

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ
РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ И ИНЖЕНЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

КУРС СЛЕКЦИЙ

(для студентов инженерных специальностей)

Р а с с м о т р е н о
на заседании кафедры
«Энергомеханические системы»
Протокол № 1 от 30.08.2018 г.

Донецк – 2018

УДК 65.012.122

Основы научных и инженерных исследований. Курс лекций (для студентов инженерных специальностей) / Сост. Н. Г. Бойко, О. В. Федоров — Донецк: ДонНТУ, 2018. – 76 с.

Изложены основные понятия теории экспериментальных исследований. Рассматриваются вопросы моделирования и подобия в научных исследованиях. Описаны методики планирования эксперимента и статистической обработки экспериментальных данных. Освещены вопросы экспериментально-статистического исследования связей.

При подготовке курса использовались материалы учебного пособия «Теория инженерного эксперимента» авторов Тимошенко Г. М. и Зимы П. Ф.

Составители:

Н. Г. Бойко
О. В. Федоров

Рецензент

В. П. Кондрахин

Ответственный за выпуск

Н. Г. Бойко

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Испокон веков считалось, что одна из самых больших ценностей — *знание*. Его нельзя взять в руки, попробовать «на зуб», как золотую монету, но без знания земледелец не мог вырастить хлеб, кузнец — выковать нож, полководец — выиграть сражение. Человечество, с момента своего появления на Земле, по крупицам, совершая миллионы ошибок, собирало знания об окружающем мире и себе самом. Эти знания передавались из поколения в поколение, смешивались с заблуждениями, многократно терялись и находились вновь.

С развитием человеческого общества, появлением письменности, разделения труда и классового деления, начались первые, еще неуверенные попытки собрать воедино разрозненные знания, увязать их между собой, сформировать некую систему знаний, объясняющую бытие. Так зародилась *наука* — сфера человеческой деятельности, направленной на выработку и систематизацию достоверных знаний о действительности.

Цель научного исследования — установить неизвестные до этого закономерности того или иного процесса (неизвестные зависимости между величинами, характеризующие исследуемый процесс), т.е. получить новые знания о действительности.

Для науки и практики значимы только *достоверные знания*. Еще античные ученые, совершавшие первые попытки создать целостную, рационалистическую картину бытия, столкнулись с проблемой — что же есть истинное знание, а что — заблуждение. Одни склонялись к мысли, что истинно то, что мы видим и ощущаем, другие — что наши чувства нас обманывают и доверять им нельзя, а потому познание невозможно в принципе, третьи искали истину в божественных откровениях или считали, что истина существует сама по себе как нематериальный, духовный, космический объект.

В средние века основным был *схоластический* метод доказательства истинности знаний — если в трудах древних авторов, считавшихся абсолютными авторитетами (Платон, Аристотель, Библия) находили утверждения за или против некоторой гипотезы, этого было вполне достаточно для ее принятия или опровержения. В результате в науке столетиями бытовали заблуждения, абсурдность которых кажется нам очевидной. Например, до открытий Исаака Ньютона считалось, что тело движется, только если к нему

приложена сила (чтобы опровергнуть это утверждение, достаточно бросить камень — он полетит «сам»). Настоящая революция в методологии научных исследований произошла лишь тогда, когда роль критерия истинности знания безоговорочно была отдана **практике**.

В настоящее время процесс выработки научных знаний включает такие этапы:

- сбор *эмпирической информации* об объекте исследования;
- *систематизация* и *анализ* информации, разработка *теории*;
- проверка теории *на практике*.

Достоверными могут считаться лишь знания, которые **подтверждаются практикой**. Важную роль в выработке достоверных знаний о действительности играют наблюдение и эксперимент.

Наблюдение – метод познания действительности в *контролируемых*, но *неуправляемых* условиях. В некоторых областях знания (например, в астрономии) наблюдение — единственный способ познания.

Эксперимент – метод познания действительности в *контролируемых* и *управляемых* условиях. Возможность проведения эксперимента над исследуемым объектом открывает перед исследователем гораздо более широкие перспективы познания сущности этого объекта.

Под *контролируемостью* подразумевают возможность измерять величины, характеризующие процесс, под *управляемостью* — возможность устанавливать значения величин, характеризующих процесс, на нужном уровне.

Цели, которые ставит перед собой экспериментатор, могут быть различными. Эксперимент может проводиться с **целью**:

— определить, какие величины и насколько влияют на исследуемый объект (процесс) — такой эксперимент называется *отсеивающим*;

— *установить зависимости* между входными и выходными величинами, характеризующими исследуемый объект (процесс) — такие зависимости называются **эмпирическими**;

— *проверить* (подтвердить или опровергнуть) результаты теоретических исследований — установить **адекватность** (соответствие) теоретических положений и моделей действительности;

— выполнить **оптимизацию** исследуемого объекта (процесса), т.е. найти такие значения параметров, при которых объект функционирует наилучшим образом.

От качества организации и проведения эксперимента во многом зависит успех научного исследования. **Теория эксперимента** — наука, занимающаяся вопросами правильной организации экспериментальных исследований — включает три основных направления:

1. **Моделирование и подобие** — определяет, как должен проводиться эксперимент, какие величины, характеризующие исследуемый объект или процесс, должны измеряться при экспериментальных исследованиях, и как обрабатывать результаты исследований, чтобы полученные закономерности были справедливы как для данного объекта (процесса), так и для группы ему подобных.

2. **Планирование эксперимента** — совокупность методов и процедур, применение которых при организации и проведении эксперимента позволяет получить искомые зависимости с минимальными временными и материальными затратами.

3. **Статистическая обработка** экспериментальных данных — совокупность методик, позволяющих получить достоверные результаты на основе данных, содержащих погрешности.

1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Объект исследования и его свойства

Объект исследования (ОИ) — условно изолированное целое, содержащее в себе совокупность протекающих в нем *процессов* и *средств их реализации*. *Средства реализации* — совокупность систем управления и контроля и связи между ними и исследуемым объектом.

Объект исследования характеризуется рядом *свойств*, важнейшие из которых: сложность, полнота априорной информации, управляемость и воспроизводимость.

Сложность — количество состояний объекта исследования, которые в соответствии с целью исследования и принятой техникой эксперимента можно четко различить. Объекты бывают:

- *простые* (два состояния — «да» или «нет»);
- *сложные* (много состояний).

В общем случае число состояний ОИ равно

$$C = \prod_{i=1}^k n_i, \quad (1.1)$$

где n_i — число уровней i -го фактора; k — количество факторов.

Априорная информация — информация об ОИ, известная до начала исследования, содержащаяся в монографиях, научных статьях, отчетах, описаниях открытий и изобретений, каталогах, справочниках. Априорная информация об ОИ бывает:

- *полная* (об объекте известно все и экспериментальные исследования не нужны);
- *ограниченная* (информация об объекте существует, но недостаточна для достижения цели исследований; эксперимент необходим, чтобы дополнить существующие знания);
- *отсутствует* (об объекте неизвестно ничего и экспериментальные исследования проводятся с целью установить присущие ОИ свойства и закономерности).

Управляемость — свойство, позволяющее изменять состояние объекта по усмотрению исследователя. ОИ бывают:

- *управляемые* (исследователь может изменять все входные величины);
- *частично управляемые* (исследователь может изменять не все входные величины, а только их часть);

— *неуправляемые* (исследователь не может влиять на ОИ, эксперимент в таком случае невозможен, возможно только наблюдение).

Воспроизводимость — свойство объекта переходить в одно и то же состояние, если все входные величины находятся на одном и том же уровне. Воспроизводимость может быть:

- *низкая*;
- *высокая*.

Чем выше воспроизводимость, тем проще выполнять эксперимент и тем достовернее его результат.

1.2 Модель "черный ящик"

В инженерном эксперименте часто для объекта исследования используется модель «черного ящика», которую представляют в виде прямоугольника с выходными и входными стрелками, рис.1.1.

Входящие стрелки соответствуют входным величинам (x), а выходящие — выходным величинам (y). В теории эксперимента входные величины обычно навивают *факторами*, а выходные — параметрами, откликами, реакциями и целевыми функциями. **Параметры** характеризуют состояние объекта исследования. **Факторами** обозначается все, что оказывает влияние на выходные величины.

Предполагается, что на момент проведения эксперимента внутренняя структура объекта и сущность связей между входными и выходными величинами исследователю неизвестны, о них он судит по тому, какие значения принимают выходные величины при данных значениях входных.

Правильный выбор параметров и факторов в значительной степени предопределяет успех исследования.

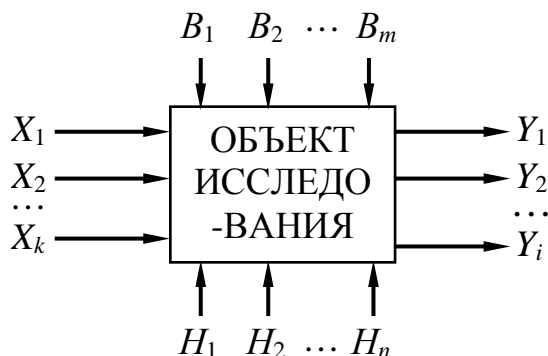


Рисунок 1.1 — Схема модели «черный ящик»: X – управляемые факторы; H – неуправляемые; B – возмущающие; Y – параметры

1.3 Параметры и предъявляемые к ним требования

Параметр — величина, характеризующая состояние или поведение ОИ.

В инженерном эксперименте в качестве параметров принимаются *технические* (коэффициент полезного действия, расход энергии, производительность машины, давление, напряжение и т.д.) или *экономические* величины (приведенные затраты, себестоимость, производительность труда и т.д.).

К параметру предъявляются следующие основные *требования*.

1. Параметр должен быть *количественным* и оцениваться числом. Для качественных параметров используются ранговые и условные показатели оценки.

2. Параметр должен обладать свойством *совместимости* — допускать безопасное проведение эксперимента при любом сочетании факторов. Недопустимо, чтобы при каком-либо сочетании произошла авария.

3. Параметр должен быть *однозначным* — данному сочетанию факторов с точностью до погрешности должно соответствовать одно значение параметра.

4. Параметр должен быть *универсальным* — характеризовать объект исследования всесторонне.

5. Желательно, чтобы параметр имел *простой* физический или экономический *смысл*, просто и легко вычислялся.

6. Рекомендуется, чтобы параметр был *единственным*. Исследовать объект, построить математические зависимости можно для нескольких параметров, оптимизация же может выполняться только по одному. Если параметров несколько, то рассматриваются компромиссные задачи. Выбирается основной, с точки зрения исследователя, параметр, а остальные используются для наложения соответствующих ограничений на объект.

1.4 Факторы и предъявляемые к ним требования

Фактор — переменная величина, оказывающая влияние на ОИ, вызывающая изменение параметров и способная изменить свое значение независимо от других входных величин объекта.

Факторы можно разделить на следующие три группы:

1) *Контролируемые и управляемые*, которые можно измерять и устанавливать на соответствующем уровне по желанию экспери-

ментатора (подача и частота вращения вала насоса, напряжение питающей сети и т.д.).

2) *Контролируемые, но неуправляемые* (температура окружающей среды, атмосферное давление и т.д.)

3) *Неконтролируемые и неуправляемые* (случайные возмущения).

К факторам предъявляются следующие требования:

1. Фактор должен *оказывать влияние на параметры ОИ*.

2. Фактор *не должен быть коррелирован* с другими факторами.

3. Фактор должен быть *количественным*.

4. *Совместимость* — при всех сочетаниях их уровней эксперимент можно поставить и он будет безопасным.

5. *Операциональность* — экспериментатору должно быть известно, как, где, каким прибором и с какой точностью контролировать величину фактора.

6. *Управляемость* — экспериментатор должен иметь возможность устанавливать значение уровня фактора по своему усмотрению.

7. *Точность* установления уровня фактора должна быть существенно, по крайней мере на порядок, выше точности определения параметра.

8. *Однозначность* воздействия фактора на объект исследования.

1.5 Машина как объект исследования

Машина (фр. machine, лат. machina – сооружение) – механизм или устройство, осуществляющее преобразование энергии в полезную для человека работу.

Структурная схема машины в общем виде может быть представлена, как показано на рис. 1.2. Машина состоит из ряда систем.

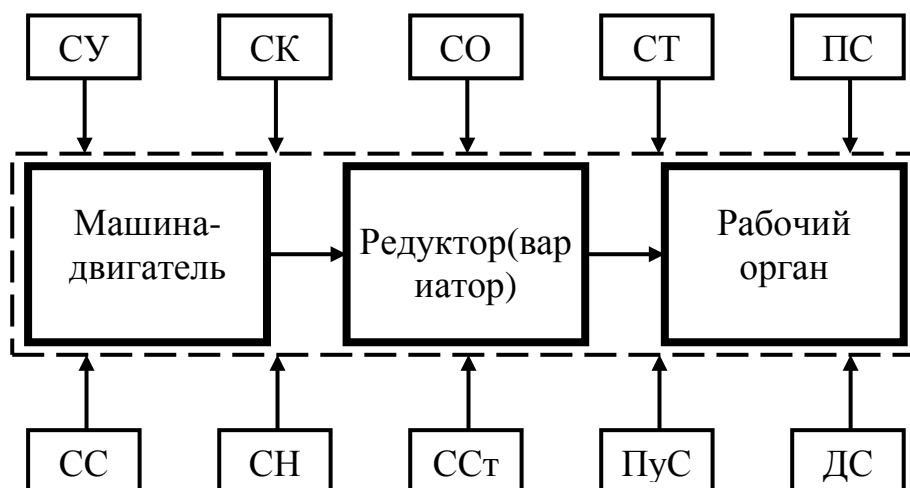


Рисунок 1.2 – Структурная схема машины

Силовая система – это, собственно, и есть сама машина, т.е. набор механизмов или элементов, которые и превращают подведенную к ней энергию в полезную для человека работу. Силовая система машины включает:

- *машину-двигатель*;
- вариатор или *преобразователь параметров энергии*;
- *рабочий (исполнительный) орган*.

Системы, обеспечивающие работу силовой системы:

- СУ — система управления; СК — система контроля;
- СО — система охлаждения; СТ — система торможения;
- ПС — противопожарная система; СС — система смазки;
- СН — система навигации; ССт — система стабилизации;
- ПуС — противоугонная система; ДС — другие системы.

Двигатель машины предназначен для преобразования подведенной к нему энергии в механическую.

В качестве энергии, подведенной к двигателю, может быть использован любой вид энергии – электрическая, пневматическая, гидравлическая, химическая, паровая или их комбинации.

Применение того или иного вида подводимой к двигателю машины энергии обуславливается рядом причин:

- является ли машина стационарной или движется;
- в какой среде работает машина (агрессивные, взрывоопасные среды, работа в закрытом помещении, под землей, под водой, в безвоздушном пространстве)
- какая необходима энерговооруженность;
- каковы массо-габаритные ограничения и т.д.

Из-за ряда преимуществ электрической энергии и в первую очередь возможности передачи большой ее мощности на дальние расстояния, подвода энергии к потребителю практически без каких-либо трудностей, высокого КПД электрических двигателей обусловили очень широкое ее применение.

Электрические двигатели постоянного тока (с последовательным, параллельным и смешанным возбуждением) и переменного тока (синхронные и асинхронные) используются в стационарных машинах (насосы, вентиляторы, подъемные машины, станки) и в машинах, движущихся на небольшие расстояния (проходческие и очистные комбайны, городской электротранспорт).

Двигателями, использующими *химическую энергию* (двигатели внутреннего сгорания карбюраторные и дизельные, турбореактивные, реактивные) оснащаются автономные машины (автомобили, корабли, самолеты, ракеты).

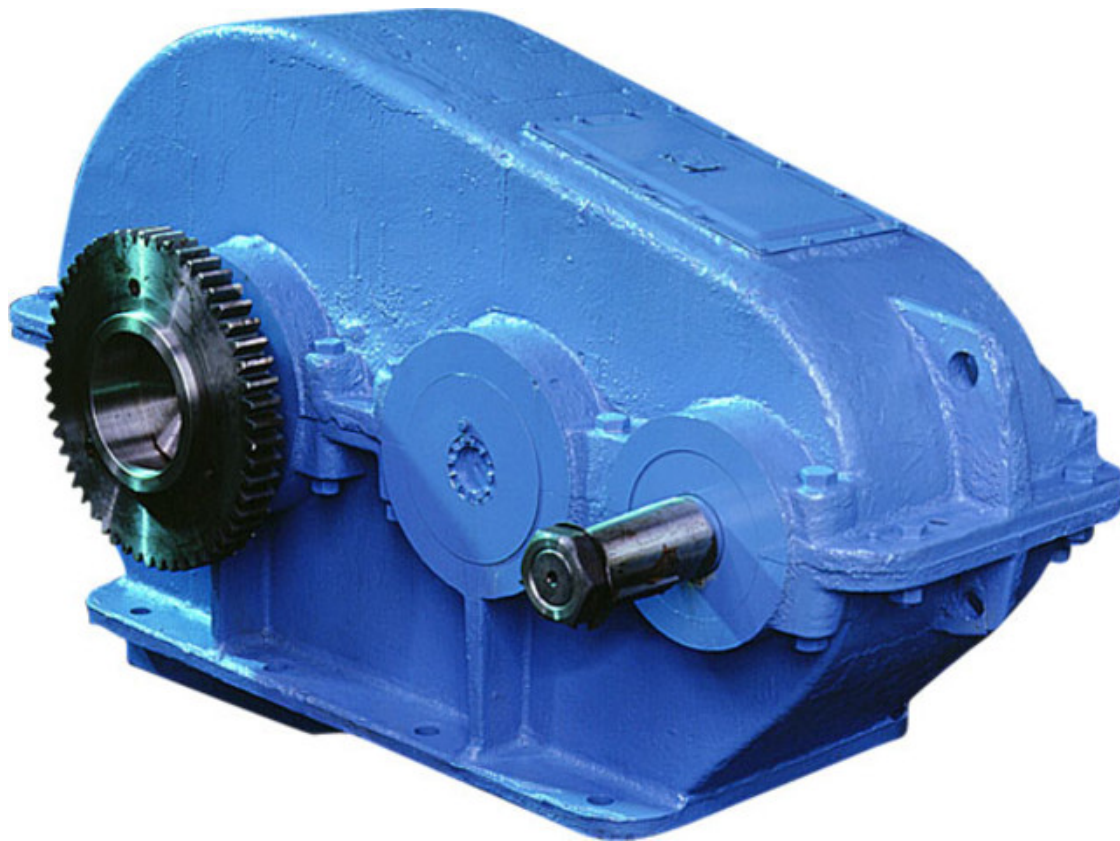
Гидравлические и *пневматические* двигатели широко используются в горной промышленности, станкостроении и в др. отраслях, в случаях, когда по массогабаритным и др. ограничениям (взрывоопасная и пожароопасная среда) нельзя использовать электропривод.

Из *паровых двигателей* наиболее распространенными являются турбинные двигатели привода генераторов тепловых и атомных электростанций, которые используют энергию перегретого пара.

Редуктор, мультипликатор или вариатор - преобразователь параметров энергии - предназначен для преобразования параметров полученной механической энергии двигателя и служит для изменения момента и частоты вращения выходного вала.

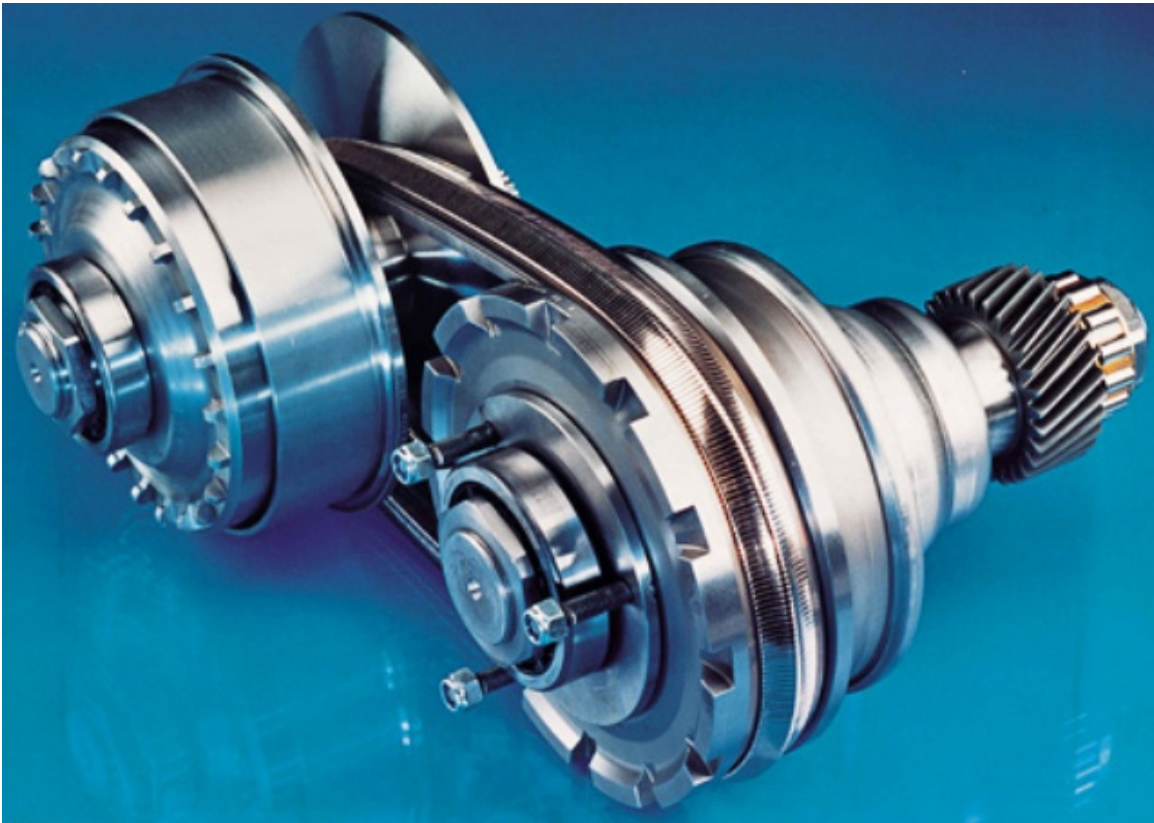
Редуктор - это механизм, предназначенный для увеличения крутящего момента и снижения угловой скорости выходного вала двигателя по сравнению с валом входным в передаточное число раз. Передаточное число редуктора всегда больше 1.





Мультипликатор – механизм, предназначенный для снижения крутящего момента и увеличения угловой скорости выходного вала двигателя по сравнению с валом входным в передаточное число раз. Передаточное число мультипликатора всегда меньше 1.

Вариатор представляет собой два шкива имеющих коническую форму, между которыми натянут ремень, изготавливаемый из металлических пластин. За счет того, что эти шкивы могут двигаться навстречу друг другу, изменяется их диаметр, а значит и передаточное число коробки передач, причем плавно. Если вместо ремня используется цепь, то такой вариатор называется цепным или клиноцепным.



Конструкция шкивов состоит из двух конусовидных половин, которые имеют уклон к оси вала. Эти конструкции при движении то отдаляются, то приближаются друг к другу. Ремень

не что иное, как металлическая лента, имеющая покрытие. А также встречаются варианты, когда она состоит из тросов, они являются наиболее прочными.

