ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ПОДЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Гайдарь О.Г

Донецкий национальный технический университет, Донецк

Аннотация: *Формообразование поверхностей с наперед заданными условиями актуальная задача, как для машиностроения так и для архитектуры. Рассмотрено формообразование на основе подерных преобразований. За основу взято конструирование кривой линии, и затем он перемещен в пространство. Раскрыт аппарат подерных и антиподерных преобразований.*

Ключевые слова: *формообразование, геометрические преобразования, поверхность, кривая линия, подера, антиподера, конструирование, параметризация, аналитический аппарат.*

Построение кривых линий с помощью подерного и антиподерного преобразования дает обширный материал для исследования и практического применения в технике полученных линий [2, 3]:

- построение кривых линий по наперед заданным условиям, определение их геометрических характеристик (касательных, нормалей, фокусов и т.д.);
- сопряжение кривых линий одного и разных порядков по заданным условиям;
- задание множества кривых линий.

Плоские кривые d построенные с помощью подерных преобразований используются в качестве линий каркаса различных поверхностей. Так на рис. 1 приведены примеры оболочек, каркас которых состоит из кривых 3-го порядка (подер параболы), инцидентных пучку плоскостей с несобственной осью.

Подерное преобразование довольно просто выражается аналитически [4], что позволяет использовать ПК для различных расчетов (прочностных, тепловых и т.п.), связанных с применением полученных линий и поверхностей.

Аппарат плоского подерного преобразования [6, 7] (рис.1):

- базовая линия a;

- полюс преобразования O;

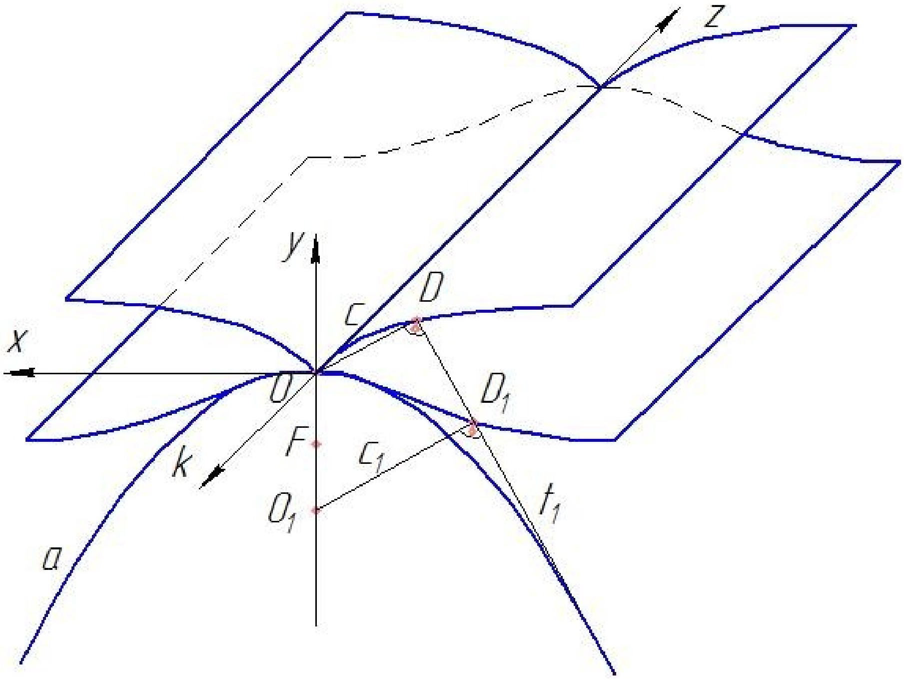

Рис. 1

Алгоритм построения линии d:

- проводим касательную t_1 к лини a ;
- из полюса O_1 опускаем перпендикуляр c_1 на касательную t_1 и находим его основание D_1.

Множество оснований D_i перпендикуляров c_i определит новую линию d, которую называют подерной данной кривой a относительно полюса O [4, 5].

Если базовая линия a – кривая 2-го порядка, то подерой d ее будет лемниската – кривая 4-го порядка [1], имеющая три двойные точки. Две из них мнимые, принадлежат бесконечно удаленной окружности, третья совпадает с полюсом преобразования.

ПРИМЕР: сконструировать поверхность Φ, проходящую через пространственную кривую g 4-го порядка, прямые q и h, причем h – двойная прямая поверхности, линии каркаса ее – лемнискаты. Однопараметрическое множество кривых d, инцидентных пучку плоскостей α, составит непрерывный каркас конструируемой поверхности.

Алгоритм построения произвольной линии каркаса.

1. Находим точки 1, 2, 3, 4, 5, 0 пересечения линий *g, q* и *h* на плоскостью α_i (Рис.2).
2. Соединяем точку 0 с точками 1–5.
3. Восстановлены перпендикуляры t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , t_5 в точках 1–5 к прямым 01, 02, 01,04, 05.

