

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА «ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕПЛОФИЗИКА»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим, лабораторным и СРС заданиям по дисциплине
«Методология и методы научных исследований математика»

для студентов очной формы обучения по направлению 22.04.02
«Металлургия», магистерские программы «Промышленная теплотехника»,
«Металлургия стали», «Металлургия чугуна», «Электрометаллургия»,
«Цветная металлургия», «Обработка металлов давлением»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА «ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕПЛОФИЗИКА»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим, лабораторным и СРС заданиям по дисциплине
«Методология и методы научных исследований математика»

для студентов очной формы обучения по направлению 22.04.02
«Металлургия», магистерские программы «Промышленная теплотехника»,
«Металлургия стали», «Металлургия чугуна», «Электрометаллургия»,
«Цветная металлургия», «Обработка металлов давлением»

РАССМОТРЕНО

на заседании кафедры
технической теплофизики
Протокол №12 от 31.05.2018 г.

Рецензент:

Гридин Сергей Васильевич – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированных систем управления ГОУВПО «ДОННТУ»;

Составители:

Бирюков Алексей Борисович – заведующий кафедрой «Технической теплофизикой», профессор, доцент технических наук.

Гнителиев Павел Александрович - кандидат технических наук, доцент кафедры «Техническая теплофизика».

Методические указания для проведения практических занятий и обеспечения СРС по дисциплине "Методология и метода научных исследований" [Электронный ресурс] для студентов, обучающихся по направлению 22.04.02 «Металлургия», магистерские программы «Промышленная теплотехника», «Металлургия стали», «Металлургия чугуна», «Электрометаллургия», «Цветная металлургия», «Обработка металлов давлением» / ГОУВПО «ДОННТУ», Каф.технической теплофизики; сост. А.Б. Бирюков, П.А. Гнителиев - Электрон.дан. (1 файл: 1780 Кб). - Донецк: ДоННТУ, 2018. - Систем. требования AcrobatReader.

Методические указания к практическим заданиям по курсу "Методология и методы научных исследований" содержат разъяснения сущности и содержания всех видов самостоятельной работы студентов (СРС). Приведены условия базовых задач по курсу для обеспечения проведения практических занятий по данной дисциплине.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ " МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ "	6
2. СРС СВЯЗАННАЯ С ПОДГОТОВКОЙ К АУДИТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ.....	6
3.ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНЫМ МЕРОПРИЯТИЯМ: КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ И ЭКЗАМЕНУ	7
4. ПРОВЕДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.....	7
5. ПЕРЕЧЕНЬ ТЕСТОВЫХ ВОПРОСОВ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.....	28
6. ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	29
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Задачи на установление вида критериев подобия.....	30
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Исходные данные для выполнения задания №2.....	31
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Исходные данные для выполнения задания № 3.....	32

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов (СРС) занимает очень важное место в учебном процессе. Но успешная организация СРС будет иметь место только в том случае, когда деятельность студента будет четко спланирована и целенаправленна. Объем СРС по каждой учебной дисциплине определяется учебным планом, целью же преподавателя, который планирует СРС является наполнение каждой из рубрик конкретным содержанием. Оно обычно должно быть подчиненным цели, которая ставится при преподавании студентам конкретной дисциплины, и также определяется на основе анализа будущей профессиональной деятельности специалистов конкретной специальности.

Нет сомнений, что детальное ознакомление студента с целью изучения каждой дисциплины и ее место в его будущей профессиональной деятельности, повысит эффективность изучения дисциплины в целом и будет способствовать повышению роли СРС.

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ "МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ"

Дисциплина "Методология и методы научных исследований" является одной из важнейших дисциплин для подготовки магистров по направлению 22.04.02 Metallургия, потому что она связана с будущей научной и профессиональной деятельностью специалистов этого профиля, а также играет важную роль в проведении научных исследований и подготовке магистерских диссертаций. Особенностью дисциплины "Методология и методы научных исследований" является тот факт, что она изучается в самом начале освоения магистерских программ (1-ый семестр) и знания, полученные студентами при ее освоении должны помочь студентам выбрать методы решения своих научных задач, и с их использованием получить результаты, которые лягут в основу их магистерских диссертаций.

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать

- классификацию основных методов исследования, применяемых в технических науках;
- достоинства, недостатки и особенности использования различных методов исследования для решения конкретных задач.

уметь

- самостоятельно выводить дифференциальное описание для простейших процессов и условий эксплуатации объектов;
- формулировать постановку задачи для математического моделирования изучаемых процессов;
- определять вид критериев подобия, описывающих изучаемые процессы;
- получать конкретные критериальные уравнения на основании обработки экспериментальных данных;
- производить статистическую обработку экспериментальных данных для получения доверительных интервалов, проверки однородности дисперсий, получения уравнений регрессии;
- подбирать типы чувствительных элементов для решения конкретных задач экспериментального изучения объектов.

2 СРС, СВЯЗАННАЯ С ПОДГОТОВКОЙ К АУДИТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

Подготовка к лекциям

Эта работа состоит из самостоятельного изучения лекционного материала студентом и в ней необходимо выделить следующие аспекты:

- студент должен готовиться к каждой лекции изучая материал предыдущей лекции дома и при необходимости повторяя материалы других лекций;

- необходимо, чтобы студент изучал соответствующий материал не только используя текст лекции, записанной в аудиторных условиях, но и с помощью предложенных учебников;
- студент должен быть готов ответить на вопросы для самопроверки, которые приведены в конце этих методических указаний, соответствующие материалу предыдущей лекции.

Подготовка к практическим занятиям

Содержание этой работы заключается в анализе материалов предыдущих практических занятий:

- необходимо самостоятельно повторить решение задач, которые были рассмотрены;
- проанализировать приведенные технологические схемы и быть готовым дать их характеристику;
- рассмотреть схемы проведения измерений и быть готовым дать им оценку, сделать сравнительный анализ и т.д.

3 ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНЫМ МЕРОПРИЯТИЯМ: КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ И ЭКЗАМЕНУ

Особенностью контрольных мероприятий является тот факт, что студент на момент его проведения должен усвоить весь материал изложен и рассмотрен до этого. Это касается лекций, материалов практических занятий, материалов, которые были вынесены для самостоятельного изучения, для которых вышел срок отведенный преподавателем на их усвоение. Основным этапом подготовки к контрольным мероприятиям должно стать повторение этих материалов и их комплексный анализ. Полезным этапом подготовки к контрольным мероприятиям является проверка студентом своих знаний с помощью вопросов для самопроверки, приведенных в седьмом разделе. Отвечая на эти вопросы, надо достичь высокого уровня теоретической аргументации и глубокого понимания практической стороне вопроса.

4 ПРОВЕДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

4.1 Определение вида критериев подобия на основании анализа размерностей физических величин, используемых для описания исследуемого процесса

Теоретические основы решения задач такого типа рассматриваются в лекционном курсе. В данных методических указаниях приводится их практическая реализация на примере исследования явления интенсификации конвективного теплообмена при импульсной подаче теплоносителя.

На основании анализа процесса установлено, что данный процесс может быть описан при помощи восьми физических величин:

- один параметр (коэффициент конвективной теплоотдачи);
- семь факторов.

