ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Скорикова А.О., Кузьмин М.В. *(кафедра НГиИГ, ДонНТУ, г. Донецк)*

Аннотация. *В статье дается определение правильных многогранников и рассматриваются способы их построения.*

Ключевые слова: *правильные многогранники, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, гексаэдр.*

Многогранник называется правильным, если:

1) все его грани равны и правильны
2) все его многогранные углы равны и правильны.

Допустим, что два правильных многогранника *относятся к одному и тому же типу,* если у них равны следующие характеристики: число вершин **В**, число граней **Г**, число ребер **Р**, число вершин у каждой грани ***п,*** число граней ***s,*** сходящихся в одну и ту же вершину.

Оказывается, что *существует только 5 типов правильных многогранников нулевого рода.*

Покажем сначала, что *не может быть больше пяти типов правильных многогранников нулевого рода.*

Найдем зависимость между **В, Г, Р, *п, s*.** У каждой грани ***п*** ребер, всего граней — **Г**, так что всего мы, таким образом, насчитываем ***п* Г** ребер; но при этом мы каждое ребро учитывали дважды (так как каждое ребро является стороной двух граней). Поэтому

$$n\text{Г} = 2\text{Р}. \qquad (1)$$

Число ребер, сходящихся в одну вершину, равно ***s;*** всего вершин **В**, таким образом насчитываем **s В** ребер. При этом каждое ребро учитывалось дважды (так как оно соединяет две вершины). Поэтому

$$s\text{В} = 2\text{Р}. \qquad (2)$$

Кроме того, имеет место формула Эйлера:

$$\text{В}+\text{Г} = \text{Р}+2. \qquad (3)$$

Из (1) —(3) следует, что

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{P} \qquad (4)$$

Кроме того, геометрически ясно, что $n \geq 3,\ s \geq 3.$ (5)

Необходимо найти целые положительные решения неопределенного уравнения (4) при дополнительных условиях (5). Заметим следующее:

I. Если хотя бы одно из чисел ***п*** или ***s*** больше, чем 3, то второе равно 3.

Действительно, если *п ≥ 4* и s ≥ 4, то

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{s}\leq\frac{1}{2}$$

так что (4) не имеет места.

II. Ни одно из чисел ***п*** и ***s*** не может быть больше, чем 5. Действительно, пусть s ≥ 6. Тогда *п = 3,* и поэтому

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{P}$$

так что равенство (4) опять не имеет места, аналогично обстоит дело, если n ≥ 6.

Теперь уже нетрудно перебрать все допустимые комбинации натуральных чисел ***п*, s, Р**, при которых удовлетворяется уравнение (4). По формулам (1) — (2) можем найти соответствующие значения ***п*** и ***$:***

Результаты вынесены в таблицу:

	n	**s**	**P**	**B**	**Г**	Название правильного многогранника
I	3	3	6	4	4	Правильный тетраэдр
II	3	4	12	6	8	Правильный октаэдр
III	3	5	30	12	20	Правильный икосаэдр
IV	4	3	12	8	6	Правильный гексаэдр
V	5	3	30	20	12	Правильный додекаэдр

Итак, если многогранник нулевого рода правильный, то он обязательно должен относиться к одному из пяти перечисленных здесь типов.

Обратим здесь внимание на то, что в ходе проведенных рассуждений мы пользовались только двумя свойствами правильных многогранников, вытекающими из их определения: 1) в каждую вершину такого многогранника сходится одно и то же число граней (**$**); 2) все грани имеют одно и то же число вершин *(**п**).* Многогранники нулевого рода, обладающие этими двумя свойствами, иногда называют *топологически правильными.* Такими будут, например, произвольный параллелепипед, произвольная треугольная пирамида и др. В ходе наших рассуждений мы доказали, что *и топологически правильных многогранников нулевого рода имеется не более пяти типов.*

Оказывается, что *правильные многогранники каждого из перечисленных в предыдущей таблице типов действительно существуют.* Чтобы убедиться в этом, достаточно указать способ образования многогранника каждого типа.

Представителей каждого из пяти типов правильных многогранников можно получить, отталкиваясь от куба. Построение куба хорошо известно: достаточно через все четыре вершины какого-либо квадрата *ABCD* провести прямые, перпендикулярные к его плоскости, и отложить на них по одну сторону от этой плоскости отрезки *AA', BB', CC', DD',* равные стороне квадрата; полученные восемь точек служат вершинами куба.

Куб и есть правильный гексаэдр.

Центры граней куба служат вершинами *правильного октаэдра* (рис. 1).

