Н.В., ст. преподаватель (Донецкий национальный технический университет)

Формообразование поверхностей инверсией

Gaidar O.G., Ph.D., head of the department (DonNTU)
Strebizh N.V. Senior Lecturer (DonNTU)

Forming surfaces by inversion

Введение

Математическое моделирование поверхностей объектов играет ключевую роль в жизненном цикле изделия. Первой стадией проектирования является геометрическое моделирование с последующей анализом модели численными методами с помощью специализированных программных комплексов (САЕ).

Представление поверхностей в параметрах линий кривизны имеет важнейшее значение для применения многих методов расчета оболочек на прочность при проектировании конструкций и сооружений железнодорожного транспорта.

Анализ последних исследований и публикаций

Дифференциальные уравнения в частных производных, моделирующие упруго-напряженное состояние тонкостенной конструкции (оболочки), получают простейшее выражение в случае отнесения срединной поверхности оболочки к сети линий кривизны [1]. Кроме тривиального примера отнесения поверхностей вращения к параллелям и меридианам, известны представления в линиях

кривизны таких специальных классов поверхностей, как резных поверхностей Монжа [2, 3, 4], циклид Дюпена [5, 6, 7], каналовых поверхностей [8, 9, 10], каналовых поверхностей Иохимсталя [11, 12, 13].

Цель работы

Разнообразие форм поверхностей, представленных параметрами линий кривизны можно существенно расширить применением к перечисленным классам преобразования инверсии (обратными радиусами).

Основная часть

Пусть x, y, z – координаты точки-прообраза, X, Y, Z – координаты точки-образа в преобразовании инверсией. Тогда преобразование выражается формулами

$$\begin{aligned} X &= \frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ Y &= \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ Z &= \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Основные свойства инверсии.

1. Прообраз – окружность, сфера, не проходящие через начало координат.

СТРОИТЕЛЬСТВО, РЕКОНСТРУКЦИЯ И ЭКСПЛУАТАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Образ – соответственно окружность, сфера не проходящие через начало координат.

2. Прообраз – окружность, сфера проходящие через начало координат. Образ – соответственно прямая, плоскость не проходящие через начало координат.

3. Прообраз – прямая, плоскость не проходящие через начало координат. Образ – окружность, сфера соответственно, проходящие через начало координат.

4. Прообраз – прямая, плоскость, проходящие через начало координат. Образы – соответственно та же прямая и та же плоскость.

5. Прообраз – поверхность

$$\begin{aligned}x &= x(u, w), \\y &= y(u, w), \\z &= z(u, w).\end{aligned}\quad (2)$$

координатные линии $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ совпадают с линиями кривизны. Образ – поверхность, отнесенная к линиям кривизны $u=\text{const}$, $w=\text{const}$.

6. Прообраз – система криволинейных ортогональных координат u, v, w , вводимая функциями

$$\begin{aligned}x &= x(u, v, w), \\y &= y(u, v, w), \\z &= z(u, v, w).\end{aligned}\quad (3)$$

Образ – система криволинейных ортогональных координат

$$\begin{aligned}X &= X(u, v, w), \\Y &= Y(u, v, w), \\Z &= Z(u, v, w).\end{aligned}\quad (4)$$

7. Параметры формы образа включают параметры формы прообраза, радиус сферы инверсии и расстояние между центром сферы инверсии и

началом локальной системы отнесения прообраза.

Пример 1.

Прообраз – тороидальная поверхность

$$\begin{aligned}x &= ((a - c) + b \cos v) \cos u, \\y &= ((a - c) + b \cos v) \sin u, \\z &= b \sin v,\end{aligned}\quad (5)$$

где $(c, 0, 0)$ - координаты начала системы отнесения тороидальной поверхности в системе отнесения сферы инверсии радиуса R .

Параметрические уравнения поверхности-образа в преобразовании инверсий (1)

$$\begin{aligned}X &= \frac{(x - c)R^2}{(x - c)^2 + y^2 + z^2}, \\Y &= \frac{yR^2}{(x - c)^2 + y^2 + z^2}, \\Z &= \frac{zR^2}{(x - c)^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}\quad (6)$$

Как прообраз (тороидальная поверхность) (5), так и образ (циклида Дюпена) (6) при $a > b$ не имеют особых точек (см. рис. 1 и 2), при $a = b$ имеют одну коническую точку (см. рис. 3 и 4), при $a < b$ имеют две конические точки (см. рис. 5 и 6).

Координатные линии образа и прообраза совпадают с линиями кривизны и оба семейства линий кривизны – окружности.

В примере радиус сферы $R = a$, абсцисса центра прообраза $c = b$.