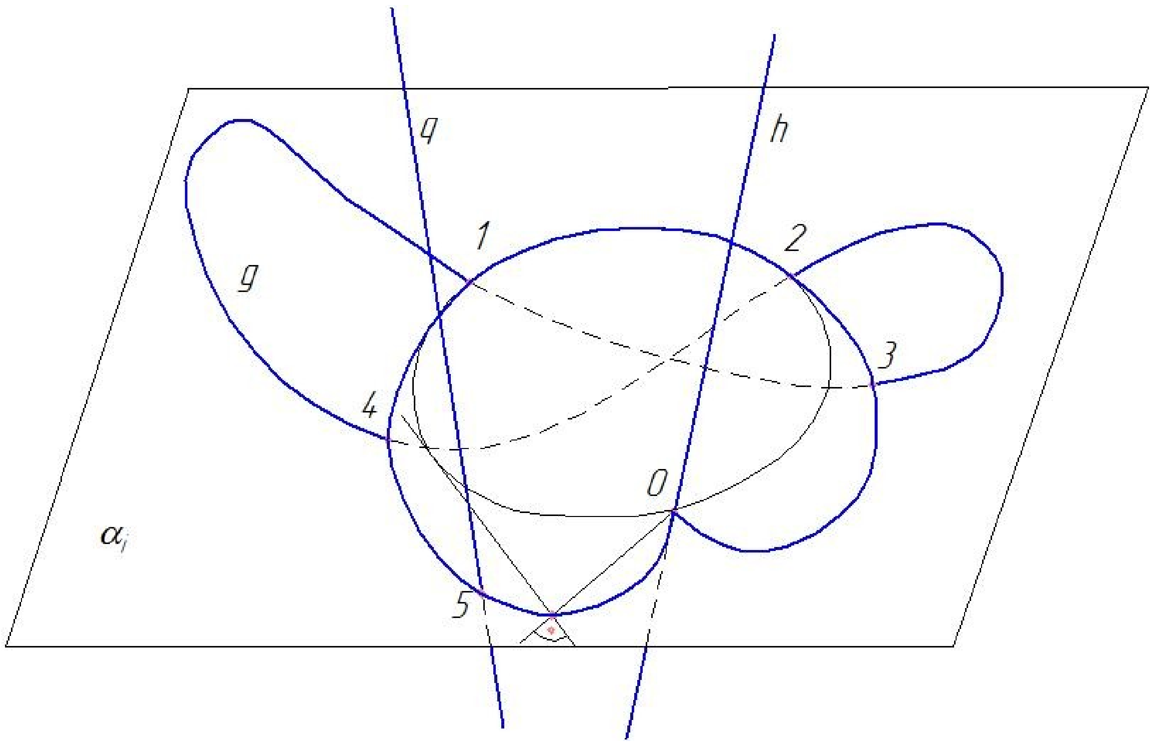

Рис. 2

Однопараметрическое множество оснований перпендикуляров из точки *O* на касательные t_i к кривой *a* второго порядка, определенной пятью ее касательными t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 и есть искомая кривая d_i 4-го порядка с действительной двойной точкой *O*.

Заметим, что поверхность *Ф* может быть инцидентна двум кривым второго порядка и двум прямым, кривой 2-го порядка и четырем прямым и т.д., если линия *g* распадается соответственно на две k^2, прямые и k^2 и т.д.

Во всех этих случаях поверхность *Ф* имеет одну, действительную (*h*) и две мнимых двойных прямых.

Очевидно, что для одной и той же линии *a* в каждой из плоскостей α_i можно получить различные кривые *d* в зависимости от расположения полюса *O*.

Для всего множества точек O плоскости мы получаем двухпараметрическое множество линий d.

Множество плоских кривых линий такой же размерности можно преобразовать, если идти обратным путем: считать, что задана линия d, а находится линия a. Тогда антиподерой a для заданной кривой d относительно полюса O будет огибающей семейства прямых, проходящих через точки кривой d перпендикулярно к прямым, соединяющим эти точки с полюсом O (рис. 3).