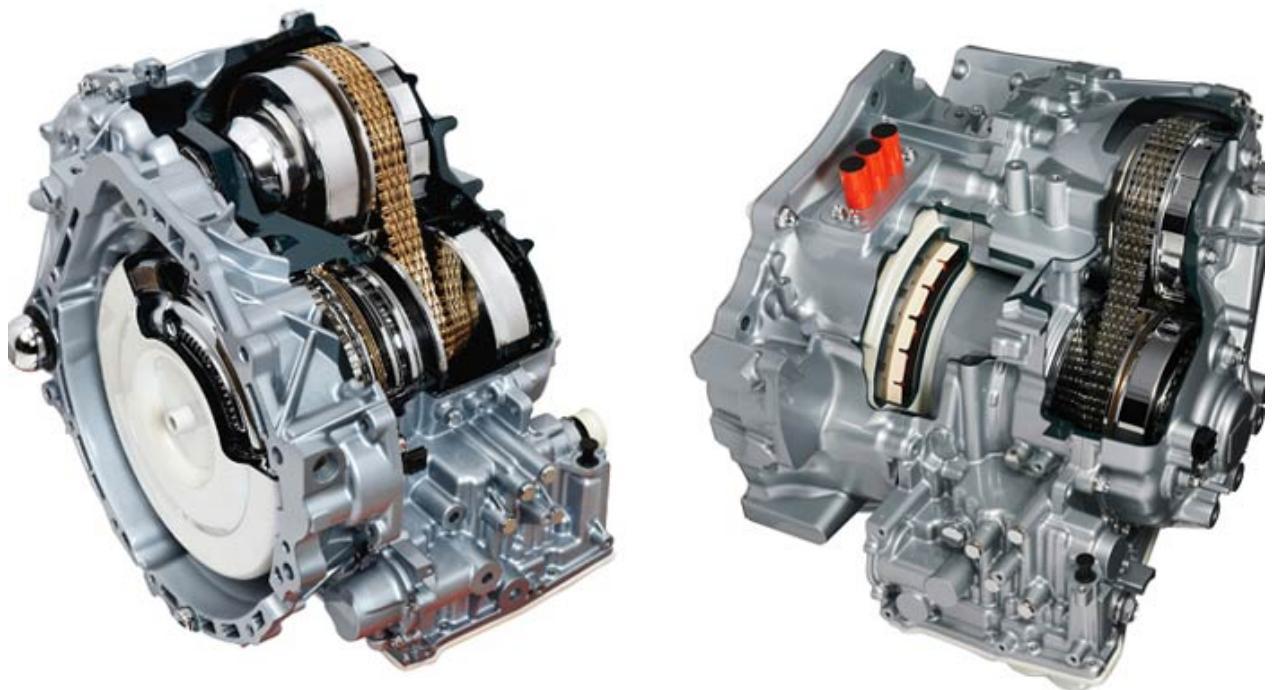
Бесступенчатый вариатор

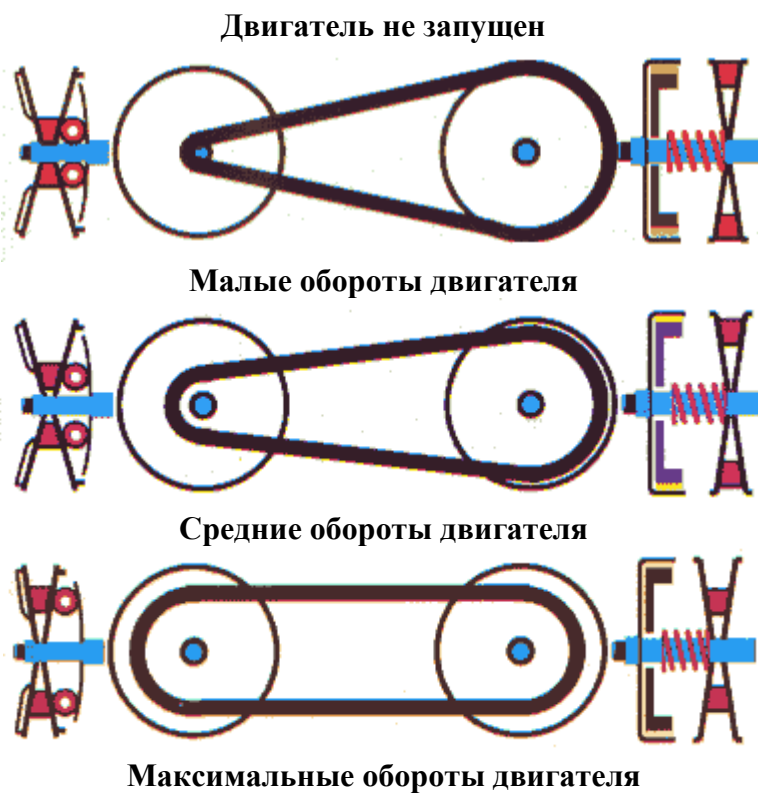
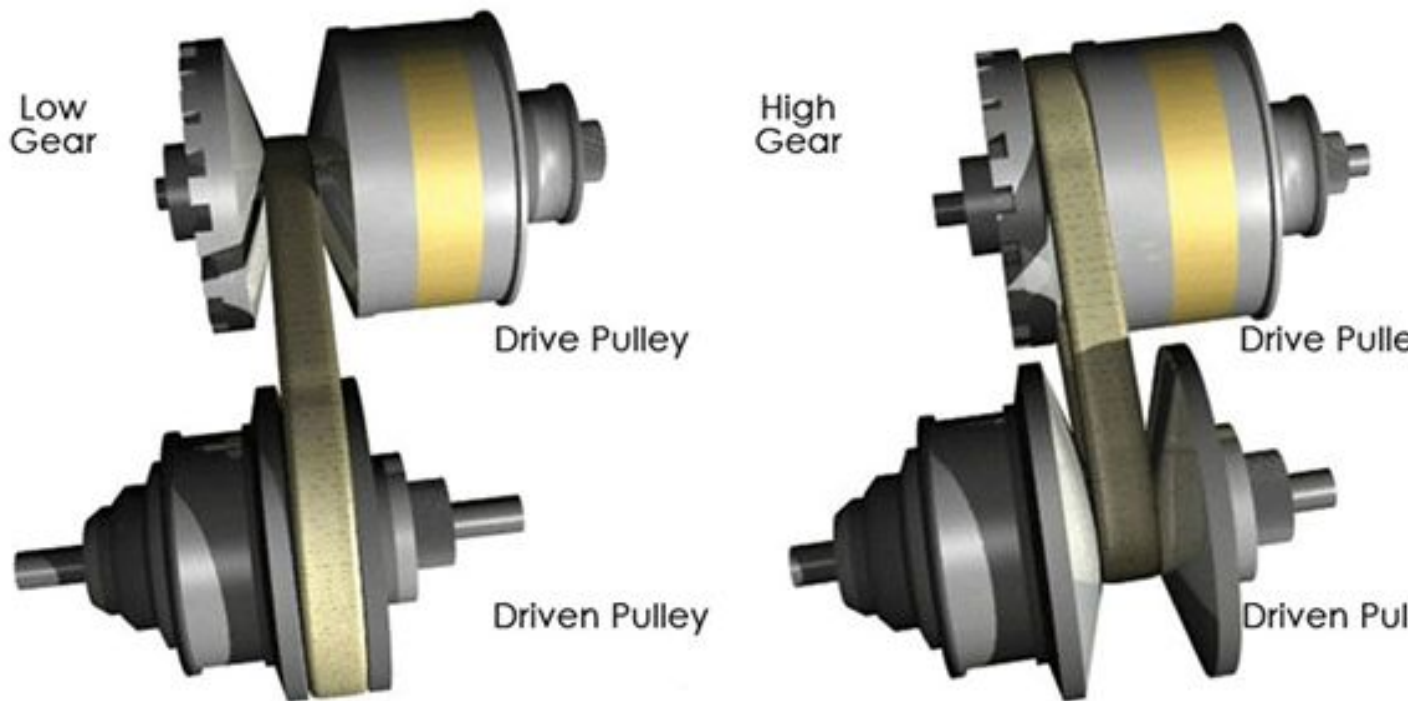


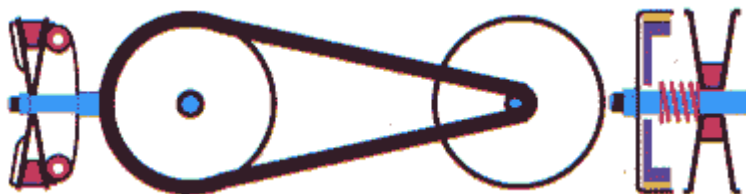
Принцип действия

При раздвижении шкивов лента уходит внутрь, когда они сближаются — ремень приобретает форму клина. В последнем случае радиус шкива увеличивается, а вместе с ним становится больше и передаточное число, а в предыдущем варианте все наоборот. В промежутках между этими состояниями ремень становится прямым. Для смещения шкивов используются пружины, а также центробежная сила, создаваемая гидравлическим приводом. Он управляется электроникой, которая способна создать оптимальные условия для бесперебойной работы мотора.

Клиноцепной вариатор







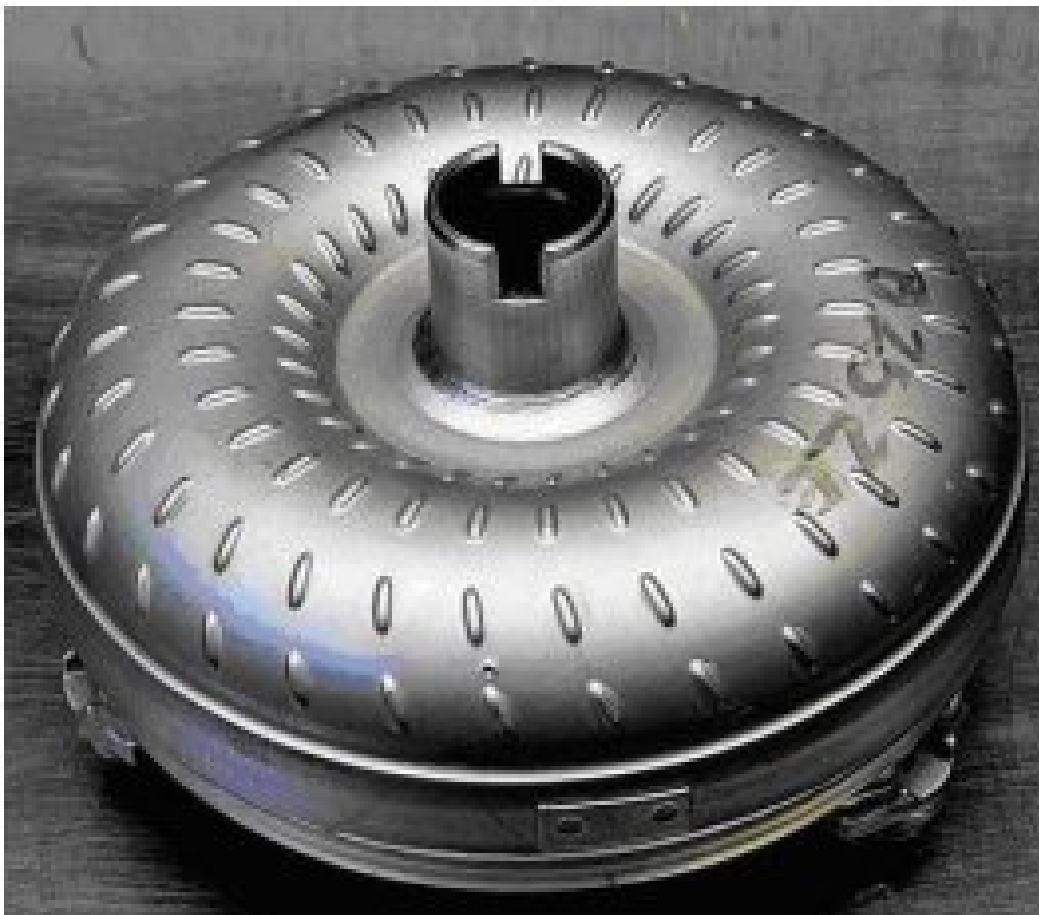
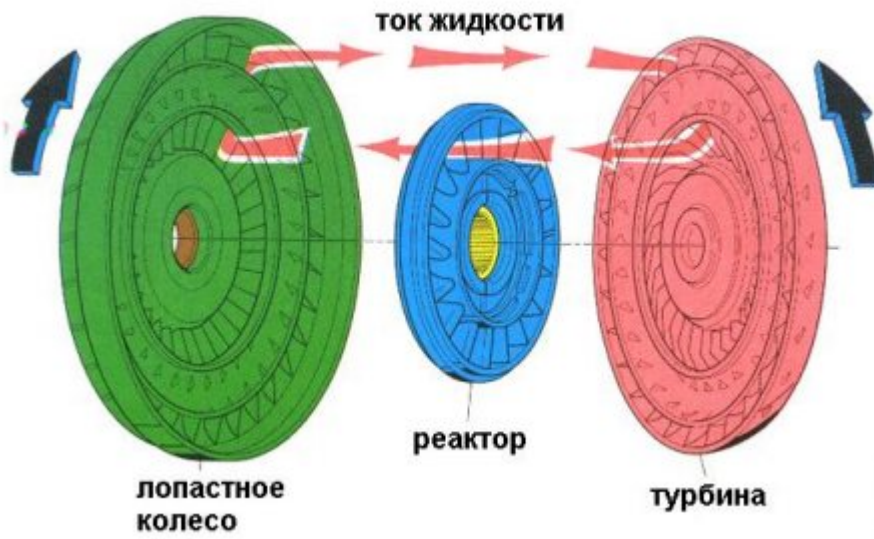
Положения клиновидного ремня в разрезе на ведущем

Автоматическая коробка передач — разновидность трансмиссии автомобилей, обеспечивающая автоматический (без прямого участия водителя) выбор соответствующего текущим условиям движения передаточного числа, в зависимости от ряда факторов.

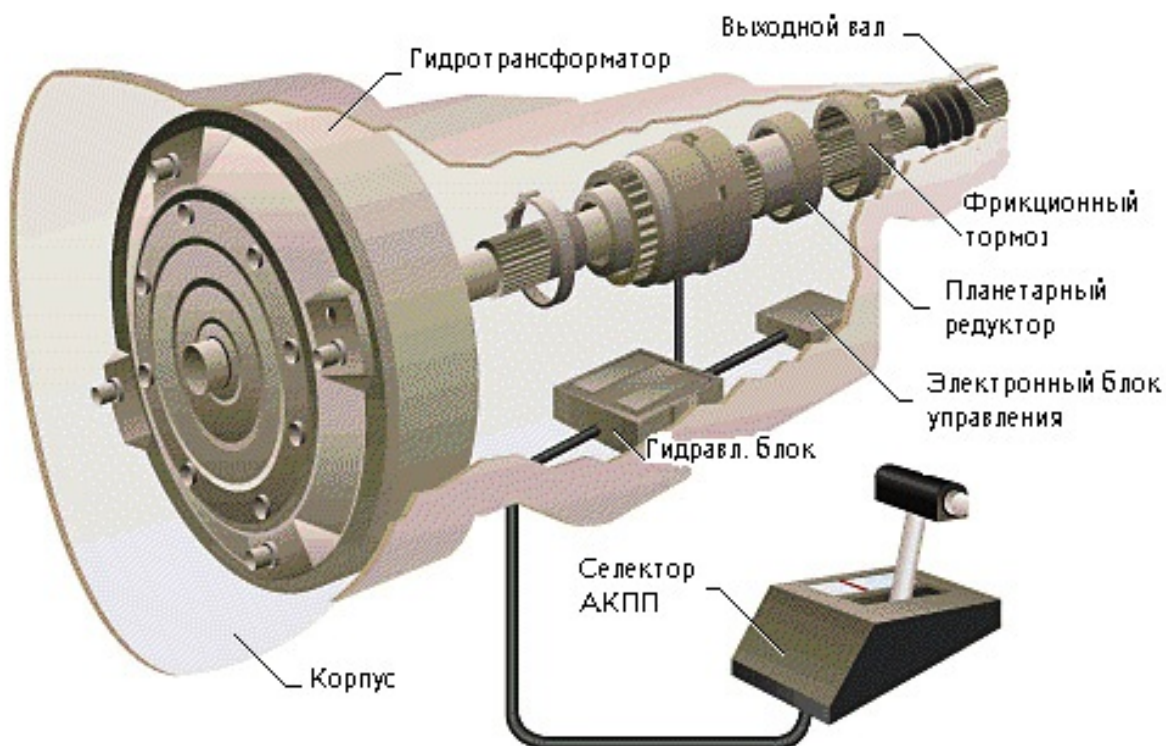
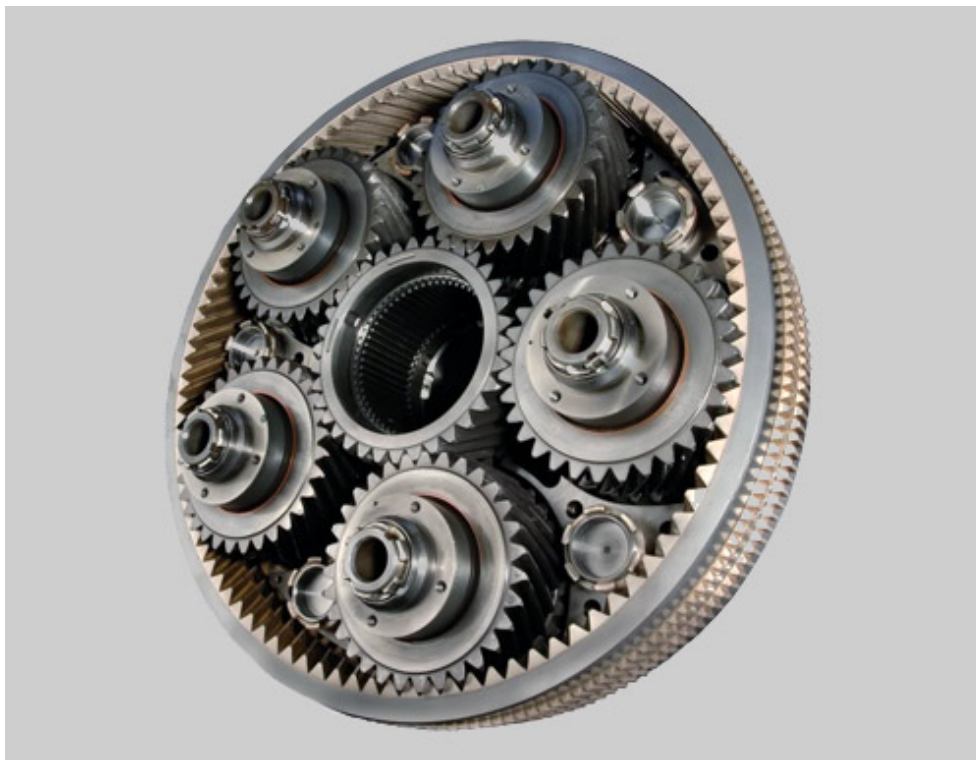
В ее состав входит:

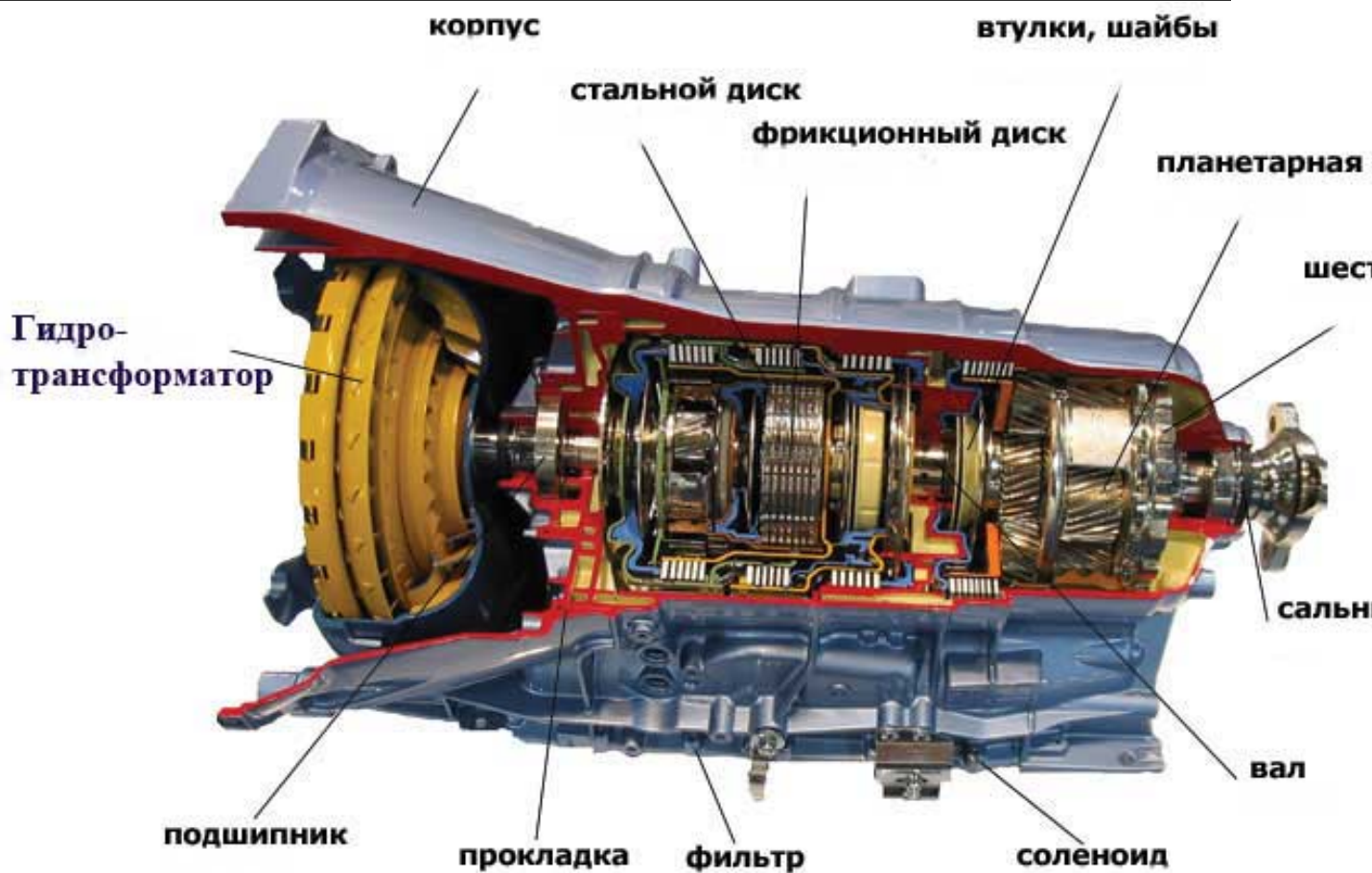
- Гидротрансформатор;
- Механическая КПП (планетарный редуктор);
- Система гидравлического управления;
- Электронная система управления;
- Насос;
- Тормозная лента.

Гидротрансформатор состоит из взаимосвязанных механизмов – насосного, реакторного и турбинного колес, блокировочной муфты и муфты свободного хода. Сам узел помещен в отдельный корпус, по которому циркулирует специальная рабочая жидкость. Схема работы гидротрансформатора - это замкнутый цикл. Насосное колесо напрямую соединено с коленчатым валом двигателя. Раскручиваясь, оно способствует тому, что рабочая жидкость ударяет в лопатки турбинного колеса и турбинное колесо начинает вращаться, но при этом жидкость, ударяясь о лопасти турбинного колеса, возвращается на лопасти насосного и начинает его вращать в противоположном направлении. Проблема решается с помощью реакторного колеса, находящегося между ними. Тем самым жидкость уже ударяется в лопасти нужного направления. В результате насосное колесо вращается уже под действием двух сил-двигателя и жидкости. Ну, а в целом-гидротрансформатор помогает работе двигателя, усиливая его крутящий момент.



В механизме также имеются планетарные передачи, состоящие из солнечной шестерни, сателлитов, водила и коронной шестерни. Вокруг солнечной шестерни вращаются сателлиты, связанные между собой планетарным водилом, сверху их расположена коронная шестерня. Для изменения крутящего момента в планетарном ряде блокируется один или несколько элементов. В зависимости от того, какие элементы фиксируются, получаем разные передаточные отношения на ведомый вал.





Рабочий орган машины — та ее часть, которая делает полезную для человека работу – шьет, вяжет, рубит, косит, молотит, режет, пилит, перемещает и выполняет еще тысячи других работ, полезных для человека. Поэтому эти устройства очень многообразны как по конструкции, так и по выполняемым операциям. Это наиболее важная часть машины — часто по названию рабочего органа называют всю машину, например, центробежный насос, сверлильный станок, ковшовый или роторный экскаватор и д.т.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ

2.1 Модели, их классификация

В прикладных исследованиях применяют *моделирование*, под которым понимают способ познания действительности с помощью *моделей*.

