МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА «ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕПЛОФИЗИКА»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по проведению практических занятий и организации СРС по дисциплине «Моделирование теплотехнических агрегатов в стандартных инженерных пакетах»

для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки
22.04.02 «Металлургия» магистерской программы
«Промышленная теплотехника»

Донецк – 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

КАФЕДРА «ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕПЛОФИЗИКА»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий и организации СРС по дисциплине
«Моделирование теплотехнических агрегатов в стандартных инженерных пакетах»

для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки
22.04.02 «Металлургия» магистерской программы
«Промышленная теплотехника»

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры
технической теплофизики
Протокол №12 от 31.05.2018 г.

Донецк – 2018

УДК 669 04.1 (075)

Методические указания по проведению практических занятий и организации самостоятельной работы студентов (СРС) по дисциплине «Моделирование теплотехнических агрегатов в стандартных инженерных пакетах» / Составитель: Кашаев В.В. – Донецк: ДонНТУ, 2018. – 63 с.

Рассмотрены основы моделирования, необходимые для изучения дисциплин в техническом вузе при подготовке магистров по направлению подготовки «Металлургия». Дана математическая формулировка задач стохастического моделирования, сложного теплообмена, в том числе при фазовых переходах, рассмотрены основы теории подобия, а также основы вычислительного компьютерного эксперимента с применением нейтральных разностных схем. Представлен цикл практических работ и с вопросами для самоконтроля.

Составитель: доцент, к.т.н. Кашаев В.В.

Рецензент: доцент, к.т.н. Качура В.В.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данной методическое руководство по курсу «Моделирование теплотехнических агрегатов в стандартных инженерных пакетах» предназначено студентам технических вузов, изучающих моделирование процессов и объектов в металлургии по направлению подготовки «Металлургия». Оптимизация технологических процессов в металлургии, связанных с переносом и использованием тепловой энергии, предъявляет все более сложные требования к расчету тепломассообмена. Для технологических схем, например, получения литого металла, в которых необходимость отвода или перераспределения тепла раньше вообще не принималась во внимание или учитывалась упрощенно с использованием эмпирических соотношений теории подобия, теперь требуется применение достаточно точных методов теплового расчета.

Детальное описание стохастических процессов, тепломассообмена, обеспечивающее надежное совпадение расчетных данных с результатами экспериментов, возможно на основе моделирования и современного вычислительного эксперимента на компьютере. Основная идея решения на компьютере неравновесных задач тепломассообмена заключается в замене исходных дифференциальных уравнений и краевых условий, описывающих теплообмен, конечно-разностными аналогами и в последующем решении алгебраических уравнений с неизвестными значениями определяемых функций в узлах сетки.

Однако численные методы только кажутся простыми и оптимистичными, их применение порождает новые требования и проблемы. Одной из таких проблем является спектр неизбежных ошибок округления, аппроксимации, схемных ошибок, которые искажают решение, сглаживая неоднородности, проявляясь в виде фиктивных источников, стоков и т.д. Уменьшение этих ошибок – непростая задача. Так, например, сгущение конечно-разностной сетки, приводящее к снижению ошибок аппроксимации, одновременно может приводить к возрастанию ошибок округления и схемных ошибок. Применение нейтральных (по отношению к спектру ошибок) конечноразностных схем к уравнениям тепломассопереноса позволяет не только удовлетворять требованиям адекватности вычислительного эксперимента, но и повышать устойчивость счета, эффективность вычислительного алгоритма.

Проведение теплофизических расчетов предполагает знание законов тепломассообмена, инженерных методов расчета, основанных на теории подобия и моделирования. Поэтому в учебном пособии последовательно излагаются в соответствии с существующим образовательным стандартом подготовки бакалавров по направлению «Металлургия» законы теплопроводности, диффузии, конвективного теплообмена и теплообмена излучением. Рассмотрены различные постановки задач теплофизики формирования слитка с учетом фазовых и структурных переходов.

Значительное внимание уделяется выработке практических навыков вычислительного эксперимента. Рассматривается общий алгоритм решения задач тепломассообмена, обсуждаются проблемы аппроксимации, устойчивости. Описаны эффективные методы решения сеточных уравнений, а также даны прошедшие практическую проверку Паскаль- программы их реализации. Основная задача учебного пособия состоит в том, чтобы в рамках курса моделирования не только познакомить студентов технического университета с основами предмета, но и пробудить у них интерес к методам вычислительного эксперимента на компьютере, к пониманию и умению оценки спектра ошибок, применяя известный программный продукт и разрабатывая собственные программы для решения конкретных задач.

Небольшой объем МУ обусловил ограничения при изложении обширных вопросов моделирования в металлургии и заставил прибегнуть к физическому уровню строгости изложения. Сознательный уход от подробного математического обоснования позволил акцентировать внимание на постановке задач и основных проблемах практического решения. Углубленное изучение предмета можно продолжить, пользуясь приведенным списком литературы.

1. Статистическая обработка массива случайных данных

Цель работы: ознакомиться с методами обработки массива случайных данных.

Приборы и принадлежности: калькулятор.

Сведения из теории

Случайной величиной называют переменную величину, которая в результате опыта может принимать различные значения. Случайные величины обычно обозначают большими буквами, например X. Значения случайной величины, которые она принимает в результате опыта, обозначают малыми буквами x_1, x_2, ..., x_n. При массовых испытаниях каждое из возможных значений случайной величины x_1, x_2, ..., x_n может встретиться m_1, m_2, ..., m_n раз. Эти числа называют *частотами.* Весь набор значений случайной величины образует *генеральную совокупность* N_x. Отсеянные из генеральной совокупности N_x значения грубых ошибок образуют *выборку* объемом N. Если всего было проведено N_x опытов, то в результате выборки получаем $\sum_{i=1}^{n} m_i = N$, и отношение m_i/N называют *частостью* или *относительной частотой.*

Распределение случайной величины X (рис. 1.1), определяющей вероятность того, что эта величина примет значения, не превосходящие x_i, т.е. попадет в интервал $(-\infty,\ x_i)$, называется *интегральной функцией распределения* $F(x_i)$:

$$F(x_i) = p(X < x_i). \tag{1.1}$$

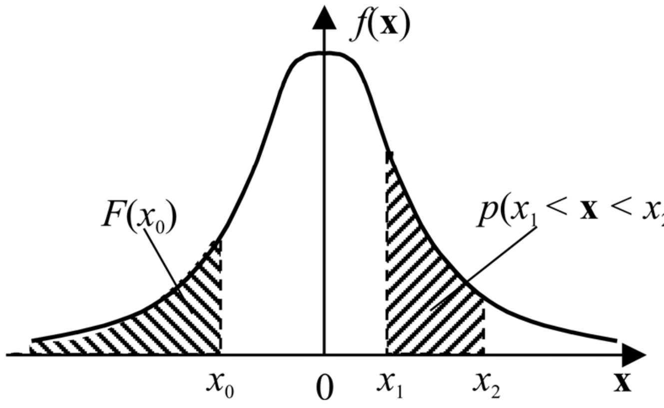

Рис. 1.1. Плотность распределения случайной величины

Плотность вероятности $f\,(\mathbf{x})$ задает распределение случайной величины и количественно оценивается вероятностью события $p(x_1 < X \leq x_2) = f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$**.** Функция распределения $F(\mathbf{x})$ является первообразной для плотности $f(\mathbf{x})$, поэтому

$$p\left(x_1 < \mathbf{x} < x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} f\left(\mathbf{x}\right)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = F\left(\mathbf{x}\right) = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right), \quad (1.2)$$

f(**x**) называют также *дифференциальной функцией распределения.*

Распределение случайной величины представляют *гистограммой частот* – ступенчатой функцией, состоящей из прямоугольников, основанием которой служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты). Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Модой распределения (Mo) называется значение случайной величины X, при котором $f(\mathbf{x})$ принимает максимальное (наиболее вероятное) значение в окрестности какого-либо значения случайной величины **x**.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i. \quad (1.3)$$

Стандартное (или среднее квадратическое) отклонение σ служит мерой рассеяния случайной величины X около ее математического ожидания:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M_{\mathbf{x}}\right)^2}. \qquad (1.4)$$

Другая мера рассеяния – *дисперсия* $Д_{\mathbf{x}}$ характеризует разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формуле $Д_{\mathbf{x}} = \sigma^2$.

В качестве примера в табл. 1.1 представлены результаты выборочного взвешивания отливок (x_i, кг, i = 1, 2, …, n). Было взвешено 100 отливок, т.е. объем выборки n = 100. Требуется построить функцию распределения $F(x)$ и плотность вероятности $f(x)$, а также представить график функции распределения и гистограмму частот.

Таблица 1.1

5,56	5,45	5,48	5,45	5,39	5,37	5,46	5,59	5,61	5,31
5,46	5,61	5,11	5,41	5,31	5,57	5,33	5,11	5,54	5,43
5,34	5,53	5,46	5,41	5,48	5,39	5,11	5,42	5,48	5,49
5,36	5,40	5,45	5,49	5,68	5,51	5,50	5,68	5,21	5,38
5,58	5,47	5,46	5,19	5,60	5,63	5,48	5,27	5,22	5,37
5,33	5,49	5,50	5,54	5,40	5,58	5,42	5,29	5,05	5,79
5,79	5,65	5,70	5,71	5,85	5,44	5,47	5,48	5,47	5,55
5,67	5,71	5,73	4,97	5,35	5,72	5,49	5,61	5,57	5,69
5,54	5,39	5,32	5,21	5,73	5,59	5,38	5,25	5,26	5,81
5,27	5,64	5,20	5,23	5,33	5,37	5,24	5,55	5,60	5,51

Алгоритм группировки выборки

1) Экстремальные значения веса отливок $x_{\min} = 4{,}97$; $x_{\max} = 5{,}85$;

2) число интервалов группирования $s = \log_2 n + 1 = 7{,}62 \approx 8$;

3) ширина интервала группирования

$$h = \left(x_{\max} - x_{\min}\right)/s = \left(5{,}85 - 4{,}97\right)/8 = 0{,}11;$$

4) левый (c_{j-1}) и правый (c_j) концы j-го интервала:

$$c_{j-1} = x_{\min} + \left(j-1\right)h = 4{,}97 + \left(j-1\right)\cdot 0{,}11;$$

$$c_j = x_{\min} + j \cdot h = 4,97 + j \cdot 0,11, \quad j = 1, 2, ..., s;$$

5) середины интервалов группирования $x_j^0 = \left(c_{j-1} + c_j\right)/2$;

6) подсчитываем число выборочных данных v_j, попавших в каждый (j-й) интервал группирования (j = 1, 2, …, s);

7) подсчитываем количество выборочных данных, попавших в j-й интервал группирования h (v_1 + … + v_{jx});

8) подсчитываем выборочную функцию распределения

$$F^{(n)}(x) = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_{ix}}{n},$$

где ix – номер самого правого из интервалов группирования, правый конец которых не превосходит заданного значения x;

9) посчитываем выборочную функцию плотности:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\nu_{k(x)}}{n \cdot h},$$

в которой $k(x)$ – порядковый номер интервала группирования, накрывающего заданную точку x, а $\text{v}_{k(x)}$ – число выборочных данных, попавших в этот интервал;

10) результаты группировки сводим в табл. 1.2.

Таблица 1.2

j – номер интервала группирования	Значения x: $c_{j-1} \le x < c_j$	Середины интервалов x_j^0	v_j	v_1+…+v_{ix}	$F^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x)$
1	$4,97 \le x < 5,08$	5,03	2	0	0,00	0,18
2	$5,08 \le x < 5,19$	5,14	3	2	0,02	0,27
3	$5,19 \le x < 5,30$	5,25	12	5	0,05	1,09
4	$5,30 \le x < 5,41$	5,36	19	17	0,17	1,73
5	$5,41 \le x < 5,52$	5,47	29	36	0,36	2,64
6	$5,52 \le x < 5,63$	5,58	18	65	0,65	1,64
7	$5,63 \le x < 5,74$	5,69	13	83	0,83	1,18
8	$5,74 \le x < 5,85$	5,80	4	96	0,96	0,36
	$x \ge 5,85$	–		100	1,00	–

11) Строим гистограмму (рис. 1.2).

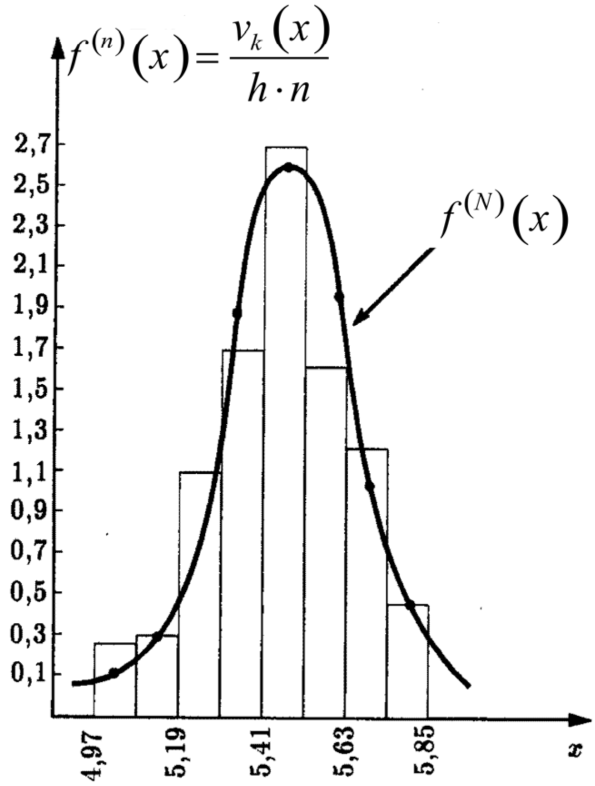

Рис. 1.2. Гистограмма частот

12) Строим функцию распределения (рис. 1.3).

