МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор АДИ ГОУВПО «ДонНТУ»
М.Н. Чальцев
14.03.2017 г.

Кафедра «Высшая математика»

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО КУРСУ«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»
(РАЗДЕЛ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ»)
ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 08.05.03 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ», 38.03.04 «ГОСУДАРСТВЕННОЕ И МУНИЦИПАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ», 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»**

2/25-2017-01

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия
факультета «Экономика и управление»
Протокол № 6 от 15.02.2017 г.
«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия
факультета «Автомобильные дороги»
Протокол № 6 от 15.02.2017 г.
«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия
факультета «Транспортные технологии»
Протокол № 2 от 17.02.2017 г.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра
«Высшая математика»
Протокол № 7 от 21.01.2017 г.
«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия
факультета «Автомобильный транспорт»
Протокол № 3 от 3.02.2017 г.

Горловка – 2017

УДК 512.6 (071)

Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе по курсу «Высшая математика» (Раздел «Элементы векторной алгебры») для студентов направлений подготовки: 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», 08.03.01 «Строительство», 08.05.03 «Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление», 23.03.01 «Технология транспортных процессов», 27.03.04 «Управление в технических системах») [Электронный ресурс] / составитель: Н.Ф. Ефремов. – Электрон. данные. – Горловка: ГОУВПО «ДонНТУ» АДИ, 2017. – 50 с.

Пособие содержит краткие сведения из теории векторов и их практических применений. Приведены решения типовых примеров, вопросы для самоконтроля, упражнения для самостоятельной работы и индивидуальные домашние задания.

Составитель:	Ефремов Н.Ф.
Ответственный за издание:	Вовк Л.П., д-р техн. наук, проф.
Рецензент:	Королев Е.А., канд. физ.-мат. наук, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

Векторная алгебра – раздел математики, в котором изучаются величины, которые характеризуются не только их числовым значением, а и направлением. Такие величины довольно часто встречаются в механике, физике, электротехнике, гидравлике, теории механизмов и задаются в виде вектора. В векторной алгебре векторы рассматриваются как математические объекты, определяются действия над ними, выясняются их свойства и практические применения. Аппарат векторной алгебры широко используется как в других разделах математики, так и в инженерных дисциплинах. Переменные векторные величины изучаются в *векторном анализе*, знакомство с которыми состоится позже.

1 ВЕКТОР. ВИДЫ ВЕКТОРОВ

Векторные величины (сила, скорость, ускорение) задают с помощью вектора. *Вектор* – это направленный отрезок, в котором названы его начало и конец. Обозначается вектор символами $\overline{AB}$ или $\overline{a}$, где A – начало, B – конец вектора (рисунок 1.1).

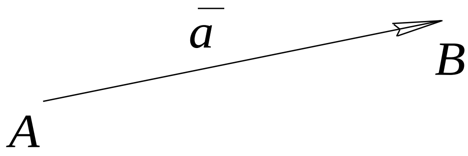

Рисунок 1.1 – Вектор $\overline{AB} = \overline{a}$

Длина вектора называется его *модулем* и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{a}\right|$. Вектор, модуль которого равняется единице, называют *единичным.* Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется *ортом* вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a^{\circ}}$. Вектор называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают.

Векторы называются:

– *коллинеарными* ($\overline{a}$ // $\overline{b}$), если они лежат на одной или параллельных прямых;

– *равными*, если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют равные модули;

– *противоположными*, если они коллинеарные, равные по модулю и *противоположно* направленные;

– *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.

Пример 1. Пусть ABC – произвольный треугольник; M, N, P – середины его сторон (рисунок 1.2). Привести примеры коллинеарных, равных и противоположных векторов.

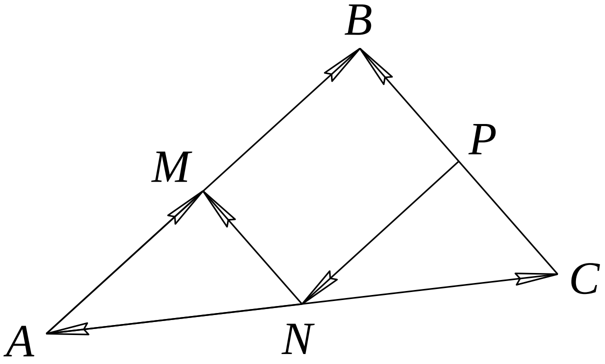

Рисунок 1.2 – Виды векторов

Решение. Исходя из определения коллинеарных, равных, и противоположных векторов, имеем:

а) коллинеарные: $\overline{AM}\,//\,\overline{AB}\,//\,\overline{PN}$; $\overline{NM}\,//\,\overline{CB}$;

б) равные: $\overline{AM}=\overline{MB}$; $\overline{NM}=\overline{PB}=\overline{CP}$;

в) противоположные: $\overline{MB}$ и $\overline{PN}$; $\overline{NA}$ и $\overline{NC}$, то есть $\overline{MB}=-\overline{PN}$; $\overline{NA}=-\overline{NC}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие величины называются скалярными, векторными? Привести примеры.
2. Что называется вектором, ортом, единичным и нулевым вектором?
3. Какие векторы называются коллинеарными, равными, противоположными, компланарными?

2 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

К линейным операциям над векторами относят сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число.

Суммой векторов является вектор. Сложение двух векторов осуществляется по правилу параллелограмма (рисунок 2.1, а) или треугольника (рисунок 2.1, б) Сложение *n* векторов ($n \geq 2$) выполняется по правилу многоугольника (рисунок 2.1, в).