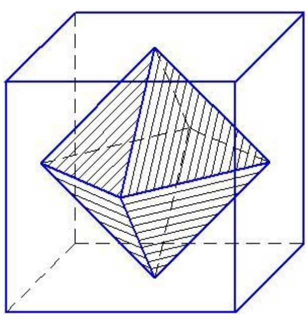

Рис. 1.

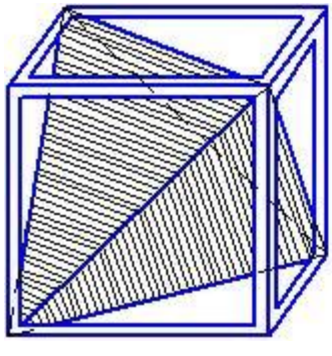

Рис. 2.

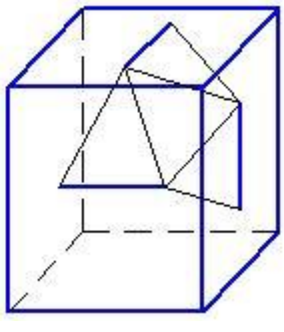

Рис. 3.

Если диагонали трех граней куба имеют общую вершину, то их концы являются вершинами *правильного тетраэдра* (рис. 2).

Топологически правильный икосаэдр можно построить следующим образом. Выберем три грани куба с общей вершиной (рис. 3). В каждой из этих граней проведем ее среднюю линию, причем так, чтобы эти три средние линии были попарно перпендикулярны. На каждой из них, на одном и том же расстоянии ***x*** от центра соответствующего квадрата отметим две точки, так, что поучим всего шесть точек. Построим еще шесть точек, симметричных ранее построенным относительно центра куба, каждую из этих двенадцати точек соединим с пятью ближайшими к ней точками. Всего получим $\frac{12\times5}{2}$ =30 отрезков. Нетрудно проверить, что отрезок ***x*** можно выбрать так, чтобы все образовавшиеся тридцать отрезков были равны между собой. Можно, далее, проверить, что эти тридцать отрезков образуют каркас *правильного икосаэдра.*

Центры граней правильного икосаэдра служат вершинами *правильного додекаэдра,* наглядное представление об этом дает рисунок 4.

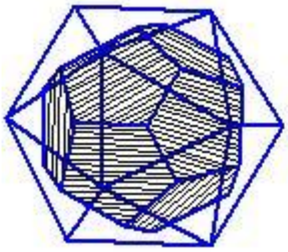

Рис. 4.

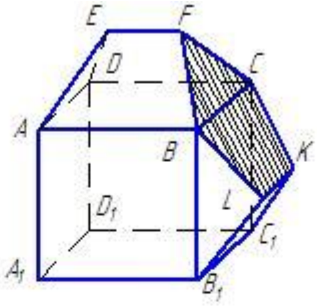

Рис. 5.

Правильный додекаэдр возможно получить также из куба следующим образом (рис. 5). На каждой грани куба (например, на *ABCD)* как на основании построим «шатер» *(ABCDEF),* у которого все четыре «боковых ребра» *(AE, BF, CF* и *DE)* равны между собой, причем *EF || AB и EF < AB.* Две из граней этого «шатра» *(ABFE* и *CDEF)* — равные равнобочные трапеции, а две другие *(ADE* и *MCF)* — равные треугольники. «Шатры» следует располагать так, чтобы для каждой пары смежных граней куба (например, *ABCD* и *HCCB')* соответствующие «шатры» имели взаимно перпендикулярные «коньки» (в нашем примере *EF* и *KL).* К каждому ребру (например, *BC)* куба будет примыкать треугольник *(BCF)* от одного «шатра» и трапеция *(BCKL)* от смежного «шатра».

Возможно выбрать размеры «шатров» таким образом, чтобы этот треугольник и эта трапеция лежали в одной плоскости и составляли вместе правильный пятиугольник. Тогда многогранник, составленный из шести «шатров», построенных на всех гранях куба, будет правильным додекаэдром.

Таким образом были рассмотрены способы построения правильных многогранников всех возможных пяти типов. Что касается доказательства того, что эти многогранники действительно являются правильными, то во всех случаях может быть использована одна общая идея, а именно идея вращения многогранника вокруг надлежащим образом выбранных осей. Такие повороты позволяют совместить:

1) любую грань рассматриваемого многогранника с любой другой его гранью;
2) любой многогранный угол—с любым другим многогранным углом;
3) любое ребро — с любым другим ребром;
4) любой плоский угол — с любым плоским углом;
5) любой двугранный угол — с любым другим двугранным углом.

Это означает, что все грани многогранника равны между собой, все многогранные углы равны, все грани — правильные многоугольники, все многогранные углы — правильные.

Список литературы: 1. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. – М.-Л.; ОГИЗ, 1950, 429с. **2.** Смирнова И.М. В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995, 136с.