ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

Андрейченко Е.П., Скорикова А.О. *(кафедра НГиИГ, ДонНТУ, г. Донецк)*

Аннотация. *Рассматриваются геометрические задачи на построение, решаемые только с помощью циркуля.*
Ключевые слова: *циркуль, окружность, прямая, точки пересечения, дуга*

Многие геометрические задачи на построение естественным образом решаются с привлечением только циркуля, причем в привлечении линейки иногда не только нет необходимости, но это даже не может упростить решение таких задач. Таковы, например, задачи: «Разделить данную окружность на 6 равных частей» (решение которой общеизвестно); «Построить точку, симметричную данной точке» относительно данной прямой» и многие другие.

Во многих случаях построения, производимые посредством циркуля, оказываются значительно точнее, чем построения, производимые с привлечением линейки. Это давно уже было обнаружено при практических измерениях и построениях (например, в техническом черчении, при разметке делительных кругов астрономических инструментов и т. п.). Итальянский геометр Лоренцо Маскерони (1750 - 1800) занялся в свое время исследованием конструктивных возможностей циркуля, посвятив этому вопросу специальную книгу «Геометрия циркуля». В 1928 г. была обнаружена книга датского геометра Георга Мора (1640 — 1697), вышедшая еще в 1672 г. под название «Датский Евклид». В этой работе также разработана теория геометрических построений, производимых исключительно циркулем.

Мор (в 1672 г.), а затем Маскерони (в 1797 г.) пришли к выводу, что все геометрические задачи на построение, решаемые при свободном пользовании циркулем и линейкой, могут быть решены исключительно циркулем.

Докажем эту интересную теорему. Чтобы избежать недоразумений, которые могут возникнуть в связи с тем, что циркулем нельзя, конечно, строить прямые и отрезки, будем формулировать теорему Мора — Маскерони так:

Любая геометрическая задача на построение фигуры из конечного числа точек, разрешимая при наличии циркуля и линейки, может быть решена при наличии только циркуля.

При этом имеется в виду, что данная фигура состоит только из конечного числа точек, окружностей и их дуг, прямых, отрезов и лучей. Без этой оговорки теорема может привести к недоразумению. Например, если на чертеже проведена синусоида и даны две точки *A* и *B*, то нельзя утверждать, что при наличии только циркуля можно построить точки пересечения этой линии с прямой *AB*, хотя при наличии линейки эта задача, очевидно, разрешима (если точки пересечения существуют).

Условимся называть прямую известной, если построены какие-либо две ее точки. Отрезок назовем известным, если построены его концы, а луч — если построены его начало и какая-либо принадлежащая ему точка.

Ясно, что известная прямая не является построенной: она может быть построена, если мы располагаем линейкой, но циркуль не дает возможности построить известную прямую.

Построение фигуры g с помощью циркуля и линейки состоит в том, что устанавливается конечная последовательность основных (для циркуля и линейки) построений, в результате выполнения которых будет построена фигура g.

Решая задачу с помощью циркуля и линейки, мы получим точки лишь при выполнении следующих построений:

1. Построение точки пересечения двух известных прямых (которые для этого предварительно строятся).

2. Построение общих точек построенной окружности и известной прямой (для чего эта известная прямая строится на одном из предыдущих этапов построения).

3 . Построение общих точек двух построенных окружностей.

4. Построение любого конечного числа точек, принадлежащих известной прямой (или известному лучу, или известному отрезку), для чего эта прямая предварительно строится.

5. Построение любого конечного числа точек, принадлежащих построенной окружности (или дуге окружности).

6. Построение точки, заведомо не принадлежащей соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей (или дуг окружностей) и известных прямых (для чего известные прямые предварительно строятся).

Понятно, что для выполнения построений 3. и 5. вообще не требуется никаких инструментов. Остается доказать, что другие построения, указанные в этом списке, т. е. построения 1, 2, 4, 6, выполнимы исключительно циркулем.

Иными словами, мы должны доказать, что при наличии только циркуля можно выполнить следующие построения:

1.1. Построить точку пересечения двух известных непараллельных прямых (не строя этих прямых).

2.1. Построить точки пересечения построенной окружности и известной прямой (если такие точки существуют).

4.1. Построить точку, принадлежащую известной прямой.

6.1. Построить точку, заведомо не принадлежащую соединению конечного числа построенных точек, построенных окружностей и известных прямых.

Чтобы доказать выполнимость построений 1.1, 2.1, 4.1 и 6.1 исключительно циркулем, решим предварительно следующую задачу:

Известны отрезки *a, b* и с; построить, пользуясь только циркулем, четвертый пропорциональный к ним отрезок, т. е. такой отрезок *x,* чтобы $a : b = c: x$.