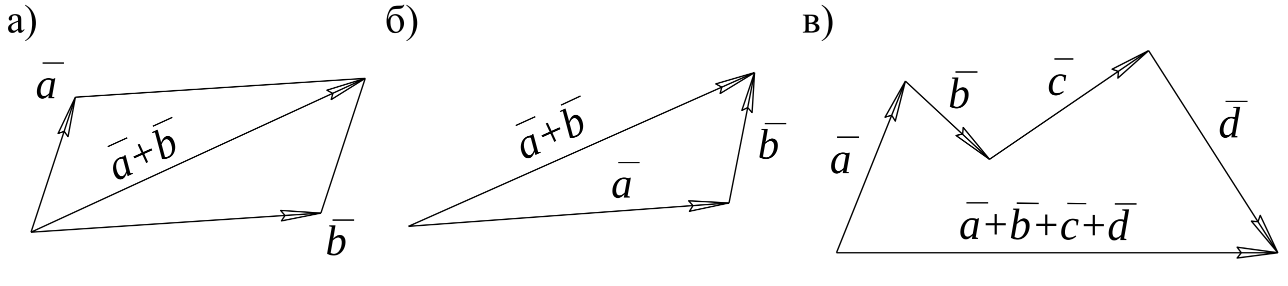

Рисунок 2.1 – Сложение векторов

Разностью векторов $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)$ является такой вектор $\overline{c}$, что $\overline{c}+\overline{b}=\overline{a}$ (рисунок 2.2), или $\overline{c}=\overline{a}+(-\overline{b})$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ является такой вектор $\lambda\overline{a}$, что $\left|\lambda\overline{a}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{a}\right|$ и направление которого совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, или противоположный $\overline{a}$, если $\lambda < 0$ (рисунок 2.3).

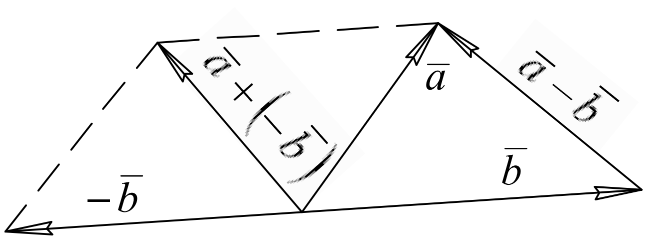

Рисунок 2.2 – Вычитание векторов

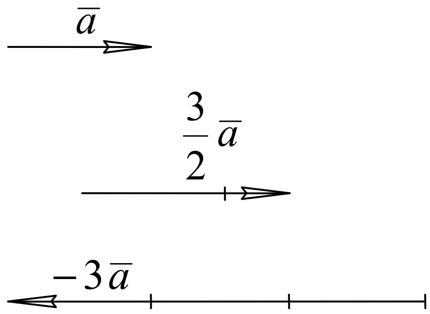

Рисунок 2.3 – Умножение вектора на скаляр

Свойства линейных операций над векторами:

1. Коммутативность относительно сложения векторов

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}.$$

2. Ассоциативность относительно сложения векторов

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}).$$

3. Ассоциативность относительно умножения чисел

$$\lambda(\mu\overline{a}) = (\lambda\mu)\overline{a}\,.$$

4. Дистрибутивность относительно сложения чисел

$$(\lambda + \mu)\cdot\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}\,.$$

5. Дистрибутивность относительно сложения векторов

$$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}\,.$$

Замечание. Из приведенных свойств следует, что тождественные преобразования при линейных операциях с векторами выполняют так же, как в обычной алгебре: векторные слагаемые можно переставлять местами, объединять их скобками, выносить за скобки как скалярные, так и векторные множители.

Если $\overline{a}\,//\,\overline{b}$, то исходя из операции умножения вектора на число, имеем:

$$\overline{a} = \lambda\overline{b}\,. \tag{2.1}$$

Верно и наоборот, если $\overline{a} = \lambda\overline{b}$, то $\overline{a}\,//\,\overline{b}$. Следовательно (2.1) – условие коллинеарности векторов.

Если $\overline{a}$ – не нулевой вектор, то его орт

$$\overline{a}^{\circ} = \frac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}\,. \tag{2.2}$$

Пример 1. В трапеции *ABCD* (рисунок 2.4) *BC*=*AP*=*PQ*=*QD*; *MN* – средняя линия; $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы: $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{MN}$, $\overline{AN}$, $\overline{CD}$.

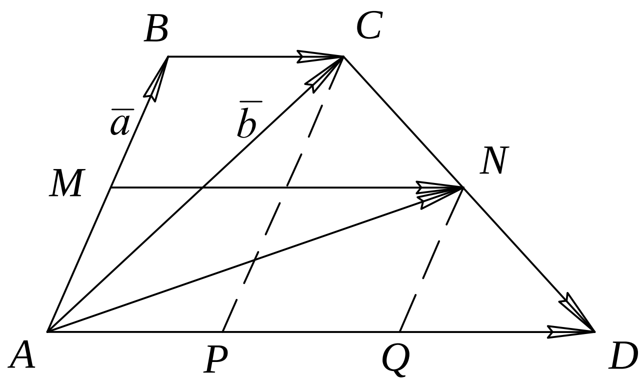

Рисунок 2.4 – Линейные операции над векторами

Решение. 1. По правилу вычитания векторов из *ΔABC* имеем: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$.

2. Пользуясь правилом умножения вектора на число и определением равных векторов, имеем: $\overline{AD} = 3\overline{AP} = 3\overline{BC} = 3(\overline{b} - \overline{a})$.

3. Исходя из определения средней линии трапеции, понятия модуля и направления вектора, имеем:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} = \frac{\overline{b} - \overline{a} + 3(\overline{b} - \overline{a})}{2} = \frac{4(\overline{b} - \overline{a})}{2} = 2(\overline{b} - \overline{a}).$$

4. Из *ΔAMN* (или параллелограмма *AMNQ*), по правилу сложения векторов имеем:

$$\overline{AN} = \overline{AM} + \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{a} + 2(\overline{b} - \overline{a}) = 2\overline{b} - \frac{3}{2}\overline{a}.$$

5. Пользуясь сложением векторов по правилу многоугольника, имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$. Откуда

$$\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AB} - \overline{BC} = 3(\overline{b} - \overline{a}) - \overline{a} - (\overline{b} - \overline{a}) = 2\overline{b} - 3\overline{a}.$$

Заметим, что поиск вышеназванных векторов может быть выполнен и другим путем. Самостоятельно найдите другие варианты решения примера.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему операции сложения, вычитания и умножения вектора на число называются линейными?