Анализ единиц измерения всех используемых физических величин проведен в Таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Анализ единиц измерения физических величин, задействованных в описании рассматриваемой задачи

Физические величины	Обозначение	Единицы измерения	Представление единиц измерения через основные единицы системы СИ
Коэффициент конвективной теплоотдачи	α	Вт/(м ² ·К)	М·Т ⁻³ ·К ⁻¹
Характерный геометрический размер обтекаемого тела	d	м	L
Средняя скорость течения среды	w	м/с	L·Т ⁻¹
Коэффициент теплопроводности среды	λ	Вт/(м·К)	М·L·Т ⁻³ ·К ⁻¹
Теплоемкость среды	C _p	Дж/(кг·К)	L ² ·Т ⁻² ·К ⁻¹
Плотность среды	ρ	кг/м ³	М·L ⁻³
Динамическая вязкость среды	μ	Па·с	М·L ⁻¹ ·Т ⁻¹
Частота пульсации среды	$\nu_{имп}$	с ⁻¹	Т ⁻¹

Тогда Исходное выражение для определения вида критериального уравнения:

$$\alpha^a \cdot d^b \cdot w^c \cdot \lambda^d \cdot C_p^e \cdot \rho^f \cdot \mu^g \cdot \nu_{имп}^h = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \pi_4$$

Система уравнений для определения показателей степени при параметре и факторах исследуемой задачи:

$$\begin{cases} M: & a+d+f+g=0 \\ L: & b+c+d+2\cdot e-3\cdot f-g=0 \\ K: & -a-d-e=0 \\ T: & -3\cdot a-c-3\cdot d-2\cdot e-g-h=0 \end{cases}$$

Результаты решения системы уравнений:

$$\begin{cases} d = -a - e \\ g = e - f \\ c = f - h \\ b = h + a + f \end{cases}$$

$$\alpha^a \cdot d^{h+a+f} \cdot w^{f-h} \cdot \lambda^{-a-e} \cdot C_p^e \cdot \rho^f \cdot \mu^{e-f} \cdot v_{umh}^h = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \pi_4$$

Группировка параметра и факторов задачи в виде безразмерных критериев:

$$\left(\frac{\alpha \cdot d}{\lambda}\right)^a \cdot \left(\frac{w \cdot d \cdot \rho}{\mu}\right)^f \cdot \left(\frac{C_p \cdot \mu}{\lambda}\right)^e \cdot \left(\frac{v_{umh} \cdot d}{w}\right)^h = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3 \cdot \pi_4$$

Запись безразмерных критериев, используемых для решения рассматриваемой задачи:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} \quad Re = \frac{w \cdot d \cdot \rho}{\mu} \quad Pr = \frac{C_p \cdot \mu}{\lambda} \quad Sr = \frac{v_{umh} \cdot d}{w}$$

4.2 Задание условий однозначности для математических моделей для изучения процессов тепловой обработки материалов в печах

Общие положения

В общем случае попытка учета всех явлений, сопутствующих тепловым процессам и ими определяемых, для произвольной задачи приводит к тому, что математическая формулировка может включать в себя не только дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности, но и другие фундаментальные уравнения или их системы:

- уравнение диффузии Фика;
- систему уравнений гидродинамики (Навье-Стокса и неразрывности) для получения поля скоростей сред, контактирующих с изучаемыми твердыми телами снаружи или изнутри (например, при затвердевании слитков);
- систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние изучаемых тел.

В ряде работ приводятся данные о результатах создания математических моделей для решения теплообменных задач с участием

твердой фазы в постановке содержащей несколько дифференциальных уравнений. Такой подход, повышая точность и информативность исследования, приводит к значительному усложнению задачи с алгоритмической точки зрения и загрузки вычислительных ресурсов.

Сегодня по этому пути идут либо представители научных школ, традиционно специализировавшихся на решении задач такого рода, либо исследователи, использующие стандартные специализированные пакеты.

В данной работе решается задача создания универсальных основ построения математических моделей тепловой обработки материалов в печах, базирующихся на решении только дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности. Это уравнение задействуется для описания распределения температур внутри рассматриваемого объема, представленного только твердой фазой или сочетанием жидкой, двухфазной и твердофазной областей (внутренняя задача), находящегося в условиях конвективного или лучистого теплообмена с окружающей средой, особенности которого учитываются в результате решения внешней задачи теплообмена при помощи зональных методов или на основании экспериментальных данных.

Математическая формулировка модели процессов тепловой обработки материалов в печах

В общем виде дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности с внутренними источниками тепла записывается как:

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} t) + F.$$

Слагаемое F соответствует внутренним источникам или стокам тепла и в общем случае является функцией координат и времени. Наличие этого слагаемого позволяет предусмотреть возможность различных тепловых эффектов, таких как плавление, затвердевание, тепловой эффект химической реакции, тепловыделение при протекании электрического тока и т.д.

Поскольку на практике приходится решать тепловые задачи для тел различной формы, ниже приведены записи дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в трехмерной постановке для различных систем координат.

Для параллелепипеда дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности записывается в прямоугольной системе координат как:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) + F(x, y, z, \tau), \quad (4.1)$$

где x, y, z – координаты, отсчитываемые вдоль одноименных осей в прямоугольной декартовой системе координат (здесь и далее принято, что оси Y и Z лежат в поперечной плоскости, а ось X является продольной).

Для цилиндра имеем запись дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + F(\varphi, r, z, \tau), \quad (4.2)$$

где r – координата, отсчитываемая вдоль радиус-вектора;

φ – полярный угол, полюс для отсчета которого для каждого поперечного сечения находится в точке его пересечения с продольной осью, рад;

z – продольная координата, отсчитываемая вдоль высоты, проведенной через центр основания цилиндра.

В сферических координатах дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности записывается как:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \cdot \frac{\partial t}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2} \right) + F(r, \theta, \psi, \tau), \quad (4.3)$$

где $\mu = \cos(\Theta)$;

Θ, ψ – полярные углы, характеризующие ориентацию радиус-вектора.

Отработка подходов для учета наложения различных физико-химических явлений на решение тепловой задачи

Существуют различные подходы для учета наложения физико-химических явлений на изучаемые процессы тепловой обработки материалов. Две основных методологии таковы: первая предполагает введение понятия эффективной теплоемкости, когда тепловой эффект определенным образом относится к величине диапазона температур, в котором протекает процесс; второй подход применяется для случаев, когда предполагается протекание процесса при постоянной температуре, например, плавление и затвердевание чистых веществ, и заключается в учете движения межфазной границы при помощи следующих соотношений:

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial t_1(R_{-0}, \tau)}{\partial r} - \lambda_2 \cdot \frac{\partial t_2(R_{+0}, \tau)}{\partial r} = \rho_1 \cdot q \cdot (t - t^*) \cdot \frac{dR}{d\tau},$$

где t_1, t_2 – температурные поля в массиве материала по разные стороны от фронта преобразования;

$R(\tau)$ – положение межфазной границы;

ρ_1 – плотность материала до преобразования, кг/м³;

q – эндотермический эффект рассматриваемого физико-химического процесса;

t^* – температура начала преобразования.

Поскольку в данной работе речь идет о разработке единой платформы для моделирования тепловых процессов обработки материалов в печах, необходимо определиться с единообразным подходом для учета всех возможных явлений и процессов, сопутствующих тепловой задаче. В качестве такового выбрано использование концепции эффективной теплоемкости. При этом даже в случае, если процесс протекает при

постоянной температуре (хотя на практике с такими процессами в чистом виде практически не встречаются), выделение условного узкого температурного диапазона протекания превращения не приведет к значительной погрешности.

В ряде работ проработаны различные законы изменения удельного тепловыделения физико-химического преобразования при использовании концепции эффективной теплоемкости в зависимости от температуры. Показано, что применение нелинейных законов не предоставляет значительного уточнения расчетной информации по сравнению с линейным законом, который наиболее прост в использовании с математической и алгоритмической точек зрения.

Ниже рассмотрены варианты задания эффективной теплоемкости для решения различных задач, при этом более детальные выкладки сделаны для затвердевания и плавления, а для других задач приводятся конечные выражения для определения эффективной теплоемкости.

Затвердевание и плавление тел

Затвердевание внутренних объемов тел может иметь место при тепловой обработке материалов в печах. Так, при посадке слитков с жидкой сердцевиной в нагревательный колодец имеем затвердевание жидкой части слитка в течение нагрева. Чрезмерный нагрев материалов со сравнительно невысокой температурой плавления может привести к оплавлению поверхности нагреваемых тел.

В настоящее время существуют различные подходы к решению задачи затвердевания. Однако в подавляющем большинстве случаев для решения задач затвердевания металлических сплавов используют теорию квазиравновесной двухфазной зоны, развитую в работах В.Т. Борисова. Эта теория не учитывает кинетическое или диффузионное переохлаждение расплава, так как их величины для реальных условий малы. В указанной теории выявлена высокая скорость роста твердой фазы при малых отклонениях от равновесных условий. Это позволяет считать, что твердая и жидкая фаза находятся в равновесии в каждом элементарном объеме двухфазной области. В систему уравнений теории квазиравновесной зоны входят уравнение теплопроводности и переноса массы в жидкой части двухфазной области. Решение этой системы с соответствующими начальными и граничными условиями позволяет определить температурное поле в слитке, поле концентраций и долю жидкой фазы. Однако практическое решение составленной системы уравнений встречает ряд методических трудностей.

