МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор АДИ ГОУВПО «ДонНТУ»
М. Н. Чальцев
14.04.2017 г.

Кафедра «Высшая математика»

ПРАКТИКУМ. ВЕКТОРНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ (ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 38.03.05 «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА», 09.03.02 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ», 38.03.04 «ГОСУДАРСТВЕННОЕ И МУНИЦИПАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 08.05.03 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ»)

2/32-2017-06

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия
факультета «Экономика и
управление»
Протокол № 6 от 15.02.2017 г.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра
«Высшая математика»
Протокол № 7 от 24.01.2017

Горловка – 2017

УДК 517.2 + 517.3 +517.5(071)

Практикум. Векторная и линейная алгебра, аналитическая геометрия и основы математического анализа. расчетные задания (для студентов заочной формы обучения направлений подготовки: 38.03.05 «Бизнес-информатика», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление», 38.03.02 «Менеджмент», 27.03.04 «Управление в технических системах», 08.03.01 «Строительство», 08.05.03 «Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», 23.03.01 «Технология транспортных процессов») [Электронный ресурс] / составители: Л. П. Вовк, Е. А. Королев, Е. С. Кисель – Горловка: ГОУВПО «ДонНТУ» АДИ, – 2017. – 50 с.

Пособие содержит краткий перечень основных вопросов по данной дисциплине и список рекомендованной учебной литературы, необходимые для выполнения контрольных заданий. Приведены решения типовых задач, предложены варианты индивидуальных заданий контрольной работы по основным разделам курса высшей математики в соответствии с действующей программой курса высшей математики.

Составители:	Вовк Л. П., д-р. техн. наук, проф. Королев Е. А., канд. физ.-мат. наук, доц. Кисель Е. С.
Ответственный за выпуск:	Николаенко В. Л.
Рецензент:	Луценко Л. И., канд.физ.-мат.наук, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение курса высшей математики связано с усвоением ряда новых понятий и применением новых подходов при решении задач теории и практики. Поскольку высшая математика является основой большинства теоретических и практических наук, то для успешного изучения таких дисциплин как «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Детали машин» и т. д. студент должен иметь достаточную математическую подготовку.

Самые большие трудности при освоении курса высшей математики у студентов возникают при решении практических задач. Данный практикум содержит рабочую программу, необходимый минимум теоретических вопросов и примеров решения задач курса «Математика», которые помогут закрепить знания основных формул и методов решения задач программного материала.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Каждый студент должен выполнить задания из раздела «Задачи для контрольной работы» Условия данных заданий взяты из [5]. Выбор номеров задач определяется двумя последними цифрами учебного шифра (номера зачетной книжки). Так, например, если студент имеет номер зачетной книжки 987103, то шифром является 03. Для выбора номеров задач необходимо записать шифр (две последние цифры) и поместить под ними две первые буквы русского алфавита, а потом обратиться к таблице 1.

Таблица 1 – Номера задач

Номер строки	Номера задач контрольных заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	11	22	32	55	120	141	152	182	193	207
2	12	30	33	53	119	143	153	184	200	208
3	13	23	31	56	118	145	154	186	196	209
4	14	28	38	54	117	147	155	188	199	210
5	15	26	37	57	116	149	160	181	192	206
6	16	27	39	52	115	142	159	183	195	201
7	17	29	34	58	114	144	158	185	198	202
8	18	25	40	51	113	146	157	187	191	203
9	19	21	35	59	112	148	156	189	194	204
0	20	24	36	60	111	150	151	190	197	205
	б	|а–б|	а	б	|а–б|	б	|а–б|	б	б	|а–б|

Для каждого вертикального столбца, обозначенного внизу определенной буквой (или их разностью), взять одно число, которое находится в строке с соответствующим этой букве (или разности) номером.
Так, например, для указанного шифра 0 3, а = 0, б = 3.
Т. е. необходимо решить задачи № 13, 23, 36, 56, 118, 145, 154, 186, 196, 209.

Выполнение студентами заданий контролирует преподаватель. Сначала проверяется правильность решения задач; на завершающем этапе контрольная работа защищается. Выполняя контрольную работу, студент должен придерживаться следующих требований:

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради чернилами любого цвета (кроме красного). Поля шириной 25–30 мм для замечаний рецензента.
2. На обложке тетради указывается фамилия, инициалы, шифр, дисциплина и дата отправки работы в институт.
3. Перед решением задачи студент должен сформулировать ее условие, исходя из данных соответствующего варианта контрольного задания, указать номер задачи. Расположение задач контрольной работы должно быть в возрастающем порядке их номеров.
4. Решение необходимо сопровождать пояснениями, при необходимости приводить графики и рисунки.
5. Каждая работа сопровождается двумя карточками рецензента, в которых указывается название контрольной работы.
6. Получив работу с замечаниями рецензента, нужно в краткие сроки их исправить.
7. Если работа не допущена к защите, ее необходимо или выполнить заново целиком, или заново решить указанные рецензентом задачи в конце тетради с пометкой «Работа над ошибками». Исправленную работу присылают в институт вместе с незачтенной работой и двумя карточками рецензента.

Контрольную работу, которую студент выполняет по чужому варианту, возвращают без проверки.

Допущенную к защите контрольную работу необходимо защитить на одной из консультаций, т. е. правильно ответить на поставленные теоретические вопросы, пояснить решение приведенных задач, уметь решить аналогичные задачи.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1 Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$$A_1(2;-1;1);\, A_2(5;5;4);\, A_3(3;2;-1);\, A_4(4;1;2).$$

Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной с вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Сделать схематический чертеж.

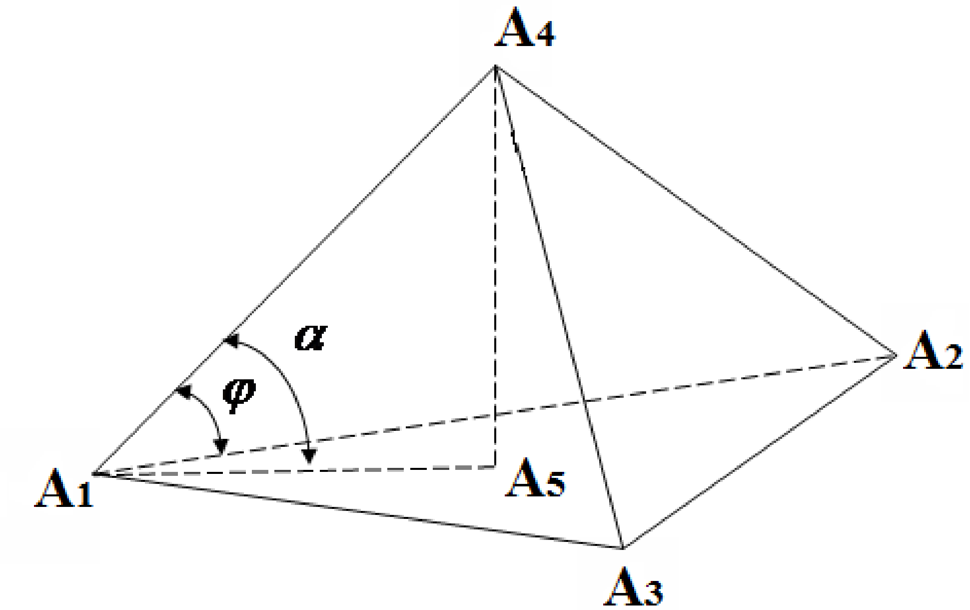

Рисунок 1 – Пирамида $A_1A_2A_3A_4$

1. Определим длину ребра A_1A_2.

Решение. Длина ребра A_1A_2 равняется длине вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, координаты и длину которого определим по формулам:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}; \tag{1.1}$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.2}$$

Подставив в формулы (1.1), (1.2) координаты точек A_1 и A_2, получим:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{3;6;3\},\ \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}.$$

Ответ: $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = 3\sqrt{6}$ (лин. ед).

2. Определим угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

Решение. Угол между ребрами равняется углу между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$. Угол φ между векторами найдем по формуле:

$$\cos\phi = \frac{\left(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right)}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}. \quad (1.3)$$

Координаты и длину вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$ вычислим по формулам (1.1), (1.2):

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{4-2;1+1;2-1\},\ \text{откуда}\ \overrightarrow{A_1A_4} = \{2;2;1\},$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{2^2+2^2+1^2},\ \text{откуда}\ \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = 3\ \text{(лин. ед.)}$$

Скалярное произведение определяется по формуле:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (1.4)$$

$$(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}) = 3\cdot 2 + 6\cdot 2 + 3\cdot 1 = 21.$$

Подставим полученные значения для $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$, $\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, $(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4})$ в (1.3):

$$\cos\phi = \frac{21}{3\cdot 3\sqrt{6}} = \frac{7}{3\sqrt{6}} - 0{,}9525\ \text{, откуда}\ \varphi \approx 17{,}71^\circ.$$

Ответ: угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 $\varphi \approx 17{,}71^\circ$.