2. Как определяется сумма и разность двух векторов, сумма нескольких векторов, произведение вектора на число?

3. Назвать свойства линейных операций над векторами и указать на их значение.

Упражнения

1. На некомпланарных векторах $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$, как на ребрах, построен параллелепипед. Указать векторы соответственно равные: $\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{b} - \overline{a} - \overline{c}$.

2. Задан правильный шестиугольник *OABCDE,* в котором $\overline{OA}^{\circ} = \overline{e}_1$, $\overline{AB}^{\circ} = \overline{e}_2$, $\overline{BC}^{\circ} = \overline{e}_3$. Найти зависимость между единичными векторами $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Рассмотреть аналогичную задачу для правильного треугольника.

3. Точка *B* делит дугу окружности $AC = 90^{\circ}$ в отношении 1:2. O – центр окружности. Разложить геометрически вектор $\overline{OC} = \overline{c}$ по векторам $\overline{OA} = \overline{a}$ и $\overline{OB} = \overline{b}$.

4. Заданы компланарные векторы $\overline{m}, \overline{n}, \overline{p}$. Построить вектор $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n} - 3\overline{p}$, и найти его модуль, если $\left(\overline{m} \wedge \overline{n}\right) = 30^{\circ}$, а $\left(\overline{n} \wedge \overline{p}\right) = 60^{\circ}$.

5. К окружности с центром *O* проведены из точки *M* две касатель-

ные; A и B – точки соприкосновения. Разложить вектор $\overline{MO}$ по векторам $\overline{MA} = \overline{a}$ и $\overline{MB} = \overline{b}$, если $\angle AMB$ = α.

6. Заданы векторы $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$. Построить множество векторов $\overline{OC} = \overline{c}$ таких, что

а) $(\overline{a} + \overline{c}) // (\overline{a} + \overline{b})$,

б) $(\overline{a} - \overline{c}) // (\overline{a} - \overline{b})$.

Составить уравнение геометрического места точек – концов вектора $\overline{C}$.

7. В треугольнике ABC векторы $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. AM – биссектриса. Разложить вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

3 ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось U $\left(np_U \bar{a}\right)$ называется длина отрезка, ограниченного проекциями конца и начала вектора, взятая со знаком «+», если угол между вектором и осью острый, и со знаком «–», если этот угол тупой (рисунок 3.1). Следовательно

$$np_U \overline{AB} = U_B - U_A,$$

где U_B и U_A – проекции конца и начала вектора на ось.

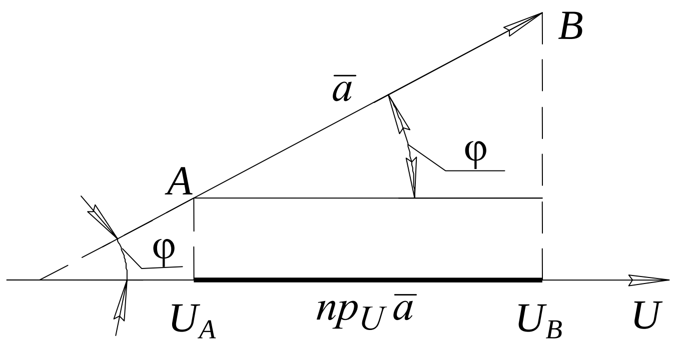

Рисунок 3.1 – Проекция вектора на ось

Свойства проекции вектора:

1) $np_U \bar{a} = |a| \cos \varphi$, (3.1)

где φ – угол между вектором и осью;

2) $np_U (\bar{a} + \bar{b}) = np_U \bar{a} + np_U \bar{b}$; (3.2)

3) $np_U (\lambda \bar{a}) = \lambda \, np_U \bar{a}$. (3.3)

Пример 1. На плоскости *XOY* вектор $\bar{a}$ образует с осью *OX* угол $\alpha = 30°$ (рисунок 3.2). Найти проекции вектора на координатные оси, если $|\bar{a}| = 6$.

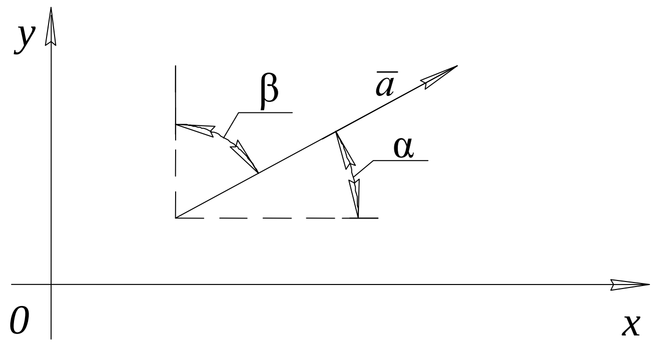

Рисунок 3.2 – Проекции вектора на оси координат

Решение. По формуле (3.1) имеем

$$np_{ox}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha = 6\cos 30° = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Так как $\beta = 90° - \alpha = 60°$, то $np_{oy}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\beta = 6\cos 60° = 6\frac{1}{2} = 3$.

Пример 2. На векторах $\overline{AB} = \bar{a}$ и $\overline{AC} = \bar{b}$, как на сторонах, построен ΔABC (рисунок 3.3). Найти длину высоты, опущенной из вершины B, пользуясь понятиями модуля вектора и проекции вектора на вектор.