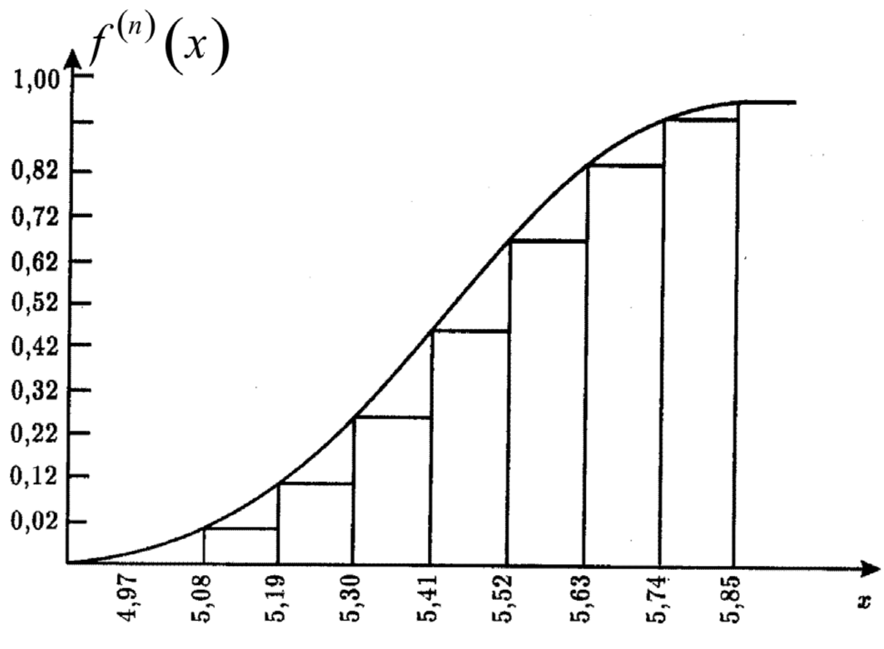

Рис. 1.3. График функции распределения

Выполнение работы

1. Сформировать из табл. 1.1 массив случайных чисел, пользуясь для своего варианта данными поправок из табл. 1.3. Поправку Δx прибавить к первым пяти строкам и вычесть из последних пяти строк табл. 1.1, например, для варианта 6 $\Delta x =$ $= \pm 0{,}06$.

Таблица 1.3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\Delta x \cdot 10^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2. Построить гистограмму частот.
3. Построить график функции распределения.
4. Найти для данного распределения моду, математическое ожидание и дисперсию.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные причины появления неопределенностей. Какие из них являются субъективными, а какие – объективными?
2. Как описывается неопределенность математически?
3. Приведите примеры математического описания неопределенностей в металлургии.
4. Когда в задаче математического моделирования применяется стохастическое описание переменных?
5. Дайте определение функции и плотности распределения.
6. Меры положения и рассеяния кривой распределения. Объясните различие между модой, медианой и математическим ожиданием.

2. Метод наименьших квадратов для уравнения линейной регрессии

Цель работы: ознакомиться с методами обработки массива случайных данных.

Приборы и принадлежности: калькулятор.

Сведения из теории

Целью моделирования любого технологического процесса является установление количественной зависимости выходного параметра от одного или группы *случайных* входных параметров. В функциональной связи $Y = f(X)$ каждому значению *независимой* переменной X отвечает одно или *несколько* вполне определенных значений *зависимой* переменной Y. В этом случае связь между переменными X и Y в отличие от функциональной приобретает статистический характер и называется *корреляционной*.

Простейшей и распространенной зависимостью между величинами X и Y является *линейная регрессия* (рис. 2.1). Оценка *тесноты* или силы *связи* между величинами X и Y осуществляется методами *корреляционного* анализа.

При линейной регрессии от одного параметра для произвольного фиксированного значения x может быть получено несколько значений y.

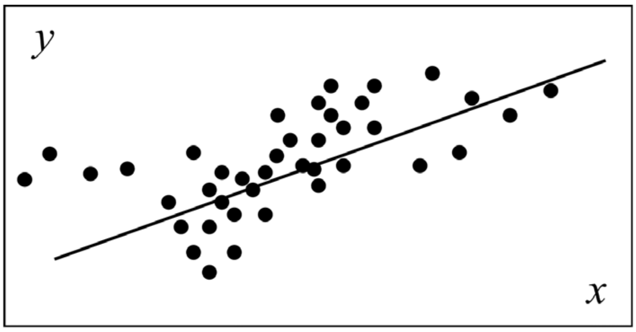

Рис. 2.1. Корреляционное поле зависимости $y = f(x)$

Для линейной зависимости линия регрессии задается уравнением прямой:

$$y = kx + b, \tag{2.1}$$

неизвестные коэффициенты которой определяются по *методу наименьших квадратов*. В соответствии с этим методом квадрат расстояния по вертикали между опытными точками с координатами x_i, y_i и соответствующими точками на линии регрессии должно быть минимальным:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(kx_i + b\right)\right]^2 = \min. \tag{2.2}$$

Из уравнений для определения неизвестных коэффициентов k, b:

$$\frac{\partial}{\partial k}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(kx + b\right)\right]^2 = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(kx + b\right)\right]^2 = 0 \tag{2.3}$$

следует:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - kx_i - b\right)x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - kx_i - b\right) = 0, \tag{2.4}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i + nb. \tag{2.5}$$

С учетом обозначений

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,,\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

следует

$$b = \overline{y} - k\overline{x}, \tag{2.6}$$

$$k=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}. \qquad (2.7)$$

Таким образом, уравнение линейной регрессии принимает вид:

$$y=kx+b=\overline{y}+k\left(x-\overline{x}\right). \qquad (2.8)$$

Выполнение работы

1. Построить для своего номера задания линейную зависимость регрессии по семи экспериментальным точкам, заданным в табл. 2.1., результаты промежуточных расчетов представить в форме табл. 2.2.

Таблица 2.1

№ задания	x_i =	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	y_i =	**0,5**	**1,8**	**2,6**	**2,7**	**4,2**	**4,0**	**5,9**
2		**0,6**	**1,9**	**2,7**	**2,8**	**4,3**	**4,1**	**6,0**
3		**0,7**	**2,0**	**2,8**	**2,9**	**4,4**	**4,2**	**6,1**
4		**0,7**	**2,1**	**2,9**	**3,0**	**4,5**	**4,3**	**6,2**
5		**0,8**	**2,2**	**3,1**	**3,2**	**4,7**	**4,5**	**6,4**
6		**0,9**	**2,3**	**3,2**	**3,3**	**4,8**	**4,7**	**6,6**
7		**0,9**	**2,4**	**3,3**	**3,4**	**4,9**	**4,8**	**6,8**
8		**1,0**	**2,5**	**3,4**	**3,5**	**5,1**	**5,0**	**7,1**
9		**1,0**	**2,6**	**3,5**	**3,7**	**5,3**	**5,2**	**7,3**
10		**1,1**	**2,7**	**3,7**	**4,0**	**5,6**	**5,6**	**7,7**
11		**1,2**	**2,9**	**3,7**	**4,1**	**5,4**	**5,6**	**7,9**
12		**1,1**	**2,7**	**3,7**	**4,0**	**5,6**	**5,6**	**7,7**
13		**1,1**	**2,8**	**3,9**	**4,3**	**5,9**	**6,0**	**8,1**
14		**1,2**	**2,9**	**4,2**	**4,5**	**6,3**	**6,3**	**8,5**
15		**1,2**	**3,0**	**4,4**	**4,7**	**6,6**	**6,6**	**8,9**

Таблица 2.2

x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$
1					
2					
⋮					
7					
$\overline{x} =$	$\overline{y} =$	$\sum(x_i - \overline{x}) =$ $=$	$\sum(x_i - \overline{x})^2 =$ $=$	$\sum(y_i - \overline{y}) =$ $=$	$\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) =$ $=$

2. Построить график $y = f(x)$, на котором представить экспериментальные точки и линию линейной регрессии. Оценить максимальную относительную погрешность отклонения экспериментальной точки от линии регрессии.

Контрольные вопросы

1. Что такое корреляционное поле, линии регрессии?
2. Метод наименьших квадратов для получения уравнения линейной регрессии.
3. Коэффициент корреляции, его смысл.

3. Метод прогонки решения сеточных уравнений

Цель работы: ознакомиться с прямым методом решения сеточных уравнений на компьютере.

Приборы и принадлежности: компьютер.

Сведения из теории

Метод прогонки является модификацией метода исключения Гаусса. В соответствии с этим методом решение для системы линейных алгебраических уравнений

$$AT_{i-1} + BT_i + CT_{i+1} = F_i, \qquad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N, \tag{3.1}$$

ищется в виде линейной функции

$$T_i = \beta_{i+1} T_{i+1} + z_{i+1}, \tag{3.2}$$

неизвестные коэффициенты которой определяются из соотношений:

$$\beta_{i+1} = -\frac{C}{A\beta_i + B}; \qquad z_{i+1} = -\frac{Az_i - F_i}{A\beta_i + B}. \tag{3.3}$$

Формулы (3.1–3.3) дают процедуру решения. Сначала при $i = 2, 3, \ldots, N$ считаются прогоночные коэффициенты (3.3), при этом начальные значения прогоночных коэффициентов β_2, z_2 определяются из граничных условий на левой границе ($i = 1$). Эта операция называется прямой прогонкой. После определения всех β_i, z_i в обратном направлении ($i = N, N-1, \ldots, 2$) с учетом значения параметра T_{N+1}, найденных из граничного условия на правой границе ($i = N + 1$), по формуле (3.2) последовательно находятся неизвестные значения T_i в узловых точках сетки.

При решении задачи стационарной теплопроводности плоского слоя на поверхностях задаются граничные условия конвективного теплообмена:

$$\pm\lambda \frac{\partial\ T}{\partial\ x} = \alpha\ \left(T_{\text{п}} - T_{\text{с}}\right), \tag{3.4}$$

где λ – коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи; $T_{\text{п}}$, $T_{\text{с}}$ – соответственно температуры поверхности и окружающей среды; знаки (+) и (–) соответственно для левой (i = 0) и правой (i = N) границ; N – число разбиений сетки по толщине плоского слоя. Тогда начальные значения прогоночных коэффициентов принимают вид:

$$\beta_1 = \frac{\dfrac{\lambda}{\alpha h}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h}}; \qquad z_1 = \frac{T_{\text{с}}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h}}. \tag{3.5}$$

Значение температуры на правой границе;

$$T_N = \frac{\dfrac{\lambda}{\text{б}h} z_N + T_{\text{с}}}{1 + \dfrac{\lambda}{\text{б}h}\left(1 - \text{в}_N\right)}. \tag{3.6}$$

Алгоритм метода прогонки:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta_1 = \frac{\dfrac{\lambda}{\alpha h}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h}}; \qquad z_1 = \frac{T_{\text{с}}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h}};\\
&\beta_{i+1} = -\frac{C}{A\beta_i + B}; \qquad z_{i+1} = -\frac{Az_i - F_i}{A\beta_i + B},\\
&i = 1,\ \ 2,\ \ \ldots,\ \ N-1;\\
&T_N = \frac{\dfrac{\lambda}{\alpha h} z_N + T_{\text{с}}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h}\left(1 - \beta_N\right)};\\
&T_i = \beta_{i+1} T_{i+1} + z_{i+1},\\
&i = N-1,\ \ N-1,\ \ \ldots,\ \ 0.
\end{aligned}\right\}. \tag{3.7}$$

Пример Паскаль-программы, реализующей решение стационарного уравнения теплопроводности методом прогонки.

```
program Example_3;
const n = 10;
        h = 1/n;
var T: array [0..n] of real;
       beta,zeta : array [1..n] of real;
       aa,bb,cc,ff : real;
       T1,T2,alpha1,alpha2,lambda,lah : real;
       i : integer;
begin
{1. Ввод исходных данных}
       T1:= 100;                  {температура левого конца}
       T2:= 200;                  {температура правого конца}
       alpha1:=10e10;             {большие коэффициенты теплоотдачи}
       alpha2:=10e10;             {обеспечат изотермические границы}
       lambda:=20;

{2. Рабочий блок}
       aa := -1;
       bb := 2;
       cc := -1;
       ff := 0;
       {Прямой ход прогонки}
       lah:= lambda / alpha1 / h;
       beta[1]:= lah/(1. + lah);
       zeta[1]:= T1/(1. + lah);
       for i:=1 to n-1 do
       begin
              beta[i+1]:= -cc/(aa*beta[i] + bb);
              zeta[i+1]:= (ff-aa*zeta[i])/(aa*beta[i] + bb);
       end;
       {Обратный ход прогонки}
       lah:= lambda / alpha2 / h;
       T[n]:= (lah*zeta[n] + T2)/(1. + lah*(1-beta[n]));
       for i:=n-1 downto 0 do
 T[i]:=beta[i+1]*T[i+1]+ zeta[i+1];

{3. Вывод результата}
       i:=0;
       repeat
              writeln(i,' ',T[i]:8:3);
              i:=i+2;
       until i> n;
end.
```

В качестве теста для проверки программы предлагается задача стационарной теплопроводности плоского слоя толщиной δ, на поверхностях которого $x = 0$ и $x = \delta$ поддерживаются температуры соответственно $T_л$ и $T_п$, т.е. заданы граничные условия первого рода ($\alpha = \infty$). Математическая формулировка краевой задачи теплопроводности имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \ , \quad T(x=0) = T_л \ , \quad T(x=\delta) = T_п \ . \tag{3.8}$$

Решением ее является линейное распределение температуры:

$$T = T_л - \frac{T_л - T_п}{\delta} x \ . \tag{3.9}$$

Точное значение температуры в центре слоя $T(x=\delta/2) = (T_л + T_п)/2$.

Решение задачи на регулярной сетке дает систему уравнений с граничными условиями:

$$\left. \begin{array}{c} T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = 0, \\ i = 2, \ \ 3, \ \ ..., \ N; \\ T_1 = T_л; \quad \mathrm{T}_{N+1} = T_п \end{array} \right\} . \tag{3.10}$$

В этом случае при численном решении на регулярной сетке с четным числом разбиений N точное значение температуры в центре слоя $T_{N/2+1} = (T_л + T_п)/2$, а приближенное значение отличается от точного из-за ошибок округления при вычислении прогоночных коэффициентов.