Модель — материальный или информационный объект, отражающий основные свойства объекта-оригинала.

Использование моделей позволяет исследователю с меньшими затратами получить более точные результаты и избежать ряда погрешностей.

Важнейшим требованием, предъявляемым к моделям, является их *адекватность* — подобие объектам-оригиналам. Два объекта подобны, если по известным характеристикам одного простым пересчетом можно получить характеристики другого.

Кроме того, модель должна обеспечивать достаточную степень *точности* результатов исследований.

Модели бывают *материальными* и *мысленными*.

Материальные модели делятся на *натурные* и *аналоговые*.

Натурная модель — сам объект исследования или другой объект — характерна тем, что физическая природа протекающих в ней процессов аналогична природе процессов объекта-оригинала. При этом объект исследования абстрагируется — не учитывается влияние второстепенных, не имеющих существенного влияния на изучаемый процесс параметров или даже систем.

Процессы в *аналоговых моделях* имеют другую физическую природу по сравнению с процессами объекта-оригинала. Например, исследование гидравлических объектов может проводиться на электрических моделях.

Мысленные модели могут быть *наглядными*, *символическими* и *математическими*.

К *наглядным моделям* относятся так называемые воображаемые модели (например, модель атома).

Символические (знаковые) модели могут иметь вид условно-знаковых представлений: принципиальные схемы, записи химических реакций, графы.

Наиболее полной мысленной моделью является *математическая*, суть которой заключается в описании свойств и связей объекта математическими уравнениями и соотношениями.

2.2 Построение моделей

При построении *математических моделей* руководствуются следующими соображениями.

1. Из общего комплекса *процессов*, характеризующих объект, выделяют те, которые *важны в данном исследовании* и отражают основные свойства оригинала.

2. Создают общую *описательную модель* выделенных процессов. Выполняют словесное описание, проводят классификацию и систематизацию.

3. Определяют *параметры* и устанавливают *значимые факторы*. С этой целью сложный объект разбивают на элементарные звенья. Для каждого звена определяют входные и выходные величины. Оценивают весомость влияния каждого фактора, выделяют значимые и отбрасывают второстепенные.

4. Создают *математическую модель* объекта, для чего составляют уравнения, описывающие процессы в звеньях, устанавливают и записывают уравнения связей и соотношений, выбирают метод решения.

5. Проверяют *адекватность* модели реальному объекту.

6. Решают уравнения (аналитически, численными методами на ЭВМ или на аналоговых моделях).

При построении *натурных моделей* поступают следующим образом:

1. Выделяют *процессы, отображающие основные свойства* оригинала.

2. Дают общее словесное *описание модели* и устанавливают *параметры* и *факторы*.

3. Определяют *критерии подобия*, по значениям которых рассчитывают значения физических параметров модели.

2.3 Физическая и математическая модели машины

Классический подход к исследованию работы машины или отдельной системы состоит в следующем. Разрабатывается *физическая модель* того или иного процесса, на основании ее составляется *математическая модель* и затем путем решения математической модели и анализа полученных результатов проверяется *адекватность*, т.е. соответствие этой модели действительной картине процесса.

Физическая модель процесса или системы представляет собой ее абстрагированное символическое описание.

Например, изучаются колебательные процессы в валопроводе, т.е. в редукторе привода рабочего органа машины. Возьмем в качестве такой машины центробежный насос с одним рабочим колесом, рис. 2.1 а. Физическая модель такой системы представляет собой ротор приводного двигателя, вал, рабочее колесо. Схематично физическая модель такой системы будет иметь вид, показанный на рис. 2.1 б.

Модель учитывает: моменты сил $M_1(t)$ и $M_2(t)$, действующих на ротор двигателя и рабочее колесо насоса, моменты инерции этих тел I_1 и I_2 , коэффициенты жесткости C_{12} и демпфирования β_{12} вала.

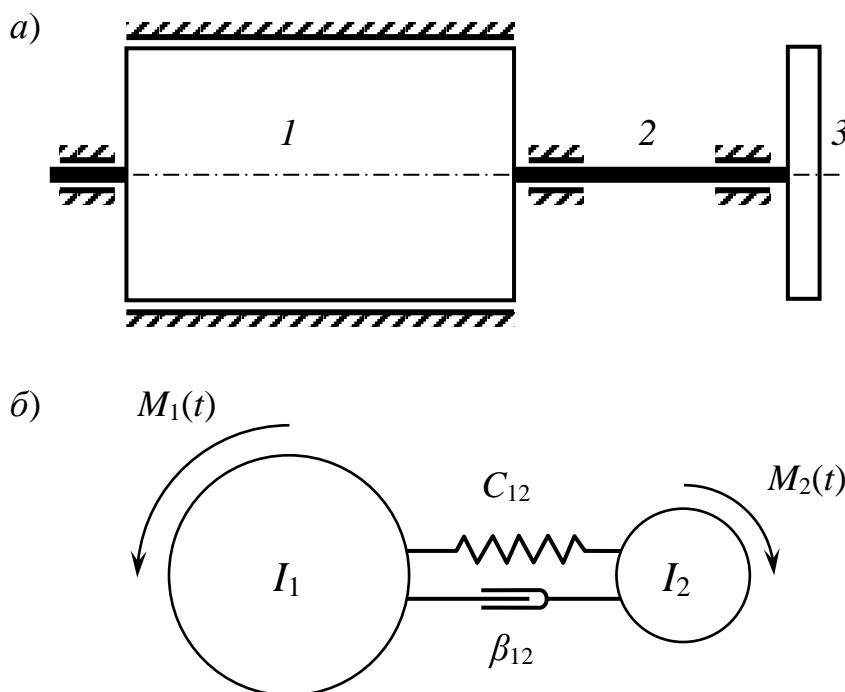


Рисунок 2.1 – Конструктивная схема (а) и физическая модель (б) системы привода одноступенчатого насоса:
 I – ротор двигателя; 2 – вал; 3 – рабочее колесо

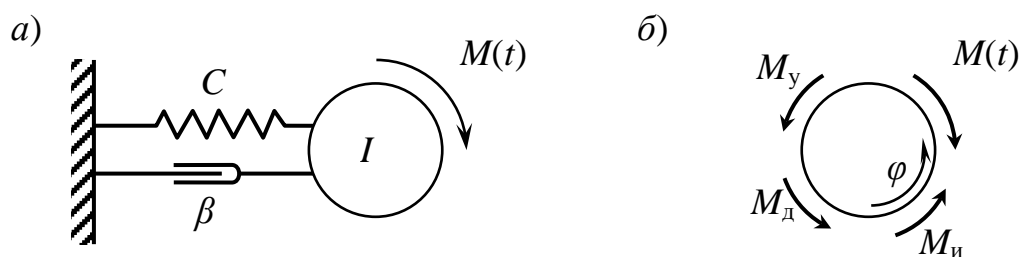


Рисунок 2.2 – Упрощенная физическая модель системы привода одноступенчатого насоса (а) и схема моментов сил, действующих на рабочее колесо (б)

В модели не учитываются: корпус насоса, подшипники, соединительная муфта, уплотнения и др. т.п. элементы.

Поскольку двухмассовая система математически может быть описана только системой двух дифференциальных уравнений, упростим ее, считая, что момент инерции ротора двигателя намного больше момента инерции колеса, — физическая модель несколько упростится и примет вид, показанный на рис. 2.2 а.

Математическая модель процесса представляет собой аналитическое описание связей между отдельными элементами физической модели.

Уравнение движения рабочего колеса имеет вид:

$$M_{и} + M_{д} + M_{у} = M(t), \quad (2.1)$$

где $M_{и}$, $M_{д}$, $M_{у}$ — моменты сил, действующие на рабочее колесо: момент сил инерции, момент демпфирующих сил (сопротивление движению) и момент упругой деформации вала; $M(t)$ — момент внешних сил (внешнее возмущение).

Перемещение элементов системы, в данном случае рабочего колеса характеризуется тремя параметрами – угловым перемещением φ (деформация вала), угловой скоростью $\dot{\varphi}$ и угловым ускорением $\ddot{\varphi}$.

Тогда моменты $M_{и}$, $M_{д}$, $M_{у}$ могут быть выражены через перемещение:

$$M_{и} = I \ddot{\varphi}; \quad M_{д} = \beta \dot{\varphi}; \quad M_{у} = C \varphi. \quad (2.2)$$

Уравнение движения примет вид

$$I \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + C \varphi = M(t). \quad (2.3)$$

Полученное уравнение представляет собой *математическую модель* рассматриваемой системы.

Если математическая модель представляет собой, как в рассматриваемом случае, дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, т.е. линейными связями между параметрами системы, такую систему называют *линейной динамической системой второго порядка*.

В случае, когда связь между параметрами математической модели описывается нелинейными зависимостями (например, квадратичными, кубическими или степенными), динамические системы носят название *нелинейных динамических систем*.

Далее, если слагаемые левой части уравнения являются переменными и переменность их обусловлена непостоянством коэффициентов, такие математические модели и соответствующие им динамические системы носят название **систем с переменными коэффициентами**. Характерным примером системы с переменными коэффициентами является полет ракеты, масса которой уменьшается в процессе полета.

Если в математической модели и левая и правая ее части – **детерминированные**, (функциональные) зависимости, математическая модель и соответствующая ей система относятся к **детерминированным** (функциональным), т.е. связи между параметрами системы описываются **детерминированными** (строго определенными) зависимостями.

В случае, когда правая часть математической модели является случайной функцией, говорят, что такие математические модели (дифференциальные уравнения) относятся к классу уравнений со **случайной правой частью**, а динамические системы – к системам со **случайным возмущением**.

И, наконец, если и коэффициенты в левой части уравнения и его правая часть — случайные величины или функции, такие дифференциальные уравнения и соответствующие им динамические системы называются **стохастическими**, т.е. случайными во времени.

2.4 Решение и анализ математической модели динамической системы

Разделив обе части приведенного выше дифференциального уравнения на I и обозначив

$$\frac{\beta}{I} = 2n, \quad \frac{C}{I} = \omega^2, \quad \frac{M(t)}{I} = m(t), \quad (2.4)$$

получим дифференциальное, приведенное к *стандартному виду*

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = m(t), \quad (2.5)$$

Решением таких уравнений является *суперпозиция*, т.е. сумма решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего данному уравнению, и частного решения, т.е.

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_ч, \quad (2.6)$$

где φ_0 , $\varphi_ч$ — общее решение однородного уравнения и частное решение уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному неоднородному, в рассматриваемом случае имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \quad (2.7)$$

т.е. это, собственно, то же дифференциальное уравнение, но с нулевой правой частью. А это означает, что рассматриваемая динамическая система находится в невозмущенном состоянии, точнее, система выведена из состояния покоя и предоставлена сама себе.

Решением уравнения будет $\varphi_0 = Ce^{zt}$, где C — постоянная интегрирования, z — корень характеристического уравнения

$$z^2 + 2nz + \omega^2 = 0. \quad (2.8)$$

Корни этого уравнения $z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

Тогда решение уравнения принимает вид

$$\varphi_0 = Ce^{(-n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2})t} = Ce^{-nt} e^{(\pm \sqrt{n^2 - \omega^2})t}. \quad (2.9)$$

Из решения уравнения следует: при положительном n , с увеличением времени $e^{-nt} \rightarrow 0$, т.е. φ_0 , как функция времени, — *затухающая*. Это всегда имеет место для рассматриваемых динамических систем (всегда имеет место рассеяние энергии системой), каков бы ни был дискриминант (положительный или отрицательный).

На характер функции φ_0 существенное влияние оказывает знак подкоренного выражения. В случае если $(n^2 - \omega^2) \geq 0$, функция φ_0 будет иметь вид кривой, плавно приближающейся к нулю.

Рассмотрим более подробно случай, когда выражение под корнем отрицательное, т.е. когда $(n^2 - \omega^2) < 0$, или $\omega > n$.

В этом случае поступают следующим образом. Выражение $\sqrt{n^2 - \omega^2}$ записывают в виде

$$\sqrt{n^2 - \omega^2} = i\sqrt{\omega^2 - n^2} = ip, \quad \text{где } i = \sqrt{-1}, \quad p^2 = \omega^2 - n^2. \quad (2.10)$$

Тогда решение уравнения примет вид $\varphi_0 = Ce^{(-n \pm ip)t}$.

Функция $e^{\pm ipt}$ - это полная гармоническая функция или функция Эйлера

$$e^{\pm ipt} = \sin pt + \cos pt. \quad (2.11)$$

Тогда решение уравнения примет вид

$$\varphi_0 = e^{-nt} (C_1 \sin pt + C_2 \cos pt). \quad (2.12)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Для дальнейшего анализа удобно решение уравнения свернуть и представить в виде

$$\varphi_0 = Ae^{-nt} \sin(pt + \varepsilon), \quad (2.13)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ — амплитуда, $p = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ — частота, $\varepsilon = \text{arctg}(C_2/C_1)$ — фаза.

Из полученного следует: решение уравнения — *периодическая затухающая функция времени*.

Физически это означает — динамическая система, выведенная из равновесного состояния или состояния покоя и предоставленная самая себе, колеблясь вокруг равновесного (исходного) состояния, с течением времени приходит к этому равновесному состоянию или состоянию покоя.

Величина p называется **частотой собственных колебаний** системы и зависит от массы, жесткости и демпфирующей способности системы.

Рассмотрим, с какими параметрами происходят колебания системы. В случае, если n значительно меньше ω , можем считать, что

$$p \approx \omega = \sqrt{\frac{c}{I}}. \quad (2.14)$$

— это частота собственных колебаний крутильного маятника, которая зависит от момента инерции и жесткости. Увеличение жесткости вала приводит к увеличению частоты, а увеличение момента инерции — к ее уменьшению.

Изменение демпфирующих свойств системы (рассеяния энергии) влияет как на частоту, так и на амплитуду колебаний. Увеличение потерь энергии приводит к уменьшению частоты

собственных колебаний и к их затуханию — уменьшению амплитуды по логарифмической кривой e^{-nt} . Скорость (интенсивность) убывания амплитуды обуславливается параметром

$$n = \frac{\beta}{2I}, \quad (2.15)$$

характеризующим рассеивающую (демпфирующую) способность системы. Поэтому параметр n называют *логарифмическим декрементом* колебания.

Таким образом, линейная динамическая система второго порядка, выведенная из равновесного состояния (равномерного движения или покоя) и предоставленная самая себе с течением времени, колеблясь, возвращается в исходное состояние. При этом скорость ее возвращения и колебания вокруг этого состояния обуславливаются параметрами самой системы – рассеивающей способностью, жесткостью и инерционными свойствами системы.

Частное решение дифференциального уравнения обычно ищут в том же виде, что и его правая часть, но на степень выше, если это линейная или криволинейная зависимость или в виде полной гармонической функции, если она задана неполной гармонической функцией.

Пусть правая часть уравнения $m(t)$ (внешнее возмущение) задано периодической функцией вида

$$M(t) = Q \sin \lambda t, \quad (2.16)$$

где Q — амплитуда, λ — частота внешнего возмущения. Тогда

$$m(t) = \frac{Q \sin \lambda t}{I} = q \sin \lambda t, \quad \text{где} \quad q = \frac{Q}{I}.$$

Уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = q \sin \lambda t. \quad (2.17)$$

Частное решение уравнения ищем в виде

$$\varphi_{\text{ч}} = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t. \quad (2.18)$$

Далее поступают так. Это решение подставляют в исходное уравнение и определяют неизвестные A и B таким образом, чтобы они удовлетворяли решению. Найдем первую и вторую производные

$$\dot{\varphi}_q = A\lambda \cos \lambda t - B\lambda \sin \lambda t ;$$

$$\ddot{\varphi}_q = -A\lambda^2 \sin \lambda t - B\lambda^2 \cos \lambda t.$$

После подстановки полученных производных в исходное уравнение, будем иметь

$$-A\lambda^2 \sin \lambda t - B\lambda^2 \cos \lambda t + 2n(A\lambda \cos \lambda t - B\lambda \sin \lambda t) + \omega^2(A \sin \lambda t + B \cos \lambda t) = q \sin \lambda t.$$

Собрав члены при $\sin \lambda t$ и $\cos \lambda t$, получим систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными A и B вида

$$\begin{cases} A(\omega^2 - \lambda^2) - 2nB\lambda = q, \\ 2nA\lambda + B(\omega^2 - \lambda^2) = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

которое однозначно решается относительно неизвестных.

Решение системы найдем в виде $A = \Delta_A / \Delta$, $B = \Delta_B / \Delta$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\omega^2 - \lambda^2) & -2n\lambda \\ 2n\lambda & (\omega^2 - \lambda^2) \end{vmatrix} = (\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2,$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} q & -2n\lambda \\ 0 & (\omega^2 - \lambda^2) \end{vmatrix} = q(\omega^2 - \lambda^2),$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} (\omega^2 - \lambda^2) & q \\ 2n\lambda & 0 \end{vmatrix} = -q \cdot 2n\lambda.$$

Получим

$$\varphi_q = \frac{q(\omega^2 - \lambda^2)}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2} \sin \lambda t - \frac{q \cdot 2n\lambda}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2} \cos \lambda t.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\varphi_{\text{ч}} = q \frac{((\omega^2 - \lambda^2) \sin \lambda t - 2n\lambda \cos \lambda t)}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2};$$

$$\varphi_{\text{ч}} = q \frac{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2}}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2} \times \left(\frac{(\omega^2 - \lambda^2)}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2}} \sin \lambda t - \frac{2n\lambda}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2}} \cos \lambda t \right);$$

$$\varphi_{\text{ч}} = \frac{q(\cos \theta \sin \lambda t - \sin \theta \cos \lambda t)}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2}} = \frac{q \sin(\lambda t - \theta)}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + 4n^2 \lambda^2}}, \quad (2.20)$$

где $\theta = \operatorname{arctg} \frac{2n\lambda}{(\omega^2 - \lambda^2)}$ — **фаза** вынужденных колебаний.

Рассмотрим физический смысл полученного решения, для чего запишем его в виде

$$\varphi_{\text{ч}} = \frac{q}{\omega^2} \frac{\sin(\lambda t - \theta)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \lambda^2}{\omega^4}}}. \quad (2.21)$$

Величина

$$\frac{q}{\omega^2} = \frac{Q}{I} \times \frac{I}{C} = \frac{Q}{C} = \varphi_{\text{ст}}$$

соответствует **деформации** вала под действием статической нагрузки, равной амплитуде колебаний нагрузки Q .

Величину

$$k_{\text{д}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \lambda^2}{\omega^4}}} \quad (2.22)$$

называют **коэффициентом динамичности** системы.

Тогда частное решение уравнения примет вид

$$\varphi_{\text{ч}} = \frac{q}{\omega^2} k_{\text{д}} \sin(\lambda t - \theta) \quad \text{или} \quad \varphi_{\text{ч}} = \varphi_{\text{ст}} k_{\text{д}} \sin(\lambda t - \theta). \quad (2.23)$$

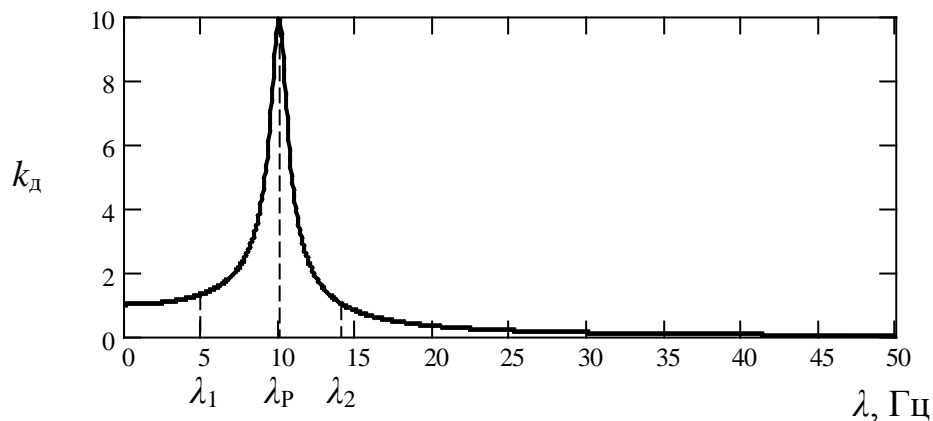


Рисунок 2.4 – График коэффициента динамичности

Полное решение уравнения (математической модели):

$$\varphi = Ae^{-nt} \sin(pt + \varepsilon) + \frac{q}{\omega^2} k_d \sin(\lambda t - \theta). \quad (2.24)$$

Следует заметить, что при некотором $t = T_{\text{п}}$ величина первого слагаемого — амплитуда собственных колебаний — становится близкой к нулю (после окончания так называемого *переходного процесса*) и для *установившегося режима работы* ($t > T_{\text{п}}$) решение математической модели примет вид

$$\varphi = \frac{q}{\omega^2} k_d \sin(\lambda t - \theta). \quad (2.25)$$

Другими словами, в *установившемся режиме работы* колебания являются постоянными и проходят с частотой внешнего возмущения.

Рассмотрим, далее более подробно коэффициент динамичности системы. График зависимости k_d от частоты внешней нагрузки λ представлен на рис. 2.4. На графике можно выделить три зоны, поведение динамической системы в которых будет различным:

Зона 1 — $0 \leq \lambda < \lambda_1$, при этом $k_d \approx 1$. Это означает, что при внешнем возмущении с этой частотой перемещения в системе равны перемещениям под действием такой же по величине *статической нагрузки*. Такие частоты иногда называют *прошивными*, нагрузка прошивает динамическую систему без изменения. Это так называемая *низкочастотная составляющая* нагрузки.