Предположим, что $a \neq b$ так как в случае $a = b$ задача тривиальна, потому что $x = c$.

Изберем на плоскости произвольную точку О и проведем окружность ω (0, *a)* (рис. 1).

Построим, также концентрическую ей окружность ω'(O, b*)*. Изберем произвольно точку А на окружности ω и точку А' на окружности ω'. Пусть *В* — точка пересечения окружности ω с окружностью *(A, c),* а *В'* — точка пересечения окружности ω' с окружностью *(B, AA')* такая, что треугольники *АОА'* и *ВОВ'* одинаково ориентированы. Теперь Δ *AOA"* = Δ *BOB'* по трем сторонам, так что < *AOA*' = < *BOB*'. Отсюда вытекает, что < *AOB*=< *A'OB'.* Следовательно, равнобедренный треугольник *АОВ* подобен равнобедренному треугольнику *A'OB',* так что *AO:A'O* = *AB:A'B'* или, по построению, *a:b*=*c:A'B'.* Таким образом, отрезок *A'B'* искомый.

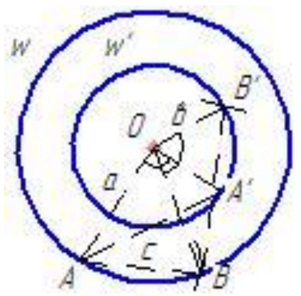

Рис.1. Построение пропорционального отрезка

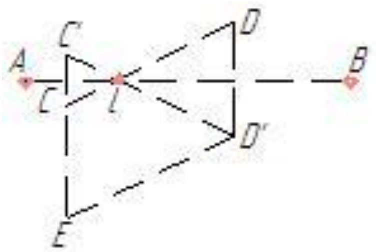

Рис. 2. Построение точек пересечения прямых

Переходим к рассмотрению основных построений 1.1, 2.1, 4.1, и 6.1. Построение (1.1).

Даны четыре точки А, В, С и D.. Построить точку пересечения прямых *АВ* и СД, пользуясь только циркулем.

Допустим, что задача решена и точка L (рис. 2) искомая. Построим точки *C', D',* симметричные точкам C, D относительна прямой *AB.* Искомую точку пересечения прямых *AB* и *CD* можно рассматривать теперь как точку пересечения прямых *CD* и *CD'.* Если *CDD'E* — параллелограмм, то точки C, *C' и E* лежат на одной прямой. Точка *E* может быть построена как точка пересечения окружностей *(C, DD')* и *(D', DC).*

Из подобия треугольников *CLC'* и *ED'C'* видно, что *C'E : C'D'* = *C'C : CL.* Поэтому отрезок *C'L* может быть построен как четвертый пропорциональный к трем известным отрезкам *C'E, C'D'* и *CC'.* Искомая точка L найдется после этого в пересечении окружностей *(C', C'L)* и (C, *C'L).*

Если прямые *AB* и *CD* окажутся перпендикулярными (CC' и DD' на одной прямой), то решение задачи упрощается: искомая точка L может быть построена как середина отрезка *CC'.*

Построение (2.1).

Даны две точки *A* и *B* и окружность (O, r). Требуется построить общие точки прямой *AB* и окружности (O, r), не проводя прямой *AB.*

Пусть O′ (рис. 3) — точка, симметричная с точкой *O* относительно *AB.* Обозначим через *M* и *N* точки пересечения окружности (O', r) с окружностью (O, г). Так как каждая из этих точек одинаково удалена от точек O и O', то эти точки располагаются на прямой *AB,* которая служит симметралью отрезка OO′. Значит, M.и N— искомые точки. Если окружности (O, г) и (O', г) касаются, то их общая точка является искомой.