Алгоритм прогонки (3.7) реализуется для этой системы при $N = 4$, $T_л = 100$, $T_п = 200$, $A = C = 1$, $B = –2$ следующим образом:

$$\beta_1 = \frac{\dfrac{\lambda}{\alpha h}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h}} = 0 \ ; \ z_1 = \frac{T_с}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h}} = 100;$$

$$\beta_2 = -\frac{C}{A\beta_1 + B} = -\frac{1}{1\cdot 0 - 2} = \frac{1}{2};$$

$$z_2 = -\frac{Az_1 - F_1}{A\beta_1 + B} = -\frac{1\cdot 100 - 0}{1\cdot 0 - 2} = 50;\ \beta_3 = -\frac{C}{A\beta_2 + B} = -\frac{1}{1\cdot 1/2 - 2} = \frac{2}{3};$$

$$z_3 = -\frac{Az_2 - F_2}{A\beta_2 + B} = -\frac{1\cdot 50 - 0}{-3/2} = \frac{100}{3};$$

$$\beta_4 = -\frac{C}{A\beta_3 + B} = -\frac{1}{1\cdot 2/3 - 2} = \frac{3}{4};$$

$$z_4 = -\frac{Az_3 - F_3}{A\beta_3 + B} = -\frac{1\cdot 100/3 - 0}{1\cdot 2/3 - 2} = 25;$$

$$T_4 = \frac{\frac{\lambda}{\alpha h} z_5 + T_с}{1 + \frac{\lambda}{\alpha h}\left(1 - \beta_5\right)} = T_п = 200;$$

$$T_3 = \beta_4 T_4 + z_4 = \frac{3}{4}\cdot 200 + 25 = 175;$$

$$T_2 = \beta_3 T_3 + z_3 = \frac{2}{3}\cdot 175 + \frac{100}{3} = 150;$$

$$T_1 = \beta_2 T_2 + z_2 = \frac{1}{2}\cdot 150 + 50 = 125;\ T_0 = T_л = 100.$$

Выполнение работы

Ввести в программу исходные данные: $T_л = 0$ и $T_п$ в соответствии с табл. 3.1

Таблица 3.1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T_п$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150

2. Проверить работоспособность алгоритма метода прогонки, т.е. просчитать «вручную» температуры в узловых точках сетки при $N = 4$.

3. Определить относительную погрешность в центральной точке слоя численного $T_{N/2+1}$ и аналитического $T\left(x=\delta/2\right)=$ $=\left(T_{\text{л}}+T_{\text{п}}\right)/2\equiv T_{\text{п}}/2$ решений по формуле:

$$R=\left|\frac{T_{N/2+1}-T_{x=\delta/2}}{T_{x=\delta/2}}\right|\cdot 100\,\%=\left|\frac{2T_{N/2+1}}{T_{\text{п}}}-1\right|\cdot 100\,\%\,.$$

4. Провести вычислительный эксперимент на сгущающейся сетке, построить график зависимости $R(N)$ и определить, при каких числах разбиений N погрешность округления R вычисления прогоночных коэффициентов начинает превышать 5 %.

5. Внести коррективы в программу, предусмотрев в ней расчет прогоночных коэффициентов (3.3) с двойной точностью. Провести вычислительный эксперимент на сгущающейся сетке, построить график зависимости $R(N)$ и убедиться на графике в эффективности этой коррективы.

Контрольные вопросы

1. Конечно-разностное представление первой и второй производных.
2. Явная и неявная схемы аппроксимации уравнения теплопроводности.
3. Оценка ошибок аппроксимации уравнения теплопроводности.
4. Соотношение между временным и пространственным шагами сетки, обеспечивающее минимальную ошибку аппроксимации уравнения теплопроводности.
5. Векторно-матричное представление сеточных уравнений.
6. Метод прогонки решения матричных уравнений и его реализация на компьютере.
7. Запись основных операторов программирования на языке Паскаль.

4. Метод последовательной линейной верхней релаксации решения сеточных уравнений

Цель работы: ознакомиться с итерационным методом решения сеточных уравнений на компьютере.

Приборы и принадлежности: компьютер.

Сведения из теории

Итерационные методы дают решение сеточных уравнений в виде предела последовательности однообразных итераций. Основное их преимущество перед прямыми методами заключается в самокорректирующемся решении, дающем минимальные ошибки округления. Привлекает в них и простота вычислительного алгоритма.

Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$AT_{i-1} + BT_i + CT_{i+1} = F_i, \qquad i = 2,\ 3,\ ...,\ N \tag{4.1}$$

в соответствии с итерационным методом последовательных смещений (методом Зейделя) определяется по итерационной процедуре:

$$\begin{gathered} T_i^{(q)} = \frac{1}{B}\left(F_i - A \cdot T_{i-1}^{(q)} - C \cdot T_{i+1}^{(q-1)}\right), \\ i = 2,\ 3,\ \ldots,\ N, \quad q = 1,\ 2,\ 3,\ ..., \end{gathered} \tag{4.2}$$

где q – номер итерации. Расчет по формуле (4.2) продолжается до тех пор, пока искомое решение не будет удовлетворять требуемой наперед заданной точности ε:

$$\left|1 - \frac{T_i^{(q-1)}}{T_i^{(q)}}\right|_{\max} \le \varepsilon\ . \tag{4.3}$$

Недостатком метода Зейделя является медленная сходимость, поэтому для ускорения сходимости метод последовательной линейной верхней релаксации:

$$T_i^{(q)} = \frac{\gamma}{B}\left(F_i - A\cdot T_{i-1}^{(q)} - C\cdot T_{i+1}^{(q-1)}\right) + (1-\gamma)\cdot T_i^{(q-1)},$$

$$i = 1, \ldots N{-}1,\ q = 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

где γ – параметр релаксации. При $\gamma = 1$ итерационные процедуры (4.2) и (4.4) совпадают. Введение параметра верхней релаксации $1 \le \gamma \le 2$ позволяет ускорить сходимость итерационного процесса (4.4), причем наибольшая скорость сходимости имеет место при оптимальном значении параметра релаксации $\gamma = \gamma_{\text{опт}}$. Последнее зависит от порядка системы и может быть вычислено в области с регулярной сеткой с числом разбиений N по формуле:

$$\gamma_{\text{опт}} = \frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{\pi}{2N}\left(2-\sin\frac{\pi}{2N}\right)}}, \tag{4.5}$$

где ε – требуемая точность.

В качестве теста для проверки программы предлагается задача стационарной теплопроводности плоского слоя толщиной δ, на поверхностях которого $x = 0$ и $x = \delta$ поддерживаются температуры соответственно $T_{\text{л}}$ и $T_{\text{п}}$, т.е. заданы граничные условия первого рода ($\alpha = \infty$). Математическая формулировка краевой задачи теплопроводности имеет вид:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0, \quad T(x=0) = T_{\text{л}}, \quad T(x=\delta) = T_{\text{п}}. \tag{4.6}$$

Решением ее является линейное распределение температуры:

$$T = T_{\text{л}} - \frac{T_{\text{л}} - T_{\text{п}}}{\delta}x. \tag{4.7}$$

Точное значение температуры в центре слоя $T\left(x=\delta/2\right)=\left(T_{\text{л}}+T_{\text{п}}\right)/2$.

Решение задачи на регулярной сетке дает систему уравнений с граничными условиями:

$$\left.\begin{array}{l} T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}=0, \\ i=1,\ \ 2,\ \ ...,\ \ N-1; \\ T_1=T_{\text{л}};\quad \mathrm{T}_{N+1}=T_{\text{п}} \end{array}\right\}. \tag{4.8}$$

В этом случае при численном решении на регулярной сетке с четным числом разбиений N точное значение температуры в центре слоя $T_{N/2+1}=\left(T_{\text{л}}+T_{\text{п}}\right)/2$, а приближенное значение отличается от точного из-за ошибок округления.

В табл. 4.1 представлена реализация итерационного алгоритма при N = 4, $T_{\text{л}}$ = 200, $T_{\text{п}}$ = 100, A = C = 1, B = –2, γ = 1 для первых пяти итераций.

Таблица 4.1

Значения переменных при решении задачи итерационным методом

Номер итерации	Номер точки сетки i				
	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	200	100	50	75	100
2	200	125	100	100	100
3	200	150	125	112,5	100
4	200	162,5	137,5	118,75	100
5	200	168,75	143,75	121,875	100
... точное решение	200	... 175	... 150	... 125	100

Относительная ошибка в точке i = 2: $1-T_1^{(4)}/T_1^{(5)}=1-$ $-162{,}5/168{,}75=0{,}037$, что составляет 3,7 %, это далеко от требуемой точности, которую выбирают в пределах $\varepsilon=10^{-3}...10^{-4}$, поэтому итерационный процесс необходимо продолжить.

Пример Паскаль-программы, реализующей метод последовательной линейной верхней релаксации.

```
program Example_4;
const n = 4;
        h = 1/n;
        pi =3.141592654;
        epsilon = 1e-3;
        gamma = 2/(1+sqrt(sin(pi/2/n*(2-sin(pi/2/n)))));
var T,Tx: array [0..n] of real;
       aa,bb,cc,ff,delta : real;
       i,iter : integer;
begin
{1. Ввод исходных данных}
       for i:=0 to n-1 do T[i]:= 100;
       T[n]:= 200;
       Tx[0]:=T[0];
       Tx[n]:=T[n];
{2. Рабочий блок}
       aa := 1;
       bb := -2;
       cc := 1;
       ff := 0;
       {Релаксация}
       iter:=1;
       repeat
        delta:=0;
        for i:=1 to n-1 do
        begin
       Tx[i]:= gamma/bb*(ff-aa*Tx[i-1]-
                              cc*T[i+1])+(1-gamma)*T[i];
       if abs(1-T[i]/Tx[i]) > delta
       then delta:=abs(1-T[i]/Tx[i]);
        end;
        T := Tx;
        iter := iter + 1
       until (delta < epsilon) or (iter > 100);

{3. Вывод результата}
       i:=0;
       repeat
              writeln(i,' ',T[i]:8:3,T[i]:8:3);
              i:=i+2;
       until i > n;
       writeln(iter);
end.
```

Выполнение работы

1. Ввести в программу исходные данные: $T_л = 0$ и $T_п$ в соответствии с табл. 4.2

Таблица 4.2

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T_п$	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**

2. Проверить работоспособность алгоритма метода последовательной линейной верхней релаксации, т.е. просчитать «вручную» температуры в узловых точках сетки при $N = 4$ на первых пяти итерациях.

3. Определить относительную погрешность в центральной точке слоя численного $T_{N/2+1}$ и аналитического $T\left(x=\delta/2\right)= =\left(T_л+T_п\right)/2\equiv T_п/2$ решений по формуле:

$$R=\left|\frac{T_{N/2+1}-T_{x=\delta/2}}{T_{x=\delta/2}}\right|\cdot 100\,\%=\left|\frac{2T_{N/2+1}}{T_п}-1\right|\cdot 100\,\%.$$

4. Провести вычислительный эксперимент на сгущающейся сетке при фиксированной погрешности $\varepsilon = 10^{-3}$, построить график зависимости $R(N)$.

5. При фиксированной сетке (N) и наперед заданной погрешности (ε) провести расчеты с варьированием параметра релаксации в интервале $1<\gamma<2$, построить график зависимости $q(\gamma)$.

Контрольные вопросы

1. Оценка ошибок аппроксимации уравнения теплопроводности.

2. Соотношение между временным и пространственным шагами сетки, обеспечивающее минимальную ошибку аппроксимации уравнения теплопроводности.

3. Векторно-матричное представление сеточных уравнений.

4. Метод последовательной линейной верхней релаксации и его реализация на компьютере.

5. Запись основных операторов программирования на языке Паскаль.

5. Расчет времени охлаждения плоского слоя

Цель работы: ознакомиться с численным методом решения задач нестационарной теплопроводности.

Приборы и принадлежности: компьютер.

Сведения из теории

При охлаждения плоского слоя толщиной 2δ рассматривается половина слоя толщиной δ с адиабатной левой и охлаждаемой правой поверхностями. Математическая формулировка краевой задачи нестационарной теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial\ T}{\partial\ \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (5.1)$$

$$T\ (\tau = 0) = T_0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\ ,\ -\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta} = \alpha\ (T_{\text{п}} - T_{\text{с}}), \qquad (5.2)$$

где T – температура; τ – время; a – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи; $T_{\text{п}}$, $T_{\text{с}}$ – температуры поверхности и окружающей среды.

В частном случае, в соответствии с методом регулярного теплового режима пренебрегают внутренним тепловым сопротивлением по сравнению с внешним. Решение задачи (5.1–5.2) принимает вид

$$\theta = \theta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{Bi}\cdot\mathrm{Fo}}, \qquad (5.3)$$

где $\theta = T - T_{\text{с}}$ – избыточная температура; $\mathrm{Bi} = \alpha \cdot \delta / \lambda$, $\mathrm{Fo} = a \cdot \tau / \delta^2$ – числа Био и Фурье. На практике решение (5.3) используется уже при Bi < 0,1.

Для численного решения задачи на расчетную область наносится регулярная сетка с координатами узлов:

$$x_i = ih_x; \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N; \quad h_x = \frac{H_x}{N};$$

$$\tau_k = kh_\tau; \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{5.4}$$

где N – число разбиений по толщине слоя δ; h_x, h_τ – соответственно шаги пространственной (по x) и временной (по τ) сеток; i, k – номера узловых точек в направлении координат x, τ.