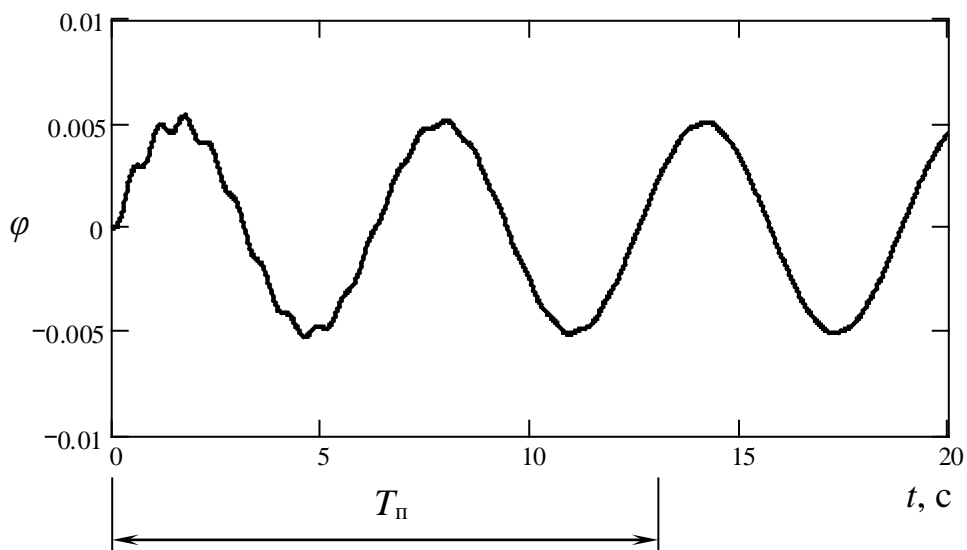


Рисунок 2.5 – График вынужденных колебаний в зоне прошивных частот

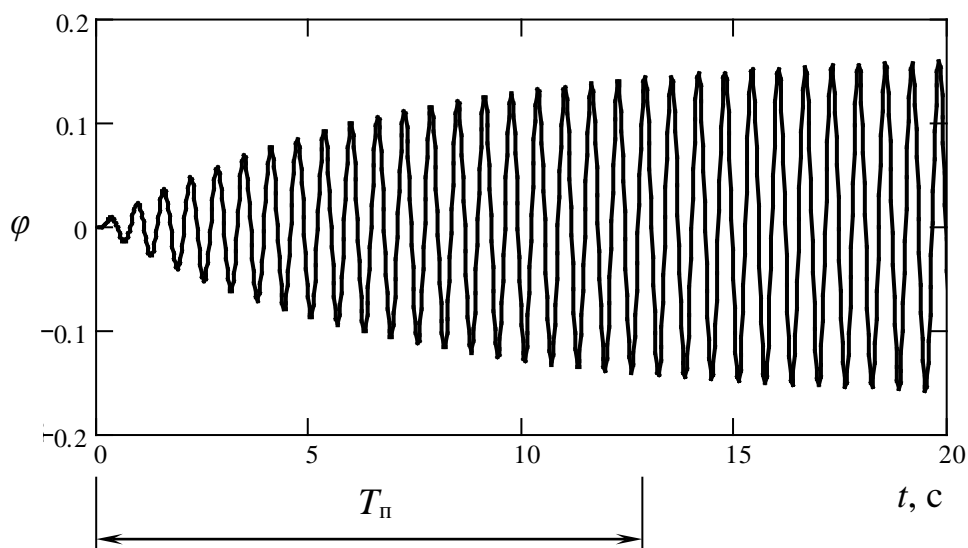


Рисунок 2.6 – График вынужденных колебаний в зоне резонанса

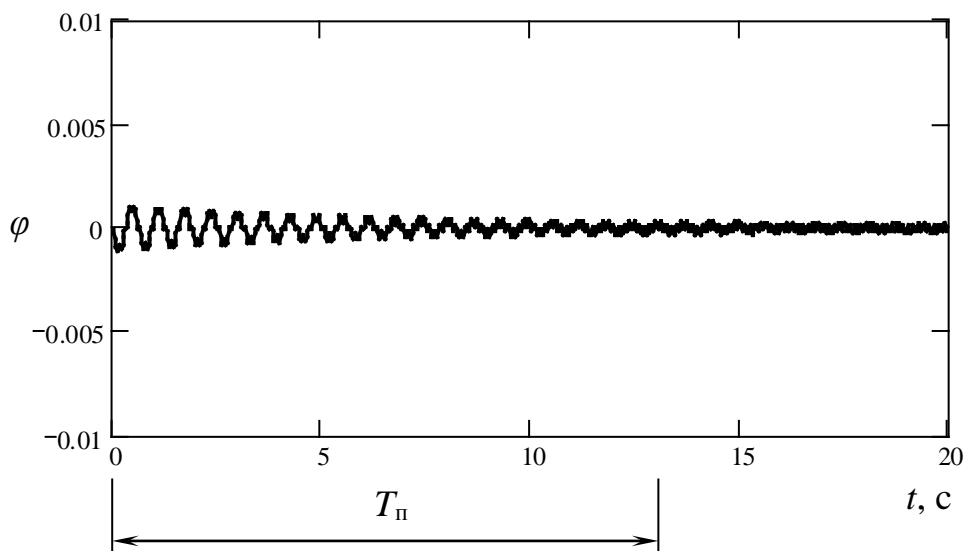


Рисунок 2.7 – График вынужденных колебаний в зоне высоких частот

На рис. 2.5. представлены колебания системы при соотношении частот собственных и вынужденных колебаний $\lambda/p = 1/10$. На протяжении времени *переходного процесса* T_n на преобладающие вынужденные колебания с частотой λ накладываются затухающие собственные колебания с частотой p . По окончании переходного процесса колебания системы происходят с частотой внешнего возмущения и постоянной амплитудой, равной Q/C .

Зона 2 — $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2$ значение λ близко к частоте собственных колебаний системы. При этом значение k_d значительно превышает 1.

Значение k_d достигает максимума при частоте

$$\lambda_p = \sqrt{\omega^2 - 2n^2}. \quad (2.26)$$

Эта частота называется *резонансной*, а рассматриваемый диапазон частот — *зоной резонанса*.

На рис. 2.6 представлены колебания системы при $\lambda = \lambda_p$. В течение *переходного процесса* T_n происходит накопление энергии системой, и амплитуда колебаний возрастает, после чего происходят колебания с амплитудой, *многократно превышающей* амплитуду колебаний в зоне прошивных частот. Величина коэффициента динамичности при резонансе составляет

$$k_d = \frac{\omega^2}{2n\sqrt{\omega^2 - n^2}} = \frac{\omega^2}{2np},$$

или при $\omega \gg n$

$$k_d \approx \frac{\omega}{2n}.$$

Зона 3 — $\lambda > \lambda_2$, k_d уменьшается и при увеличении частоты стремится к нулю. Это *высокочастотная составляющая* нагрузки.

На рис. 2.7. представлены колебания системы при соотношении частот собственных и вынужденных колебаний $\lambda/p = 5/1$. Видно что наибольшая амплитуда колебаний имеет место во время переходного процесса. Амплитуда вынужденных колебаний в установившемся режиме весьма мала.

3 ПОДОБИЕ

3.1 Сущность подобия. Теоремы подобия

Объекты называются *подобными*, если по характеристике одного из них характеристику другого можно получить простым пересчетом.

Различают *абсолютное* и *практическое* подобие. *Абсолютное подобие* требует тождества всех процессов в объектах в пространстве и во времени. *Практическое подобие* требует тождества только тех процессов, которые наиболее существенны для данного исследования.

Теория подобия позволяет:

1. *Обоснованно выбрать модель*, подобную объекту-оригиналу; определить параметры модели, обеспечивающие это подобие.

2. *Пересчитать* результаты модельного эксперимента на натуральный объект.

3. *Обобщить* результаты исследований, проведенных в различных условиях и в различных режимах работы.

4. Получить *обобщенные зависимости* между входными и выходными величинами объекта исследования, которые будут справедливы как для данного объекта, так и для целого класса объектов, подобных ему.

5. *Распространить* результаты эксперимента, проведенного в данном диапазоне изменения факторов, на более широкие интервалы их варьирования.

Процессы в объекте исследования описываются в общем случае известной или неизвестной системой дифференциальных уравнений связи между параметрами и факторами. *Необходимым условием подобия* двух объектов является *одинаковый вид системы уравнений*. Только в этом случае характер процессов в объектах может быть одинаковым и сами объекты можно будет отнести к общему классу.

Если в одном объекте связь между параметром и фактором является линейной, а во втором подчиняется, например, синусоидальному закону, то по характеристикам первого нельзя получить характеристики второго объекта простым пересчетом. Рассматриваемые объекты не могут быть подобными.

Однако одинаковый вид уравнений, описывающих процессы в объектах, является только необходимым, но *не достаточным* условием подобия. Так, в рассмотренном выше примере динамической системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением, сущность процесса в системе определяется соотношением коэффициентов жесткости ω и демпфирования n . Если $\omega < n$ — процесс изменения во времена параметра φ — сходящийся аperiодический, а при $\omega > n$ — сходящийся колебательный. Рассмотренные процессы принципиально отличаются друг от друга, хотя и описываются уравнениями одинакового вида.

Различными окажутся также процессы, описываемые двумя уравнениями одинакового вида, с численно одинаковыми коэффициентами, при одинаковых начальных условиях, если *знаки коэффициентов* будут различными. При $n < 0$ процесс будет колебательным, но не сходящимся, а расходящимся.

Для выделения из *множества процессов*, описываемых данным видом уравнений, *конкретного процесса* необходимо располагать значениями коэффициентов при переменных и их производных, а также начальными условиями. Для уравнений в частных производных, кроме того, должны быть известны граничные зависимости. Коэффициенты, начальные условия и граничные зависимости в совокупности являются *условиями однозначности* процессов.

Подобие, кроме одинаковости систем уравнений, предъявляет определенные требования и к условиям однозначности. Поясним суть этих требований следующим примером. Предположим, что имеется два объекта. В первом процесс описывается функцией

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

где y — параметр; x_1, x_2, \dots, x_n — факторы.

Для второго объекта уравнение процесса имеет вид

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (3.2)$$

где Y — параметр; X_1, X_2, \dots, X_n — факторы.

В условия однозначности входят все факторы. Пропорциональность означает, что $x_1 / X_1 = m_1, x_2 / X_2 = m_2, \dots, x_n / X_n = m_n$. Для *подобных объектов* коэффициенты пропорциональности для *сходственных параметров* должны быть равны.

Например, если среди факторов для первого объекта имеются две массы — факторы x_1 и x_2 , и для второго — также две массы —

факторы X_1 и X_2 , и если первый и второй объекты подобны то должно выполняться условие

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_1}{X_2} \quad \text{или} \quad m_1 = m_2. \quad (3.3)$$

Аналогичные соображения можно высказать для соответствующих длин, ускорений, усилий и т.д.

Между конкретными величинами (например, массами, ускорениями и силами) в объектах существует определенная функциональная связь, которая предопределяет возможность получения обобщенных характеристик — *критериев подобия*.

Теория подобия базируется на трех **теоремах**.

Первая теорема. Необходимым условием *подобия* двух объектов является *равенство* соответствующих *критериев подобия*.

Вторая теорема. Уравнения, описывающие процесс в объекте, могут быть представлены *зависимостями между критериями подобия*.

Третья теорема. Необходимыми и достаточными условиями *подобия* объектов являются *равенство критериев подобия* и *пропорциональность сходственных параметров*, входящих в условия однозначности.

3.2 Критерии подобия. Перерасчет результатов модельных испытаний на натуре

Критерии подобия — безразмерные комбинации, которые составлены из физических величин, описывающих процессы в исследуемых объектах. Критерии подобия должны обладать четким физическим смыслом. Обозначаются критерии буквой π .

В соответствии с теорией подобия при экспериментах необходимо измерять все величины, входящие в состав критериев. Обрабатывать результаты следует в виде зависимостей между критериями подобия. Полученные таким образом зависимости будут справедливы не только для данного эксперимента, но и для всех подобных объектов.

Например, критериями практического подобия двух одноступенчатых лопастных машин (радиальных или осевых), работающих в установившихся режимах, являются *безразмерный напор* π_1 и *безразмерная подача* π_2 .

$$\pi_1 = \bar{H} = \frac{gH}{n^2 D_2^2}; \quad \pi_2 = \bar{Q} = \frac{Q}{nD_2^3}, \quad (3.4)$$

где H – напор насоса; Q – подача; n – частота вращения ротора; D_2 — диаметр рабочего колеса.

Зависимость безразмерного напора от безразмерной подачи представляет собой *безразмерную (типовую) напорную характеристику* лопастной машины. Она не связана с размерами, частотой вращения ротора и плотностью жидкости, а характеризует только особенности гидродинамической схемы и является одинаковой для всего семейства лопастных машин.

При создании крупных машин первоначально изготавливают несколько небольших моделей различных гидродинамических схем и проводят их испытания. Определяя критерии π_1 и π_2 для различных режимов, строят график зависимости π_1 от π_2 — *безразмерную характеристику*, а затем по законам подобия определяют размеры, частоту вращения и строят зависимость напора от подачи для натурной машины.

Пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, для лопастных машин, работающих в установившихся режимах, выполняется при их *геометрическом подобии*. Последнее требует одинаковости форм и одинакового отношения сходственных размеров. *Геометрическое подобие* является обязательным условием практического подобия большинства объектов.

Лопастная машина состоит из подвода, рабочего колеса и отвода. Два рабочих колеса, например, радиальной машины, будут геометрически подобными, если число и форма лопаток у них будут одинаковыми, а сходственные размеры будут находиться в соотношении

$$\frac{D_{1н}}{D_{1м}} = \frac{D_{2н}}{D_{2м}} = \frac{B_{2н}}{B_{2м}}, \quad (3.5)$$

где $D_{1н}$, $D_{2н}$, $B_{2н}$ и $D_{1м}$, $D_{2м}$, $B_{2м}$ – диаметр входа, диаметр и ширина колеса соответственно натурной и модельной машин, рис. 3.1.

Для *геометрического подобия* лопастных машин, кроме рабочих колес, должно быть соблюдено подобие их подводов и отводов.

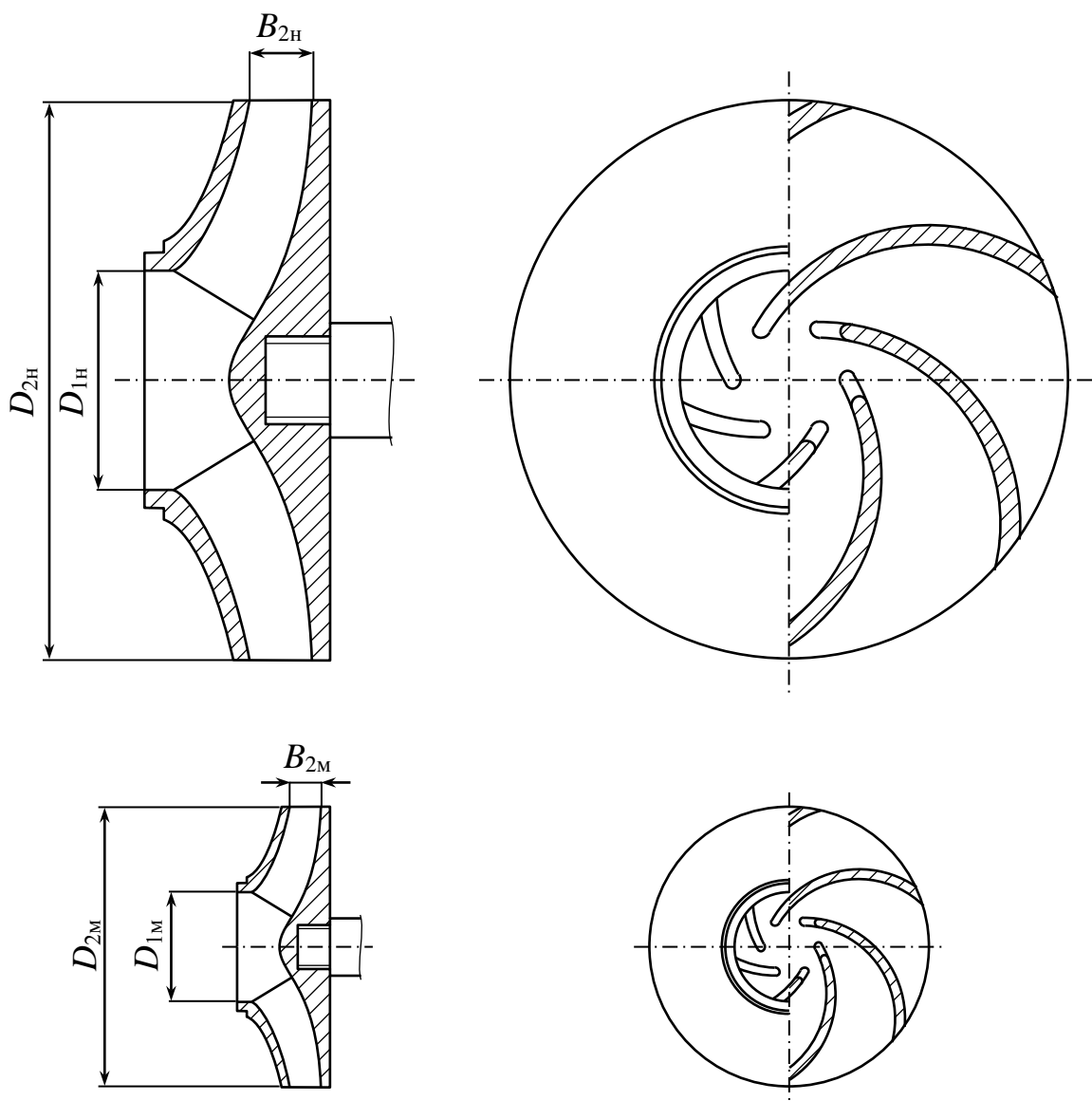


Рисунок 3.1 – Рабочие колеса геометрически подобных центробежных насосов

3.3 π -теорема и ее следствия

В соответствии с **π -теоремой**, если процесс в объекте характеризуется t фундаментальными физическими величинами, для выражения размерностей которых используется k основных единиц, то этот процесс можно описать $t - k$ безразмерными комбинациями, составленными из этих величин.

Из теоремы следует два важных практических вывода:

1. Уравнения, описывающие физические процессы, могут быть выражены уравнениями связи между безразмерными комбинациями — критериями подобия. Последние уравнения будут справедливы для всех подобных объектов.

2. Число независимых критериев равно $m - k$, т.е. меньше числа размерных физических переменных на число основных единиц. Уменьшение числа переменных, которыми описывают процесс, ведет к уменьшению объема экспериментальных исследований и делает результаты более наглядными.

Предположим, что процессы в объекте описываются $m = 5$ фундаментальными физическими величинами. Одна из них выходная — параметр и четыре входных — факторы. Решено экспериментальным путем установить связь между выходной и входными величинами, не прибегая к безразмерным комбинациям. Пусть при постановке опытов каждый фактор будет фиксироваться на пяти уровнях. В этих условиях для перебора всех возможных сочетаний необходимое число опытов, равное сложности объекта, составит $C = 5^4 = 625$. Выполнить такое количество опытов весьма затруднительно.

Сложен также анализ результатов эксперимента, поскольку необходимо получить зависимость в виде функции четырех переменных. Подобрать такую зависимость весьма сложно. Кроме того, результаты опытов практически невозможно будет представить графически.

Посмотрим, что даст переход к безразмерным комбинациям. Предположим, что число основных единиц $k = 3$ — это очень часто встречающийся случай при исследовании механических и гидравлических систем. В условиях рассматриваемого примера в соответствии с π -теоремой после перехода к критериям подобия число безразмерных переменных составит $m - k = 5 - 3 = 2$. Одна из них — безразмерный параметр, вторая — обобщенный безразмерный фактор. Для получения данных, одинаково достоверных с данными экспериментов без использования критериев подобия, в последнем случае достаточно будет поставить не 625, а всего 5 опытов.

При переходе к безразмерным комбинациям упрощается анализ и графическое представление информации. Зависимость безразмерного параметра от обобщенного безразмерного фактора описывается функцией одной переменной и будет представлена на графике одной линией.

Известны два способа определения критериев подобия: с помощью *анализа размерностей* и *по уравнениям процесса*.

3.4 Определение критериев подобия с использованием теории размерностей

Решение этой задачи состоит из *трех этапов*.

На *первом этапе* выбираются **фундаментальные переменные** — *параметры* и *факторы*. Обычно при выборе *параметра* (выходной переменной) осложнений не бывает — это та величина, для которой мы ищем закономерность.

Для правильного выбора *факторов* (входных переменных) необходимо глубокое проникновение в суть исследуемого объекта. Часто это требует не только изучения априорной информации, но и постановки предварительных экспериментов. Если после выбора фундаментальных переменных система безразмерных комбинаций не получается, то необходимо возвратиться к анализу объекта исследования.

На *втором этапе* выбирается **система основных единиц** для выражения размерностей *фундаментальных переменных*. В качестве основных рекомендуется принимать основные единицы СИ, табл. 3.1.

Используя размерности основных единиц, можно составить **формулы размерностей** всех фундаментальных переменных. Например, известно, что сила определяется зависимостью $F = ma$. Формула размерности силы определяется как произведение формул размерности массы и ускорения

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}. \quad (3.6)$$

Записав формулы размерностей всех фундаментальных переменных, описывающих процессы в объекте, устанавливаются, какие размерности основных единиц в них входят. Эти единицы и будут составлять *систему основных единиц* в условиях конкретной задачи.

На *третьем этапе* определяются **критерии подобия** с использованием **теории размерностей**. Для размерной функциональной зависимости $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ размерности левой и правой частей должны быть равны:

$$[y] = [f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad \text{или} \quad \frac{[y]}{[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]} = 1. \quad (3.7)$$

Таблица 3.1 – Основные единицы СИ

Величина	Обозначение	Размерность	Название
Единица длины	l	L	метр
Единица массы	m	M	килограмм
Единица времени	t	T	секунда
Единица силы электрического тока	i	I	ампер
Единица температуры	θ	K	кельвин
Единица количества вещества	n	N	моль
Единица силы света	j	J	кандела

Пример. Определение критериев подобия процесса силового взаимодействия шара с обтекающим потоком жидкости.

Схема стенда для определения силы, с которой поток действует на шар, показана на рис. 3.2. Шар помещен в трубопровод настолько большого внутреннего диаметра, что стеснением им потока можно пренебречь. Гибкой нитью шар связан через блок с пружинным динамометром. Усилие F зависит от свойств шара и потока. Если шероховатостью шара можно пренебречь, его свойства определяются одной переменной — диаметром d . Свойства потока оцениваются средней скоростью v , плотностью ρ и вязкостью μ жидкости. Таким образом, в рассматриваемое случае фундаментальных переменных пять: параметр F и факторы d , v , ρ и μ .

Для выбора основных единиц запишем формулы размерностей фундаментальных переменных, табл. 3.2. Из этой таблицы следует, что размерности всех фундаментальных переменных можно выразить тремя основными единицами — M , L и T . Так как число m фундаментальных переменных пять, а число k основных единиц три, то независимых критериев будет $m - k = 5 - 3 = 2$.

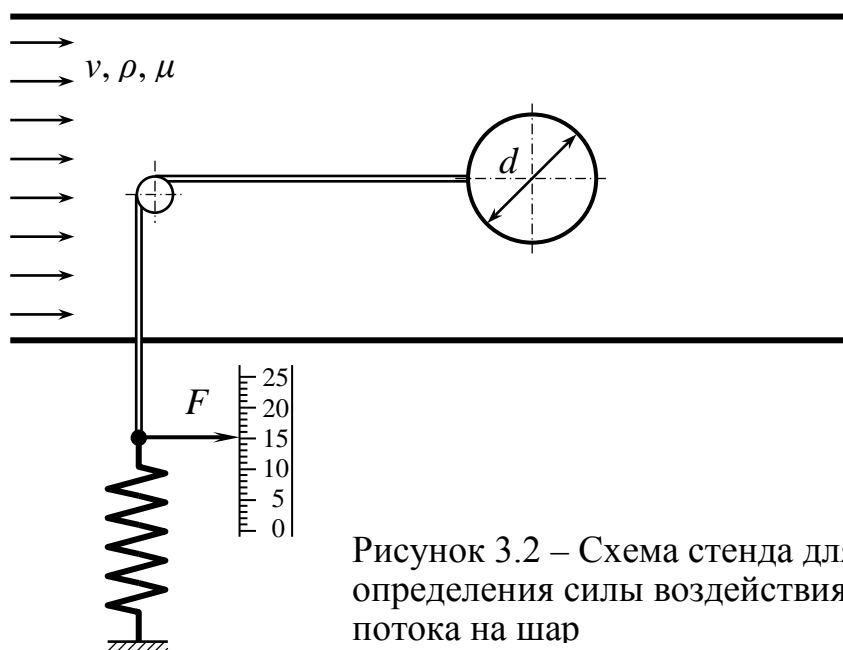


Рисунок 3.2 – Схема стенда для определения силы воздействия потока на шар

Таблица 3.2 – Формулы размерностей фундаментальных переменных

Величина	Обозначение	Размерность
Сила взаимодействия шара и потока жидкости	F	MLT^{-2}
Скорость жидкости	v	LT^{-1}
Плотность жидкости	ρ	ML^{-3}
Динамическая вязкость жидкости	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Диаметр шара	d	L

Критерий (безразмерная комбинация) в общем случае может быть представлен произведением фундаментальных переменных в определенных степенях. В рассматриваемом случае критерий

$$\pi = F^x d^y v^z \rho^u \mu^w, \quad (3.8)$$

где x, y, z, u, w — показатели степеней. Показатели могут быть целыми, дробными, положительными и отрицательными числами. Они могут принимать и нулевое значение. В последнем случае критерий не будет зависеть от соответствующей фундаментальной переменной.

Представим искомую зависимость в виде

$$F^a d^b v^c \rho^e \mu^f = 1, \quad (3.9)$$

где a, b, c, e, f — неизвестные показатели степеней.