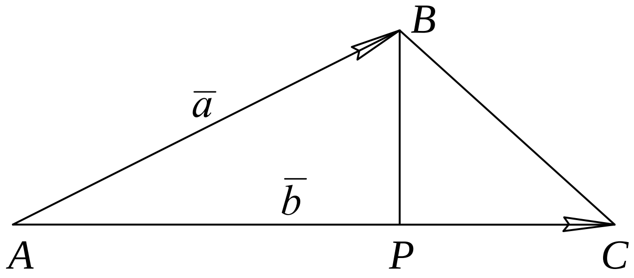

Рисунок 3.3 – ABC – треугольник с высотой BP

Решение. Из ΔABP имеем $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2}$. Так как $AB = |\bar{a}|$, $AP = \left|np_{\bar{b}}\,\bar{a}\right|$, то $BP = \sqrt{|\bar{a}|^2 - \left|np_{\bar{b}}\,\bar{a}\right|^2}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется проекцией вектора на ось?
2. Назвать свойства проекций вектора на ось.
3. Назвать способы нахождения проекции вектора на ось.

Упражнения

1. Выяснить, возможны ли равенства: $np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{a}|$, $np_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|$, $np_{\bar{a}}\bar{b} = np_{\bar{b}}\bar{a}$?

2. Длина стороны правильного шестиугольника $ABCDEF$ равняется m, $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{c}$.

Найти:

1) $np_{\bar{a}}\bar{b}$;

2) $np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c})$;

3) $np_{\bar{a}}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$;

4) $np_{\bar{a}}(2\bar{b} - 3\bar{c})$.

3. Найти проекции вектора $\overline{AB}$ на оси координат, если $A(-1; 3)$, $B(7; 9)$.

4. Составить уравнение геометрического места точек (ГМТ), которые образуют цилиндрическую круговую поверхность с осью OZ и радиусом R.

5. Составить уравнение ГМТ, которые образуют круговую коническую поверхность с осью OZ и вершиной в точке O.

4 ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ

Линейная комбинация векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ – это вектор $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{a}_i$, полученный вследствие линейных операций над заданными векторами.

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называются *линейно зависимыми,* если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ – *линейно независимые,* если ни один из них не может быть линейной комбинацией каких либо остальных.

Для того, чтобы векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = 0$ выполнялось лишь при условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Из определений линейно зависимых и независимых векторов следует, если $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ – линейно независимые и $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\} \cup \bar{a}$ – линейно зависимые, то:

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n. \tag{4.1}$$

В таком случае векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ образуют *базис* и называются базисными.

Определение. Максимальная совокупность линейно независимых векторов, из которых линейно выражается произвольный вектор пространства, называется *базисом* этого пространства.

Равенство (4.1) определяет *разложение вектора* $\bar{a}$ по указанному базису; слагаемые $\lambda_1\bar{a}_1, \lambda_2\bar{a}_2, \ldots, \lambda_n\bar{a}_n$ называются *компонентами* вектора $\bar{a}$ в этом базисе; действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – *координатами* вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$. Введение базиса $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ дает возможность установить взаимно-однозначное соответствие между вектором $\bar{a}$ и упорядоченной совокупностью чисел. То есть, каждый вектор $\bar{a}$ однозначно задается числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – координатами этого вектора, или, что то же самое, разложением вектора в этом базисе (4.1). Наоборот, каждой упорядоченной совокупности чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ однозначно соответствует единый вектор $\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n$.

Базисом на прямой (одномерное пространство) является произвольный ненулевой вектор $\bar{a}_1$ на этой прямой $\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1$ (рисунок 4.1).

Рисунок 4.1 – Базис $\bar{a}_1$ в одномерном пространстве

Базисом на плоскости (двумерное пространство) является произвольная пара неколлинеарных векторов этой плоскости $\bar{a} = \overline{OB} + \overline{OA} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$ (рисунок 4.2).

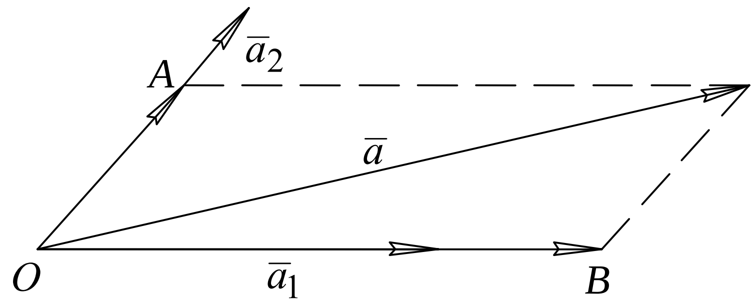

Рисунок 4.2 – Базис $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ в двумерном пространстве

Базисом в трехмерном пространстве является произвольная тройка некомпланарных векторов (рисунок 4.3)

$$\bar{a} = \overline{ON} + \overline{OM} = (\overline{OB} + \overline{OA}) + \overline{OM} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3 .$$

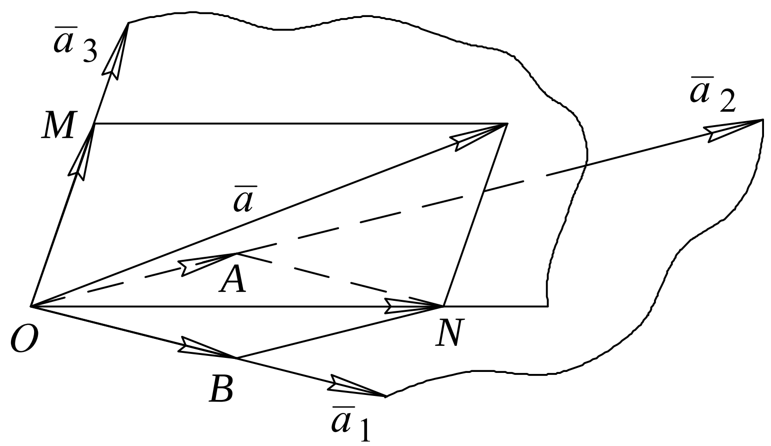

Рисунок 4.3 – Базис $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$ в трехмерном пространстве

Пример 1. В прямоугольнике *ABCD* (рисунок 4.4) *M* и *N* середины сторон, $\overline{AM} = \bar{a}$, $\overline{AN} = \bar{b}$. Разложить вектор $\overline{AD}$ по базису $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Назвать компоненты и координаты вектора $\overline{AD}$ в этом базисе.