Уравнение теплопроводности (5.1) может быть представлено в дискретном виде по *явной схеме*, в соответствии с которой вторая производная по координате записывается на текущем k-м временном слое с известным распределением температуры (рис. 5.1). В результате из аппроксимации уравнения (5.1)

$$\frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{h_\tau} = a\frac{T_{i+1,k} - 2T_{i,k} + T_{i-1,k}}{h_x^2}, \tag{5.5}$$

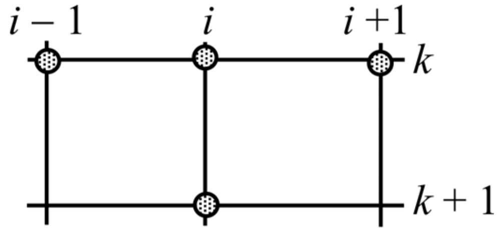

Рис. 5.1. Сеточный шаблон явной схемы 1-го порядка точности

получается явная формула для температуры:

$$T_{i,k+1} = T_{i,k}\left(1 - \frac{2ah_\tau}{h_x^2}\right) + \frac{ah_\tau}{h_x^2}\left(T_{i+1,k} + T_{i-1,k}\right), \tag{5.6}$$

вычисления по которой устойчивы при следующем ограничении на шаг сетки по времени.

$$h_\tau < h_x^2 / (2a). \tag{5.7}$$

При *неявной схеме* вторая производная по координате записывается на «новом» k-м временном слое с неизвестным распределением температуры (рис. 5.2):

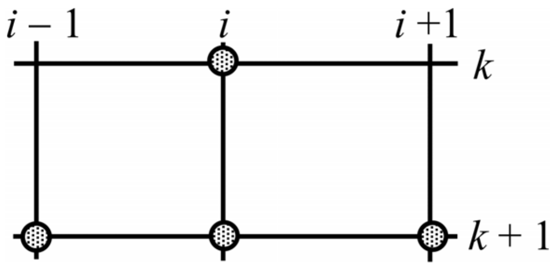

Рис. 5.2. Сеточный шаблон неявной схемы 1-го порядка точности

$$\frac{T_{i,k+1}-T_{i,k}}{h_\tau}=a\frac{T_{i+1,k+1}-2T_{i,k+1}+T_{i-1,k+1}}{h_x^2}\,. \qquad (5.8)$$

В результате получаем систему уравнений (N–1)-го порядка:

$$A\,T_{i-1,k}+B\,T_{i,k}+C\,T_{i+1,k}=F_i\;,\quad i=1,\;2,\;...,\;N-1\,, \qquad (5.9)$$

где $A=C=-\dfrac{ah_\tau}{h_x^2};\quad B=1+\dfrac{2ah_\tau}{h_x^2};\qquad F_i=T_{i,k}\,.$

Схема абсолютно устойчива при больших, чем в ограничении (5.7), шагах по времени, однако с увеличением шага по времени возрастают ошибки аппроксимации.

С применением формулы односторонней разности записывается граничное условие (5.2) при $x=\delta$:

$$-\lambda\frac{T_N-T_{N-1}}{h_x}=\alpha\left(T_N-T_\text{С}\right), \qquad (5.10)$$

из которого определяется температура на поверхности тела:

$$T_N=-\frac{T_\text{С}+\dfrac{\lambda}{\alpha h_x}T_{N-1}}{1+\dfrac{\lambda}{\alpha h_x}}\,, \qquad (5.11)$$

а также граничное условие при $x=0$

$$T_0=T_1\,. \qquad (5.12)$$

Алгоритм решения задачи по явной схеме представлен на рис. 5.3.

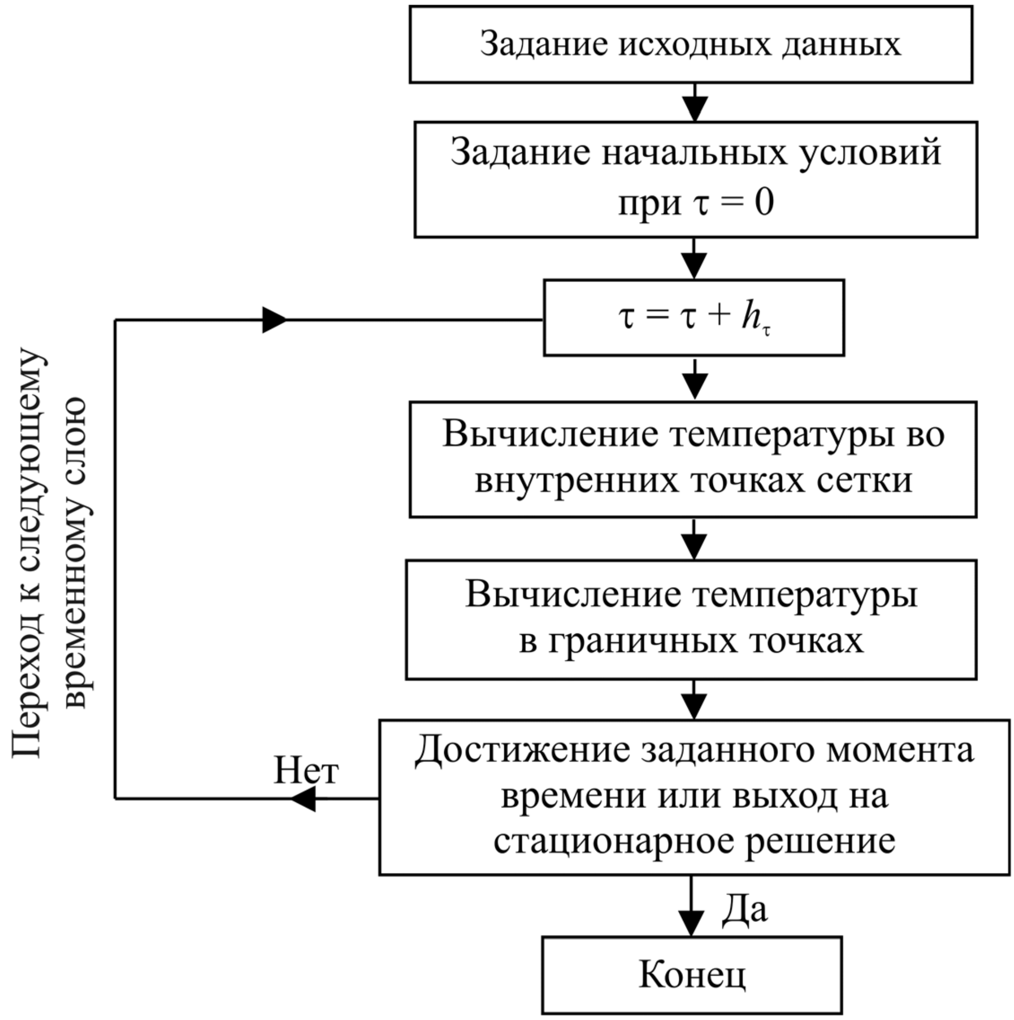

Рис. 5.3. Алгоритм решения задачи теплопроводности по явной схеме

Пример Паскаль-программы, реализующей расчет времени охлаждения плоского слоя по явной схеме.

```
program Example_5_1;
const n = 10;
        lx = 0.1;
        hx = lx/n;
        epsilon = 1e-6;
var T,TT: array [0..n] of real;
       Tstart,Tc1,Tc2,a,lambda,rho,cp,delta,tau,htau,aht:real;
       i  : integer;
procedure PrintArray;
begin
       i:=0;
       repeat
              writeln(i,' ',T[i]:8:3);
              i:=i+2;
       until i> n;
```

```
end;
begin
{1. Ввод исходных данных}
      Tc1:= 100;
      Tc2:= 200;
      Tstart :=100;
      lambda:=20;
      rho:=7800;
      cp:=500;
      a:=lambda/cp/rho;
      for i:=0 to n do T[i]:= Tstart;
      tau := 0;
      htau := sqr(hx)/6/a;
      aht:=a*htau/sqr(hx);
{2. Рабочий блок}
      TT[0]:=Tc1;
      TT[n]:=Tc2;
      repeat
            {2.1. Определение температуры
             на следующем временном слое}
            tau:=tau + htau;
            for i:=1 to n-1 do
             TT[i]:=T[i]*(1-2*aht)+(T[i-1]+T[i+1])*aht;
            {2.2 Определение различия решений
             на k-ом и k+1-ом временных слоях}
            delta := 0;
            for i:=0 to n do
                  if abs(T[i]-TT[i])>delta
                  then delta := abs(T[i]-TT[i]);
            T := TT;
      until delta <= epsilon;
{3. Вывод результата}
      writeln('Время установления стационара:',tau);
      writeln('Распределение температуры по слою');
      PrintArray;
end.
```

Алгоритм решения задачи по неявной схеме представлен на рис. 5.4.

Пример Паскаль-программы, реализующей расчет времени охлаждения плоского слоя по неявной схеме.

```
program Example_5_2;
const n = 10;
       hx = 0.1/n;
       epsilon = 1e-6;
var T,TT: array [0..n] of real;
      beta,zeta : array [1..n] of real;
      aa,bb,cc,ff : real;
      Tstart,Tc1,Tc2,alpha1,alpha2,lah : real;
      a,lambda,rho,cp :real;
      delta, tau, htau : real;
```

```
        i : integer;

procedure PrintArray;
begin
        i:=0;
        repeat
                writeln(i,' ',T[i]:8:3);
                i:=i+2;
        until i> n;
end;

begin
{1. Ввод исходных данных}
        Tc1:= 100;
        Tc2:= 200;
        Tstart :=100;
        alpha1:=10e-10;
        alpha2:=10e10;
        lambda:=20;
        rho:=7800;
        cp:=500;
        a:=lambda/cp/rho;
        for i:=0 to n do TT[i]:= Tstart;
        tau := 0;
        htau := sqr(hx)/6/a;

{2. Рабочий блок}
        aa := –a*htau/sqr(hx);
        bb := 1 + 2*a*htau/sqr(hx);
        cc := –a*htau/sqr(hx);
        repeat
        {2.1. Определение температуры
         на следующем временном слое}
                {Прямой ход прогонки}
                tau:=tau + htau;
                lah:= lambda / alpha1 / hx;
                beta[1]:= lah/(1. + lah);
                zeta[1]:= Tc1/(1. + lah);
                for i:=1 to n-1 do
                begin
                        ff := TT[i];
                        beta[i+1]:= –cc/(aa*beta[i] + bb);
                        zeta[i+1]:= (ff-
aa*zeta[i])/(aa*beta[i]+bb);
                end;
                {Обратный ход прогонки}
                lah:= lambda / alpha2 / hx;
                T[n]:= (lah*zeta[n] + Tc2)/(1. + lah*(1-
beta[n]));
                for i:=n-1 downto 0 do
                 T[i]:= beta[i+1]*T[i+1] + zeta[i+1];
                {2.2. Определение различия решений
                 на k-ом и k+1-ом временных слоях}
```

```
              delta := 0;
              for i:=0 to n do
               if abs(T[i]-TT[i])>delta
               then delta := abs(T[i]-TT[i]);
              for i:=0 to n do TT[i]:=T[i];
       until delta <= epsilon;

{3. Вывод результата}
       writeln('Результаты расчёта');
       writeln('Время установления стационара:',tau);
       writeln('Распределение температуры по слою');
       PrintArray;
end.
```

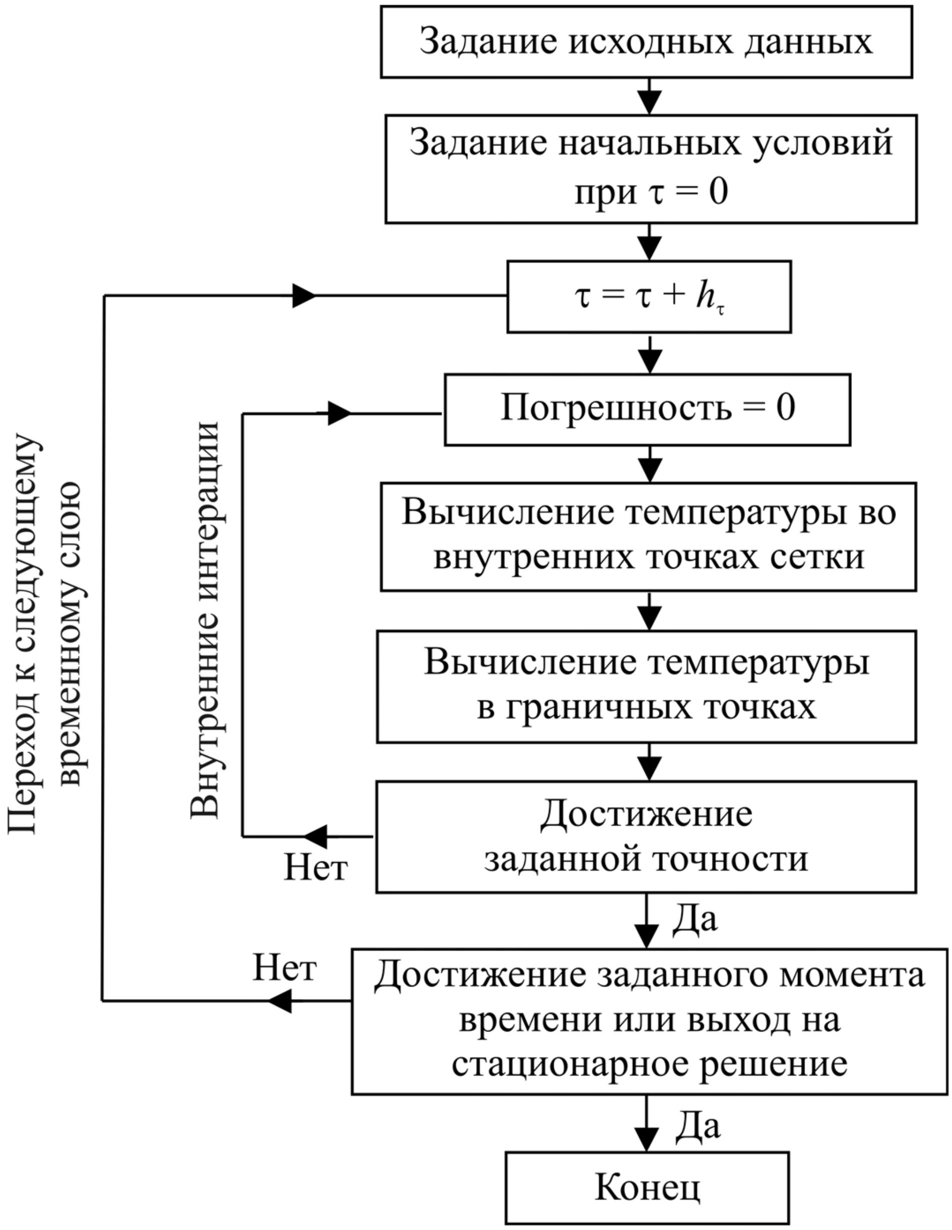

Рис. 5.4. Алгоритм решения задачи теплопроводности по неявной схеме

Выполнение работы

1. Составить Паскаль-программу расчета времени охлаждения плоского слоя по явной и неявной схемам.