3. Определим угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Решение: Угол α между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ найдем по формуле:

$$\sin\alpha = \frac{\left(\vec{\ell}\cdot\vec{N}\right)}{\left|\vec{\ell}\right|\cdot\left|\vec{N}\right|}, \quad (1.5)$$

где $\vec{\ell}$ – направляющий вектор прямой A_1A_4, а $\vec{N}$ – нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$. Возьмем вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ в качестве направляющего вектора $\vec{\ell}$ прямой A_1A_4, а вектор нормали $\vec{N}$ плоскости $A_1A_2A_3$ найдем по формуле:

$$\vec{N} = \overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ определим по формуле (1.1):

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{3-2;2+1;-1-1\},\ \text{откуда}\ \overrightarrow{A_1A_3} = \{1;3;-2\}.$$

Учитывая, что векторное произведение:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (1.6)$$

Имеем:

$$\vec{N}=\left[\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -2\\ 3 & 6 & 3\end{vmatrix}=21\cdot\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}.$$

Длину найденного вектора $\vec{N}=\{21;-9;-3\}$ вычислим по формуле (1.2).

$$\left|\vec{N}\right|=\sqrt{(21)^2+(-9)^2+(-3)^2},\text{ откуда } \left|\vec{N}\right|=\sqrt{531}\text{ (лин. ед.).}$$

Скалярное произведение $\left(\vec{\ell}\cdot\vec{N}\right)$ найдем по формуле (1.4):

$$\left(\vec{\ell}\cdot\vec{N}\right)=2\cdot21+2\cdot(-9)+1\cdot(-3),\text{ откуда } \left(\vec{\ell}\cdot\vec{N}\right)=21.$$

Подставим полученные значения для $\left(\vec{\ell}\cdot\vec{N}\right)$, $\left|\vec{\ell}\right|=\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, $\left|\vec{N}\right|$ в (1.5):

$$\sin\alpha=\frac{21}{3\cdot\sqrt{531}}=\frac{7}{\sqrt{531}}\approx0{,}3037\text{, откуда } \alpha\approx17{,}68^\circ.$$

Ответ: угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ $\alpha\approx17{,}68^\circ$.

4. Определим площадь грани $A_1A_2A_3$.

Решение. Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдем с помощью формулы:

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2}\right]\right|\text{ (кв. ед.).}\qquad(1.7)$$

Поскольку $\left|\left[\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2}\right]\right|=\left|\vec{N}\right|=\sqrt{531}$, то (1.7) следует, что:

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{531}\text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: площадь грани $A_1A_2A_3$ $S_{A_1A_2A_3}=\dfrac{\sqrt{531}}{2}$ (кв. ед.).

5. Определим объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Решение. Объем пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ как на ребрах, определяем с помощью смешанного произведения этих векторов с точностью до знака:

$$V_{A_1A_2A_3A_4}=\pm\left(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}.\qquad(1.8)$$

Подставим координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ в формулу (1.8):

$$V_{A_1A_2A_3A_4}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{6}(3\cdot3\cdot1+1\cdot2\cdot3+(-2)\cdot2\cdot6-2\cdot3\cdot3-$$

$$-(-2)\cdot2\cdot3-1\cdot1\cdot6)=\pm\frac{1}{6}(-21).$$

Поскольку определитель равен отрицательному числу, в данном случае перед формулой необходимо взять знак минус. Итак,

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: объем пирамиды $V = 3{,}5$.

6. Составим уравнение прямой A_1A_2.

Решение. Используем уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1.9}$$

Подставим в формулу (1.9) координаты точек A_1 и A_2, получим:

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-(-1)}{5-(-1)} = \frac{z-1}{4-1}, \text{ откуда } \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{3}.$$

Умножим последнее уравнение на 3, получаем каноническое уравнение прямой A_1A_2:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

Ответ: уравнение прямой A_1A_2: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

7. Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Решение. Используем уравнение плоскости, которая проходит через три данные точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

Уравнение плоскости, которая проходит через точки $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2;-1)$ в соответствии с формулой (1.10), запишется так:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 5-2 & 5+1 & 4-1 \\ 3-2 & 2+1 & -1-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладываем последний определитель по элементам первой строки, получим:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-21x + 9y + 3z + 48 = 0.$$

Ответ: уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: $-7x + 3y + z + 16 = 0$.

8. Составим уравнение высоты, опущенной с вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$

Решение. Для того, чтобы составить уравнение высоты A_4A_5, которая проходит через точку $A_4(x_4;y_4;z_4)$ перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$, используем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_4}{m}=\frac{y-y_4}{n}=\frac{z-z_4}{p}, \tag{1.11}$$

где m, n, p – координаты направляющего вектора этой прямой.

В качестве направляющего вектора высоты A_4A_5 выберем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$, который перпендикулярен плоскости $A_1A_2A_3$ и коллинеарен прямой A_4A_5:

$$\vec{N}=\left[\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_2}\right]=\{21;-9;-3\}.$$

Подставим в уравнение (1.11) координаты точки $A_4(4;1;3)$ и вместо m, n, p – координаты вектора $\vec{N}=\{21;-9;-3\}$, получим:

$$\frac{x-4}{21}=\frac{y-1}{-9}=\frac{z-3}{-3}.$$

Сократив на $-\frac{1}{3}$, получим каноническое уравнение высоты A_4A_5:

$$\frac{x-4}{7}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{-1}.$$

Ответ: уравнение высоты A_4A_5: $\frac{x-4}{7}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{-1}$.

Задача 2

Даны координаты вершин $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(7;11)$ треугольника. Найти уравнение его медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины A. Сделать чертеж.

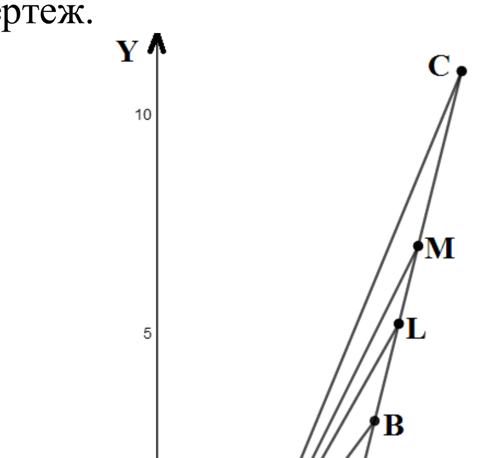

Рисунок 2 – Треугольник ABC

Решение.

1. Пусть точка M является серединой стороны BC. Координаты точки M определяем по формулам деления отрезка в данном отношении:

$$x_m = \frac{x_b + \lambda x_c}{1+\lambda}; \; y_m = \frac{y_b + \lambda y_c}{1+\lambda}. \qquad (1.12)$$

Т. к. точка M является серединой отрезка BC, $\lambda = 1$, то формулы (1.12) примут вид:

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2}; \; y_m = \frac{y_b + y_c}{2}. \qquad (1.13)$$

Подставим в формулы (1.13) координаты точек $B(5;3)$, $C(7;11)$, получим

$$x_m = \frac{5+7}{2} = 6; \; y_m = \frac{3+11}{2} = 7, \text{ т. е. } M(6;7).$$

Уравнение медианы AM получим по формуле (1.9):

$$\frac{y+1}{2} = \frac{x-2}{1} \text{ или } 2x - y - 5 = 0.$$

Длина медианы является расстоянием между точками A и M, которую определим по формуле (1.2):

$$|AM| = \sqrt{(6-2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: уравнение медианы AM: $2x - y - 5 = 0$. Длина медианы $|AM| = 4\sqrt{5}$.

2.Чтобы найти высоту AK, составим уравнение стороны BC по формуле (1.9):

$$\frac{y-3}{11-3} = \frac{x-5}{7-5}, \text{ т. е. } y - 3 = 4(x-5) \text{ или } 4x - y - 17 = 0.$$

Угловой коэффициент этой стороны $K_{BC} = 4$. Поскольку $BC \perp AK$, угловые коэффициенты этих прямых связаны равенством:

$$K_{AK} = -K_{BC}^{-1}.$$

Из формулы (1.13) следует, что $K_{AK} = -\frac{1}{4}$. Уравнение высоты AK будем искать в виде:

$$y - y_a = K_{AK}(x - x_A). \qquad (1.14)$$

Подставим в формулу (1.14) координаты точки $A(2;-1)$ и угловой коэффициент $K_{AK} = -\frac{1}{4}$, получим уравнение высоты AK:

$$y + 1 = -\frac{1}{4}(x-2) \text{ или } x + 4y + 2 = 0.$$

Для нахождения длины *AK* сначала найдем координаты точки *K*, принадлежащей *BC*. Эта точка, являясь точкой пересечения *BC* и *AK*, находится как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x - y - 17 = 0 \\ \underline{x + 4y + 2 = 0} \end{cases}\left|\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}\right. +; \begin{cases} y = 4x - 17 \\ x = \dfrac{66}{17} \end{cases}; \begin{cases} y = -\dfrac{24}{17} \\ x = \dfrac{66}{17} \end{cases},$$

$$17x - 66 = 0.$$

Т.е. $K = (66/17; -25/17)$.

$$|AK| = \sqrt{\left(\frac{66}{17} - 2\right)^2 + \left(-\frac{25}{17} + 1\right)^2} = \frac{8\sqrt{17}}{17}.$$

Ответ: уравнение высоты *AK*: $x + 4y + 2 = 0$. Длина высоты

$|AK| = \dfrac{8\sqrt{17}}{17}$ (лин. ед.).

3. Переходя к рассмотрению биссектрисы *AL*, вспомним, что она делит сторону *BC* на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е.

$\dfrac{|BL|}{|LC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$, но $|AB| = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = 5$, $|AC| = \sqrt{(7-2)^2 + (11+1)^2} = 13$.

Значит $\lambda = \dfrac{|BL|}{|LC|} = \dfrac{5}{13}$.

По формулам (1.12) деления отрезка в данном отношении λ имеем:

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{5 + 5/13 \cdot 7}{1 + 5/13} = \frac{50}{9};\ y_L = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{3 + 5/13 \cdot 11}{1 + 5/13} = \frac{47}{9}.$$

Уравнение прямой, проходящей через $A(2;-1)$ и $L(50/9; 47/9)$:

$$\frac{y+1}{47/9+1} = \frac{x-2}{50/9-2},$$

откуда $\dfrac{y+1}{56} = \dfrac{x-2}{32}$ или $7x - 4y - 18 = 0$.

Длина же биссектрисы *AL*: $|AL| = \sqrt{\left(\dfrac{50}{9} - 2\right)^2 + \left(\dfrac{47}{9} + 1\right)^2} = \dfrac{8\sqrt{65}}{9}$.

