МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Теоретическая механика
им. Н.Г. Логвинова»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
ЧАСТЬ II. КИНЕМАТИКА

Донецк – 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Теоретическая механика
им. Н.Г. Логвинова»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
ЧАСТЬ II. КИНЕМАТИКА

Рассмотрено
на заседании кафедры
“Теоретическая механика
им. Н.Г. Логвинова”
протокол № 8 от 24.12.2019 г.

Донецк – 2019

УДК: 531

Лекции по теоретической механике (часть II. Кинематика): учебное пособие для студентов всех специальностей и форм обучения технических вузов /Малеев В.Б., Скорынин Н.И., Петренко И.В., Кудрявцев А.А. - Донецк: ДонНТУ, 2019. - 38 с., ил.

Лекции содержат в лаконичной и доступной форме содержание второй части курса теоретической механики (кинематика).

Назначается как учебное пособие для студентов всех специальностей технических вузов дневной и заочной форм обучения, а также для организации самостоятельной работы студентов.

Составители: проф. Малеев В.Б.
доц. Скорынин Н.И.
доц. Петренко И.В.
ст. преп. Кудрявцев А.А.

Рецензент: проф. Кононенко А.П.

Лекция 1
Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных объектов без учета их инертности и действующих на них сил.

Движение материальных тел в пространстве осуществляется с течением времени t. Пространство рассматривается как трехмерное изотропное, время как универсальное, то есть протекающим одинаково во всех системах отсчета. Во всех задачах кинематики время рассматривается как независимая переменная, а все остальные переменные являются функциями времени.

Поскольку под движением тела понимается изменение с течением времени его положения относительно других тел, то с телом, относительно которого изучается движение, связывается какая-либо система координат, которая образует с этим телом систему отсчета.

При рассмотрении движения точек или тел одновременно по отношению к нескольким системам отсчета основной считается та из них, относительно которой определяется движение всех остальных.

Чтобы исследовать движение точки или тела, это движение надо задать (математически описать).

Задать движение точки или тела - это значит указать способ, с помощью которого можно определить положение точки или тела относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Способ задания движения называют законом (уравнением) движения.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы из закона движения точки (тела) определить все кинематические величины (траекторию, скорость, ускорение и др.), которые характеризуют данное движение.

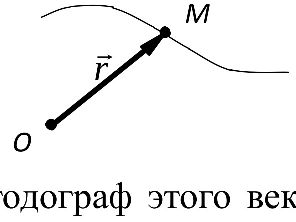
Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета называется траекторией точки. По виду этой линии различают прямолинейное и криволинейное движение точки.

Способы задания движения точки

1. Векторный способ

При этом способе необходимо знать радиус-вектор $\vec{r}$ движущейся точки M, который проведен к ней из любого заданного или выбранного полюса (точки) O. Тогда закон движения точки будет выглядеть так

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.1}$$

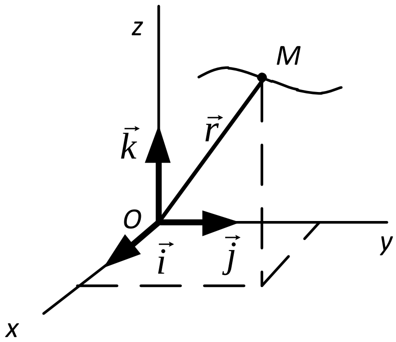


Геометрическое место концов вектора $\vec{r}(t)$ есть годограф этого вектора. Он определяет траекторию движущейся точки.

2. Координатный способ.

Положение движущейся точки M задается декартовыми координатами. Поэтому закон движения имеет вид:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)\,.$$



(1.2)

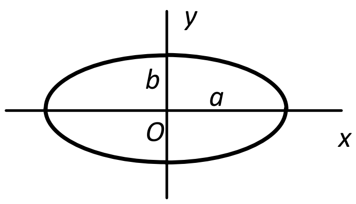
Если принять во внимание орты $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ декартовой системы координат, то нетрудно установить связь этого способа с векторным:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{1.3}$$

При координатном способе можно получить уравнение траектории движения точки, исключая из закона движения параметр t.

ПРИМЕР: $x = a\sin kt,\ y = b\cos kt$.

Траекторией точки будет элипс, уравнение которого имеет вид $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1.$



3. Натуральный способ

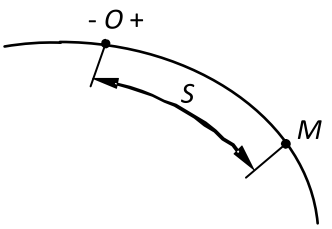
Чтобы задать движение точки натуральным способом, необходимо:

а) задать траекторию точки;

б) выбрать начало отсчета на траектории (т. O) с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета дуговой (криволинейной) координаты S;

в) задать закон движения точки по траектории в виде:

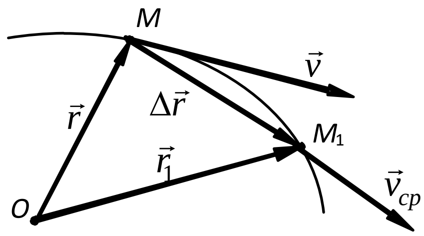
$$S = S(t) \tag{1.4}$$



Примечание: не путать величину координаты *S(t)* с пройденным точкой путем *S*.

Скорость точки

Скоростью точки называется кинематическая мера движения точки, которая равна производной по времени от радиуса-вектора этой точки в данной системе отсчета.



$\Delta t = t_1 - t$,

$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{MM}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}$,

$\vec{v}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$,

$\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Таким образом,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\,. \qquad (1.5)$$

Размерность скорости [v] = м/с.

Скорость точки при координатном способе задания движения с учетом (1.3) и (1.5) определяется формулами:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\,, \qquad (1.6)$$

поскольку $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$.

С другой стороны

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\,. \qquad (1.7)$$

Сравнивая формулы (1.6) и (1.7), делаем вывод, что проекции вектора скорости $\vec{v}$ на декартовые оси координат определяются следующим образом:

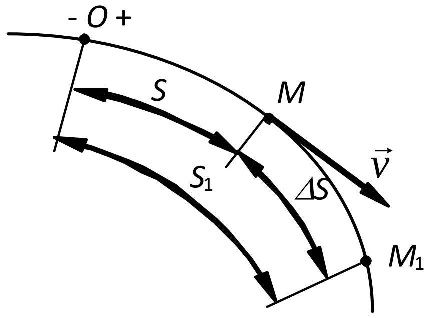
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,. \qquad (1.8)$$

Тогда модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, (1.9)

а направляющие косинусы

$$\left.\begin{aligned}
\cos\left(\vec{v},\hat{\vec{i}}\right) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \\
\cos\left(\vec{v},\hat{\vec{j}}\right) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \\
\cos\left(\vec{v},\hat{\vec{k}}\right) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}
\end{aligned}\right\}. \qquad (1.10)$$

<u>Скорость точки при натуральном способе задания движения.</u>



$\Delta t = t_1 - t$,

$\Delta S = S_1 - S$,

$v_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$,

$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{dS}{dt}$.