Решение. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарные, поэтому в плоскости прямоугольника они образуют базис $\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD}$. Исходя из свойств средней линии треугольника, имеем:

$$\overline{OD} = \overline{MN} = \bar{b} - \bar{a} ,$$

$$\overline{AO} = \overline{AP} + \overline{AE} = \frac{1}{3}\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b} .$$

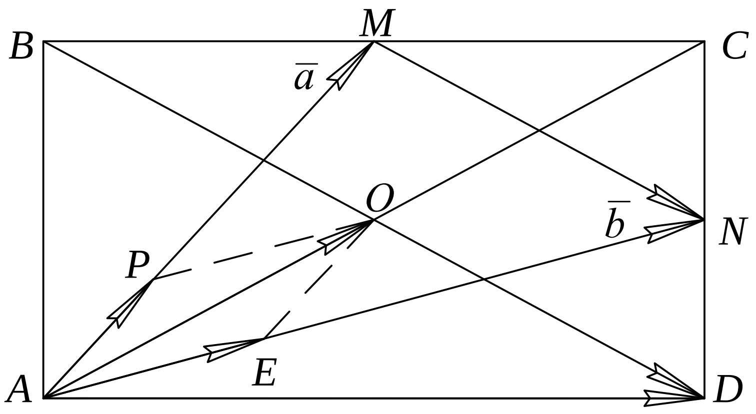

Рисунок 4.4 – Разложение вектора $\overline{AD}$ по базису $\overline{a}$ и $\overline{b}$

Тогда $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} + \overline{b} - \overline{a} = -\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{4}{3}\overline{b}$. Следовательно, $-\frac{2}{3}\overline{a}$; $\frac{4}{3}\overline{b}$ – компоненты; $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ – координаты вектора $\overline{AD}$ в базисе $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Выяснить понятия линейной зависимости и независимости векторов. Назвать условие линейной независимости векторов.
2. Дать определения базиса.
3. Какие векторы образуют базис на прямой, на плоскости, в пространстве?
4. Охарактеризовать роль базисных векторов.
5. Записать векторное равенство, которое задает разложение вектора в данном базисе; назвать компоненты и координаты вектора.

Упражнения

1. В треугольнике ABC $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{c}$. Найти разложение векторов, которые совпадают с медианами треугольника по базису $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N являются серединами сторон BC и DC. Разложить вектор $\overline{DC}$ по базису $\overline{a} = \overline{AM}$ и $\overline{b} = \overline{AN}$. Назвать компоненты и координаты вектора $\overline{DC}$ в этом базисе.

3. Доказать, что любые два неколлинеарных вектора в двумерном пространстве образуют базис; любые три некомпланарных вектора в трехмерном пространстве образуют базис.

4. На векторах $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$, как на катетах, построен прямоугольный треугольник. CM, CH, CK – соответственно медиана, высота и биссектриса проведены к гипотенузе. Найти векторы $\overline{CM}$, $\overline{CH}$, $\overline{CK}$.

5 ДЕКАРТОВ БАЗИС

Удобным и простейшим является базис, составленный из трех (в трехмерном пространстве) единичных взаимно перпендикулярных векторов $\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$ (рисунок 5.1)

$$\left|\bar{i}\right| = \left|\bar{j}\right| = \left|\bar{k}\right| = 1, \quad \bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}.$$

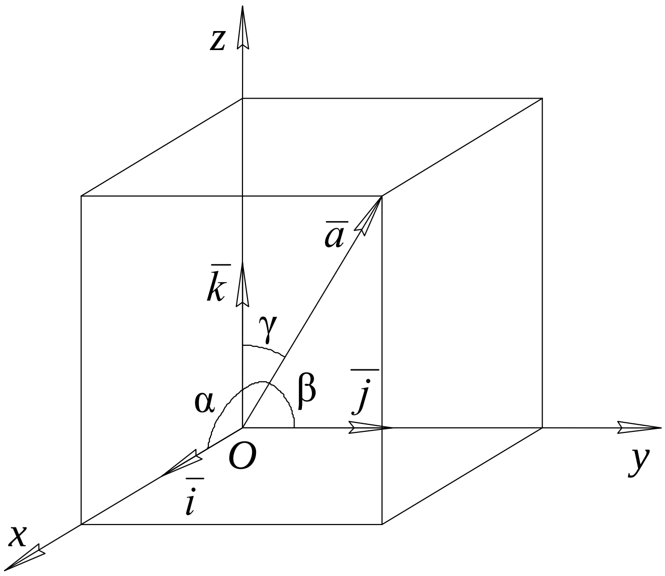

Рисунок 5.1 – Декартов базис $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$

Сведенные к общей точке *O*, эти векторы определяют прямоугольную декартову систему координат. Направление осей *OX*, *OY*, *OZ* совпадает соответственно с направлением векторов $\bar{i}; \bar{j}; \bar{k}$.

Если, для произвольного $\bar{a}$:

$$a_x = np_{ox}\bar{a},$$

$$a_y = np_{oy}\bar{a},$$

$$a_z = np_{oz}\bar{a},$$

то $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ (5.1)

или $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$. (5.2)

Задание вектора его координатами (5.2), или разложением по координатному базису (5.1), дает возможность аналитическими расчетами получать любые параметры векторов, а также выполнять действия над векторами.