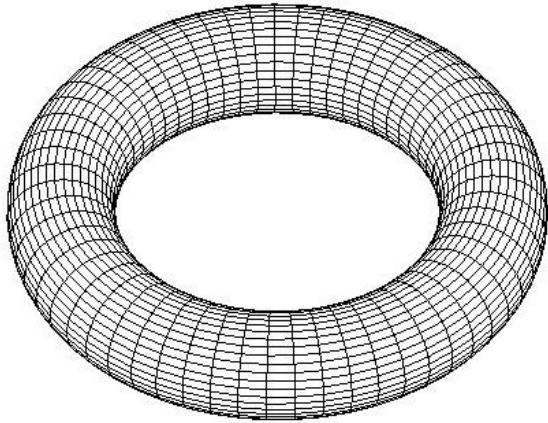


Рис. 1. Прообраз при $a > b$
 $a=1.0328, b=0.258,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

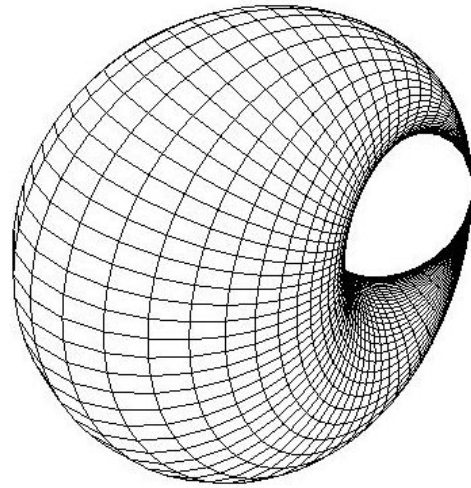


Рис. 4. Образ при $a = b$
 $a=2, b=2, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

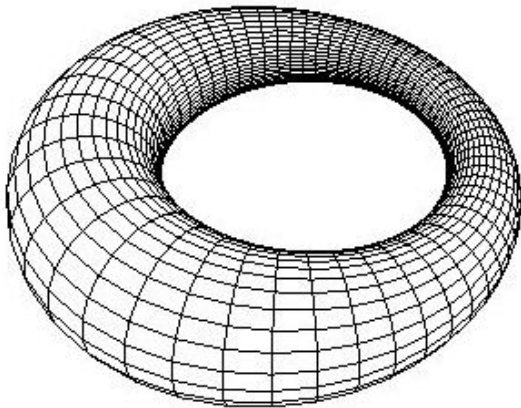


Рис. 2. Образ при $a > b$
 $a=1.0328, b=0.258,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

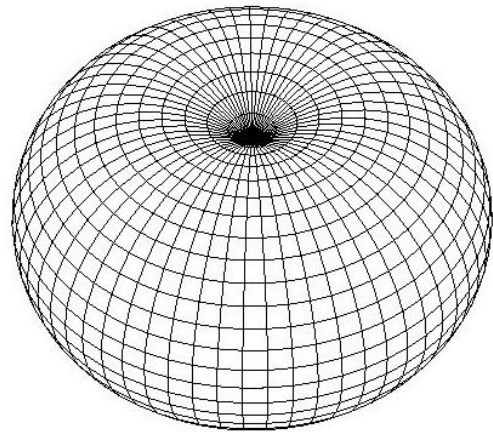


Рис. 5. Прообраз при $a < b$
 $a=0.895, b=1.342,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

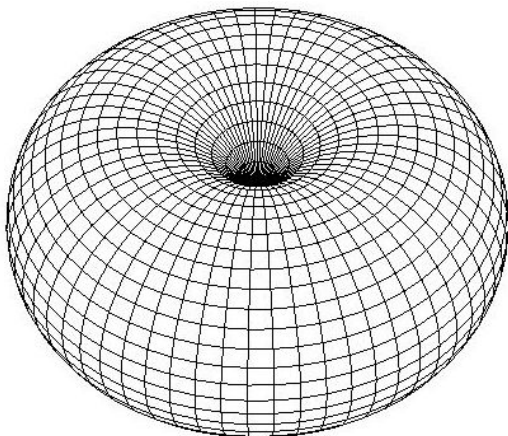


Рис. 3. Прообраз при $a = b$
 $a=2, b=2, 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

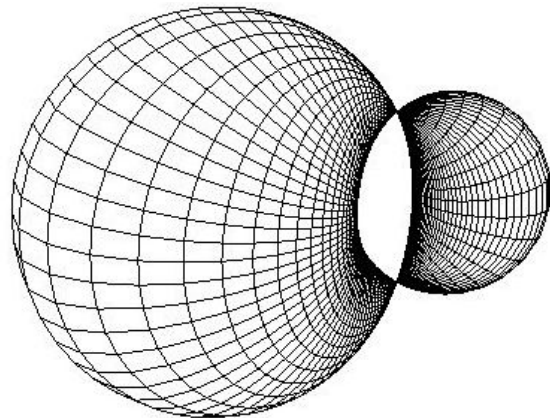


Рис. 6. Образ при $a < b$
 $a=0.895, b=1.342,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$

Пример 2.