Таким образом,

$$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \qquad (1.11)$$

Задания для самостоятельной работы студентов

Проработать параграфы рекомендованной литературы:

[1] Раздел II, введенне, глава 1 §§ 1, 3, 4, 5

[2] Раздел II, глава IX §§ 36, 37, 40

[3] Раздел II, глава VII, VIII §§ 62-69

Ответить на вопросы:

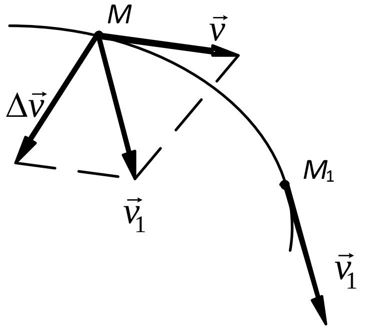
1. Какие способы задания движения точки существуют и в чем суть каждого из них?
2. Как определяется скорость точки в каждом из способов задания движения?
3. Как направлен вектор скорости точки по отношению к ее траектории?
4. Чем отличается понятие дуговой координаты точки и пройденного ею пути?

Решить задачи:
[4] №№ 10.2, 10.12, 11.3

Лекция 2

Ускорение точки

Ускорением точки называется мера изменения скорости точки, равная производной по времени от вектора скорости точки в данной системе отсчета.



$$\Delta t = t_1 - t\,,$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v} \quad \text{или} \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}\,,$$

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\,,$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,.$$

Таким образом,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}\,, \quad [a] = \text{м/с}^2. \tag{2.1}$$

При координатном способе задания движения ускорение точки определяется следующими формулами:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\,,$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,.$$

Отсюда, с учетом (1.8), проекции ускорения на декартовые оси координат будут равны:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y}. \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\;; \tag{2.3}$$

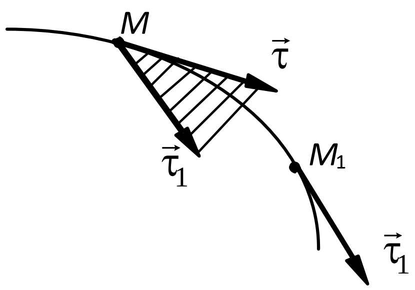
Направляющие косинусы равны

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\vec{a},\hat{\vec{i}}\right) &= \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}} \\ \cos\left(\vec{a},\hat{\vec{j}}\right) &= \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}} \\ \cos\left(\vec{a},\hat{\vec{k}}\right) &= \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Оси натурального трехгранника

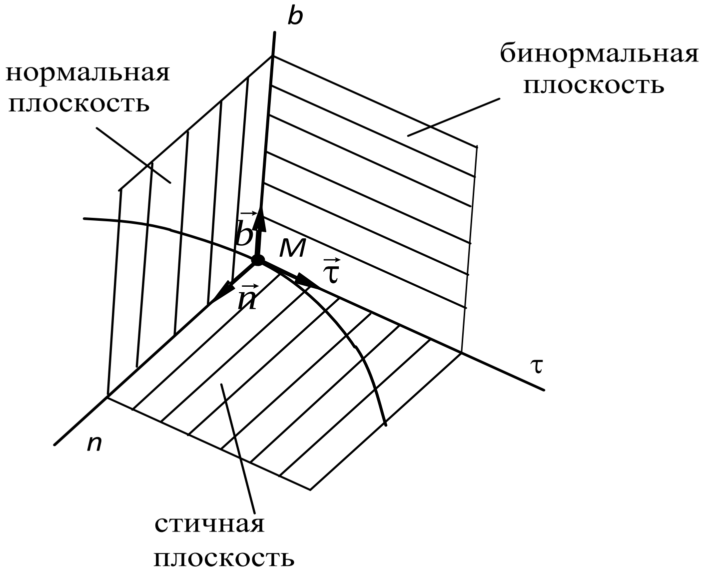
Введем в рассмотрение единичный вектор $\vec{\tau}$ касательный к траектории движения в некоторой точке М, который всегда направлен в сторону увеличения дуговой координаты.

Если вектор $\vec{\tau}_1$ точки M_1, близкой к точки M, перенести в т. M и рассмотреть поведение плоскости $(\vec{\tau},\vec{\tau}_1)$ при приближении т. M_1 к т. M, то эта плоскость, поворачиваясь, в пределе займет положение, которое называется соприкасающейся плоскостью.



Плоскость, проведеная через т. M и перпендикулярная вектору $\vec{\tau}$, называется нормальной плоскостью. Линия Mn пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей называется главной нормалью.

Порскость, проведенная через т. M перпендикулярно $\vec{n}$, называется бинормальной плоскостью. Линия Mb пересечения нормальной и бинормальной плоскости называется бинормаль.



Указанные плоскости образуют натуральный трехгранник, а линии их пересечеия – натуральные оси координат: *M*τ - касательная или тангента. *Mn* – главная нормаль і *Mb* - бинормаль. Направление натуральных осей координат задают единичные векторы $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$.

Таким образом, натуральные оси (оси натурального трехгранника) - это прямоугольная система осей *M*τ*nb* с началом в движущейся точке *M*.

С учетом (1.11) можно записать:

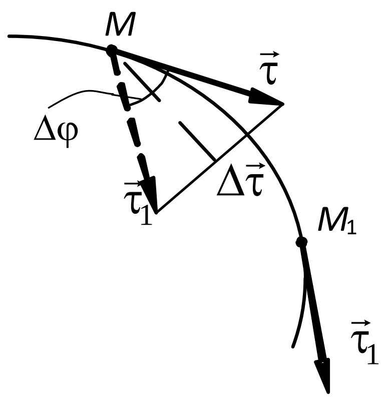
$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}. \tag{2.5}$$

При этом, если $\dot{s} > 0$, то $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{\tau}$, а если $\dot{s} < 0$, то $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{\tau}$.

Определим ускорение точки при натуральном способе придания движения.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{2.6}$$

Найдем модуль и направлене вектора $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$.



$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2|\Delta\vec{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta\varphi\to 0\\ \Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\Delta\varphi\Delta s}{\frac{\Delta\varphi}{2}\Delta s\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = 1\cdot k\cdot v = \frac{v}{\rho},$$

где $k = \frac{1}{\rho}$ - коэффициент кривизны кривой в т. *M*, а ρ - радиус кривизны кривой в т. *M*.

Если вычислять производную по времени от произведения $\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1$, то получим $2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$. Следовательно, $\frac{d\vec{\tau}}{dt}\perp\vec{\tau}$ и, поскольку этот вектор должен принадлежать соприкасающейся плоскости, то он направлен по главной нормали. Поэтому можно записать

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{n}$$

и окончательно (2.6) будет иметь вид:

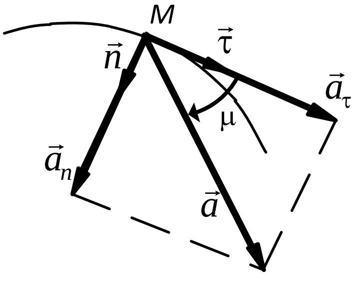
$$\vec{a} = \frac{d\dot{v}}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \tag{2.7}$$

или

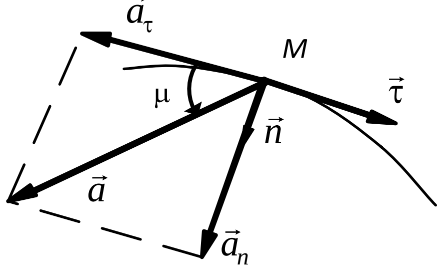
$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \tag{2.8}$$

где $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$, причем $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ - касательное (тангенциальное) ускорение точки;

$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$, причем $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ - нормальное (центростремительное) ускорение точки.



