УДК 514.18

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЦИРКУЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ

О. Г. Гайдарь
ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет»

В работе предложена методика решения циркульных конструктивных задач. Выделен признак циркульной задачи, позволяющий отделить задачи имеющие уравнения второй степени от не циркульных задач. Исследованы возможные варианты решения.

Ключевые слова: *конструктивная задача, циркульная задача, гонометрические связи, эквигональные связи, проекции.*

METHOD FOR SOLVING CIRCULAR CONSTRUCTIVE PROBLEMS

O. G. Gaidar
Donetsk National Technical University

A method for solving circular constructive problems is proposed. A feature of the circular problem is singled out, which makes it possible to separate problems having equations of the second degree from non-circular problems. We investigated possible solutions.

Keywords: constructive problem, circular problem, gonometric connections, equigonal connections, projections.

Конструктивные задачи, наверное, самые древние в истории геометрии. Геометрическими построениями занимались почти все крупные древнегреческие геометры: Пифагор и его ученики, Гиппократ, Евклид, Архимед, Апполоний, Папп и многие другие. Много внимания уделяли конструктивным задачам творцы современной математики: Декарт, Ферма, Ньютон, Паскаль, Эйлер, Гаусс. В XVII-XIX веках разработана теория геометрических построений с помощью различных инструментов, отличных от принятых древними. Датчанин Мор (1672), итальянец Маскерони (1797), француз Понселёж (1813), швейцарец Штейнер (1833), немец Адлер изучали построения, выполнимые циркулем и линейкой, и обнаружили, что циркуль позволяет решить всякую конструктивную задачу, разрешимую циркулем и линейкой и наоборот – только с помощью линейки можно решить всякую циркульную задачу [1]. С конца XIX и по конец XX веков теория геометрических построений сформировалась в обширную и глубоко развитую область математики, связанную с решением разнообразных принципиальных вопросов, уходящих в другие ветви математики [1].

В работе [2] мы начали рассматривать конструктивные задачи с точки зрения компьютерной реализации их решения. Была проведена классификация конструктивных задач и выявлены их элементарные составляющие – симплексы. Показано, что таких симплексов для линейчатых конструктивных задач существует всего 10.

Все известные линейчатые конструктивные задачи можно свести к 344 задачам. Среди них 22 параметрических, 37 функциональных и 285 функционально-параметрических [2]. Разрешимы с помощью циркуля и линейки 143 задачи – такие задачи будем называть циркульными, остальные имеют степень уравнения выше второй, т.е. не могут быть решены с помощью циркуля и линейки – будем их называть не циркульными.

Признак, по которому можно определить, является ли задача циркульной или нет, заключается в следующем. Если в задаче есть две связи (функциональные, или параметрические, или одна функциональная, а другая параметрическая), зависящие от углов, то такая задача является циркульной.

Рассмотрим методику решения циркульных конструктивных задач и уточним этот признак «циркульности» на примере конкретной задачи.

Построить прямую x на расстоянии R от точки A, под углами α и β к прямым c и d и равноудаленную от точки B и прямой e.

Анализ. Искомая прямая должна быть наклонена под углом а к прямой С. Этому условию удовлетворяет множество прямых, представляющих собой конус вращения $Ф_1$ Осью конуса является прямая c, угол между образующими и осью конуса равен углу α. Осью конуса $Ф_1$ можно выбрать любую прямую пространства, параллельную прямой c. При таком подходе искомой прямой x может быть любая прямая пространства, параллельная какой-нибудь образующей конуса $Ф_1$. Искомая прямая x должна быть также наклонена под углом β к прямой d. Такому условию удовлетворяет множество прямых пространства, параллельных образующим конуса $Ф_2$. Осью конуса $Ф_2$ будет прямая d, или любая прямая пространства, параллельная прямой d. Угол наклона образующих конуса $Ф_2$ к оси d равен углу β. Чтобы прямая x была одновременно наклонена под углом α к прямой c и под углом β к прямой d, надо построить два конуса $Ф_1$ и $Ф_2$ с общей вершиной, назначенной в произвольной точке S, и осями n^1 и n^{11}, параллельными c и d. Линия пересечения конусов $Ф_1$ и $Ф_2$ будет представлять собой в общем случае две образующие m^1

и m^{11}. Каждая из этих двух образующих будет удовлетворять заданному условию (рисунок 1).