5.1 Координаты вектора, заданные его началом и концом

Пусть точки $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$ определяют вектор $\overline{a} = \overline{AB}$ (рисунок 1.1). Тогда, исходя из определения координат вектора и свойств его проекций, имеем:

$$a_x = x_b - x_a;\ a_y = y_b - y_a;\ a_z = z_b - z_a.$$

Следовательно

$$\overline{a} = \overline{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a). \tag{5.3}$$

5.2 Модуль и направляющие косинусы вектора

Пусть $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, тогда

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{5.4}$$

Если α, β, γ – углы, которые образует $\overline{a}$ соответственно с осями *OX*, *OY*, *OZ*, то:

$$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha;\ a_y = |\overline{a}|\cos\beta;\ a_z = |\overline{a}|\cos\gamma, \tag{5.5}$$

где cos α, cos β, cos γ – направляющие косинусы вектора $\overline{a}$.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}, \tag{5.6}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{5.7}$$

$$\overline{a}^\circ = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = \left(\frac{a_x}{|\overline{a}|}; \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right). \tag{5.8}$$

5.3 Линейные операции над векторами

Пусть $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\lambda \in R$.

а) если $\overline{a} = \overline{b}$, то из определения равных векторов и (5.5), имеем:

$$\begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y\ . \\ a_z = b_z \end{cases} \tag{5.9}$$

Верно и наоборот, то есть из (5.9) следует $\bar{a} = \bar{b}$. Сравнение $\bar{a} < \bar{b}$ или $\bar{a} > \bar{b}$ для векторов не имеют смысла.

б) исходя из понятия координат вектора и свойств проекций, имеем:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z), \tag{5.10}$$

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z). \tag{5.11}$$

То есть, линейные операции над векторами сводятся к соответствующим операциям над их координатами.

в) если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *коллинеарные*, то $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, следовательно: $(a_x, a_y, a_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z)$, а это значит, что:

$$\begin{cases} a_x = \lambda b_x \\ a_y = \lambda b_y \\ a_z = \lambda b_z \end{cases}, \tag{5.12}$$

или

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda. \tag{5.13}$$

Каждое из равенств (5.12) и (5.13) определяет условие коллинеарности векторов.

Пример 1. Заданы точки $A(1;\ 2;\ 3)$ и $B(3;\ -4;\ 6)$. Найти координаты, длину, направляющие косинусы и орт вектора $\bar{a} = \overline{AB}$.

Решение

1. Согласно (5.3) имеем: $\bar{a} = \overline{AB} = (3-1;\ -4-2;\ 6-3) = (2;\ -6;\ 3)$, или $\bar{a} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}$.

2. По формуле (5.4) вычисляем $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7$.

3. Пользуясь формулами (5.6), находим:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{2}{7};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = -\frac{6}{7};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{3}{7}.$$

4. Так как $\bar{a}^\circ = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$, то $\bar{a}^\circ = \left(\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

Пример 2. Заданы точки $A(0;\ 0;\ 5)$, $B(3;\ 1;\ 2)$, $D(6;\ 7;\ -2)$. Найти точку C при условии, что $ABCD$ – параллелограмм (рисунок 5.2).

Решение. Воспользуемся условием равенства векторов (5.9).

$$\overline{AB} = (3-0;\ 1-0;\ 2-5) = (3;\ 1;\ -3),\ \ \overline{DC} = (x_c - 6;\ y_c - 7;\ z_c + 2).$$

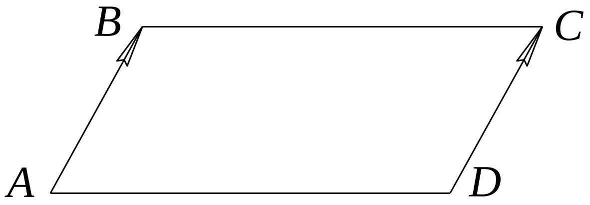

Рисунок 5.2 – *ABCD* – параллелограмм с неизвесной вершиной *C*

Так как $\overline{DC} = \overline{AB}$, то исходя из равенства координат равных векторов, имеем:

$$\begin{cases} x_C - 6 = 3, \\ y_C - 7 = 1, \\ z_C + 2 = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 9 \\ y_C = 8 \\ z_C = -5 \end{cases} \Rightarrow C(9; 8; -5).$$

Пример 3. На векторах $\overline{AB} = (2; 6; -4)$ и $\overline{AC} = (4; 2; -2)$, как на сторонах, построен *ΔABC* (рисунок 5.3). Найти длину стороны *BC* и медианы *AM*.

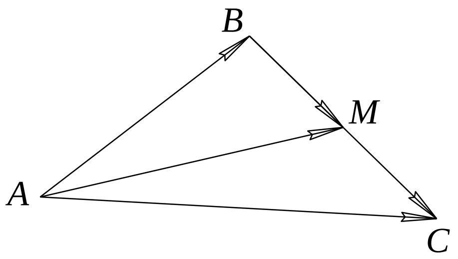

Рисунок 5.3 – Линейные операции над векторами в координатной форме

Решение. Используя правила линейных операций над векторами, заданными своими координатами (5.10; 5.11), находим:

1) $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = (4-2;\, 2-6;\, -2+4) = (2;\, -4;\, 2)$.

Следовательно, $BC = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24}$.

2) $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \dfrac{1}{2}\overline{BC} = (2;\, 6;\, -4) + \dfrac{1}{2}(2;\, -4;\, 2) =$

$$= (2;\, 6;\, -4) + (1;\, -2;\, 1) = (3;\, 4;\, -3),$$

$$AM = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Пример 4. Выяснить вид четырехугольника *ABCD*, если *A*(3; – 1; 2), *B*(1; 2; – 1), *C*(–1; 1;–3), *D*(3; –5; 3).