В рамках теории квазиравновесной двухфазной зоны существует еще одна модель охлаждения и затвердевания сплава, в основе этой модели лежит дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности, с учетом выделяющейся теплоты кристаллизации. В ее рамках вводится понятие соотношения твердой и жидкой фаз. Такой подход к изучению тепловых процессов, протекающих при формировании непрерывного слитка, нашел

применение в подавляющем большинстве математических моделей кристаллизации. Он также использован в данной работе.

Для учета тепловых эффектов затвердевания или плавления металла плотность внутреннего источника тепла вычисляется как:

$$F = \rho \cdot q_{кр} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \tau},$$

где $q_{кр}$ – теплота кристаллизации, Дж/кг;

$\omega = \frac{V_{ТВ}}{V_0}$ – относительное количество твердой фазы ($V_{ТВ}$ и V_0 – объем

твердой фазы и полный объем расплава в микрообъеме соответственно);

$\frac{\partial \omega}{\partial \tau}$ – скорость затвердевания расплава.

Величину ω можно рассматривать как относительное количество тепла затвердевания, которое выделилось.

Наиболее простой вариант решения этой задачи основывается на следующей подстановке: $\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{\partial \omega}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$, которая позволяет ввести в запись

дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности величину эффективной теплоемкости. Предположение о равномерном (линейном) законе выделения теплоты затвердевания в интервале ликвидус-солидус дает следующее выражение для определения коэффициента эффективной теплоемкости:

$$c_{эф}(t) = \begin{cases} c_{ж}(t) & \text{при } t > t_l \\ [(c_{ТВ}(t) + c_{ж}(t))/2 + q_{кр}/(t_l - t_c)] & \text{при } t_c < t < t_l, \\ c_{ТВ}(t) & \text{при } t < t_c \end{cases} \quad (4.4)$$

где t_l , t_c – температуры ликвидус и солидус соответственно, °С.

По данным ряда исследователей, использование других законов для описания процесса выделения теплоты затвердевания в зависимости от температуры в интервале ликвидус-солидус, например, квадратичного, не приводит к заметному уточнению расчетной информации. Поэтому в большинстве работ и здесь далее используется линейный закон и выражение (4.4).

При решении задачи плавления также целесообразно пользоваться концепцией эффективной теплоемкости и следующей зависимостью:

$$c_{эф}(t) = \begin{cases} [(c_{ТВ}(t) + c_{ж}(t))/2 + q_{кр}/(t_l - t_c)] & \text{при } t_c < t < t_l \\ c_{ТВ}(t) & \text{при } t < t_c \end{cases}.$$

Вариант $t > t_l$ в данном случае не рассматривается, так как области с такой температурой считаются выведенными из рассматриваемого объема, для которого решается дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности и включаются в область решения внешней задачи.

Особенности такого подхода будут рассмотрены ниже при анализе задания геометрических условий.

Таким образом, учет явления затвердевания или плавления тел достигается за счет введения в запись дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности эффективной теплоемкости $c_{эф}(t)$ вместо $c(t)$.

Высушивание материалов

В случае моделирования высушивания материала для задания коэффициента эффективной теплоемкости используется следующее выражение:

$$c_{эф}(t) = \begin{cases} c_{вл}(t) & \text{при } t < t_{нач}^{суш} \\ \frac{c_{вл}(t_{нач}^{суш}) + c_{сух}(t_{кон}^{суш})}{2} + \frac{W \cdot q_{исп}}{t_{кон}^{суш} - t_{нач}^{суш}} & \text{при } t_{нач}^{суш} < t < t_{кон}^{суш}, \\ c_{сух}(t) & \text{при } t > t_{кон}^{суш} \end{cases}$$

где $c_{вл}(t), c_{сух}(t)$ – зависимость теплоемкости влажного и сухого материала соответственно от температуры, Дж/(кг·К);

$t_{нач}^{суш}, t_{кон}^{суш}$ – температуры начала и конца процесса сушки соответственно, °С;

W – исходная влажность высушиваемого материала, масс %;

$q_{исп}$ – теплота испарения влаги, Дж/кг.

Разложение соединений

В случае моделирования разложения соединений для задания коэффициента эффективной теплоемкости используется следующее выражение:

$$c_{эф}(t) = \begin{cases} c_{не\ разл}(t) & \text{при } t < t_{нач}^{разл} \\ \frac{c_{не\ разл}(t_{нач}^{разл}) + c_{разл}(t_{кон}^{разл})}{2} + \frac{B \cdot q_{разл}}{t_{кон}^{разл} - t_{нач}^{разл}} & \text{при } t_{нач}^{разл} < t < t_{кон}^{разл}, \\ c_{разл}(t) & \text{при } t > t_{кон}^{разл} \end{cases}$$

где $c_{не\ разл}(t), c_{разл}(t)$ – зависимость теплоемкости неразложенного и разложенного материала соответственно от температуры, Дж/(кг·К);

$t_{нач}^{разл}, t_{кон}^{разл}$ – температуры начала и конца процесса разложения соответственно, °С;

B – исходная доля разлагаемого вещества в обрабатываемом материале, масс %;

$q_{разл}$ – теплота разложения, Дж/кг.

Химическая реакция, не лимитируемая поступлением реагентов

Речь идет о преобразовании, полностью определяемом температурным состоянием материала. Это случай, когда реагенты в нужной пропорции были перемешаны и материал подвергается прогреву для реализации предусмотренной химической реакции. Примером такой реакции может служить металлизация окатышей. В этом случае значение коэффициента эффективной теплоемкости задается следующим образом:

$$c_{\text{эф}}(t) = \begin{cases} c_{\text{до реакц}}(t) & \text{при } t < t_{\text{нач}}^{\text{реак}} \\ \frac{c_{\text{до реакц}}(t_{\text{нач}}^{\text{реак}}) + c_{\text{после реакц}}(t_{\text{кон}}^{\text{реак}})}{2} + \frac{B \cdot q_{\text{реак}}}{t_{\text{кон}}^{\text{реак}} - t_{\text{нач}}^{\text{реак}}} & \text{при } t_{\text{нач}}^{\text{реак}} < t < t_{\text{кон}}^{\text{реак}}, \\ c_{\text{после реакц}}(t) & \text{при } t > t_{\text{кон}}^{\text{реак}} \end{cases}$$

где $c_{\text{до реакц}}(t)$, $c_{\text{после реакц}}(t)$ – зависимость теплоемкости материала до и после протекания реакции соответственно от температуры, Дж/(кг·К);

$t_{\text{нач}}^{\text{реак}}$, $t_{\text{кон}}^{\text{реак}}$ – температуры начала и конца протекания реакции соответственно, °С;

B – исходная доля вещества в обрабатываемом материале, к которому отнесен тепловой эффект реакции, масс %;

$q_{\text{разл}}$ – тепловой эффект рассматриваемой химической реакции, Дж/кг.

Термическая деструкция твердого топлива

Для рассмотрения условно выбран процесс, состоящий из трех трансформаций, сопровождающихся определенными тепловыми эффектами. В этом случае значение коэффициента эффективной теплоемкости задается как

$$c_{\text{эф}}(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{при } t < t_1 \\ \frac{c_1(t_1) + c_2(t_2)}{2} + \frac{B_1 \cdot q_{\text{пр1}}}{t_2 - t_1} & \text{при } t_1 < t < t_2 \\ c_2(t) & \text{при } t_2 < t < t_3 \\ \frac{c_2(t_3) + c_3(t_4)}{2} + \frac{B_2 \cdot q_{\text{пр2}}}{t_4 - t_3} & \text{при } t_3 < t < t_4 \\ c_3(t) & \text{при } t_4 < t < t_5 \\ \frac{c_3(t_5) + c_4(t_6)}{2} + \frac{B_3 \cdot q_{\text{пр3}}}{t_6 - t_5} & \text{при } t_5 < t < t_6 \\ c_4(t) & \text{при } t > t_6 \end{cases},$$

где t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , t_5 , t_6 – характерные температуры протекания процесса (три условно выбранные трансформации протекают в интервалах температур t_1-t_2 , t_3-t_4 , t_5-t_6), °С;

$c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, $c_4(t)$ – зависимость теплоемкости рассматриваемого материала от температуры до 1-го, 2-го, 3-го и после 3-го термических преобразований соответственно, Дж/(кг·К);

$q_{пр1}$, $q_{пр2}$, $q_{пр3}$ – тепловой эффект 1-го, 2-го и 3-го преобразований соответственно, Дж/кг.