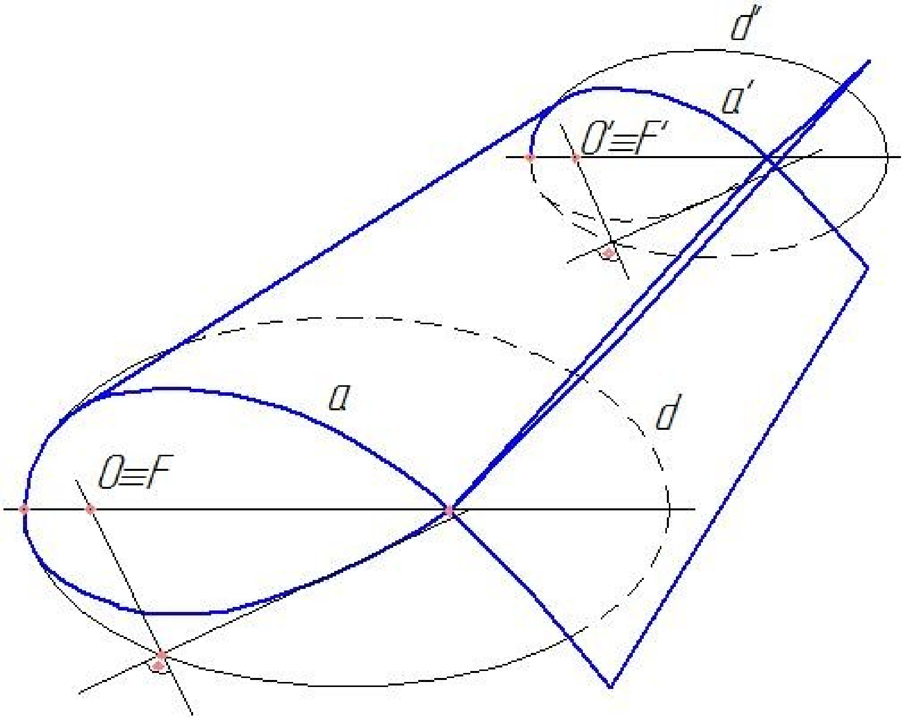

Рис. 3

Способ построения кривых линий с помощью антиподеры используется при образовании рабочего профиля кулачков для толкателей с плоской тарелкой, профиля зуба зубчатых колес и т.д.

Для сопряжения кривых линий представляет интерес цепочка преобразований. Так, антиподера a для заданной прямой d относительно полюса O будет парабола с фокусом в точке O и осью, проходящей через полюс, перпендикулярно прямой d. Далее антиподерой a' параболы a относительно полюса O будет трисектриса (кривая третьего порядка). Полюс второго преобразования может быть другим.

И так, мы имеем переход от прямой линии к кривой 2-го порядка затем к кривой 3-го полрядка и т.д.

Если полюсом преобразования служит кривая, инцидентная плоскости α_i то получаем возможность конструирования линии d, касающейся двух данных кривых.

Построение линии d рассмотрим на примере. Даны a и b кривые 2-го порядка.

1. Проводим касательную t_1 к линии a в точке $A_1 \subset a$.
2. Находим касательные, $t_1^{/}$, $t_2^{/}$ … к b, перпендикулярные t_1.

Множество точек пересечения соответствующих (перпендикулярных) касательных t_1 и $t_1^{/}$ определит некоторую линию d 3-го порядка. Она распадается на две кривые 4-го порядка, каждая из которых дважды касается линий a и b.

Из приведенного примера видно, что подерное преобразование есть один из способов установления $[p, q]$–значного соответствия между пучками прямых S и T порядков k и l. Порядки пучков равны соответственно классам кривых a и b.

Если линии a и b – кривые классов k и l, то d состоит из двух кривых порядка $\frac{N}{2}$ $(N=kq+lp)$ каждая из которых $\frac{N}{4}$ раз касается a и b.

Геометрические характеристики ее зависит от вида и взаимного расположения линий a и b. Для одной и той же кривой a, мы получим ∞^5 линий d, так как в плоскости насчитывается ∞^5 кривых 2-го порядка. Соответственные элементы, могут быть и не ортогональными, фокальными фигурами (a, b) можно взять составные линии, тогда составной будет и конструируемая кривая d.

Итак, используя в качестве базовой линии a и полюса b различные линии и их сочетания, изменяя их взаимное расположение и размеры (характеристики), мы получим возможность для образования кривых линий и их множеств различной мощности.

Аппарат подерного преобразования может быть использован и для пространственных преобразований. Пусть в пространстве R_3 заданы точка S и развертываемая поверхность T. Однопараметрическое множество точек пересечения плоскостей α_i, касательны к T и перпендикулярных им прямых, инцидентных точке S есть некоторая пространственная линия $d^|$, касающаяся T и проходящая через S.

Заставим полюс S перемещаться по лини g (∞^1 точек S). Тогда для данной поверхности T получим однопараметрическое множество линий $d^|$ (∞^2 точек – оснований перпендикуляров из S на плоскости α_i), касательные к T, определяет некоторую поверхность Δ как ∞^2 точек. Поверхность Δ в этом случае называется подерой поверхности T.

Список литературы:

1. Авдоньев Е.Я. О некоторых пространственных преобразованиях как совокупности плоских. В сб. «Прикладная геометрия и инженерная графика» Вып. 10, изд-во «Будывельник», 1970.

2. Гайдарь О. Г. Поверхности оболочек, отнесенные к сети линий кривизны. Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Труды Международной научной конференции – М.: Изд-во РУДН, 2001. – С. 65-69.

3. Гайдар О. Г. Формоутворення поверхонь застосуванням перетворень// Геометричне та комп’ютерне моделювання. Збірник наукових праць. / Харк. держ. університет харчування та торгівлі. –Вип.. 8. – Харьків, 2005. – С.32-37.

4. Гильберт Д. и Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.-Л., ГИТТЛ, 1951.

5. Савелов А.А. Плоские кривые. М., Физметгиз, 1960.

6. Скидан І.А., Гайдар О.Г. Аналітична модель подерних перетворень // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 18. – С. 8-10.

7. Юрченко И. К., Гайдарь О. Г., Ангельев Ф. А. Конструирование линий и поверхностей технических форм с помощью подерных преобразований. Інженер. Студентський науково-технічний журнал. – Донецьк: ДонНТУ, 2007. - № 8. – С. 146-149