Ответ: уравнение биссектрисы *AL*: $7x - 4y - 18 = 0$, длина биссектрисы $|AL| = \dfrac{8\sqrt{65}}{9}$.

Задача 3. Найти уравнение прямой, которая проходит через $A(2;5)$ и параллельна прямой $3x - 4y + 15 = 0$.

Решение. Условие параллельности двух прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ заключается в равности их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2. \tag{1.15}$$

Уравнение прямой будем искать в виде:

$$y - y_A = k(x - x_A). \tag{1.16}$$

Запишем уравнение заданной прямой в виде:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}.$$

Откуда угловой коэффициент $k = \frac{3}{4}$. Т. к. данная прямая параллельна искомой, то согласно условию (1.15), угловой коэффициент искомой прямой также равняется $\frac{3}{4}$. Точка $A(2;5)$, через которую проходит искомая прямая, известна, поэтому, подставляя в уравнение (1.16) значения $k = 3/4$, $x_A = 2$, $y_A = 5$, получим $y - 5 = 3/4(x - 2)$ или $3x - 4y + 14 = 0$.

Ответ: уравнение искомой прямой имеет вид $3x - 4y + 14 = 0$.

Задача 4. Найти угол между прямыми:

$$3x + 5y - 15 = 0 \text{ и } 3x - 7y + 2 = 0.$$

Решение. Тангенс угла между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ определяется формулой:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{1.17}$$

Уравнения данных прямых запишем в виде:

$$y = -\frac{2}{5}x + 3 \text{ и } y = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}.$$

Таким образом, угловые коэффициенты данных прямых соответственно равны $-2/5$ и $3/7$. Подставим в формулу (1.17) значения для угловых коэффициентов, получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3/7 - (-2/5)}{1 + 3/7 \cdot (-2/5)} = 1, \text{ откуда } \varphi = 45^\circ.$$

Ответ: угол между данными прямыми $\varphi = 45^\circ$.

Задача 5. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от двух заданных точек $M_1(-2;4)$ и $M_2(6;8)$.

Решение. Пусть $M(x;y)$– произвольная точка искомой линии. По условию задачи:

$$|M_1 M| = |M_2 M|. \tag{1.18}$$

С другой стороны, по формулам расстояния между двумя точками получаем:

$$|M_1M| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}\ ;\ |M_2M| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}\ .$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.18), найдем уравнение данной линии:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}\ .$$

Упростим полученное уравнение. Возводя в квадрат обе части уравнения и раскрывая скобки в подкоренных выражениях, находим:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64\ .$$

После элементарных преобразований, получаем уравнение:

$$2x + y - 10 = 0\ .$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (рисунок 3).

Из элементарной геометрии известно, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек M_1 и M_2, является прямая, перпендикулярная отрезку M_1M_2, проходящая через его середину.

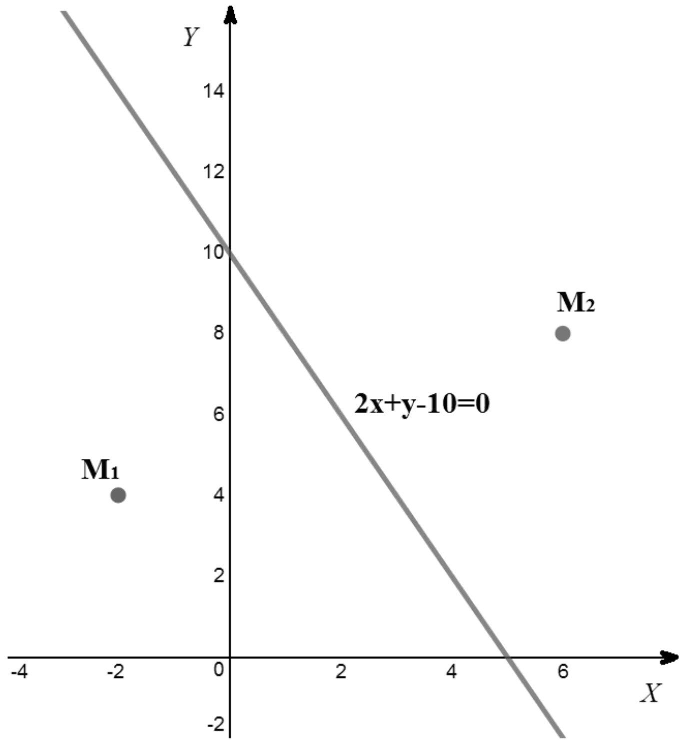

Рисунок 3 – Расположение точек $M_1,\ M_2$ и заданной прямой

Задача 6. Точка M двигается так, что в любой момент времени ее расстояние от точки $A(6;0)$ вдвое больше расстояния до точки $B(2/3;0)$. Найти уравнение траектории движения точки M .

Решение. Координаты точки M обозначим через x, y, то есть $M(x, y)$. По условию задачи $|MA| = 3 \cdot |MB|$.

Найдем расстояния $|MA|$ и $|MB|$ по формуле (1.2):

$$|MA| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2};$$

$$|MB| = \sqrt{(x-2/3)^2 + (y-0)^2}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущие равенства, получим уравнение траектории движения точки M:

$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 3\sqrt{(x-2/3)^2 + y^2}.$$

Упрощая это уравнение, находим:

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Полученное уравнение – окружность с радиусом $R = 2$ и центром в начале координат.

Задача 7. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $F(0;3)$ и прямой $y = -5$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомой прямой. По условию $|MF| = |MN|$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y = -5$.

Вследствие того, что $|MF| = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$ и $|MN| = \sqrt{(y-(-5))^2}$,

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+5)^2}.$$

Отсюда: $x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 10y + 25$. Приводя подобные члены, получим уравнение $x^2 = 16y + 16$, которое определяет параболу (рисунок 4).

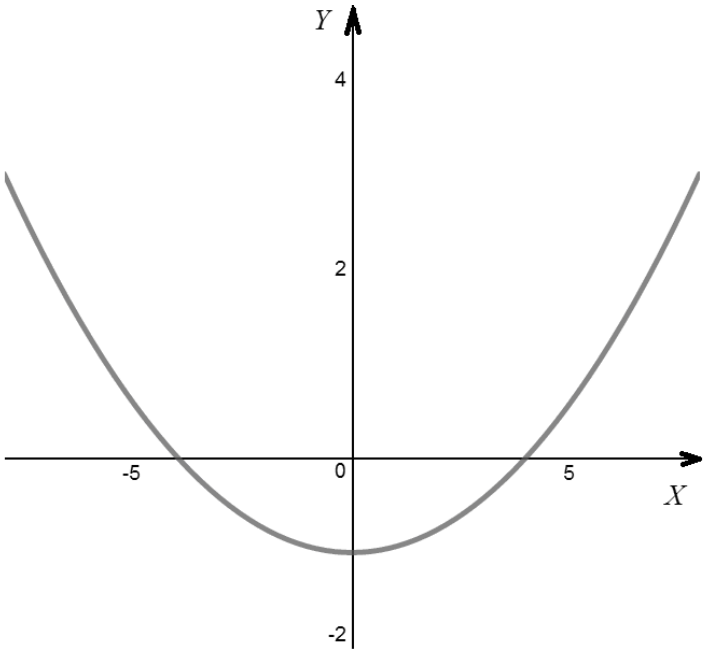

Рисунок 4 – График искомой кривой

Задача 8. Какое геометрическое место точек определяет уравнение:

$$3x^2+3y^2-4x+9y+4=0.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на 3 и, дополняя до полных квадратов, находим:

$$\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)+\left(y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)-\frac{4}{9}-\frac{9}{4}+\frac{4}{3}=0, \text{ или}$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{36}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{1.19}$$

которое определяет окружность с центром в точке $C(a;b)$ и радиусом R, придем к выводу, что $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{3}{2}$, $R=\frac{7}{6}$, т. е. исходное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $C\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ и радиусом $R=\frac{7}{6}$.

Задача 9. Определить вид и расположение на плоскости линии:

$$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделяя полные квадраты:

$$4(x^2-2x+1)-9(y^2+4y+4)-4+36-68=0$$

$$\text{или } 4(x-1)^2-9(y+2)^2=36.$$

Разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением, которое определяет гиперболу с центром в точке $C(x_1;y_1)$ и полуосями a и b:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1. \tag{1.20}$$

Приходим к выводу, что искомое уравнение определяет гиперболу с центром в точке $C(1;-2)$ и полуосями $a=3$ и $b=2$.

Задача 10. Определить вид кривой и ее расположение на плоскости по ее уравнению:

$$9x^2+4y^2-54x-32y+109=0.$$

Решение. Сгруппируем слагаемые с переменными x и y, и дополним полученные выражения до полных квадратов:

$$9(x-3)^2+4(y-4)^2=36.$$

Разделим обе части уравнения на 36:

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением, которое определяет эллипс с центром в точке $C(x_1;y_1)$ и полуосями a и b:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1. \tag{1.21}$$

Приходим к выводу, что искомое уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(3;4)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$.

Задача 11. Линия задана уравнением $\mathrm{r}=\mathrm{r}(\varphi)$ в полярной системе координат. Необходимо:

1) построить линию с точками, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, присваивая значения φ с шагом $\pi/8$;

2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, начало координат которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;

3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия:

$$\mathrm{r}=\frac{\mathrm{r}}{1-\sin\varphi}.$$

Решение. 1. Построим линию по ее уравнению. Изменяя значения φ, определим соответствующие значения r и составим таблицу.