V_1 , V_2 , V_3 – исходные доли соединений в обрабатываемом материале, к которым отнесены тепловые эффекты соответствующих температурных трансформаций, масс %.

Широко распространенным примером технологии с термической деструкцией твердого топлива является процесс коксования каменного угля в печах коксовых батарей.

Задание условий однозначности

Как было отмечено выше, моделирование теплообменных процессов с участием твердой фазы сводится к решению дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности с соответствующими условиями однозначности. В состав условий однозначности входят:

- геометрические условия, учитывающие форму и размеры области пространства, для которой реализуется решение внутренней задачи;
- начальные условия, описывающие распределение температур в «нулевой» момент времени;
- граничные условия теплообмена, сформированные на основании особенностей внешней задачи;
- зависимость теплофизических характеристик материала от температуры.

Геометрические условия

Геометрические условия применяются для определения области пространства, для которой производится решение соответствующих дифференциальных уравнений. Выбор конкретных геометрических условий влияет на окончательную форму записи дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности.

На рис. 4.1 показаны схемы задания граничных условий для параллелепипеда, цилиндра и сферы, а соответствующие формы записи дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности представлены выражениями (4.1-4.3).

На практике решение задач в трехмерной постановке является достаточно трудоемким как с алгоритмической точки зрения, так и с позиции скорости моделирования при помощи ЭВМ.

Поэтому обычно исследователи стремятся свести математическую формулировку задачи к двумерной или одномерной за счет решения внутренней задачи для характерного поперечного сечения:

- квадрат – для тел, имеющих форму параллелепипеда с квадратом в наименьшем основании, например, сортовой заготовки;
- круг – для тел, имеющих форму цилиндра, например, для заготовки с круглым поперечным сечением (также зачастую прибегают к переходу от реальной формы многогранника к кругу с эквивалентным диаметром);
- прямоугольник – для тел, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, например, для слябовой заготовки или листа.

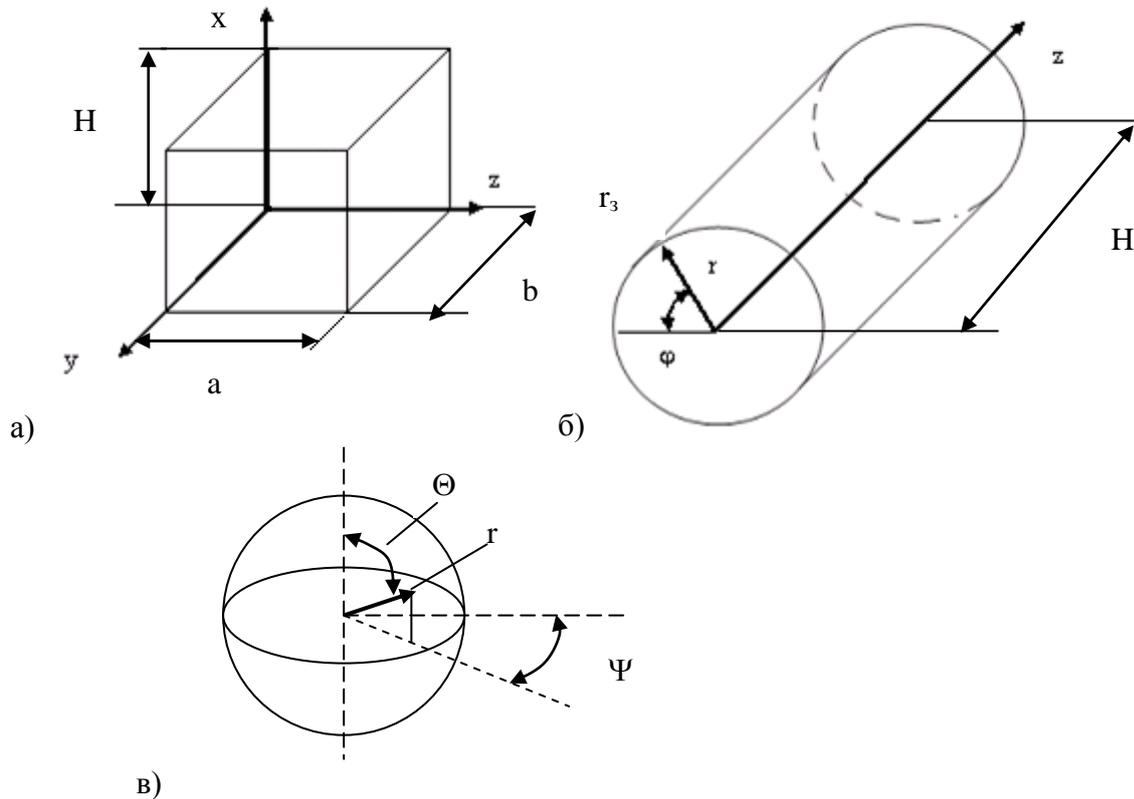


Рисунок 4.1 – Схема геометрических условий для решения трехмерной задачи (а – для прямоугольного параллелепипеда, б – для цилиндра, в – для сферы)

Переход от трехмерной постановки задачи к задаче меньшей размерности приводит к возникновению некоторой погрешности. Для призматических и цилиндрических тел она возникает за счет исключения из рассмотрения теплообмена на торцевых поверхностях. Зачастую эти погрешности не являются значительными, так как площадь торцевых поверхностей, как правило, существенно меньше боковой поверхности тел и средняя плотность теплового потока для них также обычно меньше, чем для боковой поверхности.

Для двухмерной и одномерной постановок задачи исследуемой областью являются характерное поперечное сечение или выбранный отрезок соответственно. На рис. 4.2 представлены варианты задания геометрических условий для двухмерной и одномерной постановки задач для тел различной формы и различных особенностей теплообмена.

Для квадратного поперечного сечения необходима запись дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в следующем виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c_{\text{эф}}} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (4.5)$$

где y, z – координаты, отсчитываемые вдоль осей симметрии поперечного сечения заготовки, м.

Для заготовки с круглым поперечным сечением, влиянием торцевых поверхностей и изменением температуры в зависимости от полярного угла для которой можно пренебречь, дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности записывается в одномерной постановке следующим образом:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c_{\text{эф}}} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right), \quad (4.6)$$

где r – координата, отсчитываемая вдоль радиуса заготовки, м.

Если степень неравномерности распределения теплового потока по периметру расчетного сечения столь значительна, что ей нельзя пренебречь, то дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности для круглого поперечного сечения записывается в двухмерной постановке:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c_{\text{эф}}} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right), \quad (4.7)$$

где φ – полярный угол, полюс для отсчета которого находится в центре круглого поперечного сечения, рад.

Для заготовки с прямоугольным поперечным сечением возможна запись рассматриваемого уравнения как в двухмерной (4.5), так и в одномерной постановке:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c_{\text{эф}}} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right). \quad (4.8)$$

Выбор зависит от того, насколько существенным является учет теплообмена через узкие грани прямоугольника. Характерный пример, когда оправданным следует признать использование одномерной постановки – моделирование нагрева или охлаждения листа.

Кроме того, для тел с шаровой или приближенной к шару формой в случае равномерного распределения интенсивности теплообмена по поверхности (при возможности неучета влияния углов широты и долготы) допустимо рассмотрение дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в одномерной постановке:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c_{\text{эф}}} \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right).$$

При анализе схем, представленных на рис. 4.2, следует учитывать, что заштрихованные области показывают участки расчетных поперечных сечений, для которых реализуется решение задачи в двухмерной постановке. Рис. 4.2а соответствует телам с квадратным поперечным сечением, для которых необходимо предусмотреть возможность задания граничных условий теплообмена, отличающихся по периметру заготовки, что в максимальной мере соответствует реальным условиям работы печи. В

случае, если учет неравномерности теплообмена между гранями не является решающим фактором при решении конкретной задачи (например, из-за малого масштаба развития неравномерности, высокой теплопроводности материала и т.д.), целесообразно решать задачу для четверти квадрата (рис. 4.2б), что позволит уменьшить объем вычислительной работы и при этом сохранить учет влияния угловой области. Обоим случаям (рис. 4.2а и рис. 4.2б) соответствует решение задачи в двухмерной постановке (4.5).