Если зависимость (3.9) справедлива относительно переменных, то она будет справедлива и относительно размерностей. Подставим в уравнение вместо переменных их размерности. Левую часть уравнения представим произведением размерностей в нулевых степенях:

$$(MLT^{-2})^a L^b (LT^{-1})^c (ML^{-3})^e (ML^{-1}T^{-1})^f = M^0 L^0 T^0. \quad (3.10)$$

Чтобы последнее выражение было справедливым, должны выполняться условия равенства показателей степени для каждой из трех основных единиц:

$$\begin{aligned} \text{для } M & \quad a + e + f = 0; \\ \text{для } L & \quad a + b + c - 3e - f = 0; \\ \text{для } T & \quad -2a - c - f = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В трех уравнениях пять переменных. Решив совместно уравнения, можно исключить три переменные. От того, какие переменные исключаются, зависит вид критериев. Все критерии будут формально верными. Однако одни из них имеют физический смысл, а другие — нет. Поэтому решение задачи по установлению вида критериев

иногда приходится повторять при различных комбинациях исключаемых переменных. Выразим переменные b , c и e через a и f . Получим

$$\begin{aligned} e &= -a - f; \\ c &= -2a - f; \\ b &= -2a - f. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставим в выражение (3.9) показатели степеней (3.12):

$$F^a d^{-2a-f} v^{-2a-f} \rho^{-a-f} \mu^f = 1, \quad (3.13)$$

Объединим члены, имеющие одинаковые показатели степеней:

$$\left(\frac{F}{d^2 \rho v^2} \right)^a \left(\frac{\mu}{\rho v d} \right)^f = 1, \quad (3.14)$$

Из последнего выражения следует, что в качестве *критериев подобия* могут быть приняты комплексы

$$\pi_1 = \frac{F}{d^2 \rho v^2}, \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho v d}. \quad (3.15)$$

Первый является *безразмерным усилием*. Усилие, действующее со стороны потока на шар, делится на произведение *площади* квадрата, сторона которого равна диаметру шара (d^2) и удвоенного *скоростного давления* ρv^2 .

Так как $\mu / \rho = \gamma$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости, а $v d / \gamma = Re$ — число Рейнольдса, то критерий $\pi_2 = Re^{-1}$. По теории подобия произведение, частное нескольких критериев или возведение их в произвольную степень дадут новый критерий. Таких критериев можно получить бесчисленное множество. Однако независимых среди них будет только $m - k$ критериев. Следовательно, можем избавиться от показателя степени и принять $\pi_2 = Re$.

При установлении зависимости силы от определяющих факторов без перехода к безразмерным комбинациям необходимо фиксировать диаметр, скорость, плотность и вязкость на определенном числе уровней, например на пяти. Для плотности и вязкости независимые изменения при этом практически реализовать нельзя.

После перехода к безразмерным комбинациям при постановке эксперимента необходимо изменять только одну из входных величин. Проще всего изменению поддается скорость. Установив пять уровней скорости, получим пять соответствующих уровней числа Рейнольдса. Измерив усилие, определим величину безразмерного усилия и построим график зависимости безразмерного усилия взаимодействия шара с потоком жидкости от числа Рейнольдса, рис. 3.3. Полученная

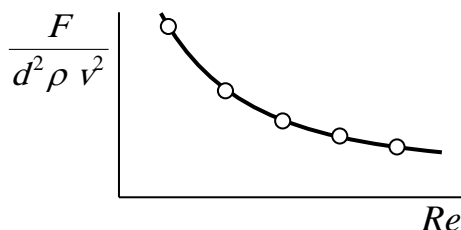


Рисунок 3.3 – График зависимости безразмерного усилия взаимодействия шара с потоком жидкости от числа Рейнольдса

зависимость будет справедлива для шара любого размера, находящегося в потоке жидкости любой плотности и вязкости.

3.5 Определение критериев подобия из уравнений процесса

Описанный выше метод универсален и применим к различным объектам исследования, в т.ч. и к объектам типа «черный ящик». Однако получить таким методом безразмерные комбинации, имеющие четкий физический смысл и удобные для дальнейшего анализа, в некоторых случаях весьма сложно. В случае, если для объекта исследования априорно известны некоторые *уравнения*, характеризующие протекающие в нем процессы, *безразмерные комбинации* можно получить путем преобразования этих уравнений.

Для решения поставленной задачи необходимо уравнения, которыми описываются процессы в исследуемом объекте, привести к *безразмерному виду*. Эта операция может выполняться несколькими способами. Один из наиболее рациональных — способ, основанный на введении *безразмерных переменных*.

Пример. Определение критериев подобия при исследовании местного гидравлического сопротивления.

Для некоторого клапана, установленного в гидролинии, необходимо найти зависимость для определения потерь давления на этом клапане. В качестве *факторов* выступают характеристики потока (средняя скорость и плотность жидкости) и конструктивные характеристики клапана — его форма и размеры.

Известно, что при автомодельном режиме движения жидкости имеет место зависимость

$$\Delta P = \rho g a Q^2, \quad (3.16)$$

где ΔP — перепад давления на гидравлическом сопротивлении; Q — расход жидкости через это сопротивление; a — величина сопротивления; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного паде-

ния. Представим расход как произведение средней скорости потока v и площади проходного сечения клапана F : $Q = v F$. Тогда

$$\Delta P = \rho g a v^2 F^2 .$$

Разделим обе части уравнения на величину *скоростного давления* $\rho v^2/2$:

$$\frac{2\Delta P}{\rho v^2} = 2 g a F^2 . \quad (3.17)$$

Левая и правая части полученного уравнения являются *безразмерными комбинациями*. Проверим это:

$$[\Delta P \rho^{-1} v^{-2}] = (ML^{-1}T^{-2})(ML^{-3})^{-1}(LT^{-1})^{-2} = M^0 L^0 T^0 = 1 ,$$

$$[g a F^2] = (LT^{-2})(L^5 T^2)(L^2)^2 = M^0 L^0 T^0 = 1 .$$

Получили два *критерия подобия*:

$$\pi_1 = \frac{2\Delta P}{\rho v^2}; \quad \pi_2 = 2 g a F^2 . \quad (3.18)$$

Первый критерий является отношением потерь давления на местном сопротивлении (клапане) и скоростного давления потока жидкости, и учитывает характеристики потока жидкости — плотность и среднюю скорость.

Второй критерий учитывает только характеристики самого местного сопротивления (клапана) — размеры его проходного сечения, форму проточной части, качество поверхностей и т.д. Этот критерий называют *коэффициентом местного сопротивления* и обозначают символом ξ . Тогда

$$\frac{2\Delta P}{\rho v^2} = \xi \quad \text{или} \quad \Delta P = \xi \frac{\rho v^2}{2} \quad (3.19)$$

Таким образом коэффициент ξ показывает соотношение между потерями давления на местном сопротивлении и скоростным давлением потока жидкости. Этот коэффициент определяется опытным путем и будет одинаковым для класса подобных сопротивлений.

В рассматриваемом примере, найдя с помощью эксперимента значение коэффициента ξ для некоторого клапана, через который протекает некоторая жидкость, мы сможем рассчитать потери давления на любом клапане, конструкция которого подобна конструкции исследованного клапана, при протекании через него любой жидкости с любой скоростью.

4 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Планирование *однофакторного эксперимента* не представляет трудностей — необходимо выбрать *интервал варьирования* фактора и *количество уровней*, на которых необходимо фиксировать фактор.

Планирование *многофакторного эксперимента* представляет более сложную задачу, поскольку необходимо определить не только интервалы варьирования и количество уровней каждого из факторов, но и порядок их изменения — *план эксперимента*.

4.1 Классификация планов

Наиболее простой способ проведения *многофакторного эксперимента* — сведение его к *серии однофакторных*. В каждой серии меняется только один фактор, остальные остаются неизменными. Такая методика не позволяет оценить совместное влияние на параметр нескольких факторов и приемлема лишь для очень простых объектов. Для получения более точных и достоверных результатов необходимо применять более сложные планы.

По *цели эксперимента* бывают:

— планы *отсеивающего эксперимента*, цель которого — выявить значимые факторы;

— планы *оптимизации* (*экстремального эксперимента*), задачей которого является поиск оптимума — максимального или минимального значения параметра;

— планы *аппроксимации* для установления аналитической зависимости между параметрами и факторами.

Математическая модель зависимости параметра от факторов обычно ищется в виде *полинома* первой, второй или высших степеней.

По *порядку аппроксимирующего полинома*, коэффициенты которого ищутся в ходе эксперимента, бывают:

— планы *первого порядка*, предназначенные для поиска коэффициентов линейного уравнения

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i, \quad (4.1)$$

где Y — параметр; k — количество факторов; X_i — i -й фактор; b_0, b_i — искомые коэффициенты.

— планы **второго порядка**, в которых искомая зависимость аппроксимируется уравнением

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i,j=1}^C b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2, \quad (4.2)$$

где j — порядковый номер, отличный от i , причем $j < i$; C — количество возможных сочетаний из k по 2:

$$C = \frac{k!}{2(k-2)!}. \quad (4.3)$$

— планы **высших порядков**.

По **способу перебора факторов** различают

— **полный факторный эксперимент** (ПФЭ), при котором выполняется перебор *всех возможных сочетаний* уровней факторов;

— **дробный факторный эксперимент** (ДФЭ), план которого представляет некоторую часть плана ПФЭ ($1/2$, $1/4$ и т.д.), при этом перебор сочетаний факторов будет неполным.

4.2 Область определения, интервалы варьирования и уровни факторов. Кодирование факторов.

Областью определения факторов называется диапазон изменения их значений, принятый при реализации плана эксперимента:

$$X_i \in [X_{i \min}; X_{i \max}]. \quad (4.4)$$

Для двухфакторного эксперимента область определения представляет собой прямоугольник, рис. 4.1 а, для трехфакторного — прямоугольный параллелепипед, рис. 4.1 б, для k -факторного — k -мерный параллелепипед.

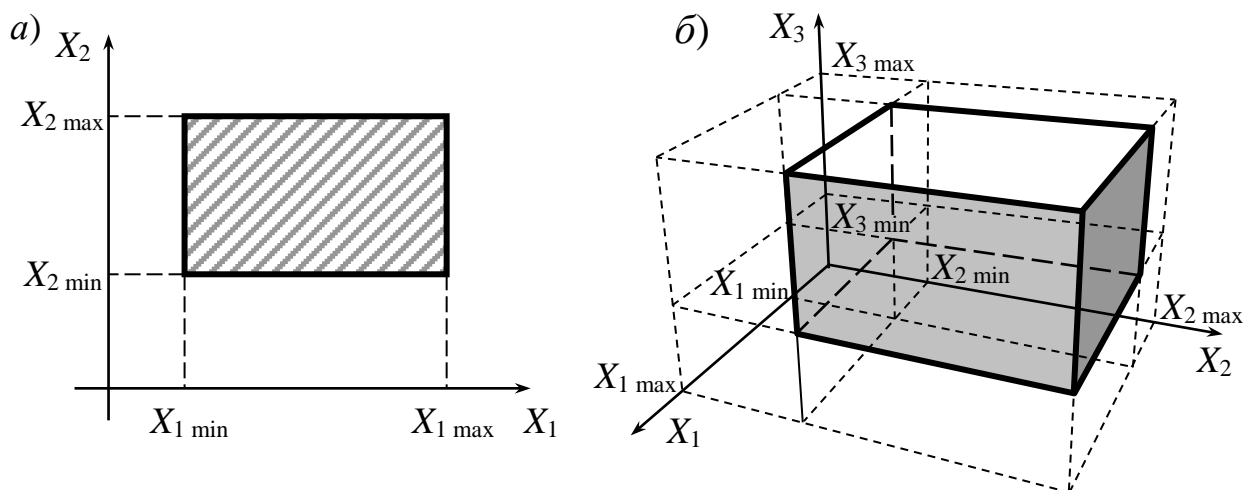


Рисунок 4.1 – Области определения двухфакторного (а) и трехфакторного (б) экспериментов

Установление области определения факторов — важный этап планирования эксперимента. От его правильного выполнения зависит успех эксперимента. Выбор значимых факторов и области их определения выполняется на основе априорной информации или путем постановки отсеивающего эксперимента.

После выявления значимых факторов области их определения устанавливаются их *уровни*.

Уровнем фактора называется его значение, фиксируемое в эксперименте. Экспериментатор может устанавливать любой уровень фактора в пределах области его определения (4.4).

Различают *верхний*, *нижний* и *нулевой* уровни. Верхний и нижний уровни соответствуют границам области определения (4.4): $X_{i \max}$ и $X_{i \min}$. Нулевой уровень соответствует середине интервала (4.4):

$$X_{i0} = \frac{X_{i \min} + X_{i \max}}{2}. \quad (4.5)$$

Интервалом варьирования называют величину, равную максимальному отклонению уровня фактора от нулевого:

$$\Delta X_i = X_{i0} - X_{i \min} = X_{i \max} - X_{i0}. \quad (4.6)$$

Для дальнейшего планирования эксперимента целесообразно перейти от натуральных значений факторов к *кодированным*.

Кодированным называется значение

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i}, \quad (4.7)$$

где X_i — натуральное значение i -го фактора на некотором уровне. Кодированные значения любого фактора на нижнем, верхнем и нулевом уровнях составляют $x_{i \min} = -1$; $x_{i \max} = 1$; $x_{i0} = 0$. Область определения кодированных факторов для двухфакторного эксперимента представляет собой квадрат, рис. 4.2, для трехфакторного — куб, для k -факторного — k -мерный куб.

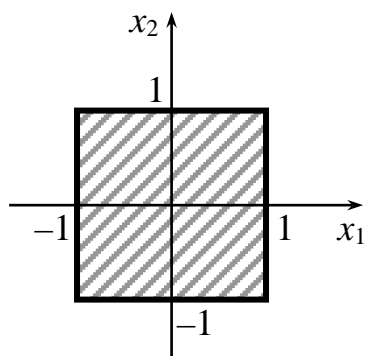


Рисунок 4.2 – Область определения кодированных факторов при двухфакторном эксперименте

В дальнейшем как планирование эксперимента, так и обработка экспериментальных данных выполняются с использованием кодированных значений факторов. При составлении плана это дает такие преимущества:

- кодированные значения *безразмерны*, что позволяет сравнивать между собой уровни различных физических величин;
- кодированное значение уровня фактора, в отличие от натурального, дает представление о *положении* уровня относительно границ области определения;
- использование кодированных значений значительно облегчает разработку *матрицы планирования* эксперимента.

При обработке результатов эксперимента и аппроксимации этих результатов полиномами вида (4.1) или (4.2), в которых натуральные значения факторов X_i заменены кодированными значениями x_i , использование кодированных значений позволяет:

- значительно *упростить вычисления*;
- получить возможность *сравнивать коэффициенты* уравнения.

Поскольку кодированные значения x_i безразмерны и изменяются в одинаковых интервалах $[-1; +1]$, то все коэффициенты полинома имеют *одинаковую размерность*, равную размерности параметра Y , а величина коэффициентов однозначно определяет *степень влияния* данного члена полинома на величину параметра. Исключив из уравнения члены, коэффициенты при которых малы, можно значительно *упростить* полученную зависимость.

4.3 Матрица планирования полнофакторного эксперимента

План эксперимента принято составлять в виде *матрицы планирования* — таблицы, каждая строка которой соответствует некоторому сочетанию уровней факторов, которое реализуется в опыте.

Существует несколько приемов построения матрицы. При фиксации каждого фактора только на двух уровнях (-1 и $+1$), наиболее распространен *прием чередования знаков*.

Прием состоит в том, что для первого фактора знак меняется в каждой следующей строке, для второго — через строку, для третьего — на каждой четвертой строке и т.д. Построенные таким образом матрицы для двух, трех и четырех факторов приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1 — Матрицы планирования ПФЭ 2^2 , 2^3 и 2^4

Номер опыта	Факторы					Параметр	
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4		
ПФЭ 2^2	1	+1	+1	-1	-1	-1	Y_1
	2	+1	-1	-1	-1	-1	Y_2
	3	+1	+1	+1	-1	-1	Y_3
	4	+1	-1	+1	-1	-1	Y_4
ПФЭ 2^3	5	+1	+1	-1	+1	-1	Y_5
	6	+1	-1	-1	+1	-1	Y_6
	7	+1	+1	+1	+1	-1	Y_7
	8	+1	-1	+1	+1	-1	Y_8
ПФЭ 2^4	9	+1	+1	-1	-1	+1	Y_9
	10	+1	-1	-1	-1	+1	Y_{10}
	11	+1	+1	+1	-1	+1	Y_{11}
	12	+1	-1	+1	-1	+1	Y_{12}
	13	+1	+1	-1	+1	+1	Y_{13}
	14	+1	-1	-1	+1	+1	Y_{14}
	15	+1	+1	+1	+1	+1	Y_{15}
	16	+1	-1	+1	+1	+1	Y_{16}

Фактор x_0 — фиктивный и введен для удобства определения свободного члена полинома b_0 . Значение фактора x_0 всегда равно +1.

Матрицы ПФЭ обладают рядом свойств, позволяющих проверить правильность их составления.

1. Свойство **симметричности** — каждый фактор в матрице на верхнем уровне встречается столько же раз, сколько и на нижнем:

$$\sum_{u=1}^n x_{iu} = 0, \quad (4.8)$$

где u — номер опыта, n — количество опытов, $n = 2^k$.

2. Свойство **нормировки** — каждый фактор в матрице встречается только на уровнях -1 и +1:

$$\sum_{u=1}^n x_{iu}^2 = n. \quad (4.9)$$

3. Свойство **ортогональности** — суммы почленных произведений двух любых столбцов равны нулю:

$$\sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} = 0. \quad (4.10)$$

4. Свойство **ротабельности** — точки в матрице выбираются так, что точность предсказания параметра одинакова во всех направлениях.

4.4 Дробный факторный эксперимент

С увеличением числа факторов резко возрастает количество опытов ПФЭ. Так при 5-и факторах оно равно 32, при 6-и — 64 и т.д. Выполнить такое количество опытов технически сложно. Кроме того, значительно возрастает *число степеней свободы* при нахождении коэффициентов полинома. Для ПФЭ 2^5 необходимо найти 6 коэффициентов, следовательно число степеней свободы, т.е. количество избыточных значений Y_u , составит $32 - 6 = 24$.

Существует методика уменьшения числа опытов — ***дробный факторный эксперимент***, план которого представляет собой некоторую часть ($1/2$, $1/4$ и т.д.) плана ПФЭ.

План ДФЭ строится следующим образом. Способом чередования знаков заполняются столбцы не для всех, а только для части факторов. Поскольку в линейной модели (4.1) эффекты взаимодействия между несколькими факторами не учитываются, уровни оставшихся факторов получаются с использованием некоторых ***генерирующих соотношений*** между факторами первой группы.

Генерирующее соотношение — произведение факторов, заменяемое в матрице новой независимой переменной. Например, для случая четырех факторов, когда факторы x_1 , x_2 и x_3 являются свободными, для получения значений фактора x_4 можем использовать такие генерирующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 & 1) x_4 = x_1 x_2; & 5) x_4 = -x_1 x_2; \\
 & 2) x_4 = x_1 x_3; & 6) x_4 = -x_1 x_3; \\
 & 3) x_4 = x_2 x_3; & 7) x_4 = -x_2 x_3; \\
 & 4) x_4 = x_1 x_2 x_3; & 8) x_4 = -x_1 x_2 x_3.
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Выбор некоторого генерирующего соотношения означает, что при проведении эксперимента мы пренебрегаем эффектом взаимодействия соответствующих факторов. Так, выбрав вариант 4, мы исключим из анализа эффект взаимодействия трех факторов x_1 , x_2 и x_3 . В таком случае матрица ДФЭ 2^{4-1} будет иметь вид, представленный в табл. 4.2

Таблица 4.2 — Матрица планирования ДФЭ 2^{4-1}

Номер опыта	Факторы					Параметр
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1x_2x_3$	
1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_1
2	+1	-1	-1	-1	-1	Y_2
3	+1	+1	+1	-1	-1	Y_3
4	+1	-1	+1	-1	+1	Y_4
5	+1	+1	-1	+1	-1	Y_5
6	+1	-1	-1	+1	+1	Y_6
7	+1	+1	+1	+1	+1	Y_7
8	+1	-1	+1	+1	-1	Y_8

Дробный факторный эксперимент позволяет сократить число опытов, однако теперь оценки коэффициентов не будут отдельными, как в ПФЭ. Как видно из матрицы планирования, оценка коэффициента b_4 будет смешана с оценкой b_{123} , который мы исключили из рассмотрения. Однако, смешанными оказываются и другие коэффициенты.

Умножив генерирующее соотношение на фактор, стоящий слева, получим $x_4^2 = x_1 x_2 x_3 x_4$, или, учитывая, что $x_4^2 = 1$,

$$1 = x_1 x_2 x_3 x_4. \quad (4.12)$$

Это т.н. *определяющий контраст* — соотношение между факторами, определяющее *разрешающую способность* матрицы. Умножив левую и правую части определяющего контраста на фактор x_i , получим ответ, какой эффект смешан. Например, для фактора x_1

$$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4, \quad (4.13)$$

т.е. оценка коэффициента b_1 смешана с оценкой b_{234} . Аналогично

$$x_2 = x_1 x_3 x_4 \quad \text{и} \quad x_3 = x_1 x_2 x_4, \quad (4.14)$$

Смешанными оказываются и оценки коэффициентов взаимодействия двух факторов:

$$x_1 x_2 = x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 = x_3 x_4, \quad (4.15)$$

т.е. смешаны оценки коэффициентов b_{12} и b_{34} .

Разрешающая способность матрицы тем выше, чем выше порядок генерирующего соотношения, поскольку, например, эффект взаимодействия трех факторов обычно меньше, чем двух, и пренебрежение этим эффектом приводит к меньшей ошибке.

4.5 Планирование отсеивающих экспериментов

Для разделения факторов на *значимые* и *незначимые* часто недостаточно анализа априорной информации об объекте. Необходимы специальные исследования — ***отсеивающие эксперименты***.

Их проводят на начальной стадии до планирования и постановки основного эксперимента. Планирование отсеивающих экспериментов стремятся свести к минимальному числу опытов.

Для выделения значимых факторов используются: метод экспертных оценок, планы Планкета – Бермана, метод случайного баланса, планы *дробного факторного эксперимента*.

Для отсеивания факторов достаточным является анализ *линейной модели*. Число коэффициентов такой модели $l = k + 1$, где k — число факторов. В зависимости от соотношения между числом опытов n и определяемым числом коэффициентов планы делятся на *ненасыщенные* ($n > l$), *насыщенные* ($n = l$) и *сверхнасыщенные* ($n < l$).

Матрица планирования *дробнофакторного эксперимента* составляется в соответствии с изложенным ранее.

Для оценки ***воспроизводимости*** проводят *параллельные опыты* по всем строкам матрицы или, что делается чаще, ограничиваются опытами в одной точке факторного пространства. Обычно в качестве таковой принимают *центр плана* (нулевые уровни всех факторов).

Коэффициенты уравнения регрессии определяются *методом наименьших квадратов*. ***Значимость*** коэффициентов, определяющая степень значимости соответствующих факторов, оценивается с использованием критерия Стьюдента.

Методы оценки воспроизводимости опытов, регрессионного анализа (метод наименьших квадратов) и оценки значимости коэффициентов уравнения регрессии приведены ниже.

4.6 Планы второго порядка

Если описать процессы в объекте линейным уравнением не удастся, то переходят к ***планам второго порядка***.

Для получения коэффициентов регрессии в этом случае варьирования факторами на двух уровнях недостаточно. При небольшом количестве факторов можно варьировать каждый фактор на *трех уровнях* — верхнем, нижнем и нулевом. Полнофакторный эксперимент в таком случае обозначается как 3^k . Однако, переход к полному факторному эксперименту на трех уровнях связан с постановкой большого числа опытов. Так, для четырех факторов ПФЭ 3^4 требует $3^4 = 81$ опыт, а ПФЭ 3^5 — 243.

Бокс и Уилсон обосновали возможность использования схем, в которых план типа 2^k , используемый в качестве «ядра», дополняется «звездными» точками (по две на каждый фактор), а также нулевой точкой в центре плана. На рис. 4.3 показано расположение точек факторного пространства такого плана для двух входных переменных. «Звездные» точки отстоят от центра плана на расстоянии α , называемом «плечом». Оптимальная величина «плеча» зависит от числа свободных факторов, табл. 4.3.