Таблица 2 – Значения полярного радиуса в зависимости от угла

Номер	Угол, рад	Угол, градусы	Полярный радиус	Обозначение точки на графике
1	0	0°	2	A_1
2	$\pi/8$	$22{,}5^\circ$	2,94	A_2
3	$\pi/4$	45°	6,9	A_3
4	$3\pi/8$	$67{,}5^\circ$	25	A_4 за пределами (рисунок 5)
5	$\pi/2$	90°	∞	A_5 за пределами (рисунок 5)
6	$5\pi/8$	$112{,}5^\circ$	25	A_6 за пределами (рисунок 5)

Номер	Угол, рад	Угол, градусы	Полярный радиус	Обозначение точки на графике
7	$3\pi/4$	135°	6,9	A_7
8	$7\pi/4$	$157{,}5^\circ$	2,94	A_8
9	π	180°	2	A_9
10	$9\pi/8$	$202{,}5^\circ$	1,45	A_{10}
11	$5\pi/4$	225°	1,17	A_{11}
12	$11\pi/4$	$247{,}5^\circ$	1,04	A_{12}
13	$3\pi/2$	270°	1	A_{13}
14	$13\pi/8$	$292{,}5^\circ$	1,04	A_{14}
15	$7\pi/4$	315°	1,17	A_{15}
16	$15\pi/4$	$337{,}5^\circ$	1,45	A_{16}
17	2π	360°	2	A_{17}

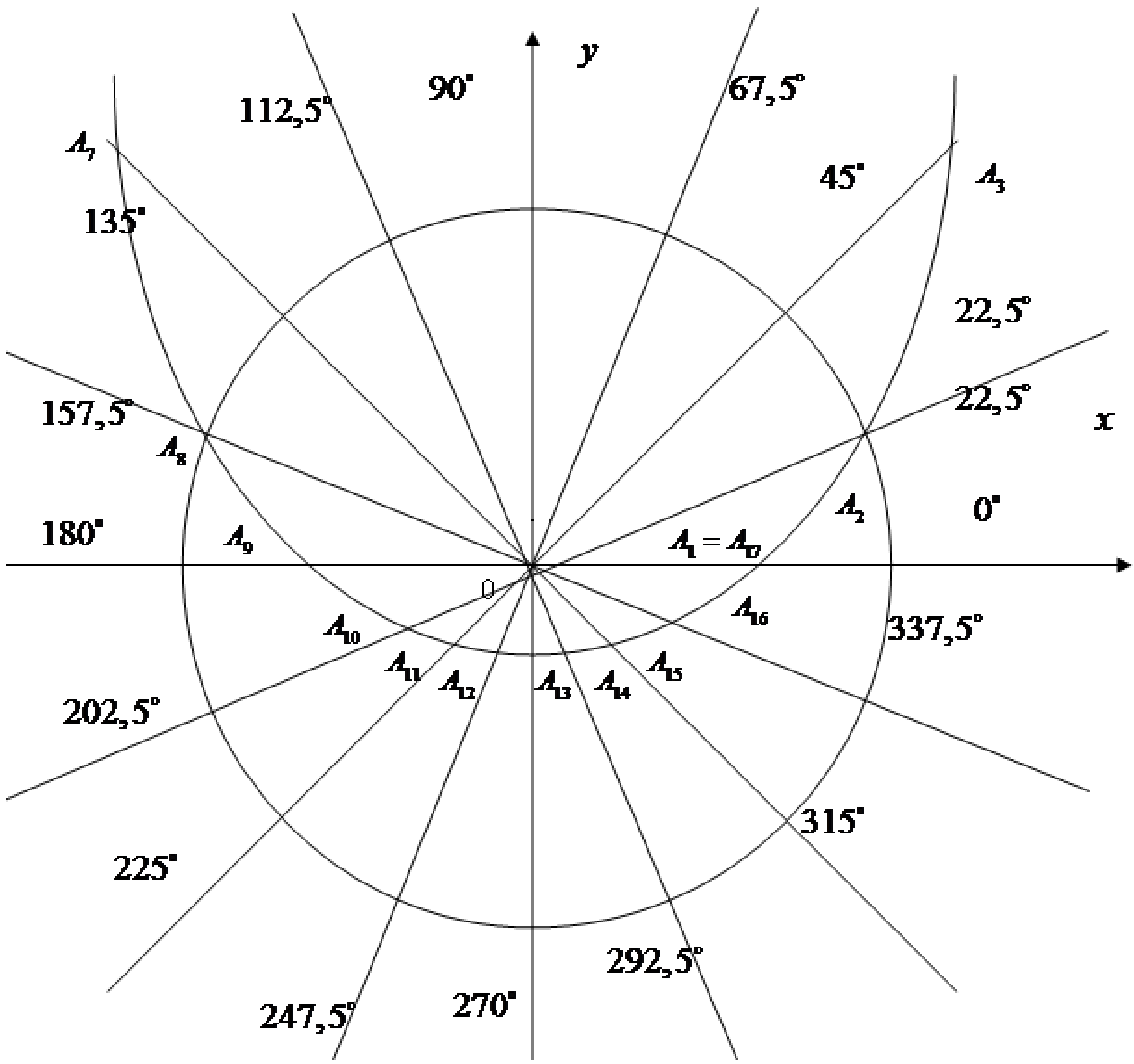

Рисунок 5 – График искомой кривой

Построив соответственные точки, получаем искомую линию (рисунок 5).
2. Найдем уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью. Для этого в данном уравнении полярные координаты заменим на прямоугольные:

$$x = r \cdot \cos\varphi; \; y = r \cdot \sin\varphi; \; r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.22}$$

Получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - y = 2\,.$$

Это уравнение линии в прямоугольной системе координат.
3. Освобождаясь от радикала, последнее уравнение можно записать в виде:

$$x^2 + y^2 = (2 + y)^2,$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1.$$

Итак, искомая линия – парабола.
Задача 12. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \tag{1.23}$$

Доказать ее совместность и решить двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) методом обратной матрицы.
Решение. Для доказательства совместности системы линейных уравнений (1.23) используем теорему Кронекера – Капелли: «Для того, чтобы система линейных уравнений была совместимой, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы A(матрица, составленная из коэффициентов возле неизвестных) равнялся рангу ее расширенной матрицы C(матрица, полученная из основной матрицы системы добавлением столбца свободных членов)».

Составим расширенную матрицу системы линейных уравнений (1.23) и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$C=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\3&2&-2&1\\1&-1&2&5\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0{,}5&-0{,}5&0{,}5\\3&2&-2&1\\1&-1&2&5\end{pmatrix}\cong$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0{,}5&-0{,}5&0{,}5\\0&0{,}5&-0{,}5&-0{,}5\\0&-1{,}5&2{,}5&4{,}5\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0{,}5&-0{,}5&0{,}5\\0&1&-1&-1\\0&-1{,}5&2{,}5&4{,}5\end{pmatrix}\cong \tag{1.24}$$

$$\cong\begin{pmatrix}1&0{,}5&-0{,}5&0{,}5\\0&1&-1&-1\\0&0&1&3\end{pmatrix}.$$

Здесь мы последовательно выполнили такие преобразования: 1) разделили вторую строку на 2; 2) умножили вторую строку на 3 и вычли из второй и первой строки третью; 3) умножили вторую строку на 2; 4) умножили вторую строку на – 1,5 и вычли из третьей строки.

Т. к число ненулевых строк в ступенчатой матрице равняется ее рангу и элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранг, то из (1.24) следует:

$$r(A)=r(C)=3.$$

Итак, согласно теореме Кронекера – Капелли, система уравнений является совместной.

1. Решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+0{,}5x_2-0{,}5x_3=0{,}5;\\ \qquad\qquad x_2-x_3=-1;\\ \qquad\qquad\qquad x_3=3,\end{cases} \tag{1.25}$$

Из системы (1.25) последовательно находим:

$$x_3=3,\ x_2=-1+3=2,\ x_1=0{,}5-0{,}5x_2+0{,}5x_3=0{,}5-1+1{,}5=1.$$

Система (1.25) эквивалентна (1.23), поэтому искомое решение:

$$x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3.$$

2. Найдем решение системы методом матричного исчисления по формуле:

$$X=A^{-1}B, \tag{1.26}$$

где $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&2&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$.

Обратную матрицу A^{-1} для матрицы A определим по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{21} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (1.27)$$

где $|A|$ – определитель (детерминант) матрицы A, $A_{ij} (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$ – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot(-2) - 1\cdot 2\cdot(-1) -$$

$$-3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) = 8 + 3 - 2 + 2 - 6 - 4 = 1.$$

Алгебраические дополнения A_{ij} найдем по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \qquad (1.28)$$

где M_{ij} – миноры элементов a_{ij} матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Подставим полученные значения $|A|$ и A_{ij} в формулу (1.27), получим:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -8 & 5 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix}. \qquad (1.29)$$

С учетом системы (1.29) из формулы (1.26) вытекает:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -8 & 5 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1-1\cdot 1+0\cdot 5\\ -8\cdot 1+5\cdot 1+1\cdot 5\\ -5\cdot 1+3\cdot 1+1\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Из полученного матричного уравнения вытекает, что
$x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3.$

Ответ: заданная система линейных уравнений совместна и имеет единственное решение: $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3.$

Задача 13. Найти $Y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3+6x-1}{6x^3-3x^2+5x+4}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3:

$$Y=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3+6x-1}{6x^3-3x^2+5x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{6-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}.$$

Т. к. при $x\to\infty$ $\dfrac{6}{x^2},\ \dfrac{1}{x^3},\ \ldots,\dfrac{4}{x^3}$ – бесконечно малые величины, имеем $Y=\dfrac{7}{6}$. При решении воспользовались следующей теоремой:

Теорема. Если $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c,\ c\neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет предел при $x\to+\infty$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{b}{c}$, т. е. предел дроби равняется пределу числителя, разделенному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

Ответ: $Y=\dfrac{7}{6}$.