Аналогичный подход имеет место для круглого расчетного поперечного сечения. В случае, когда необходимо учитывать отличие условий теплообмена по периметру расчетного сечения, решаем дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности в двухмерной постановке (4.7) для геометрических условий, представленных на рис. 4.2 в. Если есть возможность не учитывать отличие условий теплообмена решаем задачу в одномерной постановке (4.6) для граничных условий (рис. 4.2 г, на котором рассматриваемая область показана произвольным радиус-вектором).

Для прямоугольного поперечного сечения геометрические условия (рис. 4.2д и рис. 4.2е) и целесообразность их применения полностью аналогичны случаям рис. 4.2а и рис. 4.2б для квадратного сечения. Наибольшее упрощение задачи для прямоугольного сечения может быть достигнуто при возможности неучета теплообмена через узкие грани (рис. 4.2 ж), когда задача решается в одномерной постановке (4.8). Рассматриваемая область представлена выделенным отрезком.

Рис. 4.2з соответствует решению одномерной задачи для тел сферической формы.

Подвижная система координат для решения квазиравновесных задач

Для установившихся режимов работы агрегатов непрерывного действия тепловое состояние рассматриваемых систем характеризуется квазиравновесным состоянием – температурное состояние конкретных тел или их расчетных сечений является нестационарным, а температурное поле всего массива обрабатываемого материала стационарно в привязке к агрегату. В этом случае целесообразно использовать подвижную систему координат, привязанную к расчетному поперечному сечению, которая движется вдоль продольной оси агрегата со скоростью, равной средней скорости перемещения материала.

Такой подход необходимо использовать для моделирования тепловых процессов, протекающих при нагреве или термообработке заготовок в проходных нагревательных печах. В результате решения определяется только изменение температурного поля расчетного температурного сечения или характерного тела в течение тепловой обработки и эта информация дает представление о температурном поле всего массива материала, находящегося в агрегате.

При использовании подвижной системы координат между шагами по времени и продольной координате имеется следующее соотношение:

$$dx = v \cdot d\tau,$$

где v – средняя скорость перемещения материала в агрегате, м/с.

Продольная координата x дает представление о месте нахождения расчетного сечения в привязке к агрегату в произвольный момент времени.

Начальные условия

Для изучения процессов тепловой обработки материалов возможно использование двух вариантов начальных условий:

– задание усредненного температурного поля перед началом тепловой обработки;

– задание температурного поля, полученного в результате предыдущей тепловой операции над материалом, которое в общем случае является неравномерным.

Обозначим первый вид условий как н.ф.у. I, а второй как н.ф.у. II. Начальные условия обоих видов для всех вариантов геометрических условий, проработанных выше, представлены в Таблице 4.2.

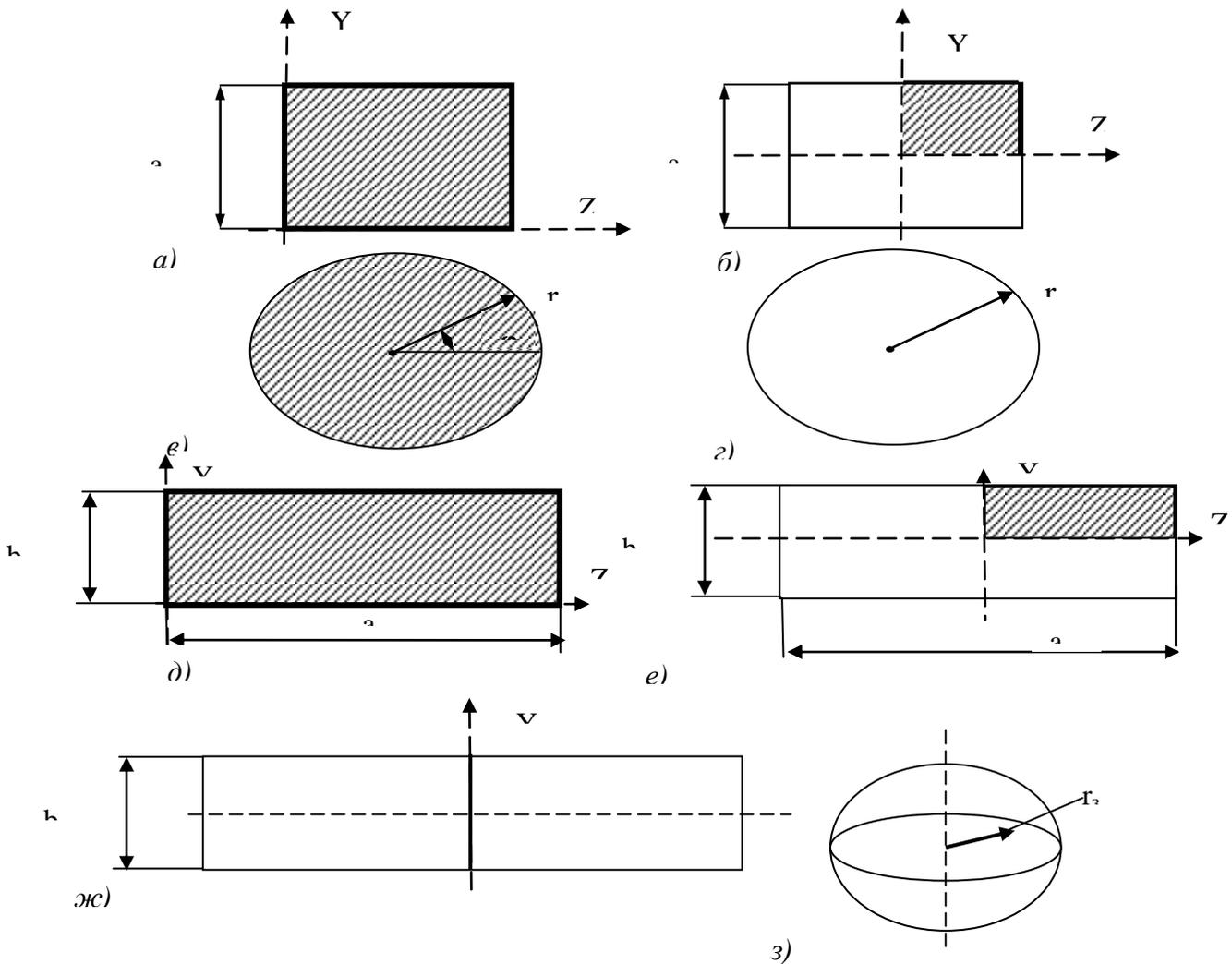


Рисунок 4.2 – Схема различных вариантов геометрических условий для математических моделей тепловой обработки материалов в печах

(а, б – квадратное поперечное сечение с возможностью учета отличий условий теплообмена между гранями и без такой возможности; в, г – круглое поперечное сечение при отличающихся характеристиках теплообмена по периметру расчетного сечения и без отличия характеристик теплообмена по периметру; д, е, ж – прямоугольное поперечное сечение при отличающихся характеристиках теплообмена по периметру расчетного сечения, без отличия и при возможности не учитывать теплообмен через узкие грани; з – тело шаровой формы без отличий условий теплообмена по поверхности сферы)

Таблица 4.2 – Задание начальных условий для различных геометрических характеристик протекания процесса