Решение. Рассмотрим векторы, которые совпадают с противоположными сторонами четырехугольника: $\overline{AB} = (-2; 3; -3)$, $\overline{CD} = (4; -6; 6)$. По условию (5.13) проверим коллинеарность этих векторов. Имеем:

$$\frac{4}{-2}=\frac{-6}{3}=\frac{6}{-3}=-2.$$

Следовательно векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарные и $\overline{CD}=-2\overline{AB}$, а это значит, что $ABCD$ – трапеция.

Пример 5. Найти орт вектора, направленного по биссектрисе угла между векторами $\overline{a}=(-3;\,0;\,4)$ и $\overline{b}=(5;\,2;\,14)$.

Решение. Очевидно, что вдоль указанной биссектрисы (рисунок 5.4) направлен вектор $\overline{OM}=\overline{a}^\circ+\overline{b}^\circ$. Пользуясь (5.8), найдем орты $\overline{a}^\circ$ и $\overline{b}^\circ$.

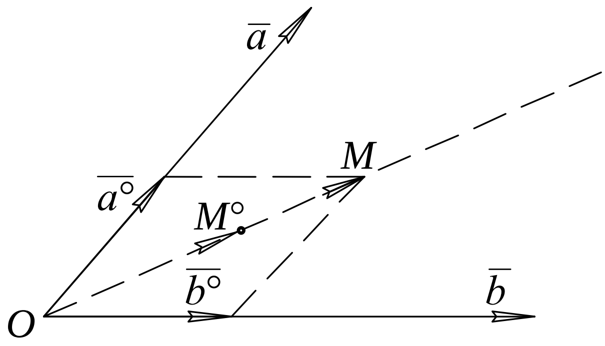

Рисунок 5.4 – $\overline{OM^\circ}$ – орт вектора $\overline{OM}$

$$|\overline{a}|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5;\ |\overline{b}|=\sqrt{5^2+2^2+14^2}=15.$$

Следовательно, $\overline{a}^\circ=\left(-\frac{3}{5};\,0;\,\frac{4}{5}\right)$ и $\overline{b}^\circ=\left(\frac{5}{15};\frac{2}{15};\frac{14}{15}\right)$.

Тогда

$$\overline{OM}=\overline{a}^\circ+\overline{b}^\circ=\left(-\frac{3}{5}+\frac{5}{15};\,0+\frac{2}{15};\,\frac{4}{5}+\frac{14}{15}\right)=\left(-\frac{4}{15};\frac{2}{15};\frac{26}{15}\right).$$

Пользуясь (5.8), находим $\overline{OM^\circ}$.

$$\left|\overline{OM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{2}{15}\right)^2+\left(\frac{26}{15}\right)^2}=\frac{\sqrt{696}}{15}=\frac{2\sqrt{174}}{15},$$

$$\overline{OM^\circ}=\frac{1}{\left|\overline{OM}\right|}\overline{OM}=\frac{15}{2\sqrt{174}}\left(-\frac{4}{15};\frac{2}{15};\frac{26}{15}\right)=\left(-\frac{2}{\sqrt{174}};\frac{1}{\sqrt{174}};\frac{13}{\sqrt{174}}\right).$$

Пример 6. Убедиться, что векторы $\overline{e}_1=(1;-1;2)$, $\overline{e}_2=(10;1;1)$, $\overline{e}_3=(2;-1;6)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{a}=(-3;-6;17)$ в этом базисе.

Решение

1. В трехмерном пространстве векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ образуют базис, если они линейно независимые, то есть равенство

$$\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 = 0 \tag{5.14}$$

выполняется лишь при условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

В левой части (5.14) выполним последовательно линейные операции, а также учтем, что координаты нулевого вектора равняются нулю.

$$\lambda_1(1; -1; 2) + \lambda_2(10; 1; 1) + \lambda_3(2; -1; 6) = (0; 0; 0);$$

$$(\lambda_1; -\lambda_1; 2\lambda_1) + (10\lambda_2; \lambda_2; \lambda_2) + (2\lambda_3; -\lambda_3; 6\lambda_3) = (0; 0; 0);$$

$$(\lambda_1 + 10\lambda_2 + 2\lambda_3; -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3; 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3) = (0; 0; 0).$$

Приравнивая соответствующие координаты равных векторов, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 10\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 41 \neq 0.$$

Поскольку определитель системы отличный от нуля, то система имеет единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Следовательно, заданные векторы линейно независимые, а значит образуют базис.

2. Пусть $(x_1; x_2; x_3)$ – координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Тогда имеем разложение вектора $\bar{a}$ по указанному базису

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3. \tag{5.15}$$

В векторном равенстве (5.15) переходим к координатам:

$$(-3; -6; 17) = x_1(1; -1; 2) + x_2(10; 1; 1) + x_3(2; -1; 6),$$

$$(-3; -6; 17) = (x_1 + 10x_2 + 2x_3; -x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + x_2 + 6x_3).$$

Приравниваем координаты равных векторов

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 17 \end{cases}, \qquad \Delta = 41 \neq 0.$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -3 & 10 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \\ 17 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 123, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & -1 \\ 2 & 17 & 6 \end{vmatrix} = -41, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 17 \end{vmatrix} = 82.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{123}{41} = 3;\ x_2 = \dfrac{-41}{41} = -1;\ x_3 = 2$.

Следовательно $\overline{a} = (3;-1;2) = 3\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой базис называется декартовым?
2. Как получить координаты вектора, заданного его началом и концом?
3. Как найти модуль вектора, заданного координатами?
4. Что называется направляющими косинусами вектора? Как они находятся?
5. Как найти орт вектора?
6. Назвать условия равенства и коллинеарности двух векторов, заданных координатами.
7. Сформулировать правила сложения, вычитания и умножения вектора на число в случае, когда векторы заданы координатами. Из каких свойств вытекают правила, по которым выполняют линейные операции?

Упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$, $D(9; -5; 12)$. Найти длины сторон и диагоналей.
2. Заданы точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$ и $D(5; -4; 2)$. Убедиться, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарные; выяснить, какой из них длиннее и во сколько раз; как они направлены – в одну или противоположные стороны?
3. Найти координаты единичного вектора, направленного по биссектрисе угла, образованного векторами $\overline{a} = (2; -3; 6)$ и $\overline{b} = (-1; 2; -2)$.
4. Какому условию удовлетворяют координаты какой либо точки, которая лежит на прямой, проходящей через точки $M(2; -1; 3)$ и $N(0; 5; 2)$. Найти одну из таких точек.
5. Убедиться, что треугольник, построенный на векторах $\overline{AN} = (-5; 3; -1)$ и $\overline{AM} = (3; 15; -5)$ является прямоугольным. Построить прямоугольный ΔPAN при условии, что AN – его высота, а AM – медиана. Найти вектор $\overline{PN}$.
6. Найти координаты вектора $\overline{a} = (16; 6; 15)$ в базисе $\overline{e}_1 = (3; 1; 2)$, $\overline{e}_2 = (-7; -2; -4)$, $\overline{e}_3 = (-4; 0; 3)$.

6 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 3

Согласно условиям, приведенным в таблице 6.1 и на рисунках 6.1, 6.2 и 6.3, выполнить индивидуальное домашнее задание (ИДЗ).

1. Построить схематический рисунок.
2. По точкам, указанным на рисунке, привести примеры векторов равных, противоположных и коллинеарных векторам, заданным в столбце 3.
3. Векторы, указанные в столбцах 5, 6, 7, 8, выразить геометрически через заданные.
4. Найти координаты тех же векторов, используя точки, указанные в столбце 4.
5. Найти координаты точки, указанной в столбце 9.
6. Найти координаты орта, указанного в столбце 10.

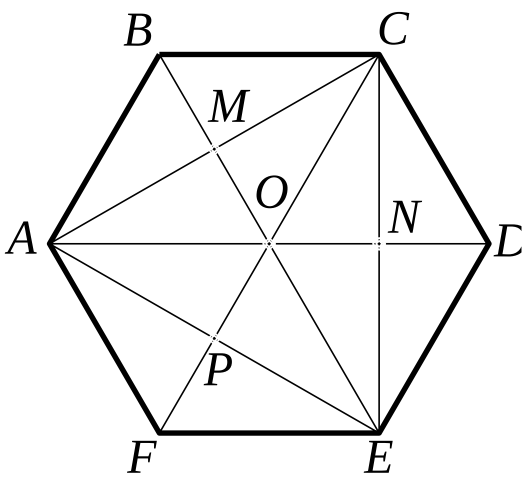

Рисунок 6.1 – *ABCDEF* – правильный шестиугольник

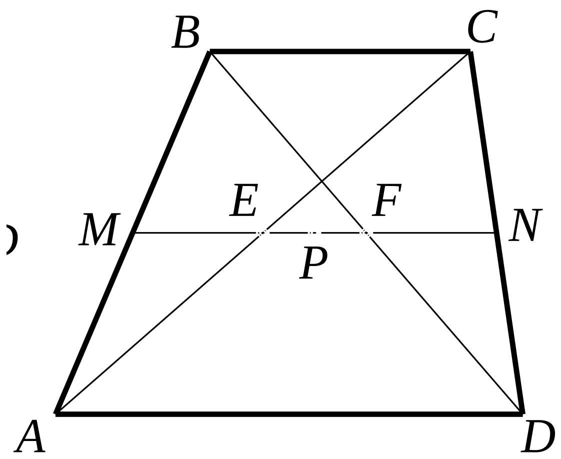

Рисунок 6.2 – *ABCD* – трапеция; *MN* – средняя линия; *MP* = *PN*

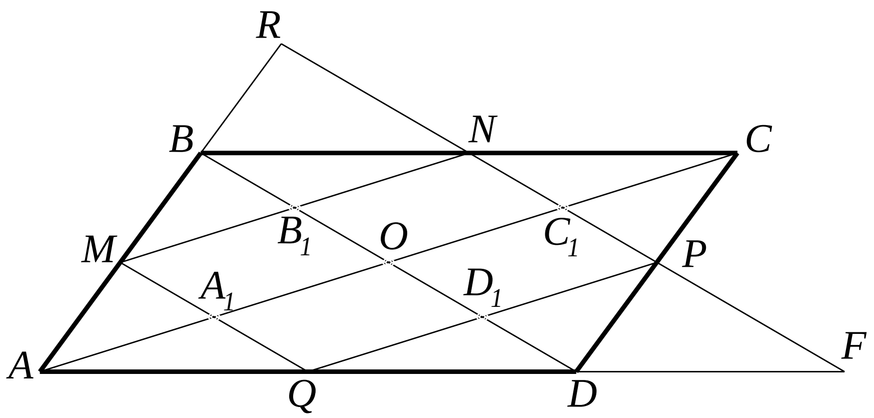

Рисунок 6.3 – *ABCD* – параллелограмм; *M*, *N*, *P*, *Q* – середины сторон

Таблица 6.1 – Исходные данные для ИДЗ-3

Вариант	Рисунок	Дано		Найти					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6.1	$\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$	$A(0;0)$, $B(1;\sqrt{3})$, $C(3;\sqrt{3})$	$\overline{BO}$	$\overline{CE}$	$\overline{CD}$	$\overline{MN}$	O	$\overline{CE}^{\circ}$
2	6.2	$\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{AD}=\bar{c}$	$A(2;1)$, $B(4;5)$, $C(8;6)$, $D(10;3)$	$\overline{AF}$	$\overline{MN}$	$\overline{CD}$	$\overline{PC}$	F	$\overline{MN}^{\circ}$
3	6.1	$\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{s}$	$A(1;\sqrt{3})$, $B(3;\sqrt{3})$, $C(4;0)$	$