2. Ввести в программу исходные данные: полутолщину слоя $\delta = 2$ см; температуру окружающей среды $T_с = 0$ °С, теплофизические свойства стали: коэффициент теплопроводности $\lambda = 50$ Вт/(м·К), коэффициент температуропроводности $a = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, коэффициент теплоотдачи и начальную температуру слоя в соответствии с табл. 5.1

Таблица 5.1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\alpha \cdot 10^{-1}$ Вт/(м^2·К)	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**
$T_0 \cdot 10^{-1}$ °С	**50**	**52**	**54**	**56**	**58**	**60**	**62**	**64**	**66**	**68**	**70**	**72**	**74**	**76**	**78**

3. Определить по методу регулярного теплового режима время охлаждения слоя ($\tau_к$) до температуры, отличающейся от температуры окружающей среды на 1 %. Построить график зависимости $T(\tau)$ (аналитическое решение).

4. Провести вычислительный эксперимент по явной схеме на сгущающейся пространственной сетке (шаг временной сетки выбирать равным $h_\tau = 0{,}9 \cdot h_x^2 / (2a)$) и определить число разбиений N построением на графике зависимостей $T(0,\tau)$ при различных числах N. Сравнить времена охлаждения, полученные аналитическим и численным методами на различных сетках. Построить (при выбранном N) график зависимости $T(x)$ для четырех-пяти моментов времени в интервале $0 < \tau < \tau_к$.

5. Вычислительным экспериментом при выбранном числе N провести сравнительный анализ эффективности явной и неявной схем (в неявной схеме шаг временной сетки увеличивать по сравнению с шагом в п. 4). Сравнение провести по времени счета одного варианта, обеспечивающего примерно одинаковую погрешность, оцениваемую по графику зависимости $T(0,\tau)$.

Контрольные вопросы

1. Конечно-разностное представление первой и второй производных.

2. Явная и неявная схемы аппроксимации уравнения теплопроводности.

3. Оценка ошибок аппроксимации уравнения теплопроводности.

4. Соотношение между временным и пространственным шагами сетки, обеспечивающее минимальную ошибку аппроксимации уравнения теплопроводности.

5. Аппроксимация граничных условий теплообмена по формулам первого и второго порядков точности.

6. Векторно-матричное представление сеточных уравнений.

7. Запись основных операторов программирования на языке Паскаль.

6. Расчет времени охлаждения блюма

Цель работы: ознакомиться с численным методом решения двумерных задач нестационарной теплопроводности.

Приборы и принадлежности: компьютер.

Сведения из теории

Охлаждение бруса квадратного сечения (блюмса) размерами 2δ·2δ симметрично относительно осей координат, выбранных в центре бруса. Поэтому рассматривается четверть сечения бруса с охлаждаемой поверхностью и адиабатными осями симметрии (рис. 6.1). Математическая формулировка краевой задачи нестационарной теплопроводности в этом случае имеет вид:

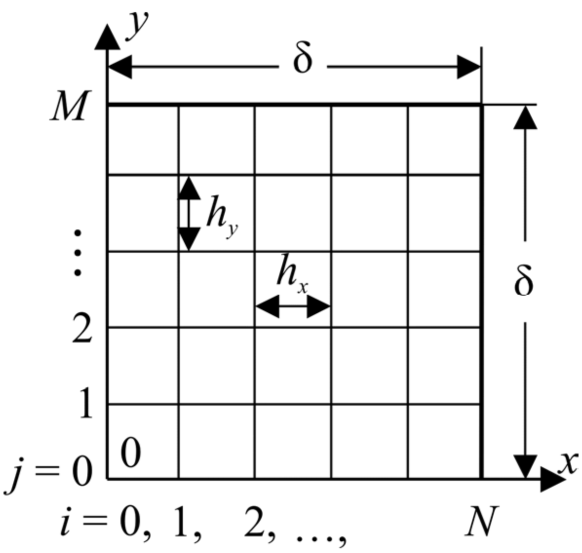

Рис. 6.1. Разбиение расчетной области

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered} T(x, y, 0) = T_0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \\ -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=\delta} = \alpha\left(T_п - T_с\right), \end{gathered} \tag{6.2}$$

где T – температура; τ – время; a – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи; $T_п$, $T_с$ – температуры поверхности и окружающей среды.

В частном случае, в соответствии с методом регулярного теплового режима пренебрегают внутренним тепловым сопротивлением по сравнению с внешним. Решение задачи (6.1–6.2) принимает вид:

$$\theta = \theta_0 e^{-\mathrm{Bi}\cdot\mathrm{Fo}}, \tag{6.3}$$

где $\theta = T - T_c$ – избыточная температура; $\mathrm{Bi} = \alpha \cdot \delta / \lambda$, $\mathrm{Fo} = = a \cdot \tau / \delta^2$ – числа Био и Фурье. На практике решение (6.3) используется уже при $\mathrm{Bi} < 0{,}1$.

Для численного решения задачи на расчетную область наносится регулярная сетка с координатами узлов:

$$x_i = ih_x;\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ N;\quad h_x = \delta/N,$$

$$y_j = jh_y;\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ M;\quad h_y = \delta/M, \tag{6.4}$$

$$\tau_k = kh_\tau;\quad k = 1,\ 2,\ 3,\ ...,$$

где N, M – числа разбиений расчетной области соответственно в направлении координат x, y; h_x, h_y, h_τ – соответственно шаги пространственной (по x, y) и временной (по τ) сеток; i, j, k – номера узловых точек в направлении координат x, y, τ.

Уравнение теплопроводности (6.1) может быть представлено в дискретном виде по *явной схеме*, в соответствии с которой вторая производная по координатам записывается на текущем k-м временном слое с известным распределением температуры (рис. 6.2). В результате аппроксимации уравнения (6.1)

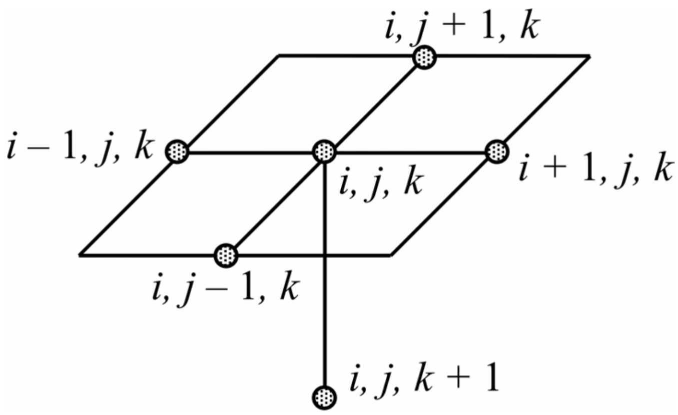

Рис. 6.2. Сеточный шаблон явной схемы

$$\frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{h_\tau} =$$
$$= a\left(\frac{T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}}{h_x^2} + \frac{T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j+1,k}}{h_y^2}\right) \tag{6.5}$$

получается явная формула для температуры:

$$T_{i,j,k+1} = T_{i,j,k}\left(1 - \frac{2ah_\tau}{h_x^2} - \frac{2ah_\tau}{h_y^2}\right) + \frac{ah_\tau}{h_x^2}\left(T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k}\right) +$$
$$+ \frac{ah_\tau}{h_y^2}\left(T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k}\right), \tag{6.6}$$

вычисления по которой устойчивы при следующем ограничении на шаг сетки по времени:

$$h_\tau < h_x^2 h_y^2 \Big/ \left[2a\left(h_x^2 + h_y^2\right)\right]. \tag{6.7}$$

С применением формул односторонней разности записываются граничные условия (2) на поверхностях блюмса:

$$-\lambda \frac{T_{N,j} - T_{N-1,j}}{h_x} = \alpha\left(T_{N,j} - T_{\text{c}}\right),$$
$$-\lambda \frac{T_{i,M} - T_{i,M-1}}{h_y} = \alpha\left(T_{i,M} - T_{\text{c}}\right), \tag{6.8}$$

из которых определяется температура на поверхностях блюмса:

$$T_{N,j} = \frac{T_{\text{c}} + \dfrac{\lambda}{\alpha h_x} T_{N-1,j}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h_x}}, \; j = 1, \; \ldots, \; M - 1;$$

$$T_{i,M} = \frac{T_{\text{c}} + \dfrac{\lambda}{\alpha h_y} T_{i,M-1}}{1 + \dfrac{\lambda}{\alpha h_y}}, \;\; i = 0, \; \ldots, \; N - 1, \tag{6.9}$$

а также граничные условия на осях симметрии

$$T_{0,j} = T_{1,j},\ \ j = 1,\ \ldots,\ M-1;,\ T_{i,0} = T_{i,1},\ \ i = 1,\ \ldots,\ N-1. \quad (6.10)$$

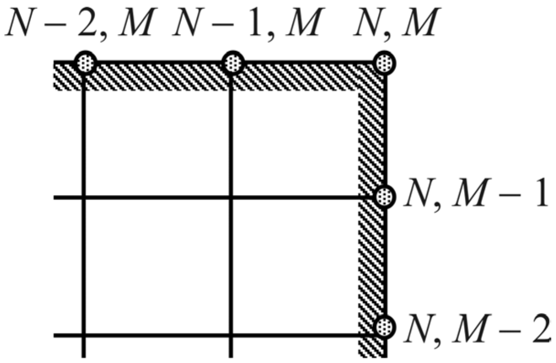

Рис. 6.3. Фрагмент разбиения расчетной области

Угловые точки области (0,0; 0,M; N,0; N,M) в расчетах не участвуют. Для вычисления температур в угловых точках применяют аппроксимацию стационарного уравнения теплопроводности (1). Например, для угловой точки (N, M, рис. 6.3) это уравнение в конечных разностях принимает вид:

$$\frac{T_{N-2,M} - 2T_{N-1,M} + T_{N,M}}{h_x^2} + \frac{T_{N,M-2} - 2T_{N,M-1} + T_{N,M}}{h_y^2} = 0,$$

из которого в частном случае при $h_x = h_y$ получаем формулу аппроксимации:

$$T_{N,M} = T_{N-1,M} + T_{N,M-1} - \left(T_{N-2,M} + T_{N,M-2}\right)/2. \quad (6.11)$$

Аналогично для других угловых точек

$$T_{0,0} = T_{1,0} + T_{0,1} - \left(T_{2,0} + T_{0,2}\right)/2;$$

$$T_{0,M} = T_{0,M-1};\ \ T_{N,0} = T_{N-1,0}. \quad (6.12)$$

Для вывода на экран (печать) массива поля температур $T_{i,j}$ в плоскости $0xy$ в виде изотерм можно воспользоваться алгоритмом перевода цифрового массива в символьный. Для этого интервал температур $\Delta T = T_0 - T_{\text{с}}$ делится на n подинтервалов, в каждом из которых записываются цифровые символы, разделенные символами пробелов (рис. 6.4). Правые границы интервалов определяются по формуле:

$$T_l = T_{\text{с}} + \Delta T \cdot l/n, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где T_l – значение температуры на правой границе l-го подинтервала.

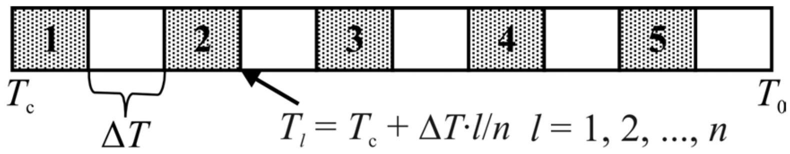

Рис. 6.4. Представление температурного поля в символьном виде

Алгоритм решения задачи по явной схеме представлен на рис. 6.5.