Прообраз – резная поверхность
Монжа [14] (см. рис. 7)

$$\begin{aligned} x &= r \cos u - (b \cos v - r u \\ &\quad + c) \sin u, \\ y &= r \sin u - (b \cos v - r u \\ &\quad + c) \cos u, \\ z &= b \sin v \end{aligned} \quad (7)$$

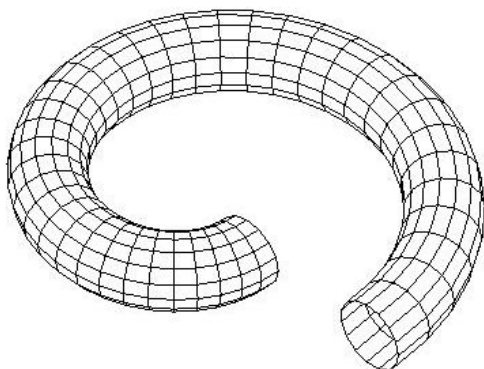


Рис. 7. Прообраз – резная поверхность Монжа

Начала координат систем отнесения прообраза и образа совпадают. Радиус сферы инверсии $R=2$.

Параметрические уравнения поверхности-образа получают подстановкой в (1) выражений (7) (см. рис. 8)

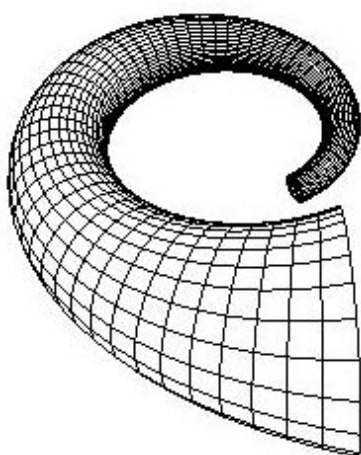


Рис. 8. Образ
($R=1, b=1,5, c=9,7,$
 $0 \leq u \leq 2\pi, \partial \leq v \leq 2\pi$)

Пример 3.

Прообраз – географическая система координат

$$\begin{aligned} x &= u \cos v \cos w, \\ y &= u \cos v \sin w, \\ z &= u \sin v, \end{aligned} \quad (8)$$

которая относится к числу ортогональных.

Преобразованием инверсии (1) со сферой инверсии радиуса R , центр которой расположен в начале координат система (8) переходит в систему (9).

$$\begin{aligned} X &= \frac{R^2 \cos v \cos w}{u}, \\ Y &= \frac{R^2 \cos v \sin w}{u}, \\ Z &= \frac{R^2 \sin v}{u}, \end{aligned} \quad (9)$$

При этом координатные сферы $u=\text{const}$ системы (8) переходят в координатные сферы, координатные конусы вращения $v=\text{const}$ переходят в себя, координатные плоскости $w=\text{const}$ также переходят в себя.

Свяжем координаты v, w функцией

$$v = v_1 + h \cos nw \quad (10)$$

где v_1, h, n – постоянные,
 n – целое, положительное.

Подстановка выражения v (10) в уравнения (8) приводит последнее к параметрическим уравнениям конуса-прообраза с направляющей периодической расположенной на сфере $u=c$ (рис. 9). Уравнения конуса-образа получаем подстановкой выражения v (10) в уравнения (9). Конус-прообраз (10), (8) совпадает с конусом-образом (9), (10) с той разницей, что линии координатной сети $u=\text{const}$ получают

**СТРОИТЕЛЬСТВО, РЕКОНСТРУКЦИЯ И ЭКСПЛУАТАЦИЯ
КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**

преобразованием гомотетии направляющей с разными коэффициентами подобия u и $\frac{R^2}{u}$ для прообраза и образа соответственно. Конус-образ показан на рис. 10 при радиусе сферы инверсии $R=2$ ($n=3, v_1 = \pi/4, h=0.3, 1 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq w \leq 2\pi$).