Общее количество опытов с использованием звездных точек составляет

$$n = 2^k + 2k + 1, \quad (4.16)$$

Пример построения матрицы второго порядка для двухфакторного эксперимента показан в табл. 4.4.

Таблица 4.3 — Данные к построению матриц планов второго порядка

Количество факторов k	2	3	4	5	4	5
Количество опытов ПФЭ 3^k	9	27	81	243	81	243
Тип ядра	ПФЭ 2^k				ДФЭ 2^{k-1}	
Количество опытов «ядра» (2^k)	4	8	16	32	8	16
Общее количество опытов (2^k+2k+1)	9	15	25	43	17	27
Величина «плеча» α	1,414	1,682	2,000	2,378	1,682	2,000

Таблица 4.4 — Матрица плана второго порядка для трех факторов

Номер опыта	Факторы				Параметр
	x_0	x_1	x_2	x_3	
1	+1	+1	-1	-1	Y_1
2	+1	-1	-1	-1	Y_2
3	+1	+1	+1	-1	Y_3
4	+1	-1	+1	-1	Y_4
5	+1	+1	-1	+1	Y_5
6	+1	-1	-1	+1	Y_6
7	+1	+1	+1	+1	Y_7
8	+1	-1	+1	+1	Y_8
9	+1	-1,682	0	0	Y_9
10	+1	1,682	0	0	Y_{10}
11	+1	0	-1,682	0	Y_{11}
12	+1	0	1,682	0	Y_{12}
13	+1	0	0	-1,682	Y_{13}
14	+1	0	0	1,682	Y_{14}
15	+1	0	0	0	Y_{15}

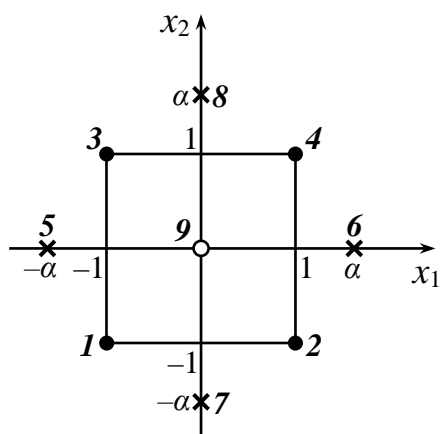


Рисунок 4.3 – Положение точек плана второго порядка в факторном пространстве: 1...4 — точки «ядра»; 5...8 — «звездные» точки; 9 — центральная точка

Как видно из табл. 4.3, для $k = 2$ количество опытных точек ПФЭ 3^k и с использованием «звездных» точек одинаковы. С увеличением числа факторов разница в числе опытов ПФЭ и плана «звездных» точек становится весьма существенной. Наибольшая экономия количества опытов может быть достигнута при использовании в качестве ядра *дробного факторного эксперимента*.

4.7 Экстремальный эксперимент.

Целью исследования часто является поиск **оптимальных условий функционирования** объекта. В большинстве случаев необходимо найти сочетание факторов, соответствующее *экстремальному* (наибольшему или наименьшему) значению параметра. В случае двух факторов функция отклика $Y = f(X_1, X_2)$ может быть представлена графически поверхностью, рис. 4.4 а. В точке M функция отклика достигает *оптимального значения* $Y_{\text{опт}}$, которому соответствует сочетание факторов $(X_{1\text{опт}}, X_{2\text{опт}})$. Проекции сечений поверхности отклика горизонтальными плоскостями на плоскость $X_1O X_2$ образуют *линии равного отклика*.

В случае, если удастся описать процесс уравнением второго порядка, точку экстремума можно установить, используя методы *математического анализа*. При значительной нелинейности поверхности отклика этого сделать нельзя. В последнем случае ставят **экстремальный эксперимент**. Разработано несколько методов его проведения.

Классический метод для поиска экстремума заключается в следующем:

1) Фиксируя значения всех факторов, кроме одного, проводят серию опытов, варьируя выбранный фактор в пределах области его определения с некоторым шагом, рис 4.4 б.

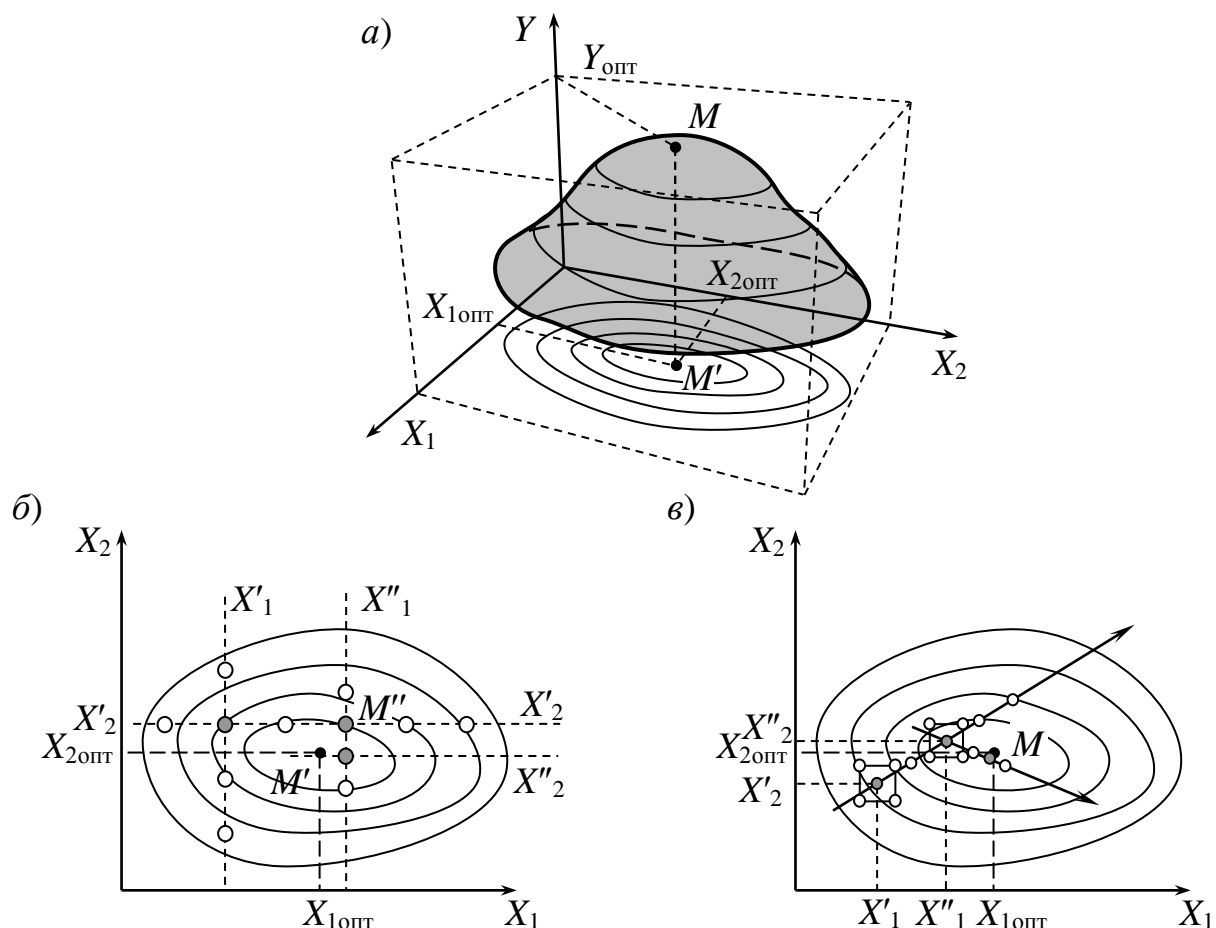


Рисунок 4.4 – Графическое представление функции отклика (а); поиск оптимума классическим методом (б) и методом «крутого восхождения» (в)

2) Фиксируют выбранный фактор на том уровне, при котором получено максимальное значение функции отклика, после чего проводят следующую серию опытов, варьируя аналогичным образом следующий фактор.

3) Проведя серии опытов для всех факторов, получают точку M'' , приближенную к оптимуму.

4) Если приближение к оптимуму недостаточно, проводят дополнительные серии опытов по изложенной методике, но факторы варьируются в меньшей области и с меньшим шагом. Это позволяет получить более точное приближение к точке оптимума.

Использование классического метода требует проведения весьма большого количества опытов, которое растет с увеличением числа факторов. Значительно экономичнее **метод «крутого восхождения»**:

1) В области факторного пространства с центром в точке (X'_1, X'_2) , которую исследователь считает близкой к оптимуму, ставят ПФЭ, (для большого числа факторов — ДФЭ), рис 4.4 в. Находят уравнение регрессии в виде полинома первой степени и проверяют его адекватность.

2) По уравнению регрессии определяют градиент изменения параметра. **Градиентом** называется вектор, направленный в сторону наиболее интенсивного, «крутого» возрастания значения функции.

$$\overline{gradY} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial Y}{\partial X_i} \bar{l}_i, \quad (4.17)$$

где \bar{l}_i — единичный вектор в направлении координаты X_i факторного пространства.

Поскольку функция отклика аппроксимирована полиномом первой степени вида (4.1), нетрудно видеть, что частные производные Y по факторам будут равны соответствующим коэффициентам:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_i} = b_i \quad \text{или} \quad \overline{gradY} = (\overline{b_1, b_2, \dots, b_k}). \quad (4.18)$$

3) Ставят ряд опытов в точках, лежащих на градиенте. Для этого выбирается базовый фактор, который оказывает наибольшее воздействие на параметр, т.е. для которого произведение $b_i \Delta X_i$ является наибольшим; здесь ΔX_i — интервал варьирования i -го фактора.

Для базового фактора выбирают шаг смещения h_6 . Эта процедура не является формализованной. Здесь многое зависит от опыта экспериментатора, а также априорной информации об объекте исследования.

После выбора шага h_6 определяют смещение для других факторов:

$$h_i = \frac{b_i \Delta X_i}{b_6 \Delta X_6} h_6. \quad (4.18)$$

Проводят серию опытов, варьируя все факторы с шагами h_i , при этом опытные точки будут лежать на градиенте. По данным опытов устанавливают положение *частного экстремума* в данном направлении.

4) В точке частного экстремума ставят новый факторный эксперимент. Находят уравнение регрессии. Проверяют его адекватность. Ищут направление нового градиента и осуществляют «крутое восхождение» по нему в соответствии с изложенным ранее. Поиск прекращается, когда линейная модель оказывается неадекватной. Это означает, что достигнута область *оптимума*. В ней ставят *эксперимент второго порядка*, по которому уточняют положение оптимума, или просто принимают наилучший из полученных результатов.

5 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

5.1 Виды погрешностей экспериментов

На результаты эксперимента оказывают влияние не только контролируемые факторы, но и неконтролируемые — *возмущающие факторы*: погрешность измерительных приборов, неточность настройки системы, влияние неучтенных внешних и внутренних факторов и т.д. Воздействие этих факторов приводит к тому, что измеренные в результате опыта величины по своему характеру являются *случайными* и содержат *погрешность*.

Погрешность эксперимента — это разность между данными измерения и истинным значением контролируемой величины.

Абсолютная погрешность — разность между истинным значением контролируемой величины и ее измеренным значением:

$$A = x - a, \quad (5.1)$$

где x — результат измерения; a — истинное значение величины.

Относительная погрешность — отношение абсолютной погрешности к истинному значению величины, выраженное в долях или процентах:

$$\varepsilon_x = \frac{A}{a} \cdot 100\%. \quad (5.2)$$

Погрешности делятся на *систематические* и *случайные*.

Систематические погрешности вызываются причинами, действующими постоянно и однонаправлено при многократном измерении данной величины. Природа систематических погрешностей обусловлена систематическими погрешностями приборов, неправильной их установкой, неправильным измерением исходных данных и погрешностей в определении расчетных коэффициентов, неучтенными факторами, влияющими на показания приборов. Систематические погрешности должны быть выявлены и устранены до постановки основного эксперимента, поскольку методами статистической обработки выявить и устранить такие погрешности весьма сложно.

Случайные погрешности являются следствием возмущений, действующих при измерении непредсказуемо в сторону уменьшения или увеличения результатов. Они обусловлены нечувствительностью средств измерения, погрешностями наблюдения, округлениями при обработке, случайными колебаниями режима работы исследуемой системы. Случайные погрешности легко устраняются путем проведения серий параллельных опытов с последующей статистической обработкой их результатов.

5.2 Законы распределения вероятностей случайных величин

Поскольку в подавляющем большинстве случаев при проведении экспериментальных исследований не удастся избежать воздействия возмущающих факторов, параметры ОИ следует рассматривать как **случайные величины**, а значения этих параметров, измеренные в конкретных опытах — как **реализации** случайных величин.

Случайные величины бывают **дискретными** и **непрерывными**.

Дискретные величины способны принимать лишь ограниченное число значений, известных заранее, например количество успешных опытов или каких-либо объектов, выражаемое целым числом, лежащем в заданном интервале.

Непрерывные величины могут принимать любое значение в некотором интервале. В большинстве случаев результаты опытов являются непрерывными случайными величинами.

Предположим, какая-либо случайная величина измеряется бесконечное число раз. Полученное в результате множество, которое содержит в себе *любые значения* величины, которые можно получить при реальном эксперименте, называется **гипотетической генеральной совокупностью**.

Исследователь при постановке опытов делает конечное, обычно небольшое, количество измерений. Их можно рассматривать как **случайную выборку** из гипотетической генеральной совокупности. Задача обработки сводится к определению по данным выборки показателей, оценивающих параметры генеральной совокупности.

Для правильного решения этой задачи необходимо знать **закон распределения вероятностей случайной величины** — зависимость, связывающую значения случайной величины и вероятность появления этих значений.

Для **дискретных случайных величин** закон распределения вероятностей может быть задан:

1. В *табличной форме*:

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
Вероятность	P_1	P_2	P_3	...	P_i	...	P_n

где x_i – значения случайной величины X (заглавными литерами принято обозначать сами случайные величины, а прописными — их значения); P_i – вероятность, с которой случайная величина примет соответствующее значение.

2. В *графической форме* — в виде полигона распределения вероятностей, рис. 5.1 а, или гистограммы, рис. 5.1 б. Отличие заключается в том, что в полигоне по оси ординат откладывается вероятность P_i , а в гистограмме — *плотность распределения вероятностей* — отношение вероятности к величине интервала Δx между значениями:

$$p_i = \frac{P_i}{\Delta x} \quad (5.3)$$

Тогда вероятность $P_i = p_i \Delta x$ есть площадь соответствующего столбца.

3. В *аналитической форме* — в виде некоторой функции, отражающей зависимость вероятности от значения случайной величины.

Задать закон распределения вероятностей *непрерывной случайной величины* одним из описанных выше способов невозможно,

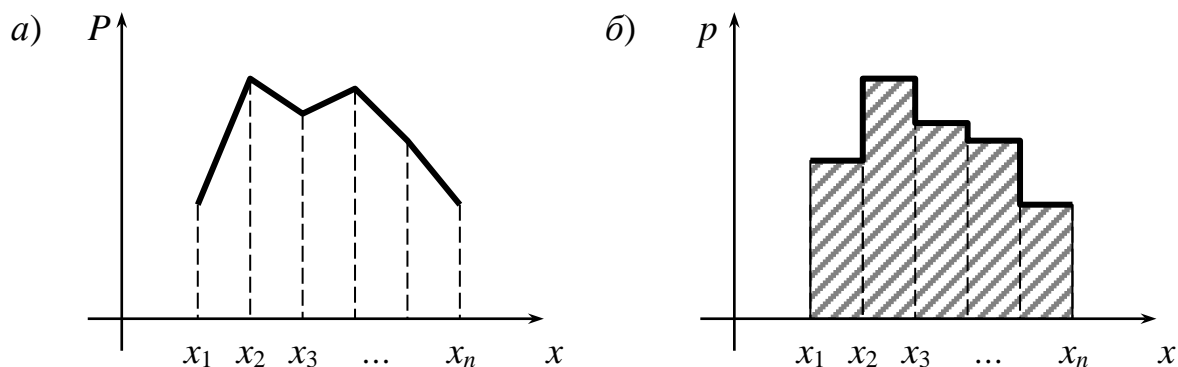


Рисунок 5.1 – Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины, представленный в форме полигона (а) и гистограммы (б)

поскольку непрерывная величина может принимать *бесконечное множество* значений. Вероятность того, что такая величина примет некоторое заданное значение, всегда равна нулю.

Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины задается в виде функции, равной вероятности того, что случайная величина X будет меньше заданной величины x :

$$F(x) = P(X < x). \quad (5.4)$$

Такая функция называется **интегральной функцией распределения вероятностей** случайной величины. Эта функция неубывающая, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Вид графика функции $F(x)$ показан на рис. 5.2 а.

Интегральная функция распределения вероятностей позволяет определить вероятность попадания значения случайной величины на некоторый интервал $[x_1; x_2]$:

$$P(X \in [x_1; x_2]) = F(x_2) - F(x_1). \quad (5.5)$$

Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины может быть задан также в виде **дифференциальной функ-**

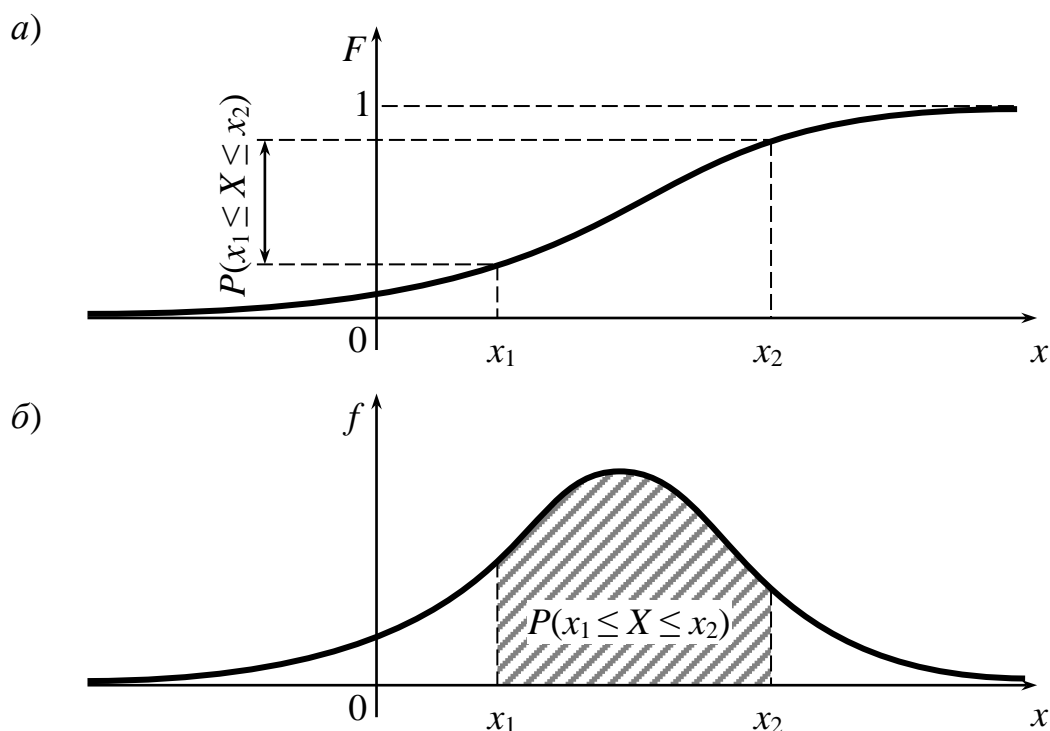


Рисунок 5.2 – Интегральный (а) и дифференциальный (б) законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин

ции, или плотности распределения вероятностей.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (5.6)$$

Вид графика функции $f(x)$ показан на рис. 5.2 б. Вероятность попадания значения случайной величины на интервал $[x_1; x_2]$ равна площади фигуры под графиком функции $f(x)$ на этом интервале:

$$P(X \in [x_1; x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (5.7)$$

Отсюда следует, что площадь под всей кривой функции $f(x)$ должна быть равна 1, поскольку это вероятность попадания X на интервал $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (5.8)$$

Это свойство плотности распределения вероятностей называется *свойством нормирования*.

Преимущество дифференциальной функции распределения вероятностей перед интегральной заключается в ее наглядности. Окрестность максимума функции соответствует области наиболее вероятных значений случайной величины.

Для оценки закона распределения вероятностей в реальном эксперименте проводят большое число параллельных опытов. В результате получают выборку реализаций величины X объемом n . Весь диапазон значений величин делят на равные интервалы. Число интервалов рекомендуется принимать

$$K = 1 + 3,32 \lg n \quad (5.9)$$

Затем подсчитывают количество n_u попаданий значений X в каждый из интервалов. Отношение этой величины к общему числу измерений n

$$P_u^* = \frac{n_u}{n} \quad (5.10)$$

называется *относительной частотой попадания* и является оценкой вероятности попадания единичных измерений в соответствующий интервал. Оценку плотности вероятности попадания случайной величины в интервал можно получить, разделив P_u^* на величину интервала:

$$p_u^* = \frac{P_u^*}{\Delta x} \quad (5.11)$$

По полученным результатам строят гистограмму или график распределения плотностей вероятностей, рис. 5.3, по которому можно оценить вид закона распределения плотностей вероятностей для генеральной совокупности. При построении графика условно принимают $f(\hat{x}_u) = p_u^*$, где \hat{x}_u — середина u -го интервала.

Для получения аналитического выражения закона распределения вероятностей выполняют *аппроксимацию* полученных данных зависимостью того или иного вида. Известно несколько видов таких зависимостей, но в большинстве случаев используется **нормальный закон распределения вероятностей** (закон Гаусса)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.12)$$

где m_x и σ — параметры нормального закона (*математическое ожидание* и *среднеквадратическое отклонение*).

Нормальному закону подчиняются величины, случайный характер которых обусловлен действием множества независимых случайных факторов. Таково большинство погрешностей измерений.

Преимуществом нормального закона является простота получения оценок его параметров m_x и σ по данным выборки. Вид графика нормального закона распределения вероятностей показан на рис. 5.2 б. Распределение плотностей вероятностей в выборке, показанное на рис. 5.3, также соответствует нормальному распределению.

5.3 Числовые характеристики случайных величин

Функции распределения вероятностей случайных величин хотя

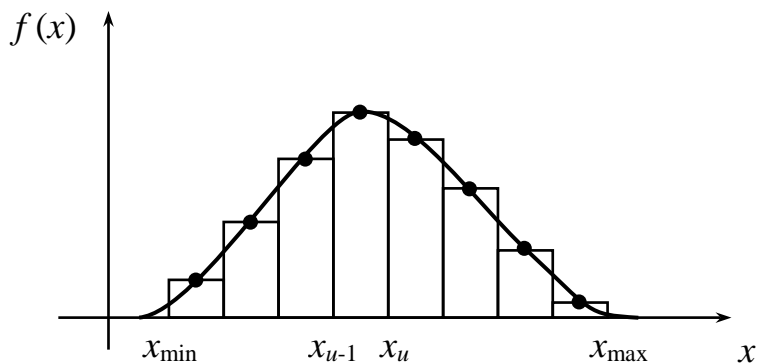


Рисунок 5.3 – Гистограмма и график распределения плотности вероятностей случайной величины, построенные по результатам измерений

и являются их полной характеристикой, но не всегда удобны в для практического использования. Например, для получения графика функции распределения вероятностей по опытным данным необходимо провести несколько десятков измерений, что не всегда оправдано. Поэтому для описания случайных величин используют **числовые характеристики**, которые не являются их полным описанием, но достаточны для решения большинства практических задач.