при $\frac{dv}{dt} > 0$



при $\frac{dv}{dt} < 0$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,. \qquad (2.9)$$

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}\,. \qquad (2.10)$$

Формулы равномерного и ровнопеременного движения точки

1. Ровномерное движение ($v = const$)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0; \quad v = \frac{ds}{dt} \quad \text{или} \quad \int_{s_0}^{s} ds = v\int_0^t dt\,.$$

Следовательно

$$s = s_0 + vt\,. \qquad (2.11)$$

2. Ровнопеременное движение ($a_\tau = const$)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad \int_{v_0}^{v} dv = a_\tau \int_0^t dt\,.$$

Следовательно

$$v = v_0 + a_\tau t\,. \qquad (2.12)$$

С учетом (2.12) и $v = \dfrac{ds}{dt}$, получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_0 \int_0^t dt + a_\tau \int_0^t tdt\,.$$

Откуда

$$s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}\,. \qquad (2.13)$$

При прямолинейном движении

$$\rho = \infty, \quad a_n = 0 \quad \text{и} \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau\,.$$

Задания для самостоятельной работы студентов

Проработать параграфы рекомендованной литературы:

[1] Раздел II, введение, глава 1 §§ 2, 4, 5

[2] Раздел II, глава IX §§ 39, 40-44

[3] Раздел II, глава IX §§ 70-76

Ответить на вопросы:

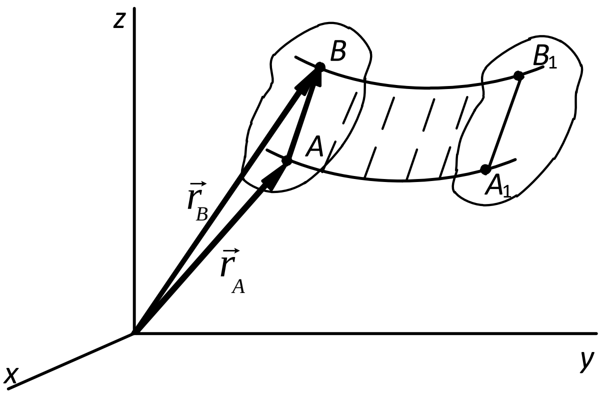
1. Чему равен вектор ускорения точки?

2. Как определяется величина и направление ускорения точки при координатном способе задания движения?
3. Какие оси называют осями натурального трехгранника?
4. Охарактеризуйте касательное и нормальное ускорения. Как определяют их величину и направление?

Решить задачи:
[4] №№ 12.7, 12.18, 12.22

Лекция 3
Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, проведенная через любые две точки тела, остается параллельной своему начальном положению.



Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и по направлению скорости и ускорения.

Для любых точек A и B имеем

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}, \text{ где } \overrightarrow{AB} = const\,.$$

Тогда

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right),$$

или

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A, \text{ т.к. } \overrightarrow{AB} = const \tag{3.1}$$

После дифференцирования (3.1) получим

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt},$$

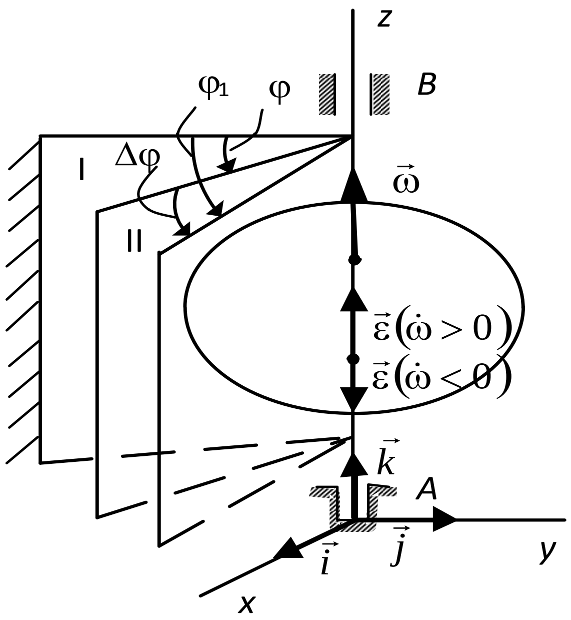
или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A\,. \tag{3.2}$$

Через произвольность выбора точек A и B можно утверждать, что равенства (3.1) и (3.2) справедливы для всех точек тела.

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным называют такое движение твердого тела, при котором все точки, которые принадлежат некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в данной системе отсчета. Эта прямая называется осью вращения.



Поворот - это перемещение тела вращения из одного положения в другое.

Угол φ между проведенными через ось вращения полуплоскостями (неподвижной I и связанной с телом вращения подвижной II) называется углом поворота тела.

Таким образом, закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси Az имеет вид

$$\varphi = \varphi(t). \tag{3.3}$$

Угловая скорость ω и угловое ускорение ε являются основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела.

За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угол поворота изменится на величину $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$. Тогда средняя угловая скорость будет равна

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

а мгновенная угловая скорость равна

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{3.4}$$

Размерность угловой скорости $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

Угловое ускорение ε является мерой изменения угловой скорости ω. Рассуждая аналогично вышеприведенному, получим, что средняя величина углового ускорения равна

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

а мгновенное угловое ускорение равно

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Размерность углового ускорения $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \frac{1}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}$. С учетом (3.4) окончательно получим

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \tag{3.5}$$

Векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ следует направлять вдоль неподвижной оси вращения *Az* (точка приложения роли не играет). При этом вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен туда, откуда вращение тела наблюдается против хода часовой стрелки, то есть

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k} \tag{3.6}$$

и, если $\dot{\varphi} > 0$, то $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{k}$, а, если $\dot{\varphi} < 0$, то $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{k}$.

Аналогично

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} \tag{3.7}$$

и, если $\dot{\omega} > 0$, то $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{k}$, а, если $\dot{\omega} < 0$, то $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{k}$.

Частные случаи

1. Равномерное вращение тела $(\omega = const)$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt.$$

Следовательно

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{3.8}$$

2. Равнопеременное вращение тела $(\varepsilon = const)$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt.$$

Следовательно

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{3.9}$$

Если учесть (3.4) и (3.9), то получим

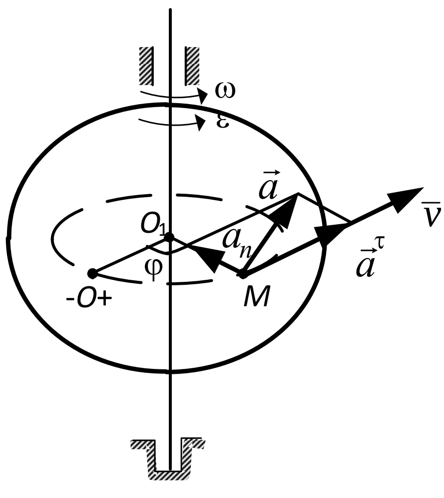
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt,$$

откуда

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \tag{3.10}$$

Скорости и ускорения точек вращающегося тела в скалярном виде

Движение любой точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно считать заданным натуральным способом, поскольку траектория точки известна. Пусть $O_1M = h$.