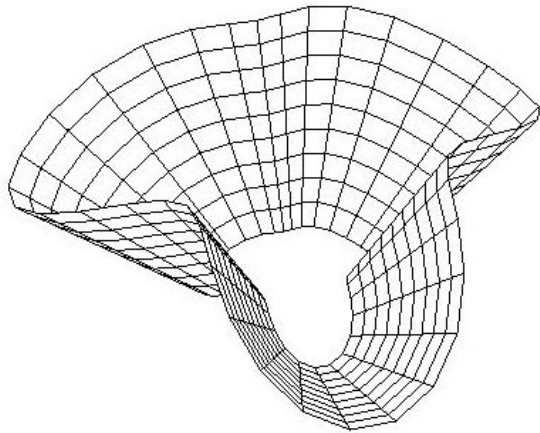


Рис. 9. Конус-прообраз с направляющей периодической расположенной на сфере $u=c$

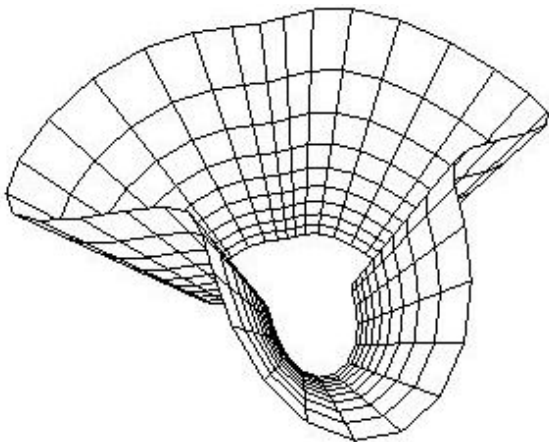


Рис. 10. Конус-образ при радиусе сферы инверсии $R=2$ ($n=3, v_1 = \pi/4, h=0.3, 1 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq w \leq 2\pi$).

Сферическая периодика показана утолщенной линией.

Осуществим параллельный перенос системы отнесения прообраза (8) относительно сферы инверсии,

поместив начало координат в точку $(0,0,0)$:

$$\begin{aligned} x &= u \cos v \cos w + a, \\ y &= u \cos v \sin w, \\ z &= u \sin v. \end{aligned} \quad (11)$$

Инверсией (1) система координат (10) переводится в систему

$$\begin{aligned} X &= (R^2 (u \cos v \cos w + a)) / ((u \cos v \cos w + a)^2 + u^2 [\cos v]^2 [\sin w]^2 + u^2 [\sin v]^2), \\ Y &= (R^2 u \cos v \sin w) / ((u \cos v \cos w + a)^2 + u^2 [\cos v]^2 [\sin w]^2 + u^2 [\sin v]^2), \\ Z &= (R^2 u \sin v) / ((u \cos v \cos w + a)^2 + u^2 [\cos v]^2 [\sin w]^2 + u^2 [\sin v]^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Знаменатели уравнений (12) целесообразнее представить в более компактном виде:

$$u^2 + 2ua \cos v \cos w + a^2.$$

Координатные поверхности системы (11) инверсией переводятся:

- сферы $u = \text{const}$ в сферы;
- конусы вращения $v = \text{const}$ в циклиды Дюпена;
- плоскости $w = \text{const}$ в сферы.

Параметрические уравнения конуса-прообраза получаются добавлением функции (10) к системе (12).

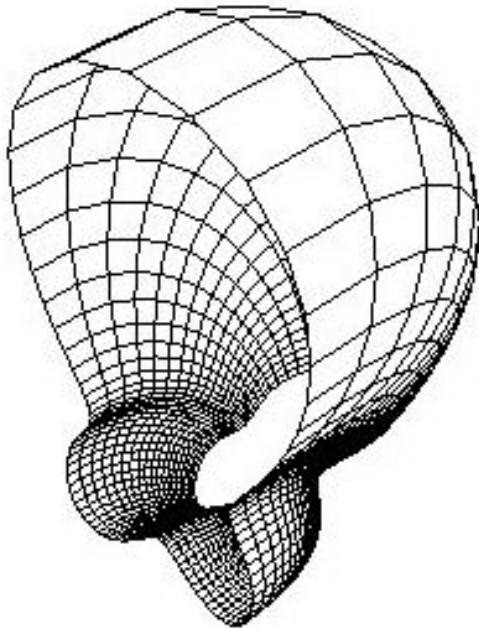


Рисунок 11 – Конус-образ

На рис. 11 показано изображение конуса-образа, полученного при тех же значениях входных данных, что и для конуса-прообраза, показанного на рис. 9.

Вывод

1. Представление поверхностей в параметрах линий кривизны оптимально с точки зрения применения систем инженерного анализа (САЕ) при проектировании конструкций и сооружений железнодорожного транспорта.

2. Подерные преобразования является перспективным методом моделирование поверхностей, что и проиллюстрировано на конкретных примерах.