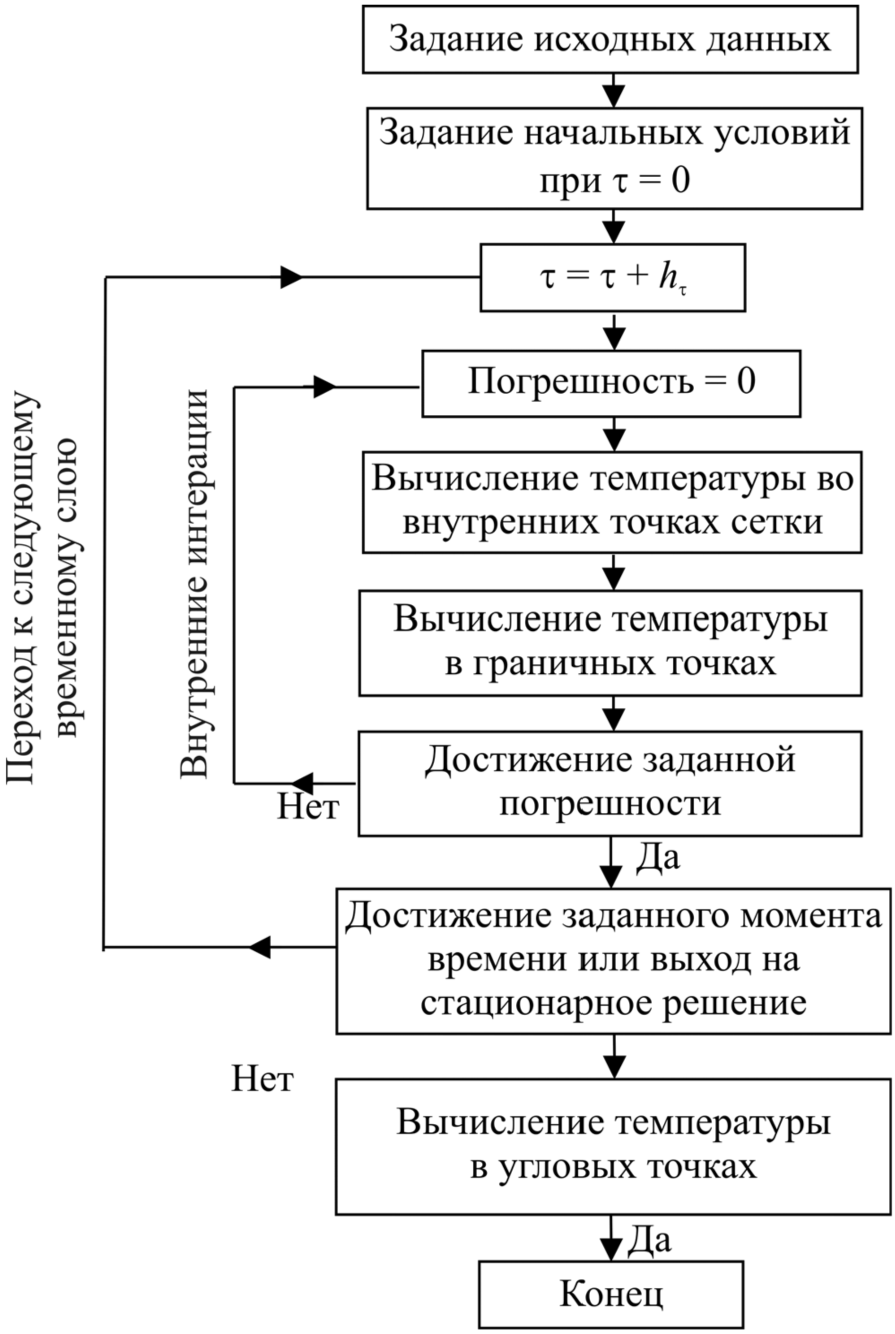

Рис. 6.5. Алгоритм решения нестационарной задачи теплопроводности для блюмса

Выполнение работы

1. Составить Паскаль-программу расчета времени охлаждения блюмса. Блок-схема программы приведена на рис. 6.5. Ниже приведён пример Паскаль-программы, реализующей расчет времени охлаждения блюмса по явной схеме.

```
program Example_6;
const      n = 9;
           m = 9;
           lx = 1;
           ly = 0.01;
           hx = lx/n;
           hy = ly/m;
           epsilon = 1e-6;
var T,TT : array [0..n,0..m] of real;
          Tstart,Tc1,Tc2,alpha1,alpha2 : real;
          a,lambda,rho,cp :real;
          delta,tau,htau,ahxt,ahyt,lahx,lahy : real;
          i,j : integer;
begin
{1. Ввод исходных данных}
          Tc1:= 100;
          Tc2:= 100;
          alpha1:=0.1;
          alpha2:=35;
          Tstart :=500;
          lambda:=45.5;
          rho:=7900;
          cp:=4600;
          a:=lambda/cp/rho;
          for i:=0 to n do for j:=0 to m do T[i,j]:= Tstart;
          tau := 0;
          htau := sqr(hx)*sqr(hy)/a/(sqr(hx)+sqr(hy))/6;
          ahxt:=a*htau/sqr(hx);
          ahyt:=a*htau/sqr(hy);
          lahx:=lambda/alpha1/hx;
          lahy:=lambda/alpha2/hy;
{2. Рабочий блок}
          repeat
          {2.1. Определение температуры
               на следующем временном слое}
              tau:=tau + htau;
 {2.1.1. Расчёт температурного поля
           во внутренней области}
              for i:=1 to n-1 do
              for j:=1 to m-1 do
                     TT[i,j]:= T[i,j]*(1-2*(ahxt+ahyt))
                            +(T[i-1,j]+T[i+1,j])*ahxt
                            +(T[i,j-1]+T[i,j+1])*ahyt;
```

```
                  {2.1.2. Расчёт температур на внешних границах}
                  for j:=1 to m-1 do
                  begin
                        TT[0,j]:= T[1,j];
                        TT[n,j]:= (Tc1 + T[n-1,j]*lahx)/(1+lahx);
                  end;
                  for i:=1 to n-1 do
                  begin
                        TT[i,0]:= T[i,1];
                        TT[i,m]:= (Tc2 + T[i,m-1]*lahy)/(1+lahy);
                  end;
                  {2.2 Определение различия решений
                   на k-ом и k+1-ом временных слоях}
                  delta := 0;
                  for i:=0 to n do
                        for j:=0 to m do
                              if abs(T[i,j]-TT[i,j])>delta
                              then delta := abs(T[i,j]-TT[i,j]);
                  T := TT;
              until delta <= epsilon;
{2.3. Расчёт температур в углах расчётной области}
                  T[0,0]:=0.5*(T[1,0] + T[0,1]);
                  T[0,m]:=0.5*(T[1,m] + T[0,m-1]);
                  T[n,0]:=0.5*(T[n-1,0] + T[n,1]);
                  T[n,m]:=0.5*(T[n-1,m] + T[n,m-1]);
{3. Вывод результата}
              writeln('Результаты расчёта');
              writeln('Время установления стационара:',
                          tau:8:2, tau/htau:8:2);
              writeln('Распределение температуры по слою');
              for j:=m downto 0 do
                   for i:=0 to n do
                        write(T[i,j]:8:2);
              writeln(tau*a/sqr(ly):8:2);
end.
```

2. Ввести в программу исходные данные: полутолщину блюмса δ = 10 см; температуру окружающей среды T_c = 0 ºС, теплофизические свойства стали: коэффициент теплопроводности λ = 50 Вт/(м·К), коэффициент температуропроводности $a = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, коэффициент теплоотдачи и начальную температуру слоя в соответствии с табл. 6.1

Таблица 6.1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\alpha \cdot 10^{-1}$ Вт/(м^2·К)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
$T_0 \cdot 10^{-1}$ ºС	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78

3. Определить по методу регулярного теплового режима время охлаждения блюмса ($\tau_к$) до температуры, отличающейся от температуры окружающей среды на 1 %. Построить график зависимости $T(\tau)$ (аналитическое решение).

4. Провести вычислительный эксперимент на сгущающейся пространственной сетке (принять $N = M$, в этих условиях $h_x = h_y = h$, шаг временной сетки выбирать равным $h_\tau = 0{,}9 \cdot h^2 / (4a)$) и определить необходимое число разбиений сетки построением на графике зависимостей $T(0, 0, \tau)$ при различных числах разбиений. Сравнить времена охлаждения, полученные аналитическим и численным методами на различных сетках. Используя символьный метод вывода температурного поля, построить изотермы для трех-четырех моментов времени в интервале $0 < \tau < \tau_к$, при выбранном числе разбиений расчетной области.

Контрольные вопросы

1. Конечно-разностное представление первой и второй производных.
2. Явная и неявная схемы аппроксимации уравнения теплопроводности.
3. Оценка ошибок аппроксимации уравнения теплопроводности.
4. Соотношение между временным и пространственным шагами сетки, обеспечивающее минимальную ошибку аппроксимации уравнения теплопроводности.
5. Аппроксимация граничных условий теплообмена по формулам первого и второго порядков точности.
6. Векторно-матричное представление сеточных уравнений.
7. Запись основных операторов программирования на языке Паскаль.

7. Расчет времени затвердевания непрерывного плоского слитка (сляба)

Цель работы: ознакомиться с численным методом решения одномерных задач затвердевания слитков.

Приборы и принадлежности: компьютер.

Сведения из теории

Непрерывный плоский слиток (сляб) толщиной 2δ вытягивается из неподвижного кристаллизатора с постоянной скоростью u (рис. 7.1). При охлаждении на поверхностях сляба из жидкой фазы формируется корка затвердевшего металла толщиной ε. На глубине $l_к$ или в момент времени $\tau_к = l_к/u$ формирование сляба завершается. Математическая формулировка задачи включает дифференциальное уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u\frac{\partial T}{\partial y} = a_{эфф}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ , \qquad (7.1)$$

которое в стационарном случае ($\partial T/\partial\tau = 0$) принимает вид:

$$u\frac{\partial T}{\partial y} = a_{эфф}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ , \qquad (7.2)$$

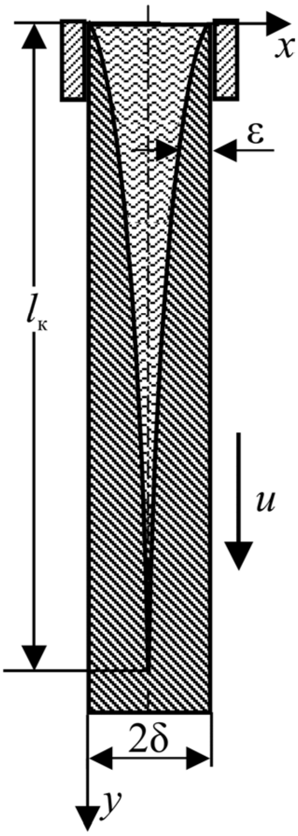

Рис. 7.1. Схема формирования сляба

а с учетом кинематического соотношения ($u = y/\tau$) $\partial T/\partial(y/u) = \partial T/\partial\tau$ имеем квазистационарное уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_{эфф}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ , \qquad (7.3)$$

где $a_{эфф} = \lambda / (\rho c_{эфф})$ – эффективная температуропроводность; λ, ρ – коэффициент теплопроводности и плотность; эффективная теплоемкость скачком возрастает в интервале температур ликвидуса ($T_{лик}$) и солидуса ($T_{сол}$) двухфазной зоны и учитывает выделение скрытой теплоты затвердевания (L)

$$c_{эфф} = \begin{cases} c & \text{при} \quad T > T_{лик}, \; T < T_{сол}, \\ c + \dfrac{L}{T_{лик} - T_{сол}} & \text{при} \quad T_{сол} \le T \le T_{лик}. \end{cases}$$

Начальная температура расплава в кристаллизаторе

$$T\,(\tau = 0) = T_{лик} + \delta T, \tag{7.4}$$

граничные условия для расчетной области ($0 < x < \delta$) имеют вид:

$$T\big|_{x=0} = T_{п}\,, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\delta} = 0, \tag{7.5}$$

где δT – перегрев расплава над температурой ликвидуса; $T_{п}$ – температура поверхности слитка.

В частном случае, когда температура по толщине корки сляба изменяется по линейному закону, решение краевой задачи (7.3–7.5) принимает вид:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho L}\left(T_{зат} - T_{п}\right)\tau}, \tag{7.6}$$

где $T_{зат}$ – температура затвердевания, которая находится в интервале температур ликвидуса и солидуса и которая может быть вычислена по формуле $T_{зат} = (T_{лик} + T_{сол}) / 2$.

Для численного решения задачи на расчетную область наносится регулярная сетка с координатами узлов:

$$x_i = ih_x; \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N; \quad h_x = \delta / N, \tag{7.7}$$

$$\tau_k = kh_\tau; \quad k = 1,\ 2, \ldots,$$

где N – число разбиений по толщине слоя δ; h_x, h_τ – соответственно шаги пространственной (по x) и временной (по τ) сеток; i, k – номера узловых точек в направлении координат x, τ. Уравнение переноса энергии (7.3) может быть представлено в дискретном виде по *явной схеме*, в соответствии с которой вторая производная по координате записывается на «старом» k-м временном слое с известным распределением температуры (рис. 7.2). В результате из аппроксимации уравнения (7.3):

$$\frac{T_{i,k+1}-T_{i,k}}{h_\tau} = \\ = a\frac{T_{i+1,k}-2T_{i,k}+T_{i-1,k}}{h_x^2} \qquad (7.8)$$

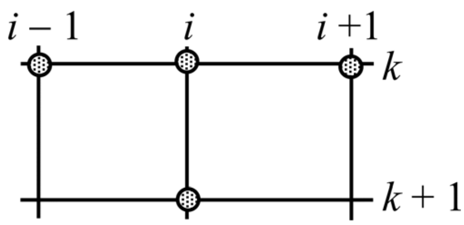

Рис. 7.2. Сеточный шаблон явной схемы 1-го порядка точности

получается явная формула для температуры:

$$T_{i,k+1} = T_{i,k}\left(1-\frac{2ah_\tau}{h_x^2}\right)+\frac{ah_\tau}{h_x^2}\left(T_{i+1,k}+T_{i-1,k}\right), \qquad (7.9)$$

вычисления по которой устойчивы при следующем ограничении на шаг сетки по времени:

$$h_\tau < h_x^2 \big/ \left(2a_{i,k\ \max}\right). \qquad (7.10)$$

С применением формулы односторонней разности записывается граничное условие на оси симметрии:

$$T_{N+1} = T_N\,. \qquad (7.11)$$

Текущая толщина твердой фазы может быть получена по формуле линейной интерполяции:

$$\varepsilon = h_x\left(i+\frac{T_{\text{зат}}-T_i}{T_{i+1}-T_i}\right) \quad \text{при} \quad T_i < T_{\text{зат}} < T_{i+1},\ \ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (7.12)$$

Алгоритм решения задачи представлен на рис. 7.3

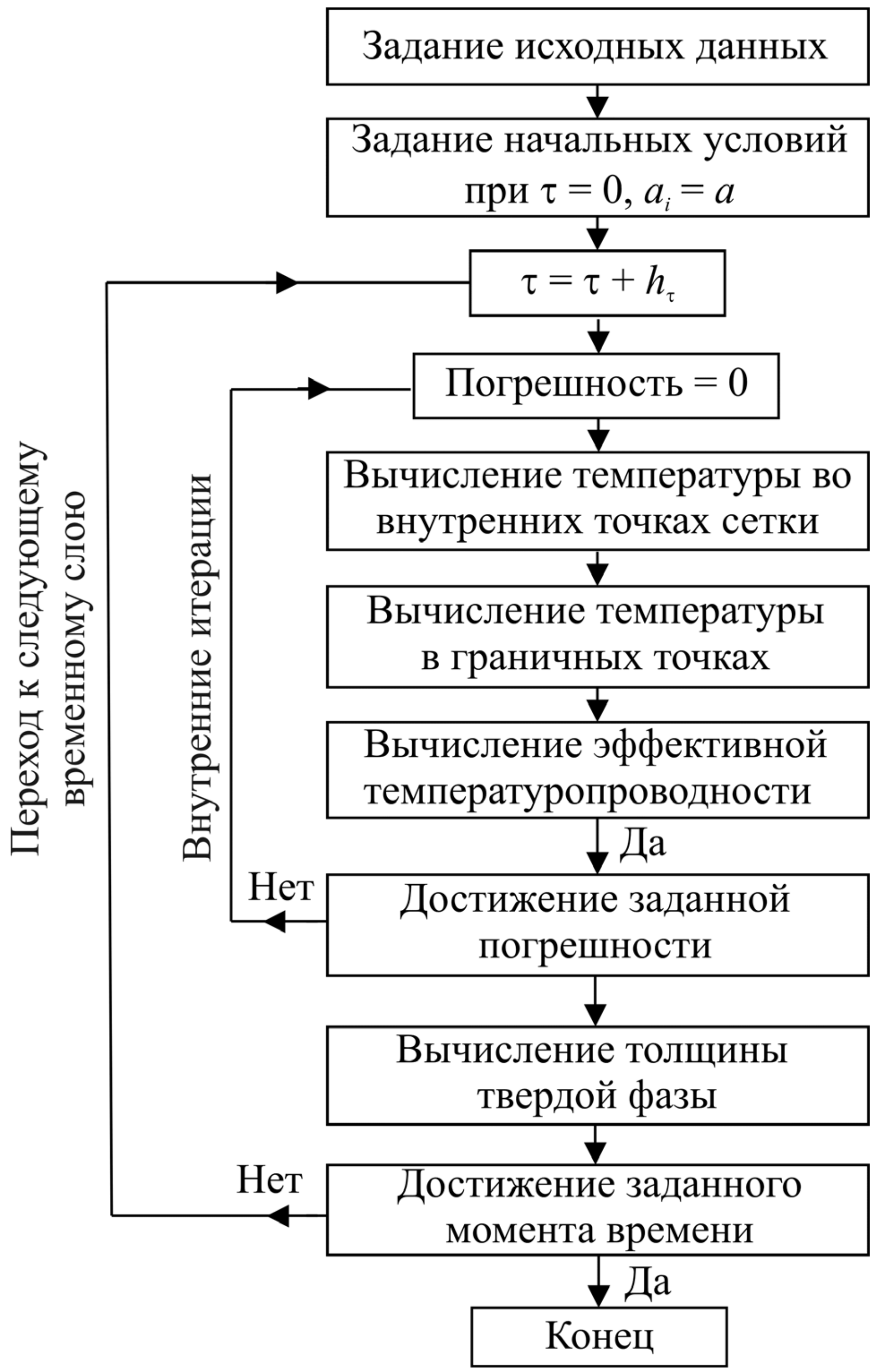

Рис. 7.3. Алгоритм решения задачи затвердевания сляба

Выполнение работы

1. Составить Паскаль-программу расчета затвердевания сляба. Блок-схема программы приведена на рис. 7.3. Ниже приведён пример Паскаль-программы, реализующей расчет времени охлаждения блюмса по явной схеме.