Тогда, поскольку $OM = S$, то

$$S = h\varphi,$$

где φ - угол поворота тела.

Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$\frac{dS}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt}.$$

Следовательно

$$v = \omega h. \tag{3.11}$$

Еще раз дифференцируя по времени, получим

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega h) = \frac{d\omega}{dt}h = \varepsilon h$$

Следовательно, тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \varepsilon h. \tag{3.12}$$

Как известно, нормальное ускорение равно

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h.$$

Таким образом, нормальное ускорение

$$a_n = \omega^2 h. \tag{3.13}$$

Поскольку

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

то полное ускорение точки вращающегося тела равно

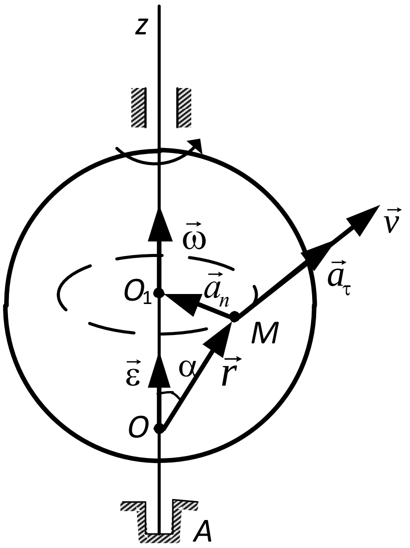
$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{3.14}$$

Скорости и ускорения точек вращающегося тела в векторном виде

Вектор скорости точки *M* можно представить формулой:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{3.15}$$

Пусть радиус окружности O_1M, которую описывает точка *M*, равен *h*. Докажем, что величина вектора скорости $\vec{v}$ соответствует формуле (3.11), а по направлению вектор скорости $\vec{v}$ есть касательная к окружности в т. *M*.



$$v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\alpha = \omega h .$$

Поскольку $\overline{\omega} \times \vec{r} \perp O_1M$, то $\vec{v} \perp O_1M$.

Вектор полного ускорения точки M

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} , \tag{3.16}$$

где $|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon h$, $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} \perp O_1M$, то есть вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ есть вектор $\vec{a}_\tau$ касательного (тангенциального) ускорения т. M;

$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 h$. Вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ направлен вдоль MO_1, то есть данный вектор есть вектор $\vec{a}_n$ нормального ускорения т. M.

Таким образом, компоненты уравнения (3.16) удовлетворяют ранее полученным результатам (2.8), (2.9), (3.14).

Задания для самостоятельной работы студентов

Проработать параграфы рекомендованной литературы:

[1] Раздел II, глава 2 §§ 2, 3

[2] Раздел II, глава X §§ 48-51

[3] Раздел II, глава X §§ 78-84

Ответить на вопросы:

1. Какое движение твердого тела называется поступательным и каковы его свойства?
2. Какое движение твердого тела называется вращательным вокруг неподвижной оси, назовите его основные кинематические характеристики?

3. Как определяется модуль и направление векторов угловой скорости и углового ускорения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

4. Выведите формулы, определяющие модули скорости и ускорения точек вращающегося тела.

5. Какие векторные выражения скорости, касательного, нормального и полного ускорений точки?

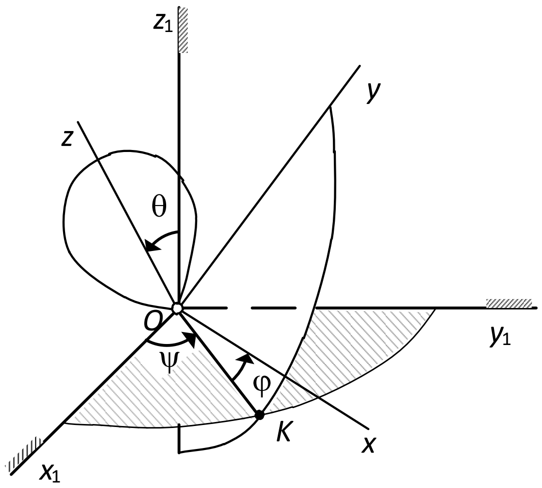
Решить задачи:

[4] №№ 13.4, 13.5, 13.14, 13.18, 14.4

Лекция 4

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

Речь идет о движении тела, при котором одна из его точек все время остается неподвижной в данной системе отсчета. Иногда такое движение тела называют сферическим, поскольку точки тела будут перемещаться по поверхностям сфер с радиусами, равными кратчайшему расстоянию от неподвижной точки к подвижной.



Положение твердого тела относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ можно определить в любой момент с помощью углов Эйлера φ, ψ, θ, образующихся с подвижной системой координат $Oxyz$, которая жестко связана с данным телом.

Линия пересечения OK плоскости Oxy с плоскостью Ox_1y_1 называется линией узлов, φ - угол собственного вращения, ψ - угол процессии, θ - угол нутации.

Таким образом, зависимости

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t) \tag{4.1}$$

представляют собой уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

С учитом (4.1) основными кинематическими характеристиками такого движения является **угловая скорость и угловое ускорение**.

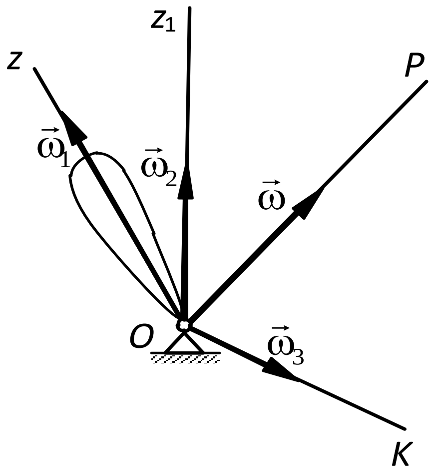
Мгновенная угловая скорость вращения тела равна

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3, \tag{4.2}$$

где $\omega_1 = \dot{\varphi}$ - скорость поворота вокруг оси *Oz*;

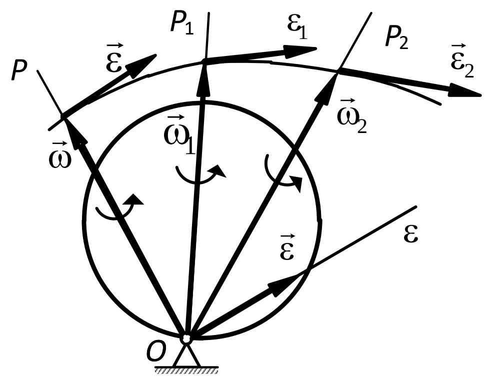
$\omega_2 = \dot{\psi}$ - скорость поворота вокруг оси Oz_1;

$\omega_3 = \dot{\theta}$ - скорость поворота вокруг линии узлов *OK*.