Используемый прием является общим: чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, необходимо числитель и знаменатель разделить на высшую степень переменной в этих многочленах. Тогда предел частного двух многочленов равен:

– отношению коэффициентов при старших степенях переменной, если наибольшие степени числителя и знаменателя одинаковые;
– нулю, если степень знаменателя больше степени числителя;
– бесконечности, если степень знаменателя меньше степени числителя.

Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-7x^4+3x^3-4x^2+8x-9}{3x^5+5x^4-6x^3+7x^2-11x-2}=\frac{6}{3}=2;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-7x+12}{5x^2+9x^5-8x^3-5x-2}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-6x^2+1x-18}{3x^2-9x+24}=\infty.$$

Задача 14. Найти $Y=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Решение. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль. Знаменатель содержит иррациональное выражение $\sqrt{x+1}-2$. Избавимся от иррациональности в знаменатели; для чего умножим числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю выражение: $\sqrt{x+1}+2$. Имеем:

$$Y=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=$$

$$=(3+3)(\sqrt{3+1}+2)=24.$$

Ответ: $Y=24$.

Таким образом, чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель содержит иррациональность, нужно соответствующим способом избавиться от иррациональности.

Неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, которые содержат тригонометрические функции, раскрываются при помощи первого замечательного предела:

$$\lim_{a\to 0}\frac{\sin a}{a}=1. \qquad (1.30)$$

Задача 15. Найти $Y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$.

Решение. По свойству пределов [6,18], имеем:

$$Y=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{x}\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

Ответ: $Y=\dfrac{1}{9}$.

Важны также следствия из первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Задача 16. Найти $Y=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos a-\cos x}{x^2-a^2}$.

Решение. Воспользуемся тем, что при $x\to a$ имеем $\dfrac{x-a}{2}\to 0$, а потому:

$$\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\to 1.$$

$$Y=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{(x+a)(x-a)}=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a}\right)\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a}=\frac{\sin a}{2a}.$$

Ответ: $Y = \dfrac{\sin a}{2a}$.

Те же результаты можно получить и с помощью такой теоремы.

Теорема. При раскрытии неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ можно числитель и знаменатель заменять величинами, им эквивалентными.

Задача 17. Найти $Y = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin\left(x^2-9\right)}{x^2-4x+3}$.

Решение. Т. к. синус бесконечно малого угла эквивалентен самому этому углу (точнее, его величине в радианах), то

$$Y = \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-9)}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-1} = 3.$$

Ответ: $Y = 3$

Перейдем к задачам, связанных с раскрытием неопределенностей вида $\left[1^{\infty}\right]$. При этом могут быть применены следующие формулы (второй замечательный предел):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}; \tag{1.30}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}; \tag{1.31}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}^{m}; \tag{1.32}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+mx\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{m}; \tag{1.33}$$

Задача 18. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5\,\mathrm{tg}^2\,x\right)^{3\,\mathrm{ctg}^2\,x}$.

Решение. Чтобы решение этой задачи можно было свести к известной формуле, сделаем замену переменной, положив $\mathrm{tg}^2\,x = z$. Выразим $\mathrm{ctg}^2\,x$ в показателе степени через z:

$$\mathrm{ctg}^2\,x = \frac{1}{\mathrm{tg}^2\,x} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} z = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{tg}^2\,x = 0$, то $z \to 0$, при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}(1+5\,\mathrm{tg}^2\,x)^{3\mathrm{ctg}^2\,x}=\lim_{z\to 0}(1+5z)^{\frac{3}{z}}=\left(\lim_{z\to 0}(1+5z)^{\frac{1}{z}}\right)^3=\mathrm{e}^{15}.$$

Ответ: $Y=\mathrm{e}^{15}$.

Задача 19. Найти $Y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$.

Решение. Воспользуемся теоремой о нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\phi(x)}$. В случае существования конечных пределов $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}}\phi(\mathrm{x})$, имеет место формула

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\phi(x)}=\left[\lim_{x\to\infty}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\phi(x)},$$

согласно которой:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}=\left(\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{1}{x^3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=1,\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}=0^1=0.$$

Ответ: $Y=0$.

Задача 20. Найти $Y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{4}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{4}}=$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}\right]^2 1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}\right]^2 1}=\frac{(\mathrm{e}^7)^2}{(\mathrm{e}^5)^2}==\frac{\mathrm{e}^{14}}{\mathrm{e}^{10}}=\mathrm{e}^4.$$

Ответ: $\mathrm{Y}=\mathrm{e}^4$.

Задача 21. Найти производную функции $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. По формуле для производной дроби:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \qquad (1.34)$$

Считая, что $u = x$, $v = \sqrt{1+x^2}$, получим:

$$y' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - \left(\sqrt{1+x^2}\right)' x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}.$$

Выполняя дифференцирование, имеем:

$$y' = \frac{1\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,2x \cdot x}{1+x^2}.$$

После упрощений получим $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Ответ: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Задача 22. Найти производную функции $y = \cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$.

Решение. Для функции $y = \cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$ промежуточным аргументом является $u = \sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$, а промежуточным аргументом выражения $\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$ будет $v = \dfrac{1}{1+x}$. Поэтому данная функция имеет вид:

$$y = \cos u;\ u = \sqrt{v};\ v = \frac{1}{1+x}.$$

Применив формулу:

$$y' = (\cos u)'_u \cdot \left(\sqrt{v}\right)'_v \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)'_x, \qquad (1.35)$$

получим:

$$y' = -\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \left[-\frac{1}{\left(1+x^2\right)}\right].$$

Окончательно имеем:

$$y' = \frac{1}{2(1+x)^{\frac{2}{3}}}\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}\,.$$

Ответ: $y' = \dfrac{\sin\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}}{2(1+x)^{\frac{2}{3}}}$.

Задача 23. Найти производную функции $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,(x > 0)$.

Решение. Сначала введем вспомогательную функцию u, а затем продифференцируем непосредственно исходную функцию. Перепишем задачу иначе:

$$y = \operatorname{arcctg} u\,;\; u = \frac{1}{\sqrt{x}}\,;$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\left(-\frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'.$$

Поскольку $u = \dfrac{1}{x^2}$, то $u^2 = \dfrac{1}{x}$, тогда

$$y' = -\frac{1}{1+x^{-1}}\left(-\frac{1}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Окончательно получаем:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\,.$$

Ответ. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

Задача 24. Найти производную функции $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+\mathrm{e}}}$.

Решение. $y' = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x+\mathrm{e}}}\;\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}}(2x+1)$.

Ответ: $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x+\mathrm{e}}}}{2\sqrt{x^2+x+2}}(2x+1)$.

Задача 25. Найти производную функции $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Перепишем функцию в виде

$$y = \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}2x = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$.

Задача 26. Найти производную неявной функции $y^5 - 5axy + x^5 = 0$.

Решение. Дифференцируя обе части равенства, имеем:

$$5y^4y' - 5ay - 5axy' + 5x^4 = 0.$$

Группируем слагаемые:

$$y'(y^4 - ax) = ay - x^4.$$

Окончательно получаем:

$$y' = \frac{ay - x^4}{y^4 - ax}.$$

Ответ: $y' = (ay - x^4)/(y^4 - ax)$.

Задача 27. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\cos x}$ $(0 < x < \pi)$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \cos x \ln\sin x.$$

Теперь продифференцируем обе части последнего равенства.

$$\frac{1}{y}y' = -\sin x \ln\sin x + \cos x \frac{1}{\sin x}\cos x.$$

Умножим обе части этого равенства на y, который по условию задачи равен $(\sin x)^{\cos x}$. Получим окончательно:

$$y' = y\cdot\left(-\sin x\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

Пусть функция y от независимой переменной x задана через вспомогательную переменную (параметр) t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Тогда первая и вторая производные от y по x определяются по формулам:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'_t}; \tag{1.36}$$

$$y''_x = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad . \tag{1.37}$$

Задача 28. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\begin{cases} x = t^2 + 2t; \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$

Решение. Находим производные от x и от y по параметру t:

$$\frac{dx}{dt} = x'_t = 2t + 2;$$

$$\frac{dy}{dt} = y'_t = \frac{1}{t+1}.$$

Искомая производная от y по x:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{(t+1)(2t+2)} = \frac{1}{2(t+1)^2} = \frac{1}{2}(t+1)^{-2}.$$

Далее находим производную от y'_x по t, а затем искомую вторую производную от y по x как отношение производных от y' и от x по t:

$$(y'_x)'_t = \frac{dy'_x}{dt} = -(t+1)^{-3};$$

$$y''_{x^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-(t+1)^{-3}}{2(t+1)^4} \quad .$$

Ответ: $y'_x = \frac{1}{2}(t+1)^{-2}$; $y''_{x^2} = -\frac{1}{2}(t+1)^{-4}$.

Переходим к решению задач о наибольших или наименьших значениях величин. Для решения таких задач необходимо, исходя из условия, выбрать независимую переменную и выразить исследуемую величину через эту переменную, а затем найти искомое наибольшее или наименьшее значение полученной функции. При этом интервал изменения независимой переменной может быть конечным или бесконечным и также определяется из условия задачи.

Задача 29. Машина доставляет зерно на элеватор по степной дороге, а потом по шоссе. Под каким углом к шоссе должна проходить степная дорога, чтобы машины тратили наименьшее время на весь путь, если по степной дороге скорость машины в k раз меньше, чем по шоссе?