Соответствующие геометрические условия	Формулировка начальных условий	
	н.ф.у. I	н.ф.у. II
Рис 4.1 а	$0 \leq y \leq b,$ $0 \leq z \leq a,$ $0 \leq x \leq H,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq y \leq b,$ $0 \leq z \leq a,$ $0 \leq x \leq H,$ $\tau = 0 : t = t(x, y, z)$
Рис 4.1 б	$0 \leq r \leq r_3,$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi,$ $0 \leq z \leq H,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq r \leq r_3,$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi,$ $0 \leq z \leq H,$ $\tau = 0 : t = t(r, \varphi, z)$
Рис 4.1 в	$0 \leq r \leq r_3,$ $0 \leq \theta \leq 2\pi,$ $0 \leq \psi \leq 2\pi,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq r \leq r_3,$ $0 \leq \theta \leq 2\pi,$ $0 \leq \psi \leq 2\pi,$ $\tau = 0 : t = t(r, \theta, \psi)$
Рис. 4.2 а	$0 \leq y \leq a,$ $0 \leq z \leq a,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq y \leq a,$ $0 \leq z \leq a,$ $\tau = 0 : t = t(y, z)$
Рис. 4.2 б	$0 \leq y \leq a/2,$ $0 \leq z \leq a/2,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq y \leq a/2,$ $0 \leq z \leq a/2,$ $\tau = 0 : t = t(y, z)$
Рис. 4.2 в	$0 \leq r \leq r_3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq r \leq r_3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $\tau = 0 : t = t(r, \varphi)$
Рис. 4.2 г	$0 \leq r \leq r_3, \tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq r \leq r_3, \tau = 0 : t = t(r)$
Рис. 4.2 д	$0 \leq y \leq b,$ $0 \leq z \leq a,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq y \leq b,$ $0 \leq z \leq a,$ $\tau = 0 : t = t(y, z)$
Рис. 4.2 е	$0 \leq y \leq b/2,$ $0 \leq z \leq a/2,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq y \leq b/2,$ $0 \leq z \leq a/2,$ $\tau = 0 : t = t(y, z)$

Рис. 4.2 ж	$0 \leq y \leq b/2,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq y \leq b/2,$ $\tau = 0 : t = t(y)$
Рис. 4.2 з	$0 \leq r \leq r_3,$ $\tau = 0 : t = t_n$	$0 \leq r \leq r_3,$ $\tau = 0 : t = t(r)$

Граничные условия

Граничные условия определяют теплообмен на поверхности области (представленной геометрическими условиями), для которой решается внутренняя задача.

Для задания граничных условий теплообмена существует четыре базовых варианта: граничные условия первого, второго, третьего и четвертого рода. Условия первого рода задают температуру или закон ее изменения на рассматриваемой граничной поверхности; второго рода – напрямую задают тепловой поток к (или от) рассматриваемой поверхности (или закон его изменения); третьего рода – тепловой поток к (или от) рассматриваемой поверхности, выраженный при помощи закона Ньютона-Рихмана; четвертого рода – температуру в месте контакта поверхностей.

При решении симметричных тепловых задач для центров симметрии расчетных сечений необходимо задание граничных условий второго рода – согласно которым тепловой поток равен нулю (условие неперетекания).

Для задания теплового потока к (от) поверхности заготовок могут быть использованы граничные условия первого, второго или третьего рода, при этом существует возможность взаимного преобразования граничных условий. Автор предполагает, что в большинстве случаев предпочтительным является задание граничных условий третьего рода на поверхности расчетных сечений. В общем случае в каждый новый момент времени необходимо проводить пересмотр граничных условий.

В математической формулировке граничных условий в данной работе принята особая система обозначений (рис. 4.3). Для параллелепипеда грани обозначаются следующим образом: боковые грани имеют индексы N, E, S, W, как стороны света, верхняя и нижняя грани – L (lower -нижний) и U (upper- верхний). Для цилиндра боковая поверхность имеет индекс SS (side surface – боковая поверхность), нижнее и верхнее основания – L и U. При двухмерной постановке задачи грани прямоугольного (квадратного) поперечного сечения имеют индексы как стороны света, а окружность круглого поперечного сечения обозначается индексом SS.

Во всех математических формулировках граничных условий температура конкретных узлов на поверхности объемных тел или расчетных сечений в рассматриваемый момент времени обозначается как t_n с указанием соответствующих координат.

Ниже детально проработана схема задания граничных условий теплообмена для нагрева тел при различных геометрических условиях.

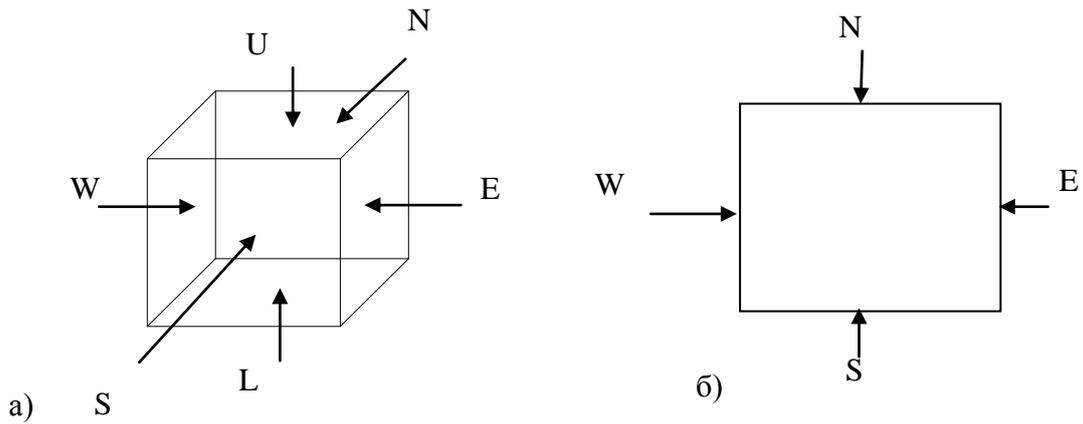


Рисунок 4.3 – Схема обозначения граней для задания граничных условий

а – для параллелепипеда (задача в трехмерной постановке);

б – для прямоугольного сечения (задача в двухмерной постановке)

Для тела, имеющего форму параллелепипеда, граничные условия теплообмена при нагреве задаются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq a, 0 \leq x \leq H, y = 0: -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha_{\Sigma}^N(x, z) \cdot (t_{cp}^N(x, z) - t_n(x, z)); \\ 0 \leq z \leq a, 0 \leq x \leq H, y = b: \lambda \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha_{\Sigma}^S(x, z) \cdot (t_{cp}^S(x, z) - t_n(x, z)); \\ 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq H, z = 0: -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^W(x, y) \cdot (t_{cp}^W(x, y) - t_n(x, y)); \\ 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq H, z = a: \lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^E(x, y) \cdot (t_{cp}^E(x, y) - t_n(x, y)); \\ 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq a, x = 0: -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha_{\Sigma}^L(y, z) \cdot (t_{cp}^L(y, z) - t_n(y, z)); \\ 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq a, x = H: \lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha_{\Sigma}^U(y, z) \cdot (t_{cp}^U(y, z) - t_n(y, z)), \end{array} \right. \quad (4.9)$$

где $\alpha_{\Sigma}^N(x, z)$, $\alpha_{\Sigma}^S(x, z)$, $\alpha_{\Sigma}^W(x, y)$, $\alpha_{\Sigma}^E(x, y)$, $\alpha_{\Sigma}^L(y, z)$, $\alpha_{\Sigma}^U(y, z)$ – итоговые коэффициенты теплоотдачи для конкретных узлов на гранях параллелепипеда (обозначения граней на рис. 4.3), Вт/(м²·К);

$t_{cp}^N(x, z)$, $t_{cp}^S(x, z)$, $t_{cp}^W(x, y)$, $t_{cp}^E(x, y)$, $t_{cp}^L(y, z)$, $t_{cp}^U(y, z)$ – действующие температуры греющей среды для конкретных узлов на гранях параллелепипеда, °С.

Знак «-» перед комплексом, соответствующим тепловому потоку теплопроводностью в выражении 4.9, ставится при совпадении направления теплового потока с направлением оси, вдоль которой берется производная от температуры. В противном случае имеем знак «+».