В процессе движения вектор $\vec{\omega}$ меняется и по модулю и по направлению. Линия *OP* , вдоль которой в каждое мгновение направлен вектор $\vec{\omega}$, называется мгновенной осью вращения тела. Иначе говоря, это прямая, проходит через неподвижную точку, поворачиваясь вокруг которой тело перемещается из данного положения в другое, бесконечно близкое к данному.

Таким образом, движение твердого тела вокруг неподвижной точки состоит из серии последовательных мгновенных поворотов тела вокруг мгновенных осей вращения.

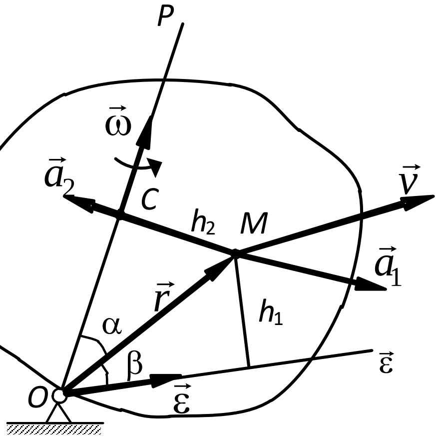


Мгновенное угловое ускорение тела, как мера изменения угловой скорости, равна

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (4.3)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ в каждое мгновение направлен по касательной к годографу вектора $\vec{\omega}$ и откладывается от неподвижной точки. Линия $O\varepsilon$ вдоль вектора $\vec{\varepsilon}$ называется осью углового ускорения.

СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА



Скорость т. M:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

$$v = \omega r \sin\alpha = \omega h_2 \quad \left(\vec{v} \perp CM\right).$$

Ускорение т. M:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2,$$

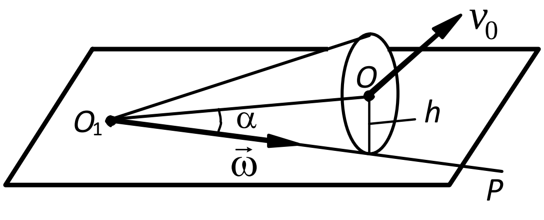
где $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ - вращательное ускорение; $a_1 = \varepsilon r \sin\beta = \varepsilon h_1$;

$\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}$ - центростремительное ускорение, $a_2 = \omega v \sin 90^\circ = \omega^2 h_2$, $\left(h_2 = CM\right)$.

СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Угловая скорость в любой момент может быть вычислена формуле (4.2).

ПРИМЕР: при качении конуса без скольжения по плоскости известны: высота O_1O, угол α и скорость v_0 точки O. Найти угловую скорость качения конуса .



Образующая конуса вдоль линии его соприкосновения с плоскостью является его мгновенной осью вращения.

Поэтому $\omega = \dfrac{v_0}{h} = \dfrac{v_0}{|OO_1|\sin\alpha}$.

Угловое ускорение может быть найдено двумя способами:

1. Если известны ω_x, ω_y, ω_z, то

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x,\ \varepsilon_y = \dot{\omega}_y,\ \varepsilon_z = \dot{\omega}_z$$

и тогда

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2},$$

а направляющие косинусы равны

$$\cos\left(\widehat{\vec{\varepsilon},\vec{i}}\right) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon},\ \cos\left(\widehat{\vec{\varepsilon},\vec{j}}\right) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon},\ \cos\left(\widehat{\vec{\varepsilon},\vec{k}}\right) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}.$$

2. Если ввести единичный вектор $\vec{\omega}_0$, направленный вдоль вектора $\vec{\omega}$, то получим

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\omega}_0.$$

Тогда

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{\omega}_0 + \omega\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,$$

где $\vec{\varepsilon}_1 = \dot{\omega}\vec{\omega}_0$, причем $\vec{\varepsilon}_1 \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, если $\dot{\omega} > 0$, и $\vec{\varepsilon}_1 \uparrow\downarrow \vec{\omega}$, если $\dot{\omega} < 0$;
$\vec{\varepsilon}_2 = \omega\dot{\vec{\omega}}_0$, причем $\vec{\varepsilon}_2 \perp \vec{\omega}$, поскольку $\dot{\vec{\omega}}_0 \perp \vec{\omega}_0$.

В технических задачах угловая скорость часто является численно постоянной величиной и меняется только на направлению. В таком случае $\varepsilon_1 = 0$ и $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2 = \omega\dot{\vec{\omega}}_0$. Если же угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_1$ не равна нулю, то его можно вычислить отдельно и затем, добавив к составляющей $\vec{\varepsilon}_2$, определить полное угловое ускорение.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Проработать параграфы рекомендованной литературы:

[1] Раздел II, глава 4 §§ 1-7
[2] Раздел II, глава XII §§ 60-62
[3] Раздел II, глава XII §§ 101-104, 106

Ответить на вопросы:

1. Какими параметрами определяется положение тела с одной неподвижной точкой?

2. Как определяются угловая скорость и угловое ускорение тела с одной неподвижной точкой?

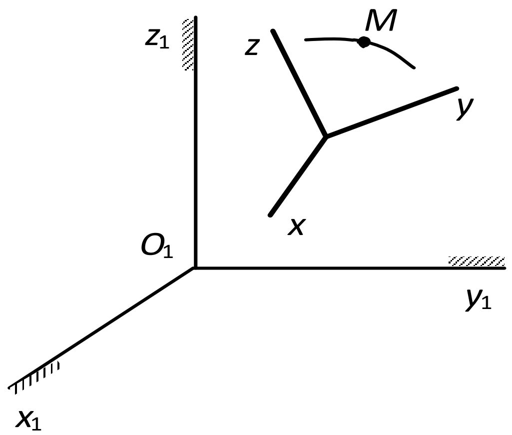
3. Какими формулами определяются скорости и ускорения точек тела с одной неподвижной точкой?

Решить задачи:
[4] №№ 19.1, 19.3

ЛЕКЦИЯ 5

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Движение материальной точки называется сложным, если эта точка перемещается относительно системы координат $Oxyz$, которая, в свою очередь, движется по отношению к другой системе координат $O_1x_1y_1z_1$, принимаемой за неподвижную.



Движение точки относительно подвижной системы координат называется относительным. Относительным называются также скорость и ускорение точки в этом движении:

$$\vec{v}_{отн},\ \vec{a}_{отн} \text{ или } \vec{v}_r,\ \vec{a}_r.$$

Движение точки вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной системы координат называется переносным. Переносной скоростью и переносным ускорением называется также скорость и ускорение того места подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат, с которым в данный миг совпадает подвижная точка. Переносная скорость и переносное ускорение обозначаются $\vec{v}_{пер}$, $\vec{a}_{пер}$ или $\vec{v}_e$, $\vec{a}_e$.

Движение точки относительно неподвижной системы координат называется абсолютным. Также называют абсолютными скорость и ускорение точки в этом движении: $\vec{v}_{абс}$, $\vec{a}_{абс}$ или $\vec{v}$, $\vec{a}$.