Математическое ожидание случайной величины характеризует положение центра группирования ее реализаций в генеральной совокупности. Математическое ожидание для дискретных и непрерывных случайных величин находятся по зависимостям:

$$m_x = \sum_{i=1}^N x_i P_i \quad \text{и} \quad m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (5.13)$$

Математическое ожидание обладает следующими *свойствами*:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине:

$$m_C = C. \quad (5.14)$$

2. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$m_{X+Y+Z} = m_X + m_Y + m_Z. \quad (5.15)$$

3. Математическое ожидание произведения нескольких случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$m_{XYZ} = m_X m_Y m_Z. \quad (5.16)$$

4. Математическое ожидание функции одной или нескольких случайных величин равно функции математических ожиданий этих величин:

$$m_{f(X,Y,Z)} = f(m_X, m_Y, m_Z). \quad (5.17)$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеяния ее реализаций вокруг математического ожидания и находится для дискретных и непрерывных случайных величин по зависимостям

$$D_x = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 P_i \quad \text{и} \quad D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (5.18)$$

Формула (5.18) представляет собой математическое ожидание квадрата отклонения ΔX случайной величины от ее математического ожидания:

$$D_x = M \left[(X - m_x)^2 \right] = m_{\Delta X^2} \quad (5.19)$$

Размерность дисперсии отличается от размерности самой случайной величины — равна квадрату ее размерности, — поэтому для удобства сравнения используют **среднеквадратическое отклонение** $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ размерность которого соответствует размерности самой величины. Используется также **коэффициент вариации**, равный отношению среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию величины: $v_x = \sigma_x / m_x$, и показывающий относительную величину рассеяния.

Дисперсия случайной величины обладает такими *свойствами*:

1. Дисперсия постоянной величины равна *нулю*:

$$D_C = 0. \quad (5.20)$$

2. Дисперсия суммы нескольких случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D_{X+Y+Z} = D_X + D_Y + D_Z \quad \text{или} \quad \sigma_{X+Y+Z} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}. \quad (5.21)$$

3. Дисперсия произведения постоянной и случайной величин дисперсии случайной величины, умноженной на квадрат постоянной:

$$D_{CX} = C^2 D_X \quad \text{или} \quad \sigma_{CX} = |C| \sigma_X. \quad (5.22)$$

4. Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата математического ожидания этой величины:

$$D_X = m_{X^2} - m_X^2. \quad (5.23)$$

Оценкой для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности являются *выборочное среднее* и *среднеквадратическое отклонение*, определенные для выборки объемом n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{и} \quad S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.24)$$

где x_i — i -е значение из выборки.

Поскольку выборка из генеральной совокупности случайна, выборочное среднее также является случайной величиной, распределенной возле математического ожидания со среднеквадратическим отклонением, равным

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}. \quad (5.25)$$

Из этого следует, что математическое ожидание можно определить с высокой точностью даже не особенно точными приборами. Но при этом необходимо выполнить большое число независимых измерений. Например, для повышения точности в 3 раза число опытов нужно увеличить в 9 раз. Рациональнее для повышения точности результата использовать более точные приборы, уменьшив S_x .

5.4 Погрешности косвенных измерений

Часто интересующая нас величина непосредственно не может быть измерена, а определяется как *функция* других величин, которые находятся опытным путем. Например, расход воздуха в прямоугольном канале

$$Q = h b v_{\text{ср}}, \quad (5.26)$$

где h и b — высота и ширина канала; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость воздуха. Для определения расхода измеряют ширину, высоту канала и среднюю скорость воздуха. При измерениях этих величин допускаются погрешности. Оценка их может быть выполнена по рассмотренной методике.

Погрешность определяемой величины зависит от погрешностей измеряемых величин и от вида функциональной связи между ними. Предположим, что величина, погрешность которой необходимо определить, является произвольной функцией k измеряемых переменных:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k). \quad (5.27)$$

Поставив ряд параллельных опытов, найдем оценки \bar{x}_i и $S_{x_i}^2$ математического ожидания m_{x_i} и дисперсии D_{x_i} для каждой i -й величины. Необходимо определить оценки \bar{y} и S_y^2 математического ожидания m_y и дисперсии D_y для искомой величины.

Распространив свойство (5.17) математического ожидания на его оценку, можем утверждать, что

$$m_y = \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_k}) \quad \text{и} \quad \bar{y} = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k). \quad (5.28)$$

Представим случайные величины x_i в виде $x_i = m_{x_i} + \Delta x_i$, где Δx_i — отклонение величины от ее математического ожидания.

Если функция φ непрерывна и во всех точках интересующего нас интервала имеет производные, то ее можно разложить в ряд Тейлора. Выполним эту операцию и оставим в ряде только линейные члены:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) = \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_k}) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

С учетом (5.27) и (5.28)

$$y = m_y + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i \quad \text{или} \quad y - m_y = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Возведем правую и левую части последнего равенства в квадрат и найдем математические ожидания левой и правой частей:

$$M[(y - m_y)^2] = M\left[\left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2\right]$$

Левая часть равенства есть дисперсия y (5.19). Раскрыв скобки в правой части, получим

$$D_y = M\left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2 + 2 \sum_{i,j=1}^k \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j\right)\right],$$

или, с учетом свойств (5.15) и (5.16) математического ожидания

$$D_y = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 m_{\Delta x_i^2} + \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_i \partial x_j} m_{\Delta x_i \Delta x_j}.$$

Поскольку математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания есть дисперсия, а математическое ожидание произведения отклонений двух величин есть их *корреляционный момент*, для независимых случайных величин равная нулю,

$$m_{\Delta x_i^2} = D_{x_i} \quad \text{и} \quad m_{\Delta x_i \Delta x_j} = K_{x_i x_j} = 0,$$

получим

$$D_y = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 D_{x_i}. \quad (5.29)$$

Заменяя дисперсии x_i их оценками по выборке $S_{x_i}^2$, получим зависимость для определения оценки дисперсии величины y :

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 S_{x_i}^2. \quad (5.30)$$

Например, для случая (5.25)

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = b v_{\text{cp}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = h v_{\text{cp}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial v_{\text{cp}}} = hb.$$

Тогда

$$S_Q^2 = \bar{b}^2 \bar{v}_{\text{cp}}^2 S_h^2 + \bar{h}^2 \bar{v}_{\text{cp}}^2 S_b^2 + \bar{h}^2 \bar{b}^2 S_{v_{\text{cp}}}^2.$$

В случае, если точность измерения параметров h и b значительно выше, чем точность измерения v_{cp} , погрешностями этих величин можем пренебречь. Тогда $S_Q^2 \approx h^2 b^2 S_{v_{\text{cp}}}^2$.

5.5 Интервальные оценки измеряемых величин и их погрешностей

В п. 6.3 значение измеряемой величины оценивалось одним числом — выборочным средним. Такая оценка называется *точечной*. Так как среднее определяется по данным выборки, которая сама является случайной, то случайной будет и оценка. При проведении новой серии опытов на том же объекте будут получены новые результаты, которые будут отличаться от предыдущих. При использовании точечных оценок остаются неизвестными вероятность и точность результатов обработки.

Указанных недостатков лишены *интервальные оценки*. В основе интервальных оценок лежит понятие *доверительного интервала*.

Доверительным называется такой интервал $[m_x - \Delta x_{\text{п}}; m_x + \Delta x_{\text{п}}]$, вероятность попадания в который реализации случайной величины не ниже заданной P . Величина P называется *доверительной вероятностью*, а $\Delta x_{\text{п}}$ — *предельной погрешностью*. Величина $\alpha = 1 - P$, равная вероятности ошибки, называется *уровнем значимости* или *риском*. Если известен интегральный или дифференциальный закон распределения вероятностей случайной величины, то

$$P = 1 - \alpha = F(m_x + \Delta x_{\text{п}}) - F(m_x - \Delta x_{\text{п}}) = \int_{m_x - \Delta x_{\text{п}}}^{m_x + \Delta x_{\text{п}}} f(x) dx. \quad (5.31)$$

Рассмотрим случайную величину, распределение вероятностей которой подчиняется нормальному закону. При $\Delta x_{\text{п}} = \sigma_x$ (интервал $m_x \pm \sigma_x$) доверительная вероятность $P = 0,683$, а риск попадания единичного измерения за его пределы $\alpha = 0,317$, рис. 5.4. Такой риск слишком велик для большинства научных и технических применений. Интервальные оценки выполняют со значительно большей вероятностью.

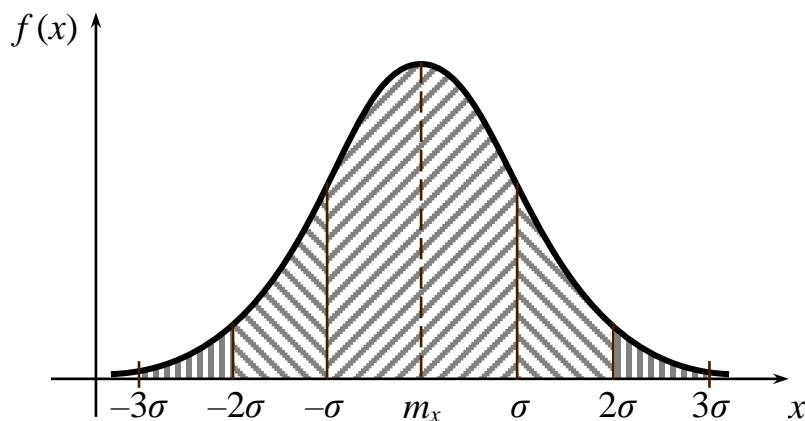


Рисунок 5.4 – Доверительные интервалы $m_x \pm \sigma_x$, $m_x \pm 2\sigma_x$ и $m_x \pm 3\sigma_x$

Вероятность попадания измерения в интервал $m_x \pm 2\sigma_x$ составляет 0,955. Риск $\alpha = 0,045$ уже приемлем. Такой интервал широко используется в инженерной практике. Для интервала $m_x \pm 3\sigma_x$ риск составляет 0,0027, т.е. весьма мал. Интервалы $m_x \pm 3\sigma_x$ используются в очень ответственных расчетах.

Закон распределения вероятностей величины, измеряемой в ходе опыта, обычно неизвестен. В таком случае существует два способа определения доверительного интервала.

1. Определение доверительного интервала по классу точности прибора. **Класс точности прибора** это выраженная в процентах относительная предельная погрешность измерения величины, равной пределу измерения прибора.

Например, если манометр с максимальным значением по шкале 100 кгс/см^2 имеет точность $\varepsilon = 1\%$ то его абсолютная предельная погрешность $\Delta x_{\text{п}} = 100 \cdot 0,01 = 1 \text{ кгс/см}^2$. В настоящее время в измерительной технике в большинстве отраслей промышленности под предельной погрешностью прибора понимается величина, равная двум среднеквадратичным отклонениям, т.е. $\Delta x_{\text{п}} = 2\sigma_x$, что соответствует доверительной вероятности $P = 0,955$ и риску $\alpha = 0,045$.

Таким образом, доверительный интервал для результата измерения величины x составит $x \pm \Delta x_{\text{п}}$.

2. Определение доверительного интервала по результатам нескольких параллельных опытов. При наличии выборки из n результатов измерений величины x доверительный интервал составит

$$\bar{x} - t_{f,\alpha} S_x \leq x \leq \bar{x} + t_{f,\alpha} S_x, \quad (5.32)$$

где $t_{f,\alpha}$ — значение **критерия Стьюдента** при уровне значимости α и числе степеней свободы f . Число степеней свободы равно разности объема выборки и числа наложенных связей. В данном случае наложена одна связь — определено среднеквадратическое отклонение, поэтому $f = n - 1$.

Значения критерия Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 5\%$ приведены в табл. 5.1. Заметно, что с увеличением размера выборки доверительный интервал сужается, т.е. повышается точность определения искомой величины.

Таблица 5.1 – Значения критерия Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,05$

f	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	60
$t_{f,\alpha}$	12,706	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,306	2,228	2,086	2,042	2,00

5.6 Проверка однородности выборок и дисперсий

При проведении серии параллельных опытов возможен случай, когда в одном или нескольких опытах получен результат, значительно отличающийся от основной массы результатов. Такой результат называют *грубой ошибкой*, а выборку, содержащую грубые ошибки — *неоднородной*, рис. 5.5. Наличие в выборке грубых ошибок может существенно исказить результаты исследования, поэтому цель *проверки однородности выборки* — удалить из нее такие результаты.

Методика проверки однородности выборки сводится к определению с соответствующей вероятностью доверительного интервала

$$\bar{x} - h S_x \leq x \leq \bar{x} + h S_x, \quad (5.33)$$

где h — параметр, значение которого зависит от уровня значимости α и объема выборки n , табл. 5.2.

Если какой-либо результат выходит за пределы интервала, то он является грубой погрешностью, его следует исключить и оценку всех параметров выборки провести заново.

Проверку однородности дисперсий приходится выполнять, когда сопоставляются результаты нескольких выборок. Например, проводят испытания двух машин в одинаковых условиях, или экспериментально устанавливают связь между параметром и фактором, когда для каждого контрольного уровня фактора проводятся параллельные опыты. В первом случае располагаем двумя выборками, каждая из которых характеризуется своим математическим ожиданием и своей дисперсией. Во втором случае число выборок равно k . Соответственно до k увеличивается и число дисперсий.

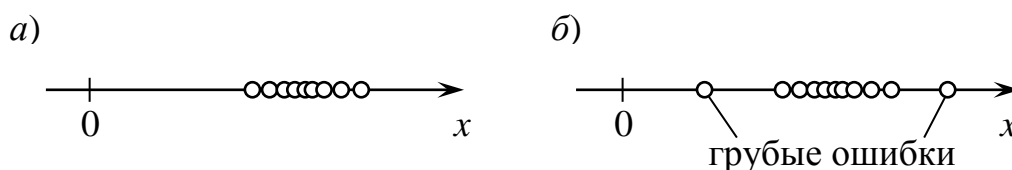


Рисунок 5.5 – Однородная (а) и неоднородная (б) выборки

Таблица 5.2 – Значения параметра h при уровне значимости $\alpha = 0,05$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h	1,15	1,46	1,67	1,82	1,94	2,03	2,11	2,18	2,23
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
h	2,29	2,33	2,37	2,41	2,44	2,48	2,50	2,53	2,56

В в первой и втором случаях дисперсии будут различными. Это различие может быть статистически незначимым (дисперсии однородны) или статически значимым (дисперсии неоднородны). В последнем случае выборки сопоставлять нельзя. Дальнейшая обработка результатов эксперимента при этом недопустима.

Для проверки однородности двух дисперсий на практике наиболее часто используется **критерий Фишера** (F -критерий), представляющий отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F = S_1^2 / S_2^2, \quad S_1^2 > S_2^2. \quad (5.34)$$

Расчетное значение критерия сравнивается с критическим табличным, определяемым для принятого уровня значимости α и степеней свободы f_1 и f_2 соответствующих дисперсий. Значение критерия $F_\alpha(f_1, f_2)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ приведены в табл. 5.3. Если $F < F_\alpha(f_1, f_2)$, то дисперсии однородны.

При проверке однородности трех и более дисперсий, имеющих одинаковые числа степеней свободы, используется критерий Кохрена (G -критерий)

$$G = S_{\max}^2 / \sum_{j=1}^k S_j^2, \quad (5.35)$$

где S_{\max}^2 — наибольшая из k сравниваемых дисперсий.

Табличные значения критерия Кохрена $G_\alpha(f_1, f_2)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ приведены в табл. 5.4, где f_1 — число степеней свободы дисперсии S_{\max}^2 ; $f_2 = k$ — общее количество дисперсий.

Таблица 5.3 – Значения критерия $F_\alpha(f_1, f_2)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$

$F_{0,05}$		Число степеней свободы числителя f_1											
		1	2	3	4	5	6	8	10	20	40	100	∞
Число степеней свободы знаменателя f_2	1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	238,88	241,88	248,01	251,14	253,04	254,31
	2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,40	19,45	19,47	19,49	19,50
	3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,66	8,59	8,55	8,53
	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,80	5,72	5,66	5,63
	5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,56	4,46	4,41	4,37
	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,87	3,77	3,71	3,67
	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,15	3,04	2,98	2,93
	10	4,97	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,77	2,66	2,59	2,54
	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,12	1,99	1,91	1,84
	40	4,09	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,84	1,69	1,59	1,51
	100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,68	1,52	1,39	1,28
	∞	3,84	3,00	2,61	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,57	1,39	1,24	1,00

5.7 Сравнение выборочных средних. Дисперсионный анализ

В ходе исследований часто возникает необходимость *сравнения* результатов измерения, представленных двумя выборками (например, производительность новой машины сравнивается с базовым вариантом). Сравнивая выборочные средние, нужно быть уверенным, что разница между ними *значима*, т.е. вызвана изменениями в конструкции машины, а не является результатом погрешностей опытов.

Пусть для каждой из выборок определены выборочные средние \bar{x}_1, \bar{x}_2 и дисперсии S_1^2 и S_2^2 , причем дисперсии выборок *однородны* (в противном случае сравнивать выборочные средние нельзя!). Обозначим разницу между выборочными средними

$$Z = \bar{x}_1 - \bar{x}_2. \tag{5.36}$$

Поскольку выборочные средние есть случайные величины, величина Z также случайна. Доверительный интервал для этой величины

$$m_Z - t_{f,\alpha} S_Z \leq Z \leq m_Z + t_{f,\alpha} S_Z,$$

где m_Z и S_Z – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение Z .

Таблица 5.4 – Значения критерия $G_\alpha(f_1, f_2)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$

$G_{0,05}$	Число степеней свободы числителя f_1										
	1	2	3	4	5	6	10	16	36	∞	
Число степеней свободы знаменателя f_2	2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8534	0,8534	0,7880	0,7341	0,6602	0,5000
	3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,6071	0,6771	0,6025	0,5466	0,4748	0,3333
	4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,4804	0,4366	0,3720	0,2500
	5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5440	0,5063	0,4733	0,4118	0,3645	0,3066	0,2000
	6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3568	0,3135	0,2612	0,1667
	8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,2829	0,2462	0,2022	0,1250
	10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2353	0,2032	0,1655	0,1000
	15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1671	0,1429	0,1144	0,0677
	20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1303	0,1108	0,0879	0,0500
	24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1113	0,0942	0,0743	0,0417
	30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,0921	0,0771	0,0604	0,0333
	40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0713	0,0595	0,0462	0,0250
	∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Исходя из выражения (5.36) с учетом свойств (5.21) и (5.25) дисперсии, дисперсия Z составит

$$S_Z^2 = S_{\bar{x}_1}^2 + S_{\bar{x}_2}^2 \quad \text{или} \quad S_Z^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}, \quad (5.38)$$

где $S_{\bar{x}_1}^2$ и $S_{\bar{x}_2}^2$ – дисперсии выборочных средних; n_1 и n_2 – объемы первой и второй выборок.

Предположим, что различие между \bar{x}_1 и \bar{x}_2 незначимо, т.е. обусловлено случайными погрешностями. Тогда математическое ожидание Z равно нулю и доверительный интервал

$$-t_{f,\alpha} S_Z \leq Z \leq t_{f,\alpha} S_Z, \quad \text{или} \quad |Z| \leq t_{f,\alpha} S_Z. \quad (5.37)$$

Следовательно, если Z выходит за пределы указанного интервала, можем утверждать, что различие между выборочными средними \bar{x}_1 и \bar{x}_2 *значимо*.

Критерий $t_{f,\alpha}$ берется для соответствующего уровня значимости и суммарного числа степеней свободы двух дисперсий $f = n_1 + n_2 - 2$.

Если эксперимент проводится с целью аппроксимации зависимости некоторого параметра от одного или нескольких факторов, необходимо определить *значимость влияния* каждого из факторов на параметр. Такая процедура называется *дисперсионным анализом*.

Предположим, что необходимо установить, влияет ли изменение в заданном интервале фактора x на параметр y . Установим m уровней фактора. На каждом уровне поставим по n параллельных опытов и определим выборочное среднее и дисперсию значений y для каждого уровня:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ui} \quad \text{и} \quad S_u^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_{ui} - \bar{y}_u)^2, \quad (5.38)$$

где y_{ui} — значение y , измеренное в i -м опыте из серии опытов, проведенных при u -м уровне фактора x . Результаты сведем в табл. 5.5.

Если дисперсии S_u^2 однородны, что проверяется по критерию Кохрена, то можем определить средневзвешенную дисперсию погрешностей всех выборок:

$$S_{\text{св}}^2 = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m S_u^2. \quad (5.39)$$

Таблица 5.5 – Данные для дисперсионного анализа

Уровни фактора	Номер опыта при заданном уровне фактора						Выборочное среднее	Дисперсия
	1	2	...	i	...	n		
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1i}	...	y_{1n}	\bar{Y}_1	S_1^2
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2i}	...	y_{2n}	\bar{Y}_2	S_2^2
...
u	y_{u1}	y_{u2}	...	y_{ui}	...	y_{un}	\bar{Y}_u	S_u^2
...
m	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mi}	...	y_{mn}	\bar{Y}_m	S_m^2

Рассмотрим совокупность выборочных средних \bar{y}_u как реализации некоторой случайной величины, образующие выборку объемом m . Найдем среднее и дисперсию этой выборки:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m \bar{y}_u \quad \text{и} \quad S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (\bar{y}_u - \bar{y})^2. \quad (5.40)$$

Дисперсия S_y^2 обусловлена двумя факторами: погрешностями определения выборочных средних \bar{y}_u и влиянием фактора x . Для выяснения значимости последнего выполним проверку однородности дисперсий S_y^2 и S_{cb}^2 . Если

$$F = S_y^2 / S_{cb}^2 < F_\alpha [f_y = m-1; f_{cb} = m(n-1)], \quad (5.41)$$

— дисперсии однородны, следовательно изменение выборочных средних обусловлено случайными погрешностями, а влияние фактора — не значимо. В противном случае — дисперсии неоднородны, и можем утверждать, что **фактор x оказывает значимое влияние на параметр**.

6 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗЕЙ

Главная задача всякого научного исследования заключается в изучении *связей между явлениями, параметрами и факторами*.

Связи бывают *функциональными* и *вероятностными* (статистическими). В первом случае каждому значению входной величины соответствует одно или несколько строго определенных значений выходной. Статистические связи проявляются лишь при многократном испытании, при этом данному значению входной величины может соответствовать множество значений выходной.

6.1 Корреляционный анализ

Корреляционный анализ — один из широко распространенных методов оценки статистических связей. Он отвечает на вопросы: влияет ли данная входная величина на выходную и какова степень (теснота) связи между величинами?

Предположим, что в результате эксперимента, цель которого — изучить влияние фактора x на параметр y , получены данные в виде совокупностей значений x и y , объемом n каждая, причем каждому значению x_i соответствует определенное значение y_i .

Каждую пару величин можно представить *точкой* на поле координат xOy . Совокупность точек образует *диаграмму рассеяния*, рис. 6.1. По такой диаграмме можно судить о тесноте связи между величинами, однако подобная оценка будет субъективной.

Числовой характеристикой связи служит *корреляция* — математическое ожидание произведения отклонений x и y от их математических ожиданий:

$$K_{xy} = M[(x - m_x)(y - m_y)]. \quad (6.1)$$

Оценка корреляции по опытным данным:

$$K_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (6.2)$$

Размерность полученной величины равна произведению размерностей величин x и y , что затрудняет анализ тесноты связи. Поэтому чаще используют безразмерный *коэффициент корреляции*, равный

$$k_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad (6.3)$$

или для результатов опыта — *оценку коэффициента корреляции*:

$$k_{xy} = \frac{1}{n S_x S_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (6.4)$$

Коэффициент корреляции является оценкой степени связи между величинами и изменяется в диапазоне $[-1; +1]$.

Выясним, как связано значение коэффициента корреляции с видом диаграммы рассеяния. Рассмотрим такие случаи:

1) Точки рассеяны в некоторой области, симметричной относительно вертикальной и горизонтальной прямых с уравнениями $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}$, рис. 6.1 а. Эти прямые делят плоскость xOy на четыре квадранта. Произведение $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ в *I* и *III* квадрантах будет иметь знак (+), а во *II* и *IV* — знак (-).

Поскольку точки рассеяны таким образом, что количество точек в каждом квадранте приблизительно одинаково, сумма (6.4) будет близка к нулю: $k_{xy} \approx 0$. Это говорит о том, что, по-видимому, связь между величинами x и y отсутствует.