Для нагрева тела, имеющего форму цилиндра, граничные условия задаются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq H, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r = r_3 : \lambda \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha_{\Sigma}^{SS}(\varphi, z) \cdot (t_{cp}^{SS}(\varphi, z) - t_n(\varphi, z)); \\ 0 \leq r \leq r_3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = 0 : -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^L(\varphi, r) \cdot (t_{cp}^L(\varphi, r) - t_n(\varphi, r)); \\ 0 \leq r \leq r_3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = H : \lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^U(\varphi, r) \cdot (t_{cp}^U(\varphi, r) - t_n(\varphi, r)), \end{array} \right. \quad (4.10)$$

где $\alpha_{\Sigma}^{SS}(\varphi, z)$, $\alpha_{\Sigma}^L(\varphi, r)$, $\alpha_{\Sigma}^U(\varphi, r)$ – итоговые коэффициенты теплоотдачи для конкретных узлов на боковой поверхности цилиндра и его основаниях, Вт/(м²·К);

$t_{cp}^{SS}(\varphi, z)$, $t_{cp}^L(\varphi, r)$, $t_{cp}^U(\varphi, r)$ – действующие температуры греющей среды для конкретных узлов на боковой поверхности цилиндра и его основаниях, К.

Для случая нагрева тела, имеющего в поперечном сечении форму квадрата, и решения задачи в двухмерной постановке при задании граничных условий отдельно для каждой грани (рис. 4.2 а) общая схема задания граничных условий выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq a, y = 0 : -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha_{\Sigma}^S(z)(t_{cp}^S(z) - t_n(z)); \\ 0 \leq z \leq a, y = a : \lambda \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha_{\Sigma}^N(z)(t_{cp}^N(z) - t_n(z)); \\ 0 \leq y \leq a, z = 0 : -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^W(y)(t_{cp}^W(y) - t_n(y)); \\ 0 \leq y \leq a, z = a : \lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^E(y)(t_{cp}^E(y) - t_n(y)); \end{array} \right.$$

где $\alpha_{\Sigma}^S(z)$, $\alpha_{\Sigma}^N(z)$, $\alpha_{\Sigma}^W(y)$, $\alpha_{\Sigma}^E(y)$ – итоговые коэффициенты теплоотдачи от среды для конкретных узлов на сторонах расчетного сечения, Вт/(м²·К);

$t_{cp}^S(z)$, $t_{cp}^N(z)$, $t_{cp}^W(y)$, $t_{cp}^E(y)$ – действующие температуры греющей среды для конкретных узлов на сторонах расчетного сечения, К.

При проведении моделирования для четверти квадратного поперечного сечения тела задаем граничные условия для нагрева следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq a/2, y = 0 : \frac{\partial t}{\partial y} = 0; \\ 0 \leq z \leq a/2, y = a/2 : \lambda \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha_{\Sigma}^N(z)(t_{cp}^N(z) - t_n(z)); \\ 0 \leq y \leq a/2, z = 0 : \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \\ 0 \leq y \leq a/2, z = a/2 : \lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^E(y)(t_{cp}^E(y) - t_n(y)). \end{array} \right.$$

Для круглого поперечного сечения с условиями теплообмена, меняющимися по периметру, имеем следующие граничные условия третьего рода:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, r = r_3 : \lambda \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha(\varphi) \cdot (t_{cp}(\varphi) - t_n(\varphi));$$

где $\alpha(\varphi)$ – распределение коэффициента теплоотдачи по поверхности расчетного сечения в зависимости от полярного угла;

$t_{cp}(\varphi)$ – распределение действующей температуры среды для узлов на поверхности расчетного сечения в зависимости от полярного угла.

Для круглого поперечного сечения и решения задачи в одномерной постановке задаем следующие граничные условия:

$$\begin{cases} r = r_3 : \lambda \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha_{\Sigma}^{баз} (t_{cp} - t_n); \\ r = 0 : \frac{\partial t}{\partial r} = 0. \end{cases}$$

Для вариантов изучения нагрева заготовок с прямоугольным поперечным сечением используются подходы к заданию граничных условий, аналогичные тем, что были представлены при рассмотрении квадратных поперечных сечений.

При моделировании охлаждения заготовок любого поперечного сечения в схеме задания граничных условий меняется только порядок следования температур в множителе перед итоговым коэффициентом теплоотдачи: при нагреве берем разницу температур греющей среды и поверхности, а при охлаждении поверхности и охлаждающей среды. Правило расстановки знаков перед тепловым потоком теплопроводностью остается неизменным.

Приведем задание граничных условий только для случая охлаждения квадратного поперечного сечения (рис. 4.2.а):

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq a, y = 0 : \lambda \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha_{\Sigma}^S(z)(t_n(z) - t_{cp}^N(z)); \\ 0 \leq z \leq a, y = a : -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} = \alpha_{\Sigma}^N(z)(t_n(z) - t_{cp}^S(z)); \\ 0 \leq y \leq a, z = 0 : \lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^W(y)(t_n(y) - t_{cp}^W(y)); \\ 0 \leq y \leq a, z = a : -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = \alpha_{\Sigma}^E(y)(t_n(y) - t_{cp}^E(y)). \end{cases}$$

При отработке схемы задания граничных условий теплообмена для задач в двухмерной и трехмерной постановке использован наиболее общий подход, согласно которому итоговое значение коэффициента теплоотдачи и температуры среды для каждого узла на поверхности объемного тела или контура расчетного сечения определяется как функция координаты. При решении ряда задач имеется возможность (в связи с равномерным

распределением интенсивности теплоотдачи) или необходимость (в связи с невозможностью учета неравномерности теплоотвода) задавать эти величины как константы для поверхности или контура.

Таким образом, основная проблема при конструировании граничных условий заключается в определении распределения итоговых значений коэффициентов теплоотдачи и температур греющей (охлаждающей) сред. В данном случае речь идет о внешней задаче теплообмена, при решении которой необходимо руководствоваться физическими особенностями конвективной и лучистой передачи тепла в рассматриваемой технологии.

4.3 Особенности обработки результатов измерений температуры, которая быстро меняется с помощью метода "комбинированных измерителей"

Часто для измерения температуры, которая быстро меняется используют так называемые комбинированные измерители. Характерным примером такого измерителя является комбинация из двух термопар, спаи которых выполнены в форме тонких пластинок различной толщины h_1 и h_2 . Пластины устанавливаются параллельно друг другу на расстоянии. При таком расположении коэффициенты теплоотдачи между пластинками и потоком α_1 и α_2 будут одинаковыми. Уравнение теплового баланса для пластин имеют следующий вид:

$$2 \cdot \alpha_1 \cdot F_1 \cdot [t(\tau) - u_1(\tau)] = \rho_1 \cdot c_1 \cdot \Delta V_1 \cdot \frac{du_1(\tau)}{d\tau};$$

$$2 \cdot \alpha_2 \cdot F_2 \cdot [t(\tau) - u_2(\tau)] = \rho_2 \cdot c_2 \cdot \Delta V_2 \cdot \frac{du_2(\tau)}{d\tau};$$

где ρ_1, ρ_2 - плотность спаев первой и второй термопар, кг/м³;

c_1, c_2 - теплоемкость спаев первой и второй термопар, Дж/(кг·°C);

F_1, F_2 - площади поверхности спаев термопар; м²;

$\Delta V_1, \Delta V_2$ - объемы спаев первой и второй термопар, м³;

$u_1(\tau), u_2(\tau)$ - температура спаев термопар, соответствующая показаниям вторичных приборов;

$t(\tau)$ - Действительная температура потока.

Термопары выбирают таким образом, чтобы $\rho_1 = \rho_2, c_1 = c_2, F_1 = F_2$.

Тогда отношение объемов спаев первой и второй термопар равно:

$$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Задача исследования состоит в том, чтобы по показаниям вторичных приборов, к которым присоединены термопары вычислить значение действительной температуры потока в каждый момент времени.

Для этого воспользуемся системой уравнений теплового баланса спаев термопар. Разделив первое уравнение на второе путем ряда преобразований

получим следующее выражение для определения истинной температуры потока:

$$t(\tau) = \frac{u_1(\tau) - u_2(\tau) \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{u_1'(\tau)}{u_2'(\tau)}}{1 - \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{u_1'(\tau)}{u_2'(\tau)}}$$

где u_1' , u_2' - производные от показаний вторичных приборов по времени.