2. Ввести в программу исходные данные: полутолщину слябa δ = 10 см; температуру окружающей среды $T_с$ = 0 °C, температуры ликвидуса $T_{лик}$ = 1500 °C, солидуса $T_{сол}$ = 1430 °C, перегрев расплава δT = 10 °C, теплофизические свойства стали: коэффициент теплопроводности λ = 50 Вт/(м·К), коэффициент температуропроводности a = 1,4·10^{-5} м^2/с, плотность ρ = 7900 кг/м^3; скрытую теплоту затвердевания L = 270 кДж/кг, температуру поверхности сляба в соответствии с табл. 7.1

```
program Example_7;
const n = 100;
          lx = 0.1;
          hx = lx/n;
          epsilon = 1e-6;
var T,TT,ae : array [0..n] of real;
         Tstart,Tc1,alpha1 : real;
         a0,a1,lambda,rho,cp,TS,TL,L :real;
         delta,tau,htau,ahtx,lahx,htx : real;
         i : integer;
begin
{1. Ввод исходных данных}
         {1.1. Теплофизические свойства металла}
         lambda:=45.5;
         rho:=7900;
         cp:=4600;
         TL:=1500;
         TS:=1430;
         L:=270e3;
         a0:=lambda/cp/rho;
         a1:=lambda/rho/(cp + L/(TL-TS));
         {1.2. Параметры процесса}
         Tc1:= 100;
         alpha1:=0.1;
         Tstart:=1550;
         {1.3. Параметры расчётного ядра}
         htau := sqr(hx)/a0/6;
         htx:=htau/sqr(hx);
         lahx:=lambda/alpha1/hx;
{2. Рабочий блок}
         for i:=0 to n do T[i]:= Tstart;
         tau := 0;
         repeat
               {2.1. Определение температуры
                        на следующем временном слое}
               tau:=tau + htau;
               {2.1.1. Расчёт температурного поля
                        во внутренней области}
               for i:=0 to n do
               begin
```

```
                    {Расчёт эффективной температуропроводности}
                    if (T[i]>=Ts) and (T[i]<=TL)
                            then ae[i]:=a1
                            else ae[i]:=a0;
                    ahtx:=ae[i]*htx;
                    TT[i]:= T[i]*(1-2*ahtx)
                                  + (T[i-1]+T[i+1])*ahtx;
            end;
            {2.1.2. Расчёт температур на внешних границах}
            TT[0]:= T[1];
            TT[n]:= (Tc1 + T[n-1]*lahx)/(1+lahx);
            {2.2 Определение различия решений
                    на k+1-ом и k-ом временных слоях}
            delta := 0;
            for i:=0 to n do
                    if abs(T[i]-TT[i])>delta
                    then delta := abs(T[i]-TT[i]);
            T := TT;
        until delta <= epsilon;
{3. Вывод результата}
        writeln('Результаты расчёта');
        writeln('Время установления стационара:',
                    tau:8:2, tau/htau:8:2);
        writeln('Распределение температуры по слою');
        for i:=0 to n do write(T[i]:8:2);
end.
```

Таблица 7.1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T_п \cdot 10^{-1}$ °C	**70**	**72**	**74**	**76**	**78**	**80**	**82**	**84**	**86**	**88**	**90**	**92**	**94**	**96**	**98**

3. Определить по формуле (7.6) время окончания затвердевания сляба ($\tau_к$) до. Построить график зависимости $\varepsilon(\tau)$ (аналитическое решение).

4. Провести вычислительный эксперимент на сгущающейся пространственной сетке (шаг временной сетки выбирать равным $h_\tau = 0{,}9 \cdot h_x^2 / (2a_{\max})$) и сравнить полученные решения на графике зависимости $\varepsilon(\tau)$. Сравнить на этом же графике численные решения с аналитическим.

Контрольные вопросы

1. Конечно-разностное представление первой и второй производных.

2. Явная и неявная схемы аппроксимации уравнения теплопроводности.

3. Оценка ошибок аппроксимации уравнения теплопроводности.

4. Соотношение между временным и пространственным шагами сетки, обеспечивающее минимальную ошибку аппроксимации уравнения теплопроводности.

5. Аппроксимация граничных условий теплообмена по формулам первого и второго порядков точности.

6. Векторно-матричное представление сеточных уравнений.

7. Запись основных операторов программирования на языке Паскаль.

8. Расчет времени затвердевания непрерывного слитка квадратного сечения (блюма)

Цель работы: ознакомиться с численным методом решения двумерных задач нестационарной теплопроводности.

Приборы и принадлежности: компьютер.

Сведения из теории

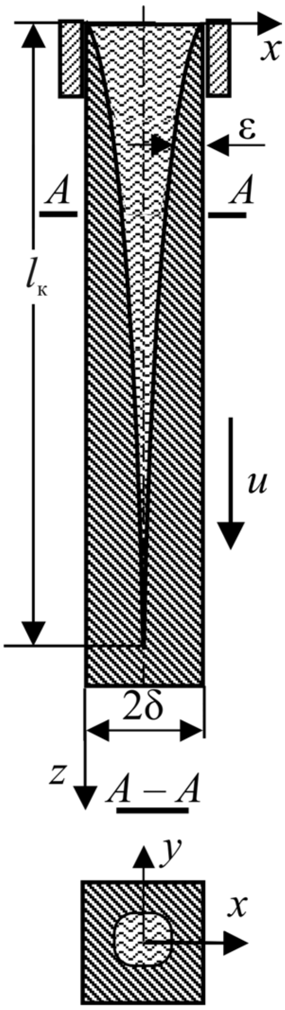

Рис. 8.1. Схема формирования блюмса

Непрерывный слиток квадратного сечения 2δ×2δ (блюмс) вытягивается из неподвижного кристаллизатора с постоянной скоростью u (рис. 8.1). При охлаждении на поверхностях блюмса из жидкой фазы формируется корка затвердевшего металла толщиной ε. На глубине $l_к$ или в момент времени $\tau_к = l_к/u$ формирование блюмса завершается. Математическая формулировка задачи по методу сквозного счета включает дифференциальное уравнение переноса энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u\frac{\partial T}{\partial z} = a_{эфф}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad (8.1)$$

которое в стационарном случае ($\partial T/\partial \tau = 0$) принимает вид:

$$u\frac{\partial T}{\partial z} = a_{эфф}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad (8.2)$$

а с учетом кинематического соотношения ($u = z/\tau$) $\partial T/\partial(z/u) = \partial T/\partial \tau$ имеем квазистационарное уравнение переноса энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_{эфф}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \qquad (8.3)$$

где $a_{эфф} = \lambda / (\rho c_{эфф})$ – эффективная температуропроводность; λ, ρ – коэффициент теплопроводности и плотность; эффективная теплоемкость скачком возрастает в интервале температур ликвидуса ($T_{лик}$) и солидуса ($T_{сол}$) двухфазной зоны и учитывает выделение скрытой теплоты затвердевания (L)

$$c_{эфф} = \begin{cases} c & \text{при} \quad T > T_{лик},\ T < T_{сол}, \\ c + \dfrac{L}{T_{лик} - T_{сол}} & \text{при} \quad T_{сол} \le T \le T_{лик}. \end{cases}$$

Начальная температура расплава в кристаллизаторе

$$T\ (\tau = 0) = T_{лик} + \delta T, \qquad (8.4)$$

граничные условия для расчетной области ($0 < x < \delta$, $0 < y < \delta$) имеют вид:

$$T(\delta, y) = T(x, \delta) = T_{п},\ \ \partial T(x,0)/\partial y = \partial T(0,y)/\partial x = 0, \qquad (8.5)$$

где δT – перегрев расплава над температурой ликвидуса; $T_{п}$ – температура поверхности слитка.

В частном случае, когда температура по толщине корки сляба изменяется по линейному закону, решение краевой задачи (8.3–8.5) принимает вид:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho L}(T_{зат} - T_{п})\tau}, \qquad (8.6)$$

где $T_{зат}$ – температура затвердевания, которая находится в интервале температур ликвидуса и солидуса и которая может быть вычислена по формуле $T_{зат} = (T_{лик} + T_{сол}) / 2$.

Для численного решения задачи на расчетную область наносится регулярная сетка с координатами узлов:

$$x_i = i h_x; \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N; \quad h_x = \delta / N,$$

$$y_j = jh_y; \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ M; \quad h_y = \delta/M, \tag{8.7}$$

$$\tau_k = kh_\tau; \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

где N, M – числа разбиений расчетной области соответственно в направлении координат x, y; h_x, h_y, h_τ – соответственно шаги пространственной (по x, y) и временной (по τ) сеток; i, j, k – номера узловых точек в направлении координат x, y и времени τ. На рис. 8.2 заштриховано возможное положение двухфазной зоны.

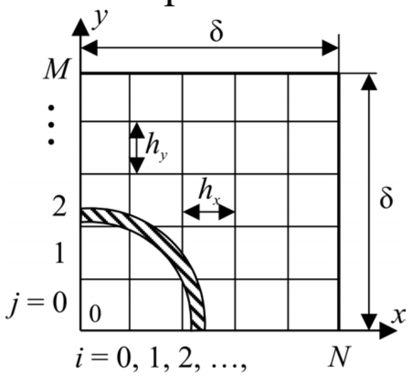

Рис. 8.2. Расчетная область с указананием положения двухфазной зоны

Уравнение переноса энергии (8.3) может быть представлено в дискретном виде по *явной схеме*, в соответствии с которой вторая производная по координатам записывается на «старом» (k–1)-м временном слое с известным распределением температуры. В результате аппроксимации уравнения (8.3)

$$\frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{h_\tau} = \\ = a_{i,j}\left(\frac{T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}}{h_x^2} + \frac{T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j+1,k}}{h_y^2}\right) \tag{8.8}$$

получается явная формула для температуры:

$$T_{i,j,k+1} = T_{i,j,k}\left(1 - \frac{2a_{i,j}h_\tau}{h_x^2} - \frac{2a_{i,j}h_\tau}{h_y^2}\right) + \\ + \frac{a_{i,j}h_\tau}{h_x^2}\left(T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k}\right) + \frac{a_{i,j}h_\tau}{h_y^2}\left(T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k}\right), \tag{8.9}$$

вычисления по которой устойчивы при следующем ограничении на шаг сетки по времени:

$$h_\tau < h_x^2 h_y^2 \Big/ \left[2a_{\max}\left(h_x^2 + h_y^2\right)\right]. \tag{8.10}$$

С применением формул односторонней разности записываются граничные условия (8.5) на поверхностях блюмса:

$$T_{N,j} = T_{i,M} = T_{\text{п}}\ ,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ N-1;\ j = 1,\ 2,\ ...,\ M-1, \quad (8.11)$$

а также граничные условия на осях симметрии:

$$T_{0,j} = T_{1,j},\ \ T_{i,0} = T_{i,1},\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ N-1;\ j = 1,\ 2,\ ...,\ M-1. \quad (8.12)$$

Угловые точки области (0, 0; 0, M; N, 0; N, M) в расчетах не участвуют. Для вычисления температур в угловых точках применяют аппроксимацию стационарного уравнения переноса энергии (8.3). Например, для угловой точки (N, M) (рис. 8.3) это уравнение в конечных разностях принимает вид:

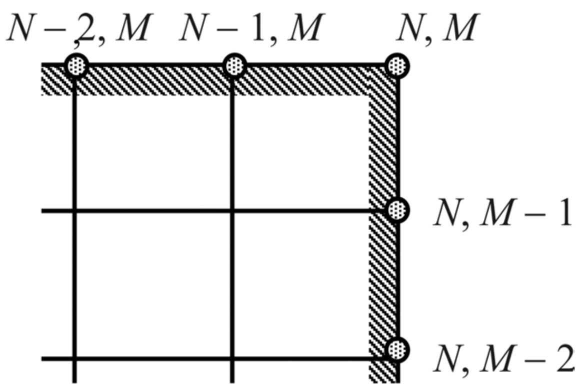

Рис. 8.3. Фрагмент разбиения расчетной области

$$\frac{T_{N-2,M} - 2T_{N-1,M} + T_{N,M}}{h_x^2} + \frac{T_{N,M-2} - 2T_{N,M-1} + T_{N,M}}{h_y^2} = 0,$$

из которого в частном случае при $h_x = h_y$ получаем формулу аппроксимации:

$$T_{N,M} = T_{N-1,M} + T_{N,M-1} - \left(T_{N-2,M} + T_{N,M-2}\right)/2\ . \quad (8.13)$$

Аналогично для других угловых точек:

$$T_{0,0} = T_{1,0} + T_{0,1} - \left(T_{2,0} + T_{0,2}\right)/2;\ \ T_{0,M} = T_{0,M-1};\ \ T_{N,0} = T_{N-1,0}. \quad (8.14)$$

Для вывода на экран (печать) массива поля температур $T_{i,j}$ в плоскости $0xy$ в виде изотерм можно воспользоваться алгоритмом перевода цифрового массива в символьный. Для этого интервал температур $\Delta T = T_{\text{сол}} - T_{\text{п}}$ делится на n подинтервалов, в каждом из которых записываются цифровые символы, разделенные символами пробелов (рис. 8.4). Правые границы интервалов определяются по формуле $T_l = T_п + \Delta T \cdot l/n$, $l = 1,\ 2,\ ...,\ n$, где T_l – значение температуры на правой границе l-го подынтервала. Для интервала температур фазового перехода ($T_{лик}$–$T_{сол}$) рекомендуется применять буквенный символ «Ф», а для температур перегрева – символ пробела.