Список литературы:

1. Григоренко Я.М. Решение задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. — Киев: Вища школа, 1979. — 280с.

2. Скидан І.А. Аналітичні та комп'ютерні моделі різьблених поверхонь Монжа / І.А. Скидан, О.В. Фролов // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії: - Мелітополь:ТДАГА – 2002 - Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка - Т.17.- С. 13-17.

3. Иванов В.Н. Пример расчета покрытий в форме резной поверхности Монжа вариационно-разностным методом /В.Н. Иванов, Мухамад Ризван// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов: - М.: АСВ. - 2003.- Вып.12 - С.48-50.

4. Иванов В.Н. Геометрия резных поверхностей Монжа и конструирование оболочек. / В.Н. Иванов, Мухамад Ризван// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов: -М.: изд-во АСВ.-2002.- Вып.11- С.18-26.

5. Сальков Н. А. Циклида Дюпена и ее приложение: монография / Н. А. Сальков. - Москва : ИНФРА-М, 2016. - 140с.

6. Гайдар О. Г. Візуалізація поверхонь з двома сім'ями плоских ліній кривини // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2001 – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 12. – С. 90-93.

7. Gaidar O.G., Inversion of surfaces referred to the lines of curvature / O.G. Gaidar, E.V. Gaidar // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции.

СТРОИТЕЛЬСТВО, РЕКОНСТРУКЦИЯ И ЭКСПЛУАТАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

– Том 1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С.116-119.

8. Пиліпака С.Ф. Конструювання каналових поверхонь в системі супровідного тригранника плоскої напрямної кривої./ С.Ф. Пиліпака// прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КДТУБА- 1998.- Вип. 64.- С.116-119.

9. Фролов О.В. Кінцеві рівняння каналових поверхонь./ Праці Таврійської державної агротехнологічної академії: Мелітополь:ТДАГА- 2003- Вип.4. прикладна геометрія та інженерна графіка - Т.20.- С. 101-104.

10. Иванов В.Н. Условия образования каналовых поверхностей. /В.Н. Иванов// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов: - М.: МБК «Биоконтроль», 1995.- Вып.5- С.7-16.

11. Пиліпака С.Ф. Конструювання каналових поверхонь Іохімсталя сім'ями ліній кривини/ С.Ф. Пиліпака// Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КДТУБА- 1998.- Вип. 64.- с.171-173.

12. Иванов В.Н. Конструирование оболочек на основе каналовых поверхностей Иохимсталя./В.Н. Иванов// Вестник РУДН: специальный выпуск «Инженерные исследования» - 2000.- М.: изд-во РУДН.- 2000.-С.57-61.

13. Иванов В.Н. Каналовые поверхности Иохимсталя с плоской линией кривизны./В.Н. Иванов// Исследование пространственных систем: материалы семинара кафедры строительных материалов УДН:- М.:УДН.-1966. - С.32-36.

14. Скидан И.А. Обобщенные цилиндрические координаты и их

применение к расчету оболочек / И.А. Скидан.// Доклады VIII научно-технической конференции инженерного факультета. М.: УДН им. П. Лумумбы.- 1972.- С.21-23.

15. Стребіж Н.В. Поверхні в лініях кривини в триортогональних системах на основі плоских біполярних координат / Н.В. Стребіж // Прикладна геометрія та інженерна графіка: / Праці Таврійської державної агротехнологічної університет: Мелітополь – 2009 - Вип.4. прикладна геометрія та інженерна графіка - Вип.4.- С. 127-132.

Аннотации:

Представление поверхностей в параметрах линий кривизны имеет важнейшее значение для применения САЕ. Кроме тривиального примера отнесения поверхностей вращения к параллелям и меридианам, известны представления в линиях кривизны таких специальных классов поверхностей, как резных поверхностей Монжа, циклид Дюпена, каналовых поверхностей, каналовых поверхностей Иохимсталя. Разнообразие форм поверхностей, представленных параметрами линий кривизны можно существенно расширить применением к перечисленным классам преобразования инверсии.

Ключевые слова: формообразование, инверсия, линии кривизны, прообраз, образ, циклида.

The representation of surfaces in curvature line parameters is essential for the use of CAE. In addition to the trivial example of attributing surfaces of revolution to parallels and meridians, there are representations in the curvature lines of such special classes of surfaces as Monge carved surfaces, Dupin cyclides, canal surfaces, Jochimsthal channel surfaces. The variety of shapes of surfaces represented by the parameters of curvature lines can be significantly expanded by applying an inversion transform to the listed classes.

Keywords: shaping, inversion, curvature lines, preimage, image, cyclide.