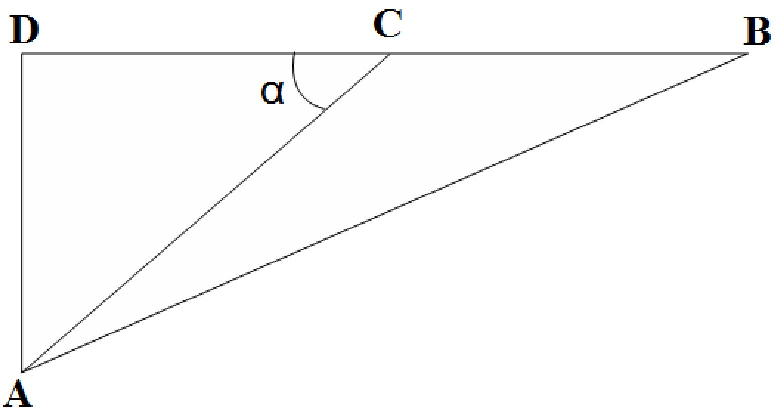

Рисунок 6 – Графическое изображение местности

Р*ешение.* Пусть машина доставляет зерно из пункта А в пункт В. Отрезок АС изображает степную дорогу, а отрезок СВ – шоссе (рисунок 6). Время, потраченное на перевозку зерна, состоит из общего времени поездки по дорогам АС и СВ. Обозначим скорость движения по дороге AC через v, тогда, согласно условию задачи, скорость по шоссе равна $(\mathrm{k}\cdot v)$.

Обозначим угол, под которым степная дорога проходит до шоссе через α, величину отрезка $\mathrm{AD}\perp\mathrm{DB}$ через ℓ, а величину отрезка DB через a.

Рассмотрим Δ ADC:

$$AC=\frac{1}{\sin\alpha},\ CB=a-\ell\operatorname{ctg}\alpha.$$

Время движения машины рассмотрим как функцию угла α:

$$f(\alpha)=\frac{\ell}{v\sin\alpha}+\frac{a-\ell\operatorname{ctg}\alpha}{kv}=\frac{1}{v\sin\alpha}+\frac{a}{kv}-\frac{\ell}{kv}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Определим критические точки. Найдем первую производную:

$$\mathrm{t}'(\alpha)=\frac{1}{\mathrm{v}}\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+0+\frac{1}{\mathrm{k}}\frac{1}{\sin^2\alpha}\right);$$

$$t'(\alpha)=0;-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+0+\frac{1}{k}\frac{1}{\sin^2\alpha}=0;$$

$$k\cos\alpha=1;\ \cos\alpha=\frac{1}{k}.$$

Для исследования критической точки найдем вторую производную:

$$t''(\alpha)=\frac{\ell}{v}\left(-\frac{\sin^3\alpha-2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{k\sin^4\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\ell}{v}\left(\frac{\sin\alpha\left(1+\cos^2\alpha\right)}{\sin^4\alpha}-\frac{2\cos\alpha}{k\sin^3\alpha}\right)=\frac{1}{v}\left(\frac{k+k\cos^2\alpha-2\cos\alpha}{k\sin^3\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\ell}{kv}\frac{k+k\cos^2\alpha-2\cos\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Вычислим значение второй производной при $\cos\alpha = \frac{1}{k}$:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{k^2}} = \sqrt{\frac{k^2-1}{k^2}};$$

$$t''(\alpha) = \frac{\ell}{kv}\cdot\frac{k+k\frac{1}{k^2}-2\frac{1}{k}}{\left(\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\right)^3} = \frac{1}{kv}\cdot\frac{k^3\left(k-\frac{1}{k}\right)}{\left(k^2-1\right)\sqrt{k^2-1}} = \frac{l\cdot k}{v\sqrt{k^2-1}} > 0\cdot$$

Из рисунка 6 видно, что $\cos\alpha = \frac{1}{k} \le \frac{a}{AB}$.

На указанном промежутке функция $\mathrm{t}(\alpha)$ имеет единственный экстремум – минимум. Следовательно, с ним совпадает наименьшее значение функции.

Ответ. Если скорость по шоссе в k раз больше, чем по степной дороге, то степная дорога должна проходить относительно шоссе под углом, определяемым соотношением $\cos\alpha = \frac{1}{k}$.

Чтобы исследовать функцию и построить ее график, необходимо:

1) найти область существования функции;
2) найти (если возможно) точки пересечения графика с осями координат;
3) исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность;
4) найти точки разрыва, исследовать их;
5) определить интервалы монотонности, точки локальных максимумов и минимумов графика функции;
6) восстановить области выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба графика функции;
7) найти асимптоты кривой;
8) построить график функции, учитывая проведенные исследования.

Задача 30. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график, использую данные исследования.

$$y = \frac{x^3-6x^2+25x-28}{2(x-2)^2}.$$

Решение.

1. Область определения. Функция существует при всех значениях x, за исключением $x = 2$.

2. Точки пересечения графика с осями координат.

Находим точку пересечения с осью Оу. Для этого положим в уравнении $x=0$, тогда $y=-3{,}5$. Следовательно, график данной функции пересекает ось Оу в точке (0; –3,5). Найдем точку пересечения с осью Ох. Положим $y=0$, тогда получим уравнение

$$x^3-6x^2+25x-28=0,$$

откуда $\mathrm{x}=1{,}5$. Остальные корни мнимые. Следовательно, график данной функции пересекает ось Ох в точке (1,5;0).

3. Функция не периодическая, общего типа, то есть ее график не является симметричным относительно координатных осей.

4. Функция в точке $x=2$ имеет разрыв второго рода:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}=\frac{x^3-6x^2+25x-28}{2(x-2)^2}=\infty.$$

5. Определения точек максимума и минимума. Находим первую производную и приравниваем ее к нулю и бесконечности. Получаем:

$$y'=\frac{\left(3x^2-12x+25\right)2(x-2)^2-4(x-2)\left(x^3-6x^2+25x-28\right)}{4(x-2)^4}=$$

$$=\frac{x^3-6x^2-x+6}{2(x-2)^3},$$

$$x^3-6x^2-x+6=0.$$

Корни этого уравнения: –1;1;6.

Приравнивая к бесконечности, находим:

$$\frac{x^3-6x^2-x+6}{2(x-2)^3}=\infty,$$

откуда $x-2=0$, т. е. $x=2$. Мы получили значение x, при котором функция не существует.

Для исследования на максимум и минимум в стационарных точках (корни уравнения $y'=0$) находим вторую производную данной функции:

$$y''=\frac{13\left(x-\frac{8}{13}\right)}{(x-2)^4}.$$

Определим знак второй производной в полученных точках:

$$y''(-1)<0;\, y''(1)>0;\, y''(6)>0.$$

Следовательно, при $x_1=-1$ функция достигает максимума, при $x_2=1$ и $x_3=6$ – минимума. Значения функции при этих значениях x, соответственно равны $y(-1)=-3{,}3$; $y(1)=-4$; $y(6)=3{,}8$.

Зная точки максимума и минимума, легко установить промежутки возрастания и убывания функции:

при $-\infty < x < -1$ функция возрастает;
при $-1 < \text{x} < 1$ функция убывает;
при $1 < x < 2$ функция возрастает;
при $2 < x < 6$ функция убывает;
при $6 < x < \infty$ функция возрастает.

6. Установление промежутков выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба. Для нахождения точек перегиба приравниваем вторую производную к нулю. Получаем $y'' = 0$, то есть $x = \frac{8}{13}$ вторая производная изменяет знак:

$$\text{y}''\left(\frac{8}{13} - \text{h}\right) < 0;\; y''\left(\frac{8}{13} + h\right) > 0.$$

Чтобы установить области выпуклости и вогнутости , рассмотрим знак второй производной в следующих промежутках:

$$(-\infty; \frac{8}{13}),\ (\frac{8}{13}; 2),\ (2\ ; +\infty).$$

Имеем:

при $-\infty < x < \frac{8}{13}$, $y'' < 0$ – кривая выпукла;

при $\frac{8}{13} < x < 2$, $y'' > 0$ – кривая вогнута;

при $2 < x < +\infty$, $y'' > 0$ – кривая вогнута.

7. Определение асимптот. Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде:

$$y = kx + b, \tag{1.38}$$

где
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \tag{1.39}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]. \tag{1.40}$$

По формулам (1.39) и (1.40) находим k и b:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 25x - 28}{2x(x-2)^2} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 - 6x^2 + 25x - 28}{2x(x-2)^2} = \frac{1}{2} x \right] = -1.$$

Согласно (1.38), имеем $y=\frac{1}{2}x-1$. Найдем вертикальные асимптоты. Для этого решим уравнение $\frac{1}{y}=0$, то есть $x-2=0$, $x=2$. Поэтому ветви графика будут неограниченно приближаться к вертикальной асимптоте в верхней ее части. Теперь установим взаимное расположение кривой и асимптоты $y=\frac{1}{2}x-1$. Для этого составим разность ординат кривой и асимптоты:

$$\frac{x^3-6x^2+25x-28}{2x(x-2)^2}-\frac{1}{2}x+1=\frac{13x-20}{2(x-2)^2}.$$

Эта разность равна нулю при $x=\frac{20}{13}$, т. е. график кривой пересекает асимптоту в точке $\left(-\frac{3}{13};\frac{20}{13}\right)$. На промежутке $\left(-\infty;\frac{20}{13}\right)$ эта разность отрицательна, следовательно, график кривой находится под асимптотой, а на промежутке $\left(\frac{20}{13};+\infty\right)$ она положительна, значит, график находится над асимптотой.

Приступим к построению графика. Прежде всего наносим на координатную плоскость асимптоты, затем точки максимума и минимума и точку перегиба. Зная промежутки возрастания и убывания функции, а также промежутки выпуклости и вогнутости, строим график данной функции (1.7).

