УДК 681.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. А. Дмитриева
Донецкий национальный технический университет

Запропоновано підходи, що дозволяють уникати послідовних ділянок роботи багатопроцесорних обчислювальних систем. Виявлено співвідношення між порядками похибок методів чисельного інтегрування і методами інтерполяції, що дозволяють визначити оптимальний вибір методу паралельного обчислення правих частин

В последние годы значительно расширился круг работ по теории параллельных вычислений. Однако приходится признать, что на параллельных машинах используются, главным образом, старые, хорошо исследованные и многократно апробированные последовательные алгоритмы, которые специальным образом реструктуризированы [1-2]. Данная статья является продолжением работ [1-6], которые посвящены разработке и исследованию новых параллельных алгоритмов численного решения систем ОДУ, используемых для моделирования сложных динамических систем с сосредоточенными параметрами.

Рассматривается математическая модель динамической системы, которую можно представить в виде системы ОДУ с постоянными коэффициентами и начальными условиями

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + \overline{f}(t), \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)^t, \tag{1}$$

где $\overline{x}$ - вектор неизвестных сигналов,

$\overline{f}(t)$ - вектор воздействий, $t \in [0, T]$,

A - матрица коэффициентов системы.

Вычисление значения вектора неизвестных $\overline{x}^{n+1}$ на очередном шаге требует предварительного определения значений $\overline{x}^n$. В [3] рассмотрены вопросы, связанные с возможностью параллельной реализации таких алгоритмов. В частности, если система (1) является однородной, т.е. $f_i(t) = 0$, $i=1,2,\ldots m$, тогда, в зависимости от выбранного метода интегрирования, можно искать решение в виде

$$\overline{x}^{n+1} = G\overline{x}^n \tag{2}$$

где G - оператор (матрица) переходов.

Полученный оператор перехода G, который необходимо определить один раз до начала вычислений, позволяет вычислять значения вектора неизвестных параллельно [3,5]. Для методов Рунге-Кутты, например, этот оператор может быть представлен, в зависимости от точности метода, как

$$G = E + \tau A(E + \frac{\tau A}{2}(E + \frac{\tau A}{3}(E + \frac{\tau A}{4}))), \tag{3}$$

который обеспечивает точность 4-го порядка, или, например, как

$$G = E + \tau A(E + \frac{\tau A}{2}(E + \frac{\tau A}{3}(E + \frac{\tau A}{4} * (E - \frac{\tau A}{5}(E - \frac{\tau A}{4}))))), \tag{4}$$

точность которого оценивается 6-ым порядком. При решении неоднородной системы необходимо дополнительно вычислить на каждом шаге значения всех функций $f_i(t)$, $i = \overline{1,m}$ в нескольких промежуточных точках. Поскольку все эти функции могут быть различными, одновременное вычисление их на SIMD компьютере невозможно. В связи с этим в работе предлагаются два различных подхода, позволяющих избежать последовательных участков счета: предварительное вычисление правых частей системы [6] и интерполирование правых частей системы.

Второй подход, который позволит избежать последовательных участков при параллельной реализации системы, основывается на предварительном интерполировании правых частей (1). Основная идея такого подхода заключается в следующем: исходный отрезок решения для (1) $[0,T]$ разбивается на несколько подынтервалов V с шагом, определяющимся из соотношения точности методов численного интерполирования и интегрирования, а затем на каждом таком интервале строится интерполяционный многочлен. Поскольку в качестве интерполяционной функции обычно выбирают многочлены степени не выше 3 - 4-ой, что соответственным образом влияет на точность интерполяции, то необходимо предварительно согласовать порядки точности методов численного интегрирования и предварительного интерполирования.

Если порядок метода численного интегрирования (1) определяется как $O(\tau^{\nu})$, а порядок сплайна как $O(h^4)$, то между шагами двух решающихся задач должно выполняться соотношение $\tau^{\nu} = h^4$. Если порядок точности метода интегрирования $\nu=4$ или более, т.е. между количеством узлов задач интерполирования и интегрирования выполняется соотношение $V \geq N$, то использование интерполирования для восстановления значений правых частей является нерациональным. Проще заранее вычислить значения правых частей на промежутке $[0,T]$. Если же речь идет о методах интегрирования, которые имеют порядок погрешности ниже 4, то тогда $V<N$ и при этом значения V и N можно связать с помощью некоторого коэффициента β, т.е.

$$N = \beta * V \text{, где } \beta > 1. \qquad (5)$$

При этом желательно выбирать множитель β целым, т.к. предпочтительнее, чтобы на одном такте расчета использовались коэффициенты одного интервала сплайна, что значительно упростит алгоритм вычисления и выбор нужного интервала по заданному аргументу.