2) Между величинами x и y существует *функциональная линейная зависимость* вида

$$y = b_0 + bx,$$

где b и b_0 — коэффициенты, рис. 6.1 б, в. Тогда $\bar{y} = b_0 + b\bar{x}$ и $y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$. Подставив последнее выражение в (6.4), получим

$$k_{xy} = \frac{b}{n S_x S_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{b S_x^2}{S_x S_y}.$$

Поскольку согласно (6.22) $S_y = |b| S_x$, $k_{xy} = \frac{b S_x^2}{S_x |b| S_x} = \frac{b}{|b|} = \pm 1$.

Положительному значению b соответствует $k_{xy} = 1$, рис. 6.1 б, а отрицательному — $k_{xy} = -1$, рис. 6.1 в. Следовательно, если по результатам опытов получено значение $k_{xy} = \pm 1$, можем утверждать, что между величинами x и y существует *функциональная линейная зависимость*.

3) Точки рассеяны в некоторой области, расположенной несимметрично относительно прямых с уравнениями $x = \bar{x}$ и $y = \bar{y}$. Например, на рис. 6.1 г в *I* и *III* квадрантах точек значительно больше, чем

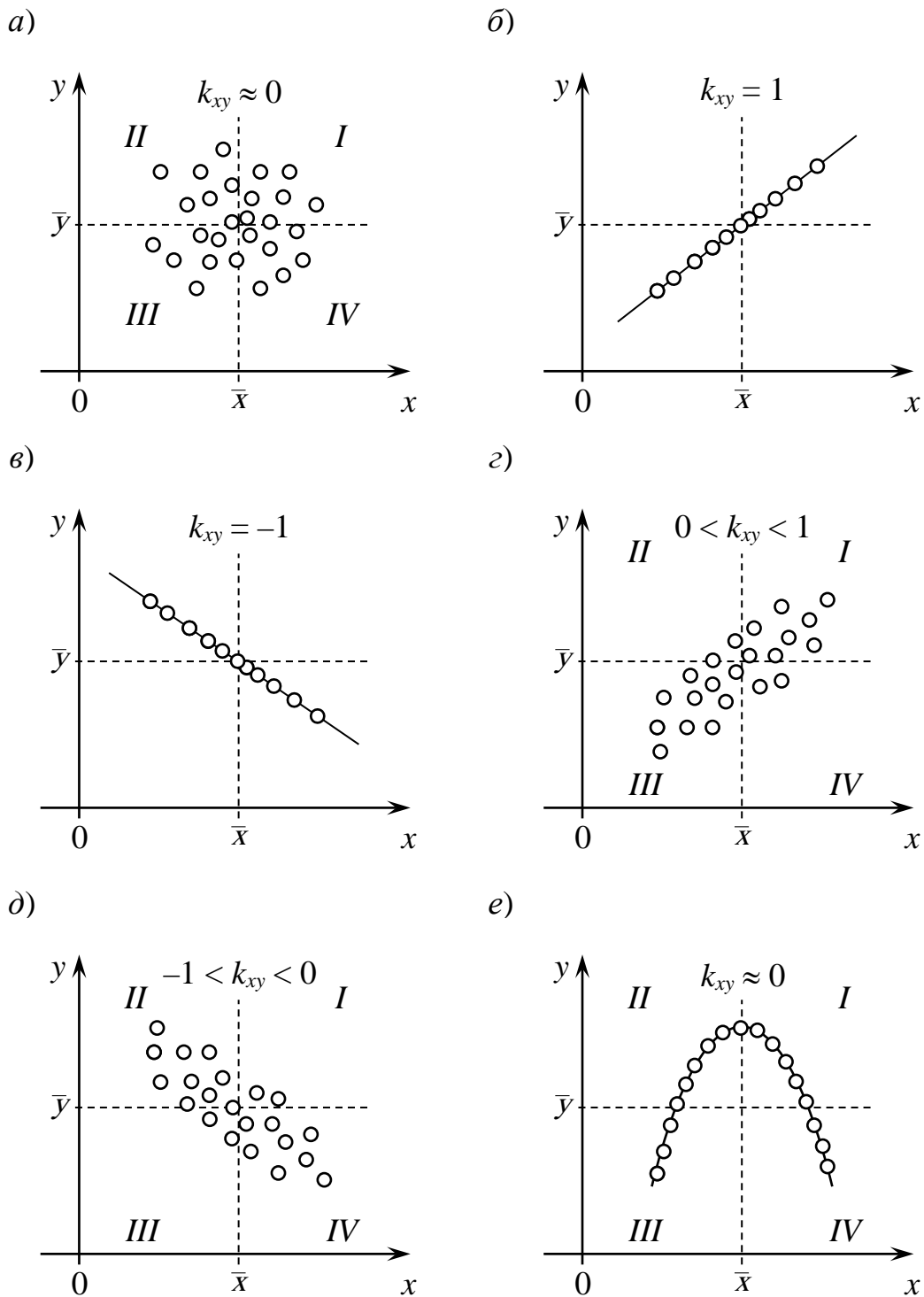


Рисунок 6.1 – Диаграммы рассеяния

во II и IV. Следовательно, в сумме (6.4) будут преобладать положительные произведения и значение коэффициента корреляции будет находиться в интервале $0 < k_{xy} < 1$. В случае, представленном на рис. 6.1 д), в сумме преобладают отрицательные значения и $-1 < k_{xy} < 0$.

Оба эти случая свидетельствуют о наличии *статистической связи* между величинами x и y .

Возможны случаи, когда между величинами существует статистическая или даже функциональная связь, но в некотором интервале значений этих величин коэффициент их корреляции будет близок к нулю. Например, между величинами x и y на рис. 6.1 *e* существует явная функциональная связь, но $k_{xy} \approx 0$, поскольку область, в которой распределены точки, симметрична относительно $x = \bar{x}$.

Таким образом, коэффициент корреляции дает оценку не только наличия связи между величинами, но и *степени ее линейности*.

6.2 Регрессионный анализ

Целью *регрессионного анализа* является установление *аналитической зависимости* между выходной и входными величинами по данным экспериментальных исследований.

Известно, что в общем случае зависимость между величинами может быть представлена *таблично, графически и аналитически*. *Табличная* форма позволяет определить значение выходной величины для заданных значений входных, но не дает представления о характере зависимости. *Графическая* форма создает наглядность представления зависимости, позволяет визуально оценить ее характер. *Аналитическая* форма позволяет исследовать зависимость методами математического анализа, т.е. определить значения максимума, минимума, точек перегиба и т.д. Получение аналитической зависимости желательно при разработке расчетных методик и необходимо при создании расчетных программ на ЭВМ. Этот форма представления зависимости наиболее универсальна, из нее можно получить табличную и графическую.

Аналитические зависимости, полученные по данным эксперимента путем регрессионного анализа называются *эмпирическими* или *аппроксимирующими*. Необходимо иметь в виду, что если теоретические формулы, полученные на основе знания законов процесса, могут быть использованы при произвольных значениях аргументов, то эмпирические являются приближенными и могут применяться лишь в определенных условиях и в ограниченных интервалах аргументов. Один и тот же процесс может быть описан несколькими различными эмпирическими формулами.

В регрессионном анализе, в отличие от корреляционного, только выходные величины являются случайными. Входные должны быть неслучайными и *некоррелированными между собой*.

Задача получения аналитической зависимости включает в себя три этапа:

- выбор вида *уравнения регрессии*;
- определение *коэффициентов уравнения*;
- проверка *адекватности* установленной зависимости данным эксперимента.

Первый этап является неформализованной процедурой. Здесь многое зависит от опыта исследователя. Уже отмечалось, что один и тот же процесс может быть описан различными эмпирическими зависимостями. На практике при выборе вида уравнения обычно руководствуются следующим. По данным эксперимента первоначально строят графическую зависимость. Ее сравнивают с различными кривыми, уравнения которых известны, и останавливаются на наиболее вероятной.

При выборе формулы нет необходимости ориентироваться на сложные зависимости. Ценность формулы определяется не сложностью, а той погрешностью, которая допускается при ее применении. На рис. 6.2 *а* точками представлены данные эксперимента. Для *аппроксимации* этих данных может быть использована как линейная (линия 1), так и некоторая более сложная зависимость (линия 2). Последняя более точно аппроксимирует данные эксперимента, что видно из графика, но ее практическое использование может быть затруднено из-за громоздкости формулы и сложности ее вычисления. Поэтому предпочтение следует отдавать простым, в первую очередь линейным уравнениям, и только в случае явно нелинейной зависимости, рис. 6.2 *б*, выбирать другие: квадратичные, степенные и т.п.

Если в результате построений окажется, что некоторые точки существенно отклоняются от общей зависимости, то следует проверить вычисления для них, а при необходимости повторить эксперимент.

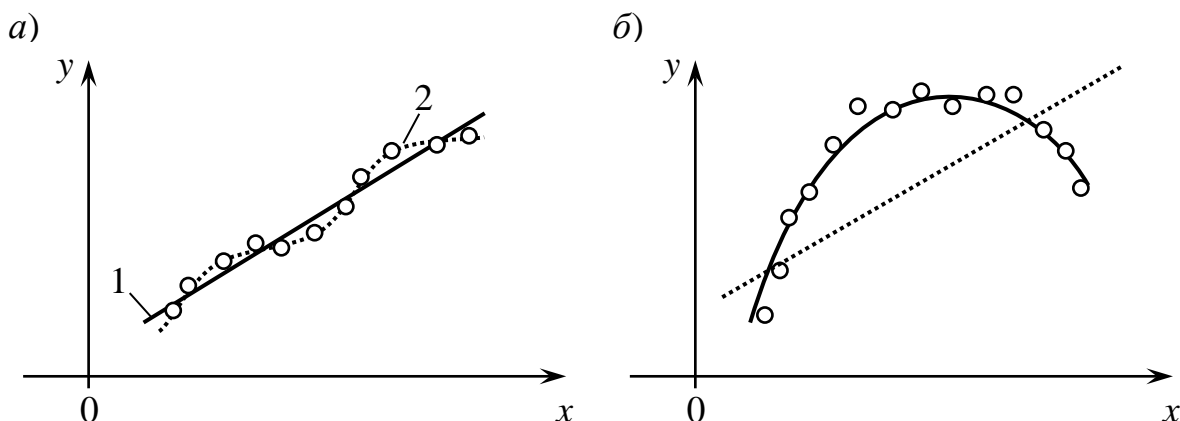


Рисунок 6.2 – К выбору вида аппроксимирующей зависимости

Если до обработки экспериментальных данных известна *теория исследуемого процесса*, в основу эмпирической зависимости желательно положить функциональную зависимость, определяемую этой теорией. Например, известно, что теоретическая напорная характеристика турбомашин является прямой линией, а потери напора в турбомашине пропорциональны квадрату расхода. Поэтому для описания экспериментальной напорной характеристики наиболее целесообразна ориентация на квадратичные зависимости.

После выбора вида зависимости определяют *коэффициенты*, входящие в эту зависимость. В общем виде задачу можно сформулировать следующим образом.

Исследуется зависимость параметра y от факторов x_1, x_2, \dots, x_k . Проведено n серий опытов при различных сочетаниях уровней факторов; в каждой серии для u -го сочетания уровней факторов получена выборка значений параметра y , определено среднее выборочное \bar{y}_u и дисперсия S_u^2 . Для поиска аппроксимационной зависимости выбрана некоторая функция вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \quad (6.5)$$

которая содержит m неизвестных параметров (коэффициентов, показателей степеней и др.) b_1, b_2, \dots, b_m . Задача состоит в определении такого сочетания этих параметров, при котором значения y , рассчитанные по зависимости (6.5), будут наиболее близки к экспериментальным данным \bar{y}_u .

В настоящее время выполнение такой задачи не представляет трудности, поскольку существуют программы для ЭВМ, предназначенные для поиска аппроксимационных зависимостей и определения их коэффициентов.

Наиболее распространенным методом поиска коэффициентов уравнений регрессии является *метод наименьших квадратов*. Метод заключается в поиске минимума функции

$$\Phi(b_1, b_2, \dots, b_m) = \sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2, \quad (6.6)$$

где \hat{y}_u — значение параметра y , полученное расчетом по зависимости (6.5) для u -го сочетания уровней факторов. Функция (6.6) характеризует степень расхождения расчетных значений и опытных данных. Наилучшим будет такое сочетание коэффициентов, при котором это расхождение будет минимальным. Следовательно, задача сводится к поиску минимума функции Φ и может быть решена методом математического анализа.

Рассмотрим случай поиска линейной однофакторной зависимости вида $y = b_0 + b_1 x$ для совокупности экспериментальных данных, представленной на рис. 6.2 а.

Функция Φ в данном случае есть функция двух переменных:

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{u=1}^n [\bar{y}_u - (b_0 + b_1 x_u)]^2 \rightarrow \min. \quad (6.7)$$

Функция будет иметь минимум, если ее частные производные по обоим переменным будут равны нулю

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} &= -2 \sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - b_0 - b_1 x_u) = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} &= 2 \sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - b_0 - b_1 x_u) x_u = 0. \end{aligned}$$

Преобразовав выражения, получим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{u=1}^n x_u = \sum_{u=1}^n \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^n x_u + b_1 \sum_{u=1}^n x_u^2 = \sum_{u=1}^n \bar{y}_u x_u. \end{cases} \quad (6.8)$$

Решив систему, найдем значения коэффициентов регрессии.

В практике математической обработки опытных данных широко используются *нелинейные формулы*, достаточно просто преобразуемые к линейному виду. К ним относятся параболические и степенные зависимости. Распространенная в гидравлическом эксперименте **параболическая зависимость** вида $y = b_0 + b_1 x^2$ приводится к линейному виду подстановкой $z = x^2$. Коэффициенты полученного линейного уравнения $y = b_0 + b_1 z$ находятся по описанной методике.

Степенные зависимости вида

$$y = C x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_k^{b_k}, \quad (6.9)$$

где C — коэффициент, b_1, b_2, \dots, b_k — показатели степени, приводятся к полиномиальному виду путем логарифмирования:

$$\text{Ln } y = \text{Ln } C + b_1 \text{Ln } x_1 + b_2 \text{Ln } x_2 + \dots + b_k \text{Ln } x_k, \quad (6.10)$$

Обозначив $b_0 = \text{Ln } C$ — свободный член полинома, и прологарифмировав значения факторов и параметра, можем применить метод наименьших квадратов для поиска значений $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$.

Проверка соответствия установленной зависимости экспериментальному материалу (*проверка адекватности*) включает в себя три этапа.

1. Ищется остаточная дисперсия, или *дисперсия адекватности*

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{f_{ад}} \sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2, \quad (6.11)$$

где $f_{ад} = n - m$ — количество степеней свободы, равное разности количества опытов n и количества коэффициентов в уравнении регрессии m . Дисперсия адекватности будет тем меньше, чем лучше совпадают расчетные значения параметра \hat{y}_u с экспериментальными данными \bar{y}_u .

2. Определяется *дисперсия воспроизводимости*, показывающая точность определения параметра в опыте.

В случае, если для каждого сочетания уровней факторов проводилось несколько параллельных опытов, ищутся дисперсии S_u^2 для каждой группы опытов, проверяется их однородность и затем определяется средневзвешенная дисперсия $S_{св}^2$ по зависимости (5.39), которая и принимается в качестве дисперсии воспроизводимости $S_{в}^2$.

Если параллельные опыты не проводятся, то в качестве средневзвешенной дисперсии принимается

$$S_{в}^2 = \left(\frac{\Delta Y_{пред}}{2} \right)^2, \quad (6.12)$$

где $\Delta Y_{пред}$ — предельная абсолютная погрешность определения выходной величины, определяемая по классу прибора и с доверительной вероятностью 0,955 равная двум среднеквадратическим отклонениям измеряемой величины.

3. Проверяется однородность дисперсий адекватности и воспроизводимости

$$F = S_{ад}^2 / S_{в}^2 < F_{\alpha}(f_{ад}, f_{в}), \quad (6.13)$$

где $f_{в} = \sum_{u=1}^n (n_{п\ u} - 1)$ — количество степеней свободы дисперсии воспроизводимости; $n_{п\ u}$ — количество параллельных опытов для u -го сочетания уровней факторов.

Если расчетное значение критерия Фишера окажется меньше табличного, то полученное уравнение регрессии адекватно эксперименту с уровнем значимости *альфа*.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория инженерного эксперимента: Учеб. пособие / Г.М.Тимошенко, П.Ф.Зима. – К: УМК ВО, 1991.
2. Налимов В.В. Теория эксперимента. — М.: Наука, 1971.
3. Ивоботенко Б.А. и др. Планирование эксперимента в электромеханике. — М.: Энергия, 1975.
4. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1976.
5. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981.
6. Зедгинидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. — М.: Наука, 1976.
7. Бондарь А.Г., Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технологии. – К.: Выща шк., 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. Основные положения	3
1 Общая характеристика объекта исследования.....	6
1.1 Объект исследования и его свойства.....	6
1.2 Модель "черный ящик"	7
1.3 Параметры и предъявляемые к ним требования.....	8
1.4 Факторы и предъявляемые к ним требования.....	8
1.5 Машина как объект исследования.....	9
2 Моделирование.....	21
2.1 Модели, их классификация	21
2.2 Построение моделей.....	22
2.3 Физическая и математическая модели машины	22
2.4 Решение и анализ математической модели динамической системы	25
3 Подобие	34
3.1 Сущность подобия. Теоремы подобия	34
3.2 Критерии подобия. Перерасчет результатов модельных испытаний на натуру.....	36
3.3 π -теорема и ее следствия	38
3.4 Определение критериев подобия с использованием теории размерностей.....	40
3.5 Определение критериев подобия из уравнений процесса	44
4 Планирование эксперимента.....	46
4.1 Классификация планов	46
4.2 Область определения, интервалы варьирования и уровни факторов. Кодирование факторов.	47
4.3 Матрица планирования полнофакторного эксперимента.....	49
4.4 Дробный факторный эксперимент	51
4.5 Планирование отсеивающих экспериментов	53
4.6 Планы второго порядка	53
4.7 Экстремальный эксперимент.	55
5 Статистическая обработка экспериментальных данных	58
5.1 Виды погрешностей экспериментов.....	58
5.2 Законы распределения вероятностей случайных величин	59
5.3 Числовые характеристики случайных величин	63
5.4 Погрешности косвенных измерений.....	66
5.5 Интервальные оценки измеряемых величин и их погрешностей	69
5.6 Проверка однородности выборок и дисперсий.....	71
5.7 Сравнение выборочных средних. Дисперсионный анализ	73
6 Экспериментально-статистическое исследование связей	76
6.1 Корреляционный анализ.....	76
6.2 Регрессионный анализ	79
Список дополнительной литературы	85

Модель «черного ящика» представляет собой иллюстрацию объекта, для которого заданы выход и вход. При этом его содержимое неизвестно. Рассмотрим, как построить модель «черного ящика».

В качестве исходного действия, необходимого для составления модели абсолютно любой системы, выступает отделение объекта от окружающей его среды. Эта операция отражает два важнейших свойства: обособленность и целостность предмета. Объектом исследования является некоторый объект, содержимое которого неизвестно. –

Любая модель состава системы не является полностью изолированной. Она поддерживает с окружающей средой определенные связи. С их помощью происходит взаимное воздействие объекта и условий, в которых он находится. Соответственно, при выстраивании модели «черного ящика» на следующем этапе связи изображаются стрелками и описываются словами. Те, которые направлены в среду, являются выходами. Обратные стрелки будут входами. На этом уровне представления системы исследователь имеет дело с декларативной моделью, т.е. выходы и входы определяются по шкале наименований. Как правило, достаточно такого отображения. Но в ряде случаев необходимо дать количественное описание некоторых либо всех выходов и входов. –

Множества Они задаются для того, чтобы модель «черного ящика» была максимально формализована. В результате исследователь приходит к заданию множеств Y и X выходных и входных переменных. При этом никакие отношения между ними на данном этапе не фиксируются. В противном случае получится модель прозрачного, а не «черного ящика».

На заключительном этапе исследуются и отражаются изменения объекта, которые могут происходить в течение определенного времени. То есть исследователь иллюстрирует состояние объекта в динамике. Описание модели «черного ящика» должно показывать соответствия компонентов множества X вероятных величин входных параметров и элементов упорядоченного T -множества временных отрезков. Кроме этого, должно быть отображено аналогичное соотношение для выходных показателей. **Модель черного ящика примеры Специфика** Ключевым достоинством рассматриваемого объекта выступает его простота. Достаточно часто перечисление выходов и входов представляет

собой сложную задачу. Такая множественность выходов и входов обуславливается неограниченностью вариантов взаимодействия рассматриваемого предмета со средой. Особое значение имеют наглядные визуальные образы. Используемое на практике определение системы не характеризует ее внутреннее устройство. Это позволяет выделить ее из среды. При этом она будет изображаться как модель «черного ящика» – целостный и относительно обособленный предмет. Достигнутая цель представляет собой заранее запланированные изменения в среде, определенные продукты работы объекта, предназначенные для потребления вне его. Т.е. модель черного ящика устанавливает определенные связи и влияет на внешние условия и они являются выходами. Вместе с этим система выступает как средство. Поэтому необходимы возможности для ее применения, воздействия на нее. Соответственно, устанавливаются связи из среды в объект – входы. Использование модели «черный ящик» позволяет изучить только взаимодействие предмета и среды. В ней отображаются только входные и выходные параметры. При этом в ней даже отсутствуют границы между средой и объектом (стенки ящика). Они только подразумеваются, считаются существующими. –

Множественность выходов и входов обуславливается неограниченным количеством взаимодействий между объектом и средой. При выстраивании модели выбирается определенный набор связей, которые будут включены в перечень выходов и входов. В качестве критерия в таком случае выступает целевое назначение объекта, существенность взаимодействия относительно цели. Соответственно, выбор делается следующим образом. Все, что существенно, включается в модель, а все, что таковым не является, – исключается из нее. Но тот факт, что в модели не учитывается определенный набор связей, не делает их нереальными. Они в любом случае существуют и действуют вне зависимости от воли исследователя, делающего выбор. На практике оказывается, что представлявшиеся ранее неизвестными или несущественными условия на самом деле очень важны и должны быть учтены. Особое значение данный момент имеет при определении цели системы. При установлении выходов объекта основную задачу приходится дополнять вспомогательными проблемами и исполнения только ключевой цели будет уже недостаточно.

Исследование с помощью метода «черного ящика» заключается в том, что осуществляется предварительное наблюдение за взаимодействием системы с внешней средой и установление списка входных и выходных воздействий, среди которых выделяются существенные воздействия. Затем осуществляется выбор входов и выходов для исследования с учетом имеющихся средств воздействия на систему и средств наблюдения за ее поведением.

На следующем этапе производится воздействие на входы системы и регистрация ее выходов. В процессе изучения наблюдатель и «черный ящик» образуют систему с обратной связью, а первичные результаты исследования – множество пар состояний входа и выхода, анализ которых позволяет установить между ними причинно-следственную связь.

В настоящее время известны два вида «черных ящиков». К первому виду относят любой «черный ящик», который может рассматриваться как автомат, называемый конечным или бесконечным. Поведение таких «черных ящиков» известно.

Ко второму виду относятся такие «черные ящики», поведение которых может быть наблюдаемо только в эксперименте. В таком случае в явной или неявной форме высказывается гипотеза о предсказуемости поведения «черного ящика» в вероятностном смысле. Без предварительной гипотезы невозможно любое обобщение, т.е. невозможно сделать индуктивное заключение на основе экспериментов с «черным ящиком».

Таким образом, «черный ящик» – это система, в которой входные и выходные величины известны, а внутреннее устройство ее и процессы, происходящие в ней, не известны. Можно только изучать систему по ее входам и выходам, но данное изучение не позволяет получить полного представления о внутреннем устройстве системы, поскольку одним и тем же поведением могут обладать различные системы.

Кроме того, главной причиной множественности входов и выходов модели «черного ящика» является то, что всякая реальная система, как и любой объект, взаимодействует с объектами внешней среды неограниченное число раз и по разному поводу.