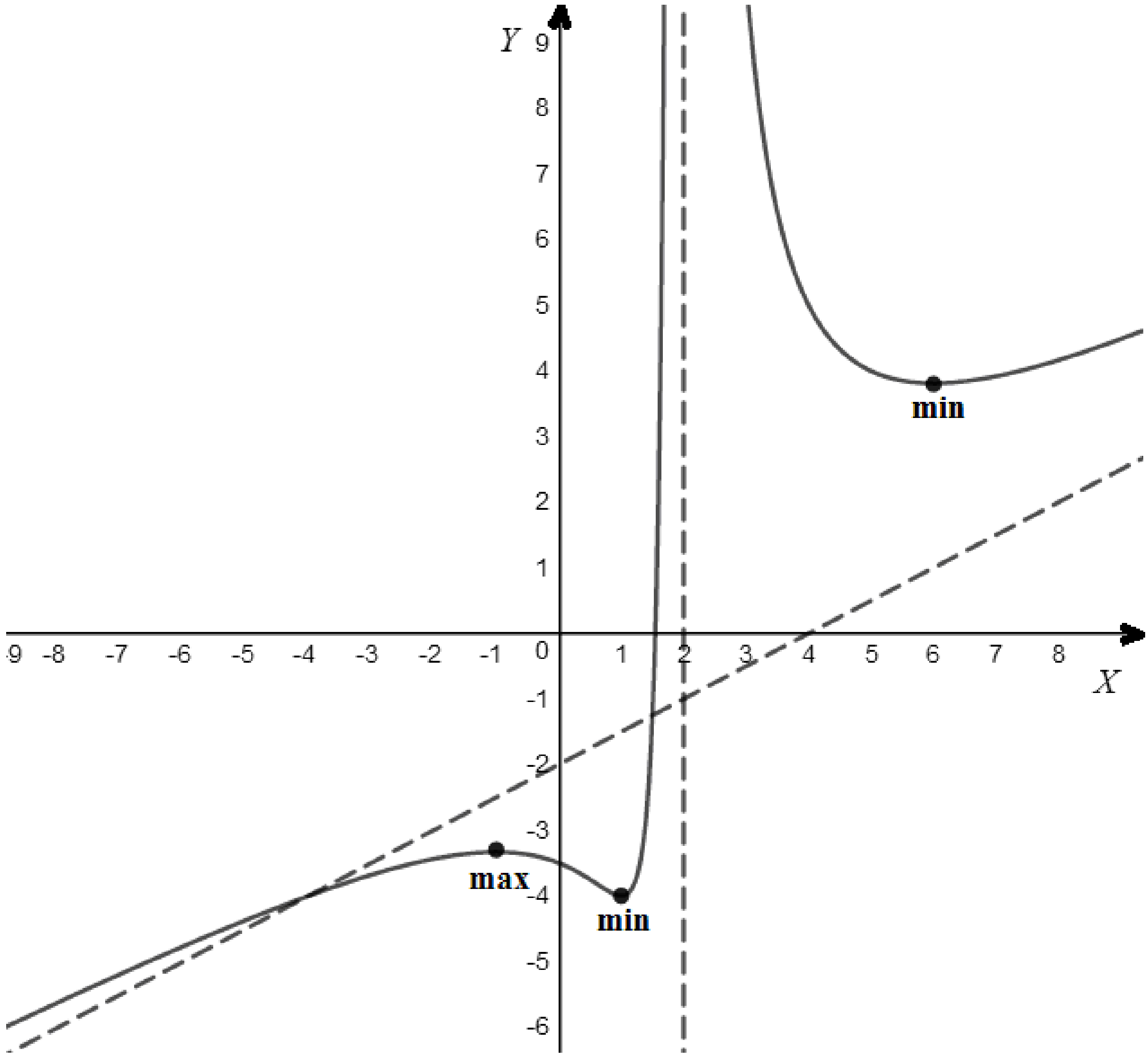

Рисунок 7 – График функции $y=\dfrac{x^3-6x^2+25x-28}{2(x-2)^2}$

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Определители второго и третьего порядков и их свойства.
2. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
3. Понятие об определителях высших порядков.
4. Матрицы. Основные определения. Действия над матрицами.
5. Обратная матрица, теорема о существовании обратной матрицы.
6. Ранг матрицы и методы его вычисления.
7. Системы линейных алгебраических уравнений, основные определения.
8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
9. Метод обратной матрицы решения систем линейных уравнений.
10. Решение линейных систем уравнения методом Гаусса.
11. Критерий Кронекера – Капелли совместности системы линейных уравнений.
12. Векторы и линейные действия с ними.
13. Проекция вектора на ось, направляющие косинусы и длина вектора.
14. Разложение вектора по базису.
15. Деление отрезка в данном отношении.
16. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства, формулы вычисления и применение.
17. Условия коллинеарности, перпендикулярности и компланарности векторов.
18. Декартова прямоугольная и полярная системы координат.
19. Линии на плоскости и их уравнения.
20. Нахождение уравнения прямой по ее геометрическим свойствам. Полярные, параметрические, векторные уравнения прямой.
21. Прямая на плоскости, разные способы ее задания.
22. Общее уравнение прямой и его исследование.
23. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
24. Расстояние от точки до прямой.
25. Понятие о кривой второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Канонические уравнения и графики этих линий.
26. Уравнение прямой в пространстве. Прямая линия в пространстве, направляющий вектор. Различные формы ее уравнений.
27. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
28. Поверхность в пространстве. Уравнения плоскости в пространстве, нормальный вектор.
29. Общее уравнение плоскости и его исследование.

30. Понятие поверхности второго порядка: цилиндрические поверхности, конические поверхности, сфера, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды.
31. Канонические уравнения и графики поверхностей второго порядка.
32. Понятие функции и способы ее задания, классификация элементарных функций.
33. Монотонные, четные и нечетные, периодические функции.
34. Неявно заданные функции. Параметрически заданные функции. Обратные функции.
35. Предел функции одной переменной. Предел числовой последовательности. Предел функции в точке и при $x \to \infty$.
36. Бесконечно малые величины, их свойства.
37. Основные теоремы о пределах.
38. Первый и второй замечательные пределы.
39. Сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые функции.
40. Раскрытие основных типов неопределенностей.
41. Непрерывность функции в точке, точки разрыва, их классификация. Действия над непрерывными функциями.
42. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
43. Производная, ее определение и свойства. Основные правила дифференцирования функции.
44. Вычисление производной сложной функции.
45. Производная функции, заданной параметрически.
46. Производная неявно заданной функции.
47. Производная обратной функции.
48. Производная показательно-степенной функции.
49. Дифференциал и его свойства.
50. Производные и дифференциалы высших порядков.
51. Основные теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной.
52. Асимптоты, монотонность, вогнутость и выпуклость функции одной переменной.
53. Применение производной к исследованию функций и построению их графиков.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по теме
«Векторная и линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Задание 1. В задачах 11–20 даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Нужно с помощью векторной алгебры найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной с вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать схематичный чертеж.

11. $\mathbf{A_1(4;2;5)}$, $\mathbf{A_2(0;7;2)}$, $\mathbf{A_3(0;2;7)}$, $\mathbf{A_4(1;5;0)}$,
12. $\mathbf{A_1(4;4;10)}$, $\mathbf{A_2(4;10;2)}$, $\mathbf{A_3(2;8;4)}$, $\mathbf{A_4(9;6;4)}$,
13. $\mathbf{A_1(4;6;5)}$, $\mathbf{A_2(6;9;4)}$, $\mathbf{A_3(2;10;10)}$, $\mathbf{A_4(7;5;9)}$,
14. $\mathbf{A_1(3;5;4)}$, $\mathbf{A_2(8;7;4)}$, $\mathbf{A_3(5;10;4)}$, $\mathbf{A_4(4;7;8)}$,
15. $\mathbf{A_1(10;6;6)}$, $\mathbf{A_2(-2;8;2)}$, $\mathbf{A_3(6;8;9)}$, $\mathbf{A_4(7;10;3)}$,
16. $\mathbf{A_1(1;8;2)}$, $\mathbf{A_2(5;2;6)}$, $\mathbf{A_3(5;7;4)}$, $\mathbf{A_4(4;10;9)}$,
17. $\mathbf{A_1(6;6;5)}$, $\mathbf{A_2(4;9;5)}$, $\mathbf{A_3(4;6;11)}$, $\mathbf{A_4(6;9;3)}$,
18. $\mathbf{A_1(7;7;2)}$, $\mathbf{A_2(5;7;7)}$, $\mathbf{A_3(5;3;1)}$, $\mathbf{A_4(2;3;7)}$,
19. $\mathbf{A_1(8;6;4)}$, $\mathbf{A_2(10;5;5)}$, $\mathbf{A_3(5;6;8)}$, $\mathbf{A_4(8;10;7)}$,
20. $\mathbf{A_1(7;7;3)}$, $\mathbf{A_2(6;5;8)}$, $\mathbf{A_3(3;5;8)}$, $\mathbf{A_4(8;4;1)}$.

Задание 2.

21. Уравнения одной из сторон квадрата $x+3y–5=0$. Составить уравнения трех других сторон квадрата, если P(–1;0) – точка пересечения его диагоналей. Сделать чертеж.
22. Дано уравнение одной из сторон ромба $x–3y+10=0$ и одной из его диагоналей $x+4y–4=0$; диагонали ромба пересекаются в точке P(0;1). Найти уравнение других сторон ромба. Сделать чертеж.
23. Уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y–4=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x–2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма. Сделать чертеж.
24. Даны две вершины A(–3;3) и B(5; –1) и точка D(4;3) пересечения высот треугольника. Составить уравнение его сторон. Сделать чертеж.
25. Даны вершины A(–3; –2), B(4; –1), C(1;3) трапеции ABCD (AD||BC). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции. Сделать чертеж.

26. Даны уравнения двух сторон треугольника $5x–4y+15=0$ и $4x+y–9=0$. Его медианы пересекаются в точке $P(0;2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Сделать чертеж.
27. Даны две вершины $A(2; –2)$ и $B(3; –1)$ и точка $P(1;0)$ пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из третьей вершины C. Сделать чертеж.
28. Даны уравнения двух высот треугольника $x+y=4$ и $y=2x$ и одна из его вершин $A(0;2)$. Составить уравнение сторон треугольника. Сделать чертеж.
29. Даны уравнения двух медиан треугольника $x–2y+1=0$ и $y–1=0$ и одна из его вершин $A(1;3)$. Составить уравнение сторон треугольника. Сделать чертеж.
30. Две стороны треугольника заданы уравнениями $5x–2y–8=0$ и $3x–2y–8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны. Сделать чертеж.