Если исходить из (5), то узлов интерполирования будет в β раз меньше, чем узлов интегрирования. К тому же оценку погрешности для сплайна порядка $O(h^4)$ можно считать завышенной. Тогда исходная задача может быть сведена к двум подзадачам, каждая из которых легко распараллеливается.

Первая подзадача будет заключаться в нахождении коэффициентов сплайна из сформированной системы линейных уравнений, особенностью которой является ленточный вид матрицы Q. В этом случае систему можно преобразовать так, чтобы ее можно было решать методом встречной прогонки [7]. Трудоемкость решения таких систем на параллельных SIMD структурах линейно зависит от размерности решаемой системы и для системы размерностью k оценивается как $O(k)$. Тогда для нашего случая трудоемкость нахождения коэффициентов сплайн-функции для одного уравнения системы будет оцениваться на уровне $O(4V)$. Тогда для исходной задачи (1) число операций будет оцениваться как $4*V*m$.

Еще один возможный подход к решению полученных систем (14), которые имеют большую размерность и разреженную матрицу коэффициентов, заключается в приведении ее к блочно-диагональной форме с обрамлением [7] и формировании вспомогательной системы значительно меньшей размерности, которая сформирует вектор определяющих величин, или переменных связи. Трудоемкость реализации такого подхода на параллельных вычислительных структурах будет, как и в предыдущем случае, линейно зависеть от размерности системы.

Кроме того, для интерполирования необходимо предварительно вычислить значения правых частей в V точках, которые будут использоваться в качестве исходных данных для построения интерполяционного многочлена, тогда для системы из m уравнений потребуется $m*(4V+V*\Theta_f)$ тактов. Также возникает необходимость в восстановлении значений правых частей по полученным коэффициентам интерполяционных многочленов в N основных и r вспомогательных узлах интегрирования.

При моделировании характеристик параллелизма при подходе, ориентированном на предварительное интерполирование правых частей системы, рассматривались зависимости ускорения S и коэффициента эффективности E. Для интегрирования использовался двухстадийный метод. Лучшие показатели параллелизма достигались для систем с высокими трудоемкостями реализации правых частей.

Поскольку изначально предполагалось, что трудоемкости вычисления правых частей Θ_f являются высокими [5], то оценка трудоемкости всего алгоритма может осуществляться относительно этих значений. Тогда очевидно, что в случае выполнения соотношения (5), предпочтительнее интерполировать правые части, хотя этот подход и сопряжен с алгоритмическими сложностями, но имеет безусловные преимущества.

Литература

1. Feldman L., Dmitrieva O., Gerber S. Abbildung der blockartigen Algoritmen auf die Parallelrechnerarchitekture. 16 Symposium Simulationstechnik ASIM 2002, Rostock, 10.09 bis 13.09 2002. – Erlangen: Gruner Druck, 2002. – P. 359-364.
2. Дмитриева О.А. Анализ параллельных алгоритмов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методами Адамса-Башфорта и Адамса-Моултона// Математическое моделирование, том 12, № 5, 2000. - С. 81-86
3. Дмитриева О.А. Параллельные блочные многошаговые алгоритмы численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. //Научные труды Донецкого государственного технического университета. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем, выпуск 15: - Донецк:, 2000, с. 53-58.
4. Дмитриева О.А. Особенности параллельной реализации динамических моделей.// Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля №5(87) 2005. С. 61-68
5. Фельдман Л.П., Дмитриева О.А. Эффективные методы распараллеливания численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. //Математическое моделирование, том 13, № 7, 2001. – С.66-72.
6. Дмитриева О.А. Об особенностях моделирования линейных динамических систем в многопроцессорных средах// Электронное моделирование, № 2, 2007. С. 63-72
7. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці – К.: Видавнича група BHV , 2006. – 480 с.

Получено 28.05.09