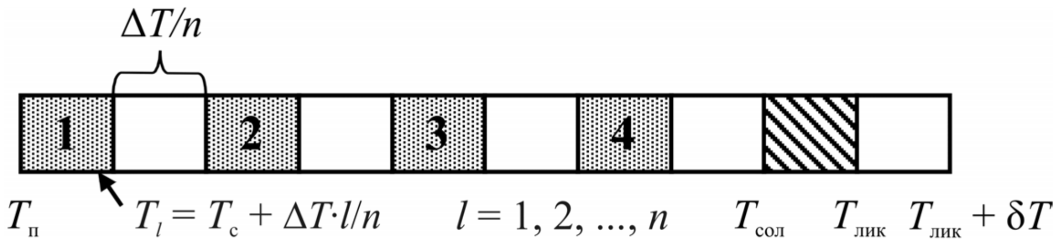

Рис. 8.4. Представление температурного поля в символьном виде

Алгоритм решения задачи по явной схеме представлен на рис. 8.5.

Выполнение работы

1. Составить Паскаль-программу расчета затвердевания сляба. Блок-схема программы приведена на рис. 8.5. Ниже приведён пример Паскаль-программы, реализующей расчет времени охлаждения блюмса по явной схеме.

```
program Example_8;
uses graph;
const n = 50;
        m = 50;
        lx = 0.1;
        ly = 0.1;
        hx = lx/n;
        hy = ly/m;
        epsilon = 1e-6;
var T,TT,ae : array [0..n,0..m] of double;
       Tstart,Tc1,Tc2,alpha1,alpha,a,lambda,rho,cp,L,af,TS,TL,
delta,tau,htau,ahtx,ahty,htx,hty,lahx,lahy,tau1 : double;
       i,j : integer;
       f : text;
procedure gStart;
       var mode,driver : smallint;
       begin
              detectgraph(driver,mode);
              initgraph(driver,mode,'');
              setbkcolor(white);
```

```
        cleardevice;
    end;
```

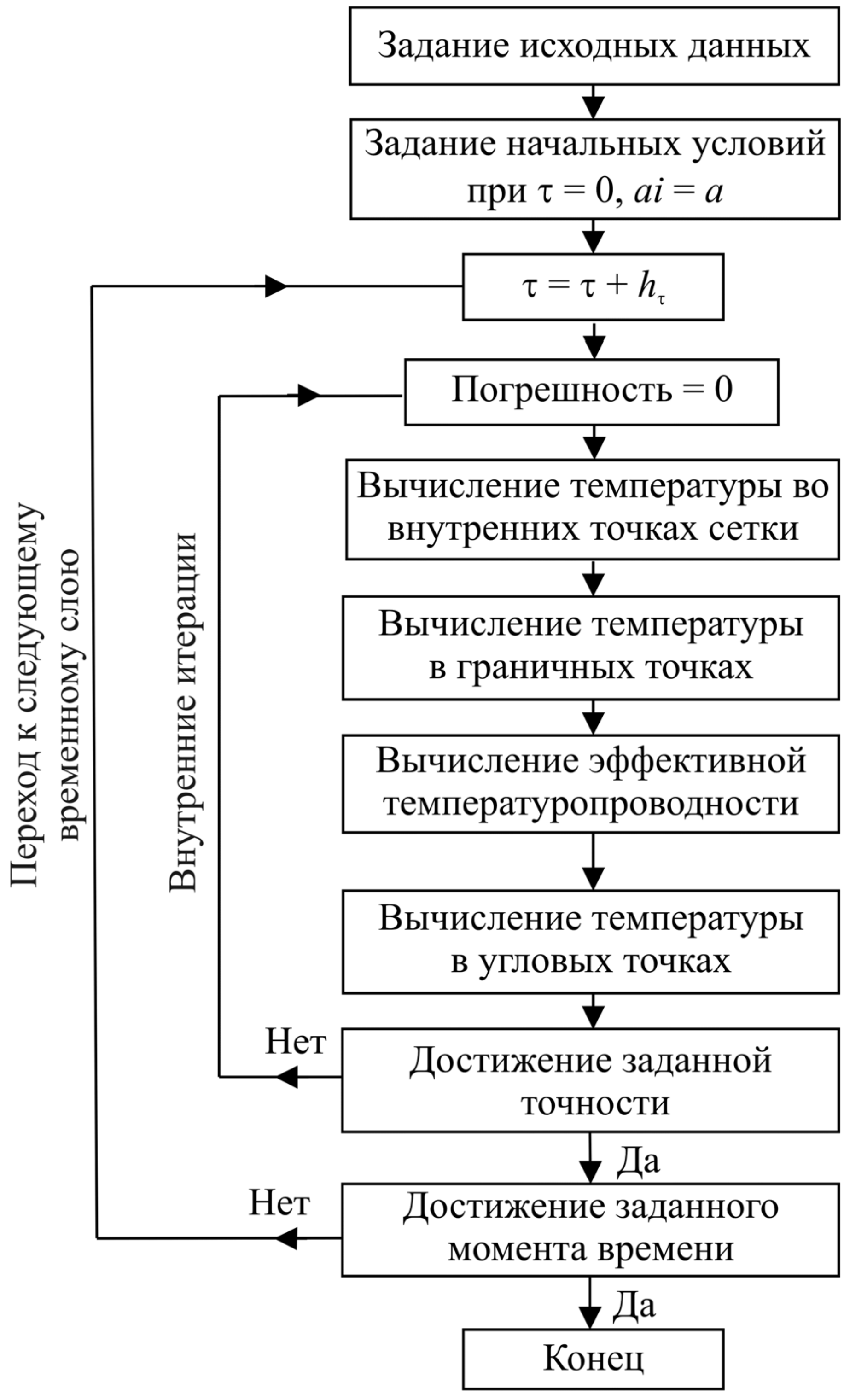

Рис. 8.5. Алгоритм решения задачи затвердевания блюмса

```
procedure gColorField;
    var i,j : integer;
        color : integer;
```

```
                Tcol : array [1..10] of double =
 (200,400,600,800,1000,1200,1400,1430,1500,1600);
        begin
                for i:=0 to n do
                        for j:=0 to m do
                        begin
                        color:=1;
                        while(T[i,j]>Tcol[color])and(color<10) do
                        begin
                                        color:= color +1;
                        end;
                        setfillstyle(SolidFill,Color);
                        bar(10+i*10,10+j*10,20+i*10,20+j*10);
                        end;
        end;

begin
{1. Ввод исходных данных}
        {1.1. Теплофизические свойства металла}
        lambda:=45.5;
        rho:=7900;
        cp:=4600;
        TS:=1430;
        TL:=1500;
        L:=270e3;
        a:=lambda/cp/rho;
        af:=lambda/rho/(cp + L/(TL-TS));
        {1.2. Параметры процесса}
        Tc1:= 100;
        Tc2:= 100;
        alpha1:=200;
        alpha2:=35;
        Tstart:=1550;
        for i:=0 to n do for j:=0 to m do T[i,j]:= Tstart;
        tau := 0;
        {1.3. Параметры расчётного ядра}
        tau1:=0;
        htau := sqr(hx)*sqr(hy)/a/(sqr(hx)+sqr(hy))/6;
        htx:=htau/sqr(hx);
        hty:=htau/sqr(hy);
        lahx:=lambda/alpha1/hx;
        lahy:=lambda/alpha2/hy;
{2. Рабочий блок}
        gStart;
        repeat
                {2.1. Определение температуры
                        на следующем временном слое}
                tau:=tau + htau;
                {2.1.1. Расчёт эффективной температуропроводности}
                for i:=0 to n do
                        for j:=0 to m do
                        begin
                                if (T[i,j]>Ts) and (T[i,j]<TL)
```

```
                    then    ae[i,j]:= af
                    else    ae[i,j]:= a;
                    ahtx:= ae[i,j] * htx;
                    ahty:= ae[i,j] * hty;
             end;
      {2.1.2. Расчёт температурного поля
              во внутренней области}
      for i:=1 to n-1 do
             for j:=1 to m-1 do
                    TT[i,j]:= T[i,j] * (1 –
2*(ahtx+ahty))
                                 +(T[i-1,j] +
T[i+1,j])*ahtx
                                 +(T[i,j-1] +
T[i,j+1])*ahty;
      {2.1.2. Расчёт температур на внешних границах}

      for j:=1 to m-1 do
      begin
             TT[0,j]:= T[1,j];
             TT[n,j]:= (Tc1 + T[n-1,j]*lahx)/(1 +
lahx);
      end;
      for i:=1 to n-1 do
      begin
             TT[i,0]:= T[i,1];
             TT[i,m]:= (Tc2 + T[i,m-1]*lahy)/(1 +
lahy);
      end;

      {2.1.3. Расчёт температур в углах
              расчётной области}
      TT[0,0]:=0.5*(T[1,0] + T[0,1]);
      TT[0,m]:=0.5*(T[1,m] + T[0,m-1]);
      TT[n,0]:=0.5*(T[n-1,0] + T[n,1]);
      TT[n,m]:=0.5*(T[n-1,m] + T[n,m-1]);
      {2.2 Определение различия решений
             на k-ом и k+1-ом временных слоях}
      delta := 0;
      for i:=0 to n do
             for j:=0 to m do
                    if abs(T[i,j]-TT[i,j])>delta
                    then delta := abs(T[i,j]-
             TT[i,j]);
      T := TT;

      {2.3. Секция визуализации}
      if tau1 > 50
      then
      begin
             gColorField;
             write(T[i,j]:8:2);
             tau1:=0
```

```
            end
            else
                    tau1:=tau1 + htau;
        until delta <= epsilon;

{3. Вывод результата}
        writeln('Результаты расчёта');
        writeln('Время установления стационара:',
                    tau:8:2, tau/htau:8:2);
        writeln('Распределение температуры по слою');
        for j:=m downto 0 do
            for i:=0 to n do
                    write(T[i,j]:8:2);
        end.
```

2. Ввести в программу исходные данные: полутолщину блюмса δ = 10 см, температуры ликвидуса $T_{лик}$ = 1500 °С, солидуса $T_{сол}$ = 1430 °С, перегрев расплава δT = 10 °С, теплофизические свойства стали: коэффициент теплопроводности λ = 50 Вт/(м·К), коэффициент температуропроводности $a = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, скрытую теплоту затвердевания L = 270 кДж/кг, температуру поверхности блюмса в соответствии с табл. 8.1

3. Определить по формуле (8.6) время окончания затвердевания блюмса ($\tau_к$).

Таблица 8.1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T_п \cdot 10^{-1}$ °С	**70**	**72**	**74**	**76**	**78**	**80**	**82**	**84**	**86**	**88**	**90**	**92**	**94**	**96**	**98**

4. Провести вычислительный эксперимент на сгущающейся пространственной сетке при $N = M$ (шаг временной сетки выбирать равным $h_\tau = 0{,}9 \cdot h_x^2 \big/ \left(4a_{\max}\right)$) и сравнить полученные решения на графике зависимости $\tau_к(N)$. Построить (при выбранном числе разбиений расчетной области) изотермы для трех – четырех моментов времени в интервале $0 < \tau < \tau_к$.

Контрольные вопросы

1. Конечно-разностное представление первой и второй производных.
2. Явная и неявная схемы аппроксимации уравнения теплопроводности.

3. Соотношение между временным и пространственным шагами сетки, обеспечивающее минимальную ошибку аппроксимации уравнения теплопроводности.

4. Чем объясняется рост корки слитка по закону квадратного корня?

5. Запись основных операторов программирования на языке Паскаль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курбатов, Ю.Л. Металлургические печи: учебное пособие для вузов / Ю.Л. Курбатов, Ю.Е. Василенко; Ю.Л. Курбатов, Ю.Е. Василенко; ГВУЗ "ДонНТУ". – Донецк: ГВУЗ "ДонНТУ", 2013. – 388 с.
2. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие / П.В. Трусов [и др.]. – М.: Логос, 2004. – 440 с.
3. Теплотехника металлургического производства: учеб. пособие / Ю.Л. Курбатов, В.В. Кравцов, Н.С. Масс, Ю.Е. Василенко. – Донецк: Издательство «Ноулидж» (донецкое отделение), 2011. – 217 с.
4. Цаплин, А.И. Теплофизика в металлургии: учеб. пособие / А.И. Цаплин. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 230 с.
5. Бочкарев, С.В. Диагностика и надежность автоматизированных систем: учеб. пособие / С.В. Бочкарев, А.И. Цаплин. – Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2006. – 262 с.
6. Краснощеков, Е.А. Задачник по теплопередаче: учеб. пособие для вузов / Е.А. Краснощеков, А.С. Сукомел. – 4-е изд., перераб. – М.: Энергия, 1980. – 288с.
7. Большаков, В.П. Основы 3D-моделирования [Электронный ресурс]: изучаем работу в AutoCAD, КОМПАС-3D, SolidWorks, Inventor / В.П. Большаков, А.Л. Бочков; В.П. Большаков, А.Л. Бочков. – Санкт-Петербург: Питер, 2013.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических, лабораторных занятий и
организации СРС по дисциплине
«Моделирование теплотехнических агрегатов в стандартных инженерных пакетах»

для студентов очной и заочной форм обучения направления подготовки
22.04.02 «Металлургия» магистерской программы
«Промышленная теплотехника»

Составитель: доцент, к.т.н. Кашаев Виталий Валерьевич