Задание 3.

31. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5;0)$ относятся как 2:1.
32. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(–1;0)$ вдвое меньше расстояния от нее до прямой $x= – 4$.
33. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой до точки $A(2;0)$ и прямой $5x+8=0$ относятся как 5:4.
34. Составить уравнение и построить линию, расстояние от каждой точки которой вдвое больше до точки $A(4;0)$, чем до точки $B(1;0)$.
35. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой до точки $A(2;0)$ и прямой $2x+5=0$ относятся как 4:5.
36. Составить уравнение и построить линию, расстояние каждой точки которой от точки $A(3;0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26;0)$.
37. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;2)$ и прямой $y–4=0$.
38. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от оси ординат и от окружности $x^2+y^2=4x$.

Замечание. Напомним, что в качестве расстояния от точки **А** до фигуры **Ф** принимается наименьшее из расстояний между точкой **А** и точками фигуры **Ф**.

39. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2;6)$ и прямой $y+2=0$.
40. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки $A(–4;0)$ в три раза дальше, чем от начала координат.

Задание 4. В задачах 51–60 каждую из систем линейных алгебраических уравнений исследовать на совместность и решить двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

51. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

52. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

53. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

54. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

55. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

Задание 5. В задачах 111–120 найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

111. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

112. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

113. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

114. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

115. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

116. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$.

117. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.

118. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{3}{3x-3}}$.

119. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

120. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\operatorname{ctg}3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

Задание 6. В задачах 141–150 найти производные $\dfrac{dx}{dy}$ для данных функций.

141. а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$;

в) $y=\ln\sin(2x+5)$; г) $y=x^{x^x}$;

д) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)=5x$.

142. а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}e^{2x}$; г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $x-y+\operatorname{arctg}y=0$.

143. а) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$; б) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x^2 2x}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y=x^{\ln x}$

д) $y\sin x=\cos(x-y)$.

144. а) $y=\dfrac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$; б) $y=\sin x-x\cos x$;

в) $y=x^m\ln x$; г) $y=x^{-\operatorname{tg}x}$;

д) $\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

145. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; б) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$;

в) $y=\dfrac{x\ln x}{x-1}$; г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$;

д) $(e^x-1)\cdot(e^y-1)-1=0$.

146. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+5\sqrt[5]{x^3+1}$; б) $y=2\operatorname{tg}^3(x^2+1)$;

в) $y=3^{\operatorname{arctg} x^3}$; г) $y=(\operatorname{arctg} x)^x$;

д) $y^2x=e^{\frac{y}{x}}$.

147. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x^2+\ln\cos x$;

в) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=(x+x^2)^x$;

д) $x^3+y^3-3axy=0$.

148. а) $y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\dfrac{5}{x}}$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

в) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$; г) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

д) $x-y+a\sin y=0$.

149. а) $y=5\sqrt[5]{x^2+x+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=2^xe^{-x}$;

в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=(\cos x)^x$;

д) $\ln y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

150. а) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x$;

в) $y=\operatorname{tg} x\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$; г) $y=(\cos x)^{x^2}$;

д) $x-y+e^y(\operatorname{arctg} x)=0$

Задание 7. В задачах 151–160 найти производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для данных функций: а) $y = f(x)$; б) $\begin{cases} x = \phi(x), \\ y = \psi(x). \end{cases}$

151. а) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; б) $x = \cos\frac{t}{2}$; $y = t - \sin t$.

152. а) $y = \ln \operatorname{ctg} 2x$; б) $x = t^3 + 8t$; $y = t^5 + 2t$.

153. а) $y = x^3 \ln x$; б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

154. а) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; б) $x = e^{2t}$, $y = \cos t$.

155. а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $x = 3\cos^2 t$, $y = 2\sin^3 t$.

156. а) $y = e^{\operatorname{ctg} 3x}$; б) $x = 3\cos t$, $y = 4\sin^2 t$.

157. а) $y = e^x \cos x$; б) $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

158. а) $y = e^{-x} \sin x$; б) $x = 2t - t^3$, $y = 2t^2$.

159. а) $y = x\sqrt{1 + x^2}$; б) $x = t + \ln\cos t$, $y = t - \ln\sin t$.

160. а) $y = xe^{-x^2}$; б) $x = \ln t$, $y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.

Задание 8

181. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема **V** . Каковы должны быть высота ведра и радиус его дна, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество жести?
182. Равнобедренный треугольник, вписанный в круг радиуса **R** , вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?
183. Прямоугольник вписан в эллипс с осями **2a** и **2b**. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?
184. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса **R**.
185. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного вокруг шара радиуса **R.**
186. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости **V** будет иметь наименьшую полную поверхность?
187. Окно должно иметь форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр окна равен **a**. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

188. В точках **A** и **B**, расстояние между которыми равно a, находятся источники света соответственно с силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. На отрезке **AB** найти наименее освещенную точку $\mathbf{M}_0$.

Замечание. Освещенность точки источником света силой **F** обратно пропорциональна квадрату ее расстояния **r** от источника света.

189. Из круглого бревна, диаметр которого равен **d**, требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка имела наибольшее сопротивление на изгиб?

Замечание. Сопротивление балки на изгиб пропорционально произведению ширины **x** ее поперечного сечения на квадрат его высоты **y**: $Q = kxy^2$, $k = \text{const}$.

190. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема **V**. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака, равна $\mathbf{P}_1$ руб., а стенок – $\mathbf{P}_2$ руб. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

Задание 9. В задачах 191–200 исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и построить ее график, используя данные исследования.

191. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$.

192. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

193. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

194. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

195. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

196. $y = \dfrac{4x^3+5}{x}$.

197. $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$.

198) $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$.

199. $y = \dfrac{4x^3}{x^3-1}$.

200. $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

Задание 10. В задачах 201–210 исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и построить ее график, используя данные исследования

201. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

202. $y = xe^{-x^2}$.

203. $y = e^{2x-x^2}$.

204. $y = x^2 - 2\ln x$.

205. $y=\ln\left(x^2-4\right)$.

206. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

207. $y=\ln\left(x^2+1\right)$.

208. $y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$.

209. $y=\ln\left(9-x^2\right)$.

210. $y=(x-1)e^{3x+1}$.

Задание 11. В задачах 41–50 линия задана уравнением $r=r(\phi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\phi=0$ до $\phi=2\pi$ и придавая значения φ через промежуток $\pi/8$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, в какой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия.

41. $r=\dfrac{1}{\cos\phi}$,

42. $r=\dfrac{4}{2-3\cos\phi}$,

43. $r=\dfrac{1}{2+2\cos\phi}$,

44. $r=\dfrac{10}{2+\cos\phi}$,

45. $r=\dfrac{1}{3(1-\cos\phi)}$,

46. $r=\dfrac{1}{2+\cos\phi}$,

47. $r=\dfrac{8}{3-\cos\phi}$,

48. $r=\dfrac{5}{3-4\cos\phi}$,

49. $r=\dfrac{3}{1-2\cos\phi}$,

50. $r=\dfrac{5}{6+3\cos\phi}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемышев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. / Д. В. Беклемышев – М.: Наука, 1987. – 320 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. / Г. Н. Берман – М.: Наука, 1967.
3. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский – М.: Наука, 1988. – 431с.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1983. – 228 с.
5. Арутюнов Ю.С. Высшая математика. / Ю. С. Арутюнов, А. П. Полозков, Д. П. Полозков; под ред. Ю. С.Арутюнова. – М.: Высш. шк., 1985. – 144 с.
6. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик – К.: Вища шк., 1993. – 648 с.
7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. / Г. И. Запорожец – М.: Высш. шк., 1964. – 437 с.
8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. / Д. В. Клетеник. изд. 2 – 6. – М.: Гостехиздат, Физматгиз, 1954 – 1960.
9. Корн Г.Справочник по математике. / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1984. – 831 с.
10. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: в 3т. / Л. Д. Кудрявцев– М.: Высш. шк., 1988.
11. Мантуров О. В. Курс высшей математики. / О. В. Мантуров – М.: Высш. шк., 1991. – 448 с.
12. Мантуров О. В. Курс высшей математики. / О. В. Мантуров, Н. М. Матвеев – М.: Высш. шк., 1986. – 399 с.
13. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: в 3т. / Н. С. Пискунов – М.: Наука, 1985. – Т. 1–3.
14. Федорчук В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. / В. В. Федорчук – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 329 с.
15. Шестаков А. А. Курс высшей математики. / А. А. Шестаков, И. А. Малышева, Д. П. Полозков – М.: Высш. шк., 1987. – 320с.
16. Шкіль М. І., Колесник Т. В. Вища математика. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1986. – 512 с.
17. Шкіль М. І. Вища математика. / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1985. – 391с.
18. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов – М.: Высш. шк., 1978. – Т. 1. – 384 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Вовк Леонид Петрович
Королев Евгений Александрович
Кисель Екатерина Сергеевна

ПРАКТИКУМ. ВЕКТОРНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ (ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 38.03.05 «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА», 09.03.02 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ», 38.03.04 «ГОСУДАРСТВЕННОЕ И МУНИЦИПАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 08.05.03 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ»)

Подписано к выпуску 14.04.2017 г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. л. 3,13. Зак. № 127.

Государственное образовательное учереждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, ДНР, г. Горловка, ул. Кирова, 51
E-mail: print-adi@adidonntu.ru

Редакционно-издательский отдел