Для их вычисления можно аппроксимировать показания вторичных приборов полиномиальной функцией и найти ее производную аналитическим методом. Другим вариантом решения этой задачи является графический метод, когда показания вторичных приборов с заданной дискретностью (например, 1 с) наносятся на график. Соседние точки соединяются между собой прямыми отрезками. Тогда значение производной (например, для ряда $u_1(\tau)$ для i -о. секунды) находим по следующему выражению:

$$u_1'(i) = \frac{\frac{u_1(i+1) + u_1(i)}{2} - \frac{u_1(i) + u_1(i-1)}{2}}{(i+0.5) - (i-0.5)} = \frac{u_1(i+1) - u_1(i-1)}{2}$$

Каждому студенту дается свой ряд данных $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$ (Приложение Б) для диапазона времени от 0 до 15 с (значение даются через каждую секунду). Толщина пластин для всех одинакова и составляет $h_1 = 1$ мм и $h_2 = 2$ мм. Необходимо для моментов времени от 1 до 14 секунды вычислить значения производных u_1' , u_2' и значение функции $t(\tau)$. Результаты расчетов необходимо свести в таблицу, а также представить графически на миллиметровой бумаге. Формат изображения А4.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Понятие методов исследования.
2. Классификация методов исследования.
3. Особенности применения методов исследования.
4. Понятие моделей исследования.
5. Классификация моделей исследования.
6. Особенности применения моделей исследования.
7. Суть теории подобия. Базовые теоремы.
8. Применение теории подобия в научных исследованиях.
9. Преимущества применения теории подобия в экспериментальной практике.
10. Получение критериев подобия при помощи теории размерностей.
11. Получение критериев подобия из дифференциальных уравнений описывающих процесс.
12. Методика получения критериальных уравнений.
13. Сущность методов экспериментальных исследований.
14. Основные этапы проведения экспериментальных исследований.
15. Требования к метрологическому обеспечению и точности результатов экспериментальных исследований.
16. Устройство, принцип действия и применение в экспериментальной практике электрических датчиков для измерения различных величин.
17. Классификация и особенности применения математических моделей, преимущества и недостатки.
18. Вывод дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающих простейшие природные и технологические процессы.
19. Сущность проведения всех этапов по постановке задачи математического моделирования: математическая формулировка, задание условий однозначности (геометрические, начальные, граничные и физические условия).
20. Понятие аппроксимации дифференциальных уравнений по разностным схемам.
21. Методы конечных разностей и конечных элементов.
22. Явные и неявные конечно-разностные схемы.
23. Сущность процедуры адаптации математических моделей.
24. Понятие адекватности модели.
25. Использование методов подстройки математических моделей.
26. Понятие погрешности результатов эксперимента.
27. Виды погрешностей. Природа случайных и систематических погрешностей.
28. Законы распределения случайных величин.
29. Основы интервальной оценки экспериментальных данных.
30. Основы дисперсионного анализа.
31. Основы корреляционного анализа.
32. Основы регрессионного анализа.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гортышов Ю.Ф. Теория и техника теплофизического эксперимента. – М.: Техника, 1988. – 360 с.
2. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент. Справочник /Под общ. Ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 510 с.
3. Тимошенко Г.М. Теория инженерного эксперимента /Г.М. Тимошенко, П.Ф. Зима. – К.: УМК ВО, 1991.– 122 с.
4. Круг Г.К., Кабанов В.А., Фомин Г.А. Техническое и математическое обеспечение систем автоматизации научных исследований. – М.: Изд. МЭИ, 1979. –87 с.
5. Туяхов А.И. Метрология и стандартизация. – Донецк:ДонНТУ, 2006.– 186 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задачи на установление вида критериев подобия

1. К верёвке длиной R , один конец которой закреплён в неподвижной точке, привязан камень массой m . Камень вращается со скоростью v . Ускорение свободного падения равно g , а сила натяжения верёвки, определяемая в опыте равна $F=f(R,m,v,g)$. Найти безразмерные комбинации, которыми можно описать процесс.
2. Сила сопротивления трения $F_{тр}$ тонкой прямоугольной пластины, обтекаемой потоком жидкости, зависит от площади боковых поверхностей пластины ω , плотности ρ , скорости жидкости v и ускорения свободного падения g . Найти безразмерные комбинации, которыми можно описать процесс.
3. Мощность на валу насоса N зависит от создаваемого им напора H , подачи Q , плотности жидкости ρ и ускорения свободного падения g . Найти безразмерные комбинации, которыми можно описать процесс.
4. Расход воды Q через цилиндрический насадок зависит от диаметра насадка d_n , плотности ρ и динамической вязкости жидкости μ , а также от давления жидкости перед насадком p . Найти безразмерные комбинации, которыми можно описать процесс.

Приложение Б

Исходные данные для выполнения задания №2

№ Варианта	Разновидность технологии тепловой обработки металла
1	Нагрев слитков в колодце ОЦП
2	Нагрев слитков в колоде ОВГ
3	Нагрев кузнечного слитка в печи с выкатным подом
4	Нагрев блюмов в трехзонной методической толкательной печи
5	Нагрев слябов трехзонной методической толкательной печи
6	Нагрев сортовых заготовок в печи с шагающими балками
7	Нагрев сортовых заготовок в печи с шагающим подом
8	Нагрев слябов в печи с шагающими балками
9	Нагрев слябов в печи с шагающим подом
10	Нагрев трубных заготовок во вращающейся печи

Приложение В

Исходные данные для выполнения задания № 3

№ варианта	Значение $u_1(\tau)$ и $u_2(\tau)$ (верхнее - $u_1(\tau)$, нижнее - $u_2(\tau)$) для моментов времени от 0 до 15 с															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	120 102	150 127	180 149	210 179	220 200	230 215	240 229	250 240	260 251	265 258	270 262	275 267	280 271	285 276	290 283	293 287
2	20 2	50 27	80 49	110 79	120 100	130 115	140 129	150 140	160 151	165 158	170 162	175 167	180 171	185 176	190 183	193 187
3	320 302	350 327	380 349	410 379	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 467	480 471	485 476	490 483	493 487
4	520 502	550 527	580 549	510 579	520 500	530 515	540 529	550 540	560 551	565 558	570 562	575 567	580 571	585 576	590 583	593 587
5	420 402	450 427	480 449	410 479	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 463	480 471	485 476	490 483	493 487
6	120 102	150 127	180 149	210 179	220 200	230 215	240 229	250 240	260 251	265 258	270 262	275 267	280 271	285 276	290 283	293 287
7	20 2	50 27	80 49	110 79	120 100	130 115	140 129	150 140	160 151	165 158	170 162	175 167	180 171	185 176	190 183	193 187
8	320 302	350 327	380 349	410 379	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 467	480 471	485 476	490 483	493 487
9	520 502	550 527	580 549	510 579	520 500	530 515	540 529	550 540	560 551	565 558	570 562	575 567	580 571	585 576	590 583	593 587
10	420 402	450 427	480 449	410 479	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 467	480 471	485 476	490 483	493 487
11	120 102	150 127	180 149	210 179	220 200	230 215	240 229	250 240	260 251	265 258	270 262	275 267	280 271	285 276	290 283	293 287
12	20 2	50 27	80 49	110 79	120 100	130 115	140 129	150 140	160 151	165 158	170 162	175 167	180 171	185 176	190 183	193 187
13	320 302	350 327	380 349	410 379	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 467	480 471	485 476	490 483	493 487
14	520 502	550 527	580 549	510 579	520 500	530 515	540 529	550 540	560 551	565 558	570 562	575 567	580 571	585 576	590 583	593 587
15	420 402	450 427	480 449	410 479	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 467	480 471	485 476	490 483	493 487
16	120 102	150 127	180 149	210 179	220 200	230 215	240 229	250 240	260 251	265 258	270 262	275 267	280 271	285 276	290 283	293 287
17	20 2	50 27	80 49	110 79	120 100	130 115	140 129	150 140	160 151	165 158	170 162	175 167	180 171	185 176	190 183	193 187
18	320 302	350 327	380 349	410 379	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 467	480 471	485 476	490 483	493 487
19	520 502	550 527	580 549	510 579	520 500	530 515	540 529	550 540	560 551	565 558	570 562	575 567	580 571	585 576	590 583	593 587
20	420 402	450 427	480 449	410 479	420 400	430 415	440 429	450 440	460 451	465 458	470 462	475 467	480 471	485 476	490 483	493 487