# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ СРЕДНИМ ВДОЛЬ КОНГРУЭНТНЫХ МНОЖЕСТВ

***Волчкова Наталья Петровна***
***Донецкий национальный технический университет, Донецк***
***E-mail:*** *volna936@gmail.com*

Вопросы, связанные с изучением функций по ее заданным интегральным средним, занимают важное место в анализе и приложениях. Глубокие связи данного направления с периодичностью в среднем, теорией гармонических функций, рядами экспонент, теорией аппроксимации, микролокальным анализом, а также различными вопросами комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, интегральной и комбинаторной геометрией и теорией графов были предметом исследований многих известных математиков двадцатого века (см. обзоры [1], [8] с обширной библиографией, а также монографии [4] - [6]). Полученные результаты, в ряду которых – работы Радона, Помпейю, Дельсарта, Йона, Зальцмана, Беренстейна и других, оказались весьма важными во многих направлениях современной математики и конкретных приложениях, связанных с созданием компьютерной аксиальной томографии, акустикой, обработкой сигналов и т.д. В данной работе изучается задача об обращении локального преобразования Помпейю для некоторых многомерных множеств.

Пусть $S^{n-1}=\{x\in R^n : |x|=1\}$, $\rho,\sigma$ - полярные координаты в $R^n$ (для любого $x\in R^n$ $\rho=|x|$, а если $x\neq 0$, то $\sigma=x/\rho\in S^{n-1}$), $\{Y_s^{(k)}(\sigma)\}$, $1\le s\le d_k$ - фиксированный ортонормированный базис в пространстве $H_k$ сферических гармоник степени $k$ на $S^{n-1}$ ($H_k$ рассматривается как подпространство $L^2(S^{n-1})$). Положим $B_R=\{x\in R^n : |x|<R\}$. Всякая функция $f\in C^\infty(B_R)$ представима в виде ряда Фурье

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{d_k} f_{ks}(\rho)Y_s^{(k)}(\sigma),\ 0<\rho<R,$$

где

$$f_{ks}(\rho)=\int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma)\overline{Y_s^{(k)}(\sigma)}d\sigma.$$

Для восстановления функции $f$ достаточно знать коэффициенты Фурье $f_{ks}$.

Далее, как обычно, $D(R^n)$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $R^n$, $D'(R^n)$ – пространство распределений на $R^n$, $\mu_1*\mu_2$ - свертка двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель. Радиализацией распределения $\mu\in D'(R^n)$ называется радиальное распределение $R\mu$, действующее на функцию $\varphi \in D(R^n)$ по формуле

$$< R\mu, \varphi > = < \mu(x), \int_{SO(n)} \varphi(kx)dk >, \tag{2}$$

где $SO(n)$ – группа вращений пространства $R^n$, $dk$ -нормированная мера Хаара на группе $SO(n)$. Радиальность $R\mu$ означает, что для любого $k \in SO(n)$

$$< R\mu(x), \varphi(kx) > = < R\mu(x), \varphi(x) > \quad , \quad \varphi \in D(R^n) .$$

Пусть $\alpha \in (0, \pi)$, $\Lambda = \{z \in C : | z - \cos\alpha / 2 | \le 1, |z + \cos\alpha / 2| \le 1\}$ - круговая луночка с вершинами в точках $z_1 = ir$, $z_2 = -ir$, $r = \sin\alpha / 2$, $H = \Lambda \times [-b_3, b_3] \times \ldots \times [-b_n, b_n]$, $b_k > 0$, $k = 3, ..., n.$

Далее будут использоваться дифференциальные операторы: $\Delta$-оператор Лапласа в $R^n$,

$$D^{\kappa} = \frac{\partial^{|\kappa|}}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}} \ (\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_n) \in Z_+^n, \ |\kappa| = \kappa_1 + ... + \kappa_n), \ D_1 = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x_3 \ldots \partial x_n} \quad ,$$

$$D_{i,j}(a) = (x_i + a)\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \ a \in R^1,$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad D_3 = \left(x_1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$D_4 = \left(x_1 - \cos\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} .$$

Пусть $r_0$ – радиус наименьшего замкнутого круга, содержащего $\Lambda$, $R > r$, $f \in C^{\infty}(B_R)$, где $r = \sqrt{r_0^2 + b_3^2 + ... + b_n^2}$, $n \ge 3.$

Обозначим $R_k = R(D_1 D_2^k \mu)$, где $\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} D_4\right) D_3 D_1 \chi_{\Lambda}$, $\chi_{\Lambda}$ - индикатор множества $\Lambda$. Для $x \in B_{R-r}$ положим

$$f_1(x) = (f * R\chi_H)(x), \ f_i(x) = (\breve{f} * \nu_i)(x), \ i = 2,3,$$

где $\breve{f}(x) = f(-x)$, $\nu_2 = R_1$,

$$\nu_3 = \begin{cases} R_3 + \frac{2}{3n}\Delta R_1, & 3n\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 2r^2, \\ R_5 + \frac{4}{9n^2 r^2}(3n-4)(3n+2)\Delta R_1 - \frac{4}{9n^2}\Delta^2 R_1, & 3n\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2r^2, \end{cases}$$

Основным результатом работы является

**Теорема 1**. Пусть $R > 2r$. Тогда для любого $k \in Z_+$, $1 \le s \le d_k$, и $\rho \in (0, R)$ существуют распределения $U_{l,i}$ $(l \in N, i = 1,2,3,4)$ со следующими свойствами:

1) $supp\, U_{l,i} \subset B_{R-r}$ $(l \in N, i = 1,2,3)$, $supp\, U_{l,4} \subset B_R$ $(l \in N)$;

2) для любой $f \in C^{\infty}(B_R)$ имеют место равенства

$$\left(\Delta^n \breve{f}\right)_{ks}(\rho) = \lim_{l\to\infty}\left(< U_{l,1}, f_2 > + < U_{l,2}, f_3 >\right), \qquad (3)$$

$$\breve{f}_{ks}(\rho) = \lim_{l\to\infty}\left(< U_{l,3}, f_1 > + < U_{l,4}, \Delta^n \breve{f} >\right). \qquad (4)$$

Относительно других результатов подобного типа см. [2], [3], [7] и библиографию к этим работам.

**Литература**


1. Беренстейн К.А. Комплексный анализ и уравнения в свертках / Беренстейн К.А., Струппа Д. // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам.направления. – М.: ВИНИТИ, 1989. - Т.54. - С. 5-111.
2. Волчкова Н.П. Об обращении локального преобразования Помпейю // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. - 2006. - Вип. 2 - С. 15-17.
3. Berenstein C.A. Inversion of the local Pompeiu transform / Berenstein C.A., Gay R., Yger A. // J. Analysis Mathematics. - 1990. - V.54. - P. 259-287.
4. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, 2003. - 454p.
5. Volchkov V.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. - London: Springer, 2009. - 671p.
6. Volchkov V.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces/ V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – Birkhäuser-Springer. 2013. – 592 p.
7. Volchkova N. P. Inversion of the local Pompeiu transform // Functional Analysis and its Applications. – 2004. – V. 197. – P. 301-309.
8. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations, ed. B.Fuglede et al. - 1992 . - P.185-194.