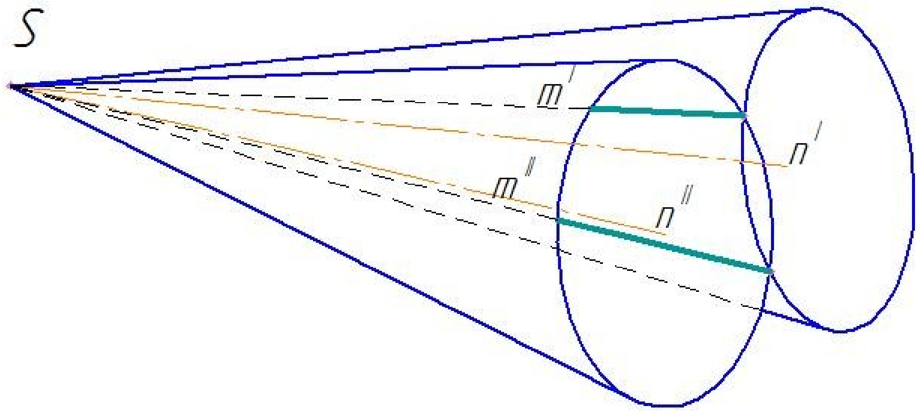

Рисунок 1 - Пересечения конусов $Ф_1$ и $Ф_2$

Искомая прямая x согласно второму условию задачи должна быть удалена от точки A на расстояние R. Этому условию будет удовлетворять комплекс прямых (множество ∞^3), касательных к сфере T с центром в точке A и радиусом R.

Искомая прямая x должна быть согласно последнему условию равноудалена от точки B и прямой e. Этому условию удовлетворяет комплекс прямых, касательных к сфере U с центром в точке B и цилиндру V вращения с осью e при условии, что радиусы сферы и цилиндра равны и изменяются на одинаковую величину.

Решение. Назначим произвольно точку S. Через нее проводим две прямые n^1 и n^{11}, параллельные соответственно прямым c и d. Строем два конуса $Ф_1$ и $Ф_2$. Осями конусов будут прямые n^1 и n^{11}. Углы наклона образующих к осям составляют соответственно α и β. Строим линии пересечения конусов $Ф_1$ и $Ф_2$. Это будут общие образующие m^1 и m^{11}. Заменой плоскостей проекций преобразуем чертеж так, чтобы одна из образующих, например, m^1 спроецировалась в точку. Спроецируем на эту же плоскость $П_5$ и точку A, точку B и прямую e. Получим изображение, представленное на рисунке 2.

Окружность T_5 представляет собой не только очерковую линию проекции сферы T радиуса R, но и множество прямых комплекса, касательных к сфере T и параллельных к прямой m^1. Эти касательные на $П_5$ спроецировались в точки, поскольку $т^1$ спроецировалась в точку m^1_5. Парабола I_5 представляет собой множество прямых, перпендикулярных $П_5$ (следовательно и параллельных m^1) и равноудаленных от точки B и прямой e. Точки x^1_5, x^{11}_5 пересечения T_5 и I_5 являются проекциями искомых прямых x^1 и x^{11}. Прямые x^1 и x^{11}

удалены от точки A на расстояние R, равноудалены от точки B и прямой e, наклонены под углом α и прямой c и под углом β к прямой a.