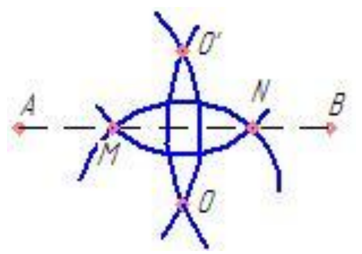

Рис. 3. Построение общих точек

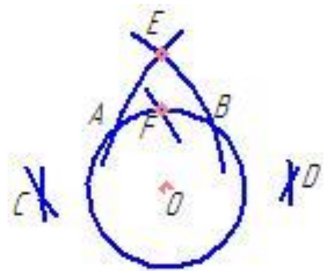

Рис.4. Построение седины дуги окружности

Построение (2.1) несколько усложняется, если точка O расположена на прямой *AB:* в этом случае точки O и O' сольются, и описанное построение не проходит, При таких условиях придется воспользоваться следующей вспомогательной задачей: построить середину данной дуги окружности. Пусть (O, г) —данная окружность, *AB* — данная дуга этой окружности (рис. 4). Дополним фигуру *ABO* до параллелограмма *ABOC* и до параллелограмма *ABOD.* Для этого достаточно провести окружность (O, AB) и пересечь ее окружностями (A, *r)* и (B, r). Пусть *E* — одна из точек пересечения окружностей (C, *C B)* и *(D, DA).* Проводим окружность *(C, OE)* до пересечения с данной дугой *AB* в точке F. Тогда F — середина дуги *AB.* Для доказательства этого обозначим искомую середину дуги AB буквой *X.* Тогда $CX^2 = CO^2 + r^2$. С другой стороны, по известному свойству параллелограмма получим: $2AB^2+2AC^2=BC^2+AO^2$ откуда $BC^2 = 2AB^2 + r^2$. Следовательно,

$$OE^2 = CE^2 - CO^2 = CB^2 - AB^2 = AB^2 + r^2 = CO^2 + r^2.$$

Значит, $CF^2 = CO^2 + r^2$, так как *CF=OE.* Таким образом, *CX=CF,* откуда следует, что точка F совпадает с серединой дуги *AB.*

Пользуясь этой вспомогательной задачей, можно выполнить построение (2.1) в случае, если прямая *AB* проходит через центр O данной окружности (O, r*).*

Для этого изберем на данной окружности (O, г) произвольную точку *C* (рис. 5) и проведем окружность (A, AC*).* Пусть C' — вторая точка пересечения этой окружности с данной окружностью. Тогда середины *M* и *N* обеих дуг окружности (O, r*)* и будут искомыми точками пересечения прямой *AB* с окружностью (O, г). Может, конечно, случиться, что точка C' совпадет с точкой C. В этом случае точка C будет одной из искомых точек. Для построения второй искомой точки достаточно удвоить отрезок *CO.*

Построение (4.1).

Пусть известны две точки A и B. Требуется построить произвольное количество точек прямой AB, не проводя этой прямой. Изберем произвольную точку C плоскости. Если она окажется расположенной на прямой AB, то эта точка искомая. Допустим, что это не так.

Тогда построим (рис. 6 точку C', симметричную с точкой *C* относительно прямой *AB*. После этого для получения новых точек прямой *AB* (на рис.6 точки *M* и *M')* достаточно провести окружности (C, r*)* и *(C',* r), где r — произвольный отрезок, больший чем ½*CC'* (например, отрезок *CC'),* и построить точки их пересечения, эти точки заведомо принадлежат прямой *AB,* так как каждая из них одинаково удалена от точек C и C'.

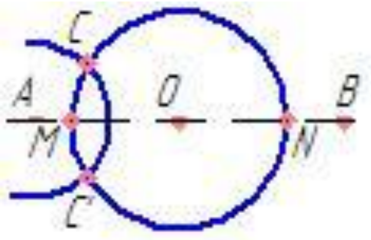

Рис. 5. Построение точек пересечения

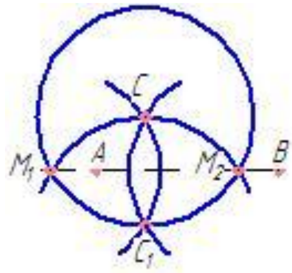

Рис. 6. Построение точек прямой

П о с т р о е н и е (6.1).

Пусть построены k точек: $A_1, A_2, \ldots Ak$ и *n* окружностей: $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, а также известны *m* прямых: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Ищется точка, не совпадающая ни с одной из этих точек и не принадлежащая ни одной из этих прямых или окружностей.

Изберем произвольную точку A и какую-либо точку B, не лежащую ни на одной из построенных окружностей (для чего не требуется ни линейки, ни циркуля). Тогда окружность ω_{n+1} (A, AB*)* не совпадает ни с одной из окружностей $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Этой окружности могут принадлежать некоторые из точек $A_1, A_2, \ldots A_k$, на ней могут оказаться также точки пересечения с заданными окружностями. Изберем на окружности ω_{n+1} сверх этих еще $2m + 1$ точек. Тогда по крайней мере одна из этих $2m + 1$ точек удовлетворяет требованиям задачи, так как прямые $a_1, a_2, \ldots a_m$ могут встретиться с окружностью ω_{n+1} самое большее в $2m$ точках.

Теорема Мора — Маскерони, таким образом, доказана.

Общий метод решения какой-либо геометрической задачи на построение исключительно циркулем состоит в том, что намечают план ее решения посредством циркуля и линейки, а затем пользуются изложенными здесь способами замены построений циркулем и линейкой построениями исключительно циркулем.

Список литературы: 1. Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники.- М.; ГИТТЛ, 1956. **2.** Аргунов Б.И. Элементарная геометрия. – М.; Просвещение, 1966.