Исходя из этих определений, сложное движение точки можно считать как «сумму» двух или более простых движений.

Исследуя каждое из этих движений по отдельности, можно сделать вывод об характере абсолютного движения точки, но для этого следует знать законы сложения скоростей и ускорений точки.

Теоремы о сложении скоростей и ускорений точки в сложном движении можно доказать с помощью правила дифференцирования вектора по времени.

Пусть $\vec{b}(t) = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$,

где b_x, b_y, b_z - проекции вектора $\vec{b}(t)$ на подвижные оси координат $Oxyz$.

Тогда полная производная вектора $\vec{b}(t)$ по времени t будет равна

$$\dot{\vec{b}} = \dot{b}_x \vec{i} + \dot{b}_y \vec{j} + \dot{b}_z \vec{k} + b_x \dot{\vec{i}} + b_y \dot{\vec{j}} + b_z \dot{\vec{k}} , \tag{5.1}$$

где $\dot{b}_x \vec{i} + \dot{b}_y \vec{j} + \dot{b}_z \vec{k} = \dfrac{\tilde{d}\vec{b}}{dt}$ есть относительная или локальная производная вектора $\vec{b}$, характеризующая его изменение относительно подвижной системы отсчета.

Поскольку орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ с поворотом подвижной системы относительно неподвижной меняют только свои направления, то согласно уравнению (3.15)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

и по аналогии можно записать

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i} \; , \; \dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j} \, , \; \dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k} \; ,$$

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость поворота подвижной системы координат относительно неподвижной.

Тогда сумма трех последних слагаемых уравнения (5.1) будут равна

$$b_x \dot{\vec{i}} + b_y \dot{\vec{j}} + b_z \dot{\vec{k}} = b_x \left(\vec{\omega} \times \vec{i}\right) + b_y \left(\vec{\omega} \times \vec{j}\right) + b_z \left(\vec{\omega} \times \vec{k}\right) = \vec{\omega} \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) = \vec{\omega} \times \vec{b} \, .$$

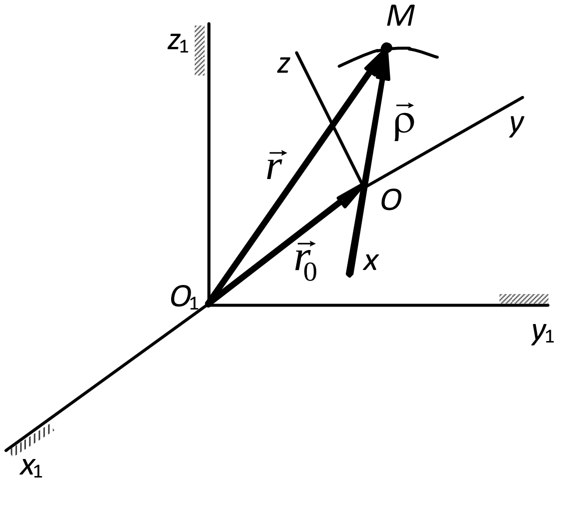
Таким образом

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{b}$$

и правило дифференцирования любого вектора будет иметь вид:

$$\frac{d\overrightarrow{\ldots}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overrightarrow{\ldots}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\ldots} \tag{5.2}$$

Теорема о сложении скоростей



Пусть радиус-вектор т. М равен $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$.

Продифференцируем это уравнение по времени t:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\rho}},$$

где $\dot{\vec{\rho}} = \dfrac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$.

Следовательно

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

В последнем уравнении

$$\frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_r, \ \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_e, \ \dot{\vec{r}} = \vec{v},$$

тогда окончательно получим

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \tag{5.3}$$

Таким образом, абсолютная скорость точки есть векторная сумма векторов переносной и относительной скоростей данной точки.

Теорема Кориолиса

Из вышеприведенного имеем:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

Дифференцируя это уравнение по времени t, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{v}}_r + \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} = \\
&= \frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}\left(\frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}\right) = \\
&= \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}\right).
\end{aligned}$$

С учетом (3.16) получим

$$\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}\right) = \vec{a}_e.$$

Следовательно

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}_r\right),$$

где $2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}_r\right) = \vec{a}_c$ есть ускорение Кориолиса и тогда окончательно получим

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) выражает теорему Кориолиса: абсолютное ускорение точки состоит из относительного ускорения, учитывающего изменение относительной скорости в относительном движении, переносного ускорения, учитывающего изменение переносной скорости в переносном движении, и ускорения Кориолиса, учитывающего изменение относительной скорости за счет переносного движения и переносной скорости за счет относительного движения.

Следствия теоремы Кориолиса

Поскольку $a_c = 2|\vec{\omega}||\vec{v}_r|\sin\left(\widehat{\vec{\omega},\vec{v}_r}\right)$, то ускорение Кориолиса будет равно нулю в следующих случаях:

1) если переносное движение является только поступательным $(\omega = 0)$;
2) если относительная скорость равна нулю $(v_r = 0)$;
3) если $\vec{\omega}\|\vec{v}_r$, тогда $\sin\left(\widehat{\vec{\omega},\vec{v}_r}\right) = 0$.

Правило Жуковского

Для того, чтобы найти направление ускорения Кориолиса, надо вектор относительной скорости точки спроецировать на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, и полученный вектор проекции повернуть в данной плоскости на 90° в сторону переносного вращения.

Задания для самостоятельной работы студентов

Проработать параграфы рекомендованной литературы:

[1] Раздел II, глава 2 § 4, глава 5 §§ 1-4

[2] Раздел II, глава XIII §§ 64-67

[3] Раздел II, глава XIV §§ 111-116

Ответить на вопросы:

1. Дать определения относительного, переносного и абсолютного движений точки, а также скоростей и ускорений для данных движений.
2. Как определяются абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки?
3. Каковы причины возникновения ускорения Кориолиса?
4. Как определяется модуль и направление ускорения Кориолиса?

Решить задачи:

[4] №№ 22.17,23.5, 23.27, 23.46

ЛЕКЦИЯ 6

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

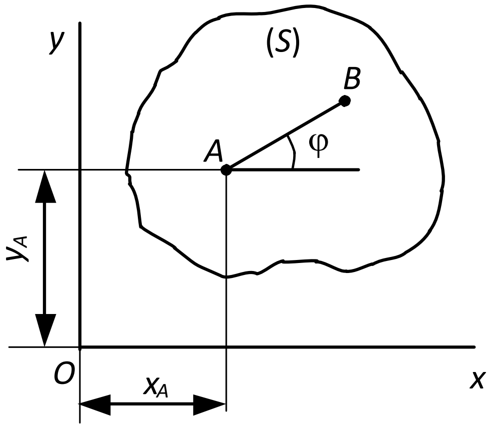
Плоскопараллельное движение твердого тела – это такое движение, при котором все время в процессе движения

а) все точки тела сохраняют одинаковое расстояние до некоторой неподвижной плоскости;

б)векторы скоростей всех точек тела принадлежат плоскостям, параллельным данной неподвижной плоскости.

Примеры: движение утюга на гладильной доске, движение шатуна в кривошипно-шатунный механизме, качения колеса без скольжения вдоль прямолинейной рельсы и т.п..

При рассмотрении плоскопараллельного движения твердого тела, можно изучать движение только тех точек тела, которые принадлежат любому сечению параллельному данной неподвижной плоскости, поскольку для данного сечения все точки всякого перпендикуляра , опущенного к неподвижной плоскости, будут двигаться одинаково.



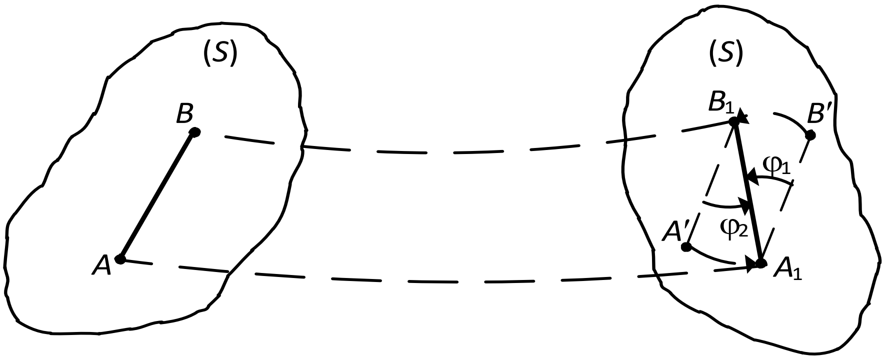
Положение сечения S в плоскости Oxy можно определить в любой момент времени t, для которого известны положение какой-либо точки A (полюса) и значение угла φ, который образует с осью Ox отрезок AB, произвольно проведенный в сечении S.

Следовательно, уравнения плоскопараллельного движения твердого тела должны иметь вид:

$$x_A = x_A(t),\ y_A = y_A(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{6.1}$$

<u>Свойства плоскопараллельного движения тела.</u>

1.Плоскопараллельное движение тела есть совокупность поступательного (переносного) движения вместе с некоторой точкой A, которая принимается за полюс, и вращательного движения вокруг данного полюса.



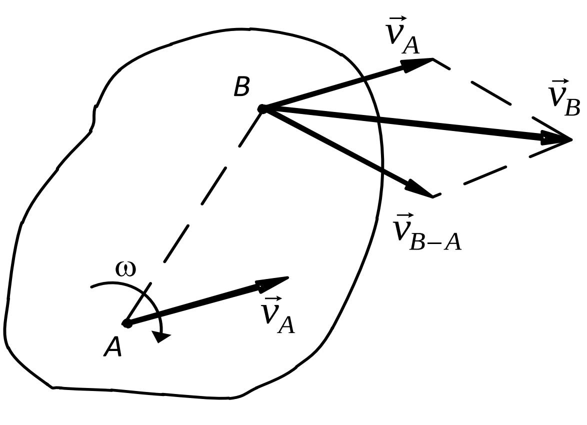
Рассмотрим два положения сечения S в моменты времени t и t_1. Чтобы доказати вышесказанное, надо положение отрезка A_1B_1 получить с положення AB за счет одного поступательного и одного вращательного движения. Выбрав точку A в качестве полюса, осуществим перемещение отрезка AB параллельно самому себе до совмещения т. A с т. A_1, а затем повернем отрезок A_1B' вокруг т. A_1 против хода часовой стрелки до совмещение т. B' с т. B_1 (угол поворота φ_1).

Приведенное свойство плоскопараллельного движения подтверждается уравнениями (6.1), из которых первые два описывают поступательную часть плоскопараллельного движения, а третье – вращательную его часть.

2.Вращательная часть плоскопараллельного движения не зависит от выбора полюса. Это легко доказать, если последовательно осуществить все операции по п. 1, выбрав по полюс т. В. Очевидно, что ни величины улов поворота φ_1 и φ_2, ни направления этих поворотов не зависят от выбора полюса $(\varphi_1 = \varphi_2)$. Следовательно, $\omega_1 = \omega_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ТЕЛА ПРИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Из уравнений (6.1), пользуясь формулами (1.9), (1.10), (3.4), (3.6), для любого момента времени t можно определить величину и направление вектора скорости $\vec{v}_A$ полюса A и величину и направление угловой скорости вращения ω.



Рассматривая движение какой-либо точки *B* тела как сложное и учитывая формулу (5.3), получим:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B-A}, \tag{6.2}$$

где $\vec{v}_A = \vec{v}_e$ есть переносная скорость поступательного движения плоской фигуры вместе с полюсом *A*;

$\vec{v}_{B-A} = \vec{v}_r$ есть скорость относительного движения при вращении точки *B* вокруг полюса *A*, причем $v_{B-A} = \omega|AB|$.

Уравнение (6.2) выражает следующую теорему: скорость любой точки плоской фигуры представляет собой векторную сумму скоростей поступательного движения плоской фигуры вместе с полюсом *A* и вращательного движения данной точки вокруг полюса *A*.

ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИИ СКОРОСТЕЙ ДВУХ ТОЧЕК

Проекции скоростей любых двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны.

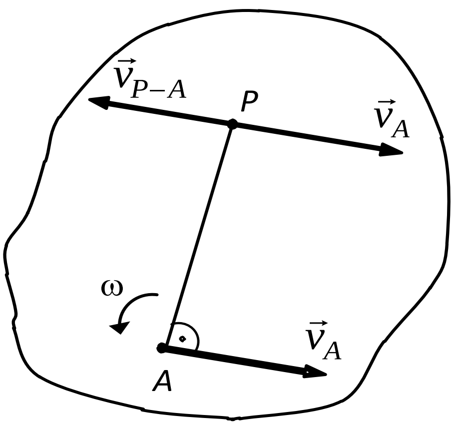
Доказательство этой теоремы очевидно, если спроецировать векторное уравнение (6.2) на прямую *AB*:

$$ПР_{AB}\vec{v}_B = ПР_{AB}\vec{v}_A + ПР_{AB}\vec{v}_{B-A},$$

где $ПР_{AB}\vec{v}_{B-A} = 0$, поскольку $\vec{v}_{B-A} \perp AB$, и, таким образом, имеем:

$$ПР_{AB}\vec{v}_B = ПР_{AB}\vec{v}_A. \tag{6.3}$$

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ



При плоскопараллельном движении всегда найдется такая точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка называется мгновенный центр скоростей (МЦС).

Проведем через т. A перпендикуляр к вектору скорости $\vec{v}_A$ и на этом перпендикуляре выберем т. P на расстоянии

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Докажем, что скорость $v_P = 0$.

Согласно (6.2)

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P-A},$$

где $v_{P-A} = \omega|AP| = v_A$, причем $\vec{v}_{P-A} \uparrow\downarrow \vec{v}_A$, то есть $\vec{v}_{P-A} = -\vec{v}_A$. Следовательно $\vec{v}_P = 0$.

Если при определении скорости любой точки тела выбирать за полюс т. Р, то, согласно (6.2), будем иметь

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{A-P},\ \vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{B-P},\ \ldots,\ \vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{M-P}, \text{ и т. д.}$$

или учитывая, что $\vec{v}_P = 0$, получим

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A-P},\ \vec{v}_B = \vec{v}_{B-P},\ \ldots,\ \vec{v}_M = \vec{v}_{M-P},$$

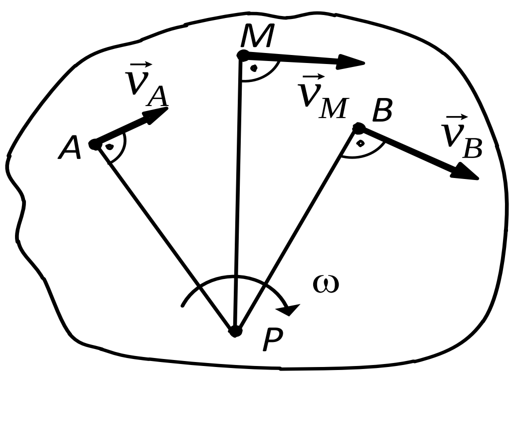
причем

$$v_A = \omega|AP|,\ v_B = \omega|BP|,\ \ldots,\ v_M = \omega|MP|.$$

Отсюда возникает важное соотношение для решения практических задач

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \ldots = \frac{v_M}{MP} = \omega. \qquad (6.4)$$

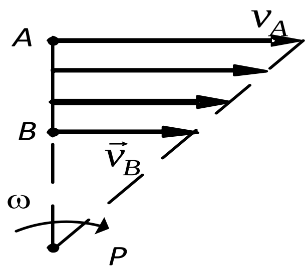
Расстояние от любой точки до мгновенного центра скоростей называется мгновенным радиусом. Поэтому, с учетом соотношения (6.4), бесконечно малое перемещение любой плоской фигуры можно представить как мгновенное вращение вокруг мгновенного центра скоростей, при котором скорости всех точек плоской фигуры перпендикулярны к их мгновенным радиусам.

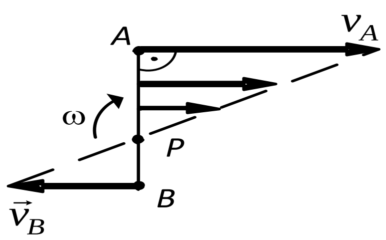


Далее приведем способы определения местонахождения мгновенного центра скоростей.

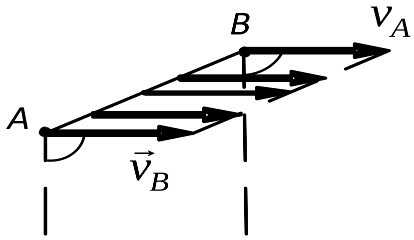
1.Мгновенный центр скоростей есть точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей всех точек плоской фигуры, проведенных через данные точки.

2. Если векторы скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ точек A и B параллельны друг другу и $\vec{v}_A \perp AB$, то для определения мгновенного центра скоростей надо учесть пропорциональность величин скоростей точек их мгновенным радиусам.

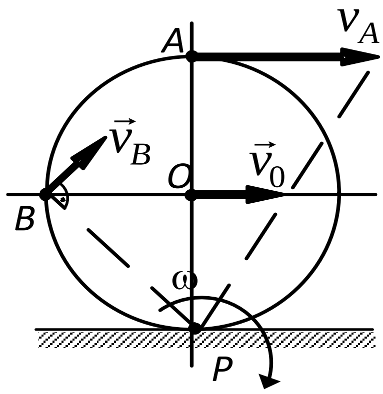




3.Если векторы скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ параллельны друг другу, но не перпендикулярны AB, то мгновенный центр скоростей находится на бесконечности. Следовательно, тело учавствует в мгновенно-поступательном движении, при котором в данное мгновение скорости всех точек тела равны между собой, а угловая скорость вращения $\omega = 0$.



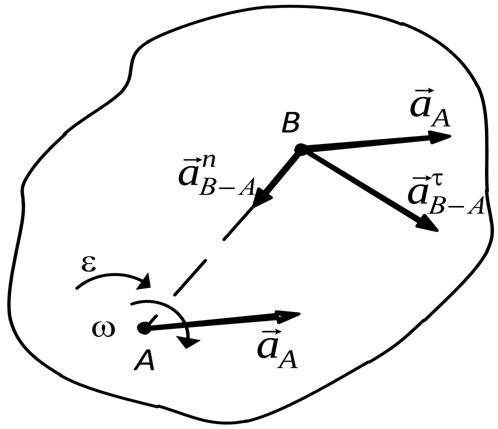
4.При плоскопараллельном движении тела, осуществляемого его качением на неподвижной поверхности без скольжения мгновенным центром скоростей в любой момент времени будет общая точка касания тела данной поверхности.



Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Применяя ту же последовательность рассуждений, использованную в теореме о сложении скоростей (6.2), на основании теоремы Кориолиса о сложении ускорений точки при поступательном переносном движении можно записать:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B-A}, \tag{6.5}$$



где ускорение т. A является для т. B переносным, а ускорение $\vec{a}_{B-A}$ - относительным, то есть тем ускорением, которое будет иметь т. B при вращении вокруг т. A. Поэтому

$$\vec{a}_{B-A} = \vec{a}^\tau_{B-A} + \vec{a}^n_{B-A}, \tag{6.6}$$

причем

$$a^\tau_{B-A} = \varepsilon|BA|, \;\; a^n_{B-A} = \omega^2|BA|. \tag{6.7}$$

Принимая во внимание, что в общем случае $\vec{a}_A = \vec{a}^\tau_A + \vec{a}^n_A$ с учетом равенства (6.6), уравнение (6.5) примет окончательно такой вид:

$$\vec{a}_B = \vec{a}^\tau_A + \vec{a}^n_A + \vec{a}^\tau_{B-A} + \vec{a}^n_{B-A}. \tag{6.8}$$

При решении практических задач построить вектор $\vec{a}_B$, согласно уравнению (6.8), часто затруднительно. Проще вычислить модуль и направление вектора $\vec{a}_B$, спроектировав векторное уравнение (6.8) на выбранные оси координат аналогично уравнениям (2.3), (2.4).

Задания для самостоятельной работы студентов

Проработать параграфы рекомендованной литературы:

[1] Раздел II, глава 3 §§ 1-7, 9

[2] Раздел II, глава XI §§ 52-58

[3] Раздел II, глава XI §§ 85-88, 90, 91

Ответить на вопросы:

1. Какое движение тела называется плоскопараллельным? Приведите примеры.
2. В чем заключаются основные свойства плоскопараллельного движения?
3. Как определяются скорости точек плоских фигур?
4. Что такое мгновенный центр скоростей и как определяется его местоположение?
5. Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры при плоскопараллельном движении?

Решить задачи:

[4] №№ 16.18, 16.29, 16.34, 18.11, 18.22

Литература

1. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: ВШ, 1983.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб.втузов.-20-е изд., стер..- М. Высш. щк., 2010. - 416 с.:ил.

3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, ч. I. – М.: ВШ, 1984.

4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие. 50-е изд.,стер./Под ред. В.А.Пальмова, Д.Р.Меркина – СПб.: Издательство «Лань», 2010, - 448 с.:ил.