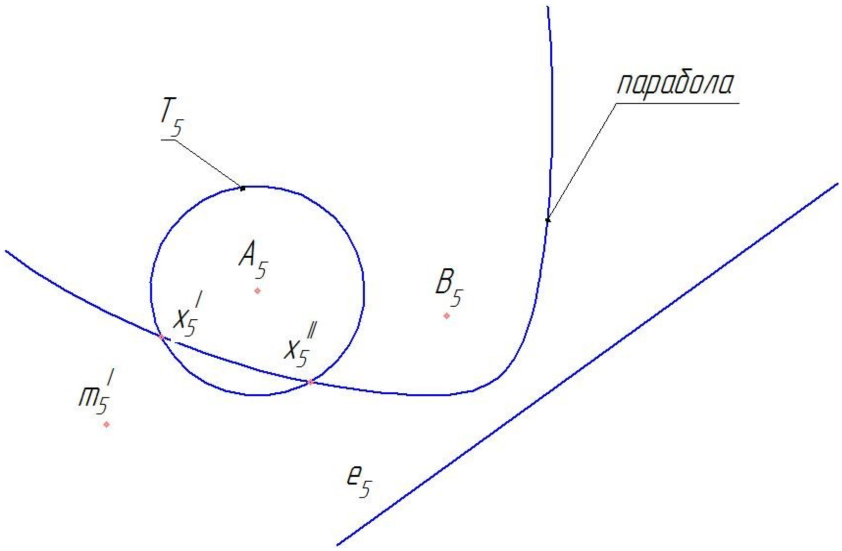

Рисунок 2 – Преобразование чертежа

Исследование. Определим количество решений задачи. Конусы $Ф_1$ и Ф могут пересекаться по двум образующим, одной образующей (касаться друг друга) и не пересекаться. Характер линии пересечения зависит от величины угла μ между прямыми c и d и суммы углов α и β. Если $\alpha + \beta > \mu$, конусы $Ф_1$ и $Ф_2$ будут пересекаться по двум образующим; если $\alpha + \beta = \mu$, конусы будут пересекаться по одной образующей, т.е. касаться друг друга; если $\alpha + \beta < \mu$, то конусы не пересекаются.

При проецировании на $П_5$ возможен случай, когда окружность T_5 и парабола I_5 пересекаются в двух точках; в одной точке (парабола I_5 касается сферы T_5**);** вообще не пересекаются.

Следовательно, возможны 4, 3, 2, 1 , 0 решений. Четыре решения возможны в том случае, когда конусы $Ф_1$ и $Ф_2$ пересекаются по двум образующим, или m^{I} и m^{11} и сфера T_5 и парабола I_5 пересекаются в двух точках x^{I}_5 и x^{11}_5. Три решения получаются, когда конусы $Ф_1$ и $Ф_2$ пересекаются по двум образующим m^1 и m^{11}, парабола I_5 и сфера T_5 в одном случае (если m^1, или m^{11}, спроецировалась в точку $m^{11}{}_5$) пересекаются в двух точках x^{I}_5 и x^{11}_5**,** а во втором случае (если m^{11}, или m^{11}, спроецировалась в точку $m^{11}{}_5$) парабола I_5 касается сферы $\mathbf{T_5}$**.**

Два решения возможны в следующих ситуациях:

а) $Ф_1$ и $Ф_2$ пересекаются по двум образующим, I_5 и T_5 в одном случае (если m^1 спроецировалась в точку) пересекаются в двух точках, б) а во втором случае (если m^{11} спроецировалась в точку) пересекаются в двух точках, а когда m^1 спроецировалась в точку, не пересекаются; $Ф_1$ и $Ф_2$ пересекаются по одной образующей m, I_5 и T_5 пересекаются в двух точках.

Одно решение возможно в следующих ситуациях:

а) $Ф_1$ и $Ф_2$ пересекаются по двум образующим, I_5 и T_5 касаются друг друга, если же m^{11} (или m^1) спроецировалась в точку - не пересекаются и не касаются,

б) $Ф_1$ и $Ф_2$ касаются друг друга, 1_5 и T_5 касаются друг друга, если m^{11} (или m^1) спроецировалась в точку; если же m^{11} (или m^1) спроецировалась в точку - не пересекаются и не касаются.

Ноль решений возможно в следующих ситуациях:

а) $Ф_1$ и $Ф_2$ пересекаются по двум или одной прямой, 1_5 и T_5 не пересекаются во всех случаях;

б) $Ф_1$ и $Ф_2$ не пересекаются.

Таким образом, методика решения конструктивных циркульных задач сводится к следующему.

Выделяется две гонометрические, или эквигональные, или одну гонометрическую, а вторую эквигональную связи. Соответственно этим связям строим два конуса с общей вершиной, или две плоскости, проходящие через какую-нибудь точку, конус и плоскость, проходящую через вершину конуса. Строим их линии пересечения m. Преобразуем чертеж так, чтобы m спроецировалась бы в точку m_5. Проецируем на $П_5$ геометрические фигуры, которые входят в остальные связи. Строим на $П_5$ кривые второго порядка, или их вырождения в пары прямых. Находим пересечения $x^1{}_5$ полученных фигур. Обратным проецированием находим проекции x_1, x_2 прямой x на исходном чертеже.

Выводы. Была рассмотрена методика решения циркульных конструктивных задач. Но эта методика не распространяется на решение нециркульных задач. В последующих работах попытаемся разобраться в методологии решения конструктивных задач 3-й и выше степени.

Список литературы

1. Волошинов Д.В., Соломонов К.Н. Конструктивное геометрическое моделироваwние как перспектива преподавания графических дисциплин // Геометрия и графика. - 2013. - Т. 1, вып. 2. - С. 182-185.

2. Гайдарь О.Г., Пастернак Д.Н. Классификация и структурирование линейчатых конструктивных задач применительно к компьютерному моделированию // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VII Международной научно-практической конференции. Выпуск 4. Пермь, Из-во ПНИПУ 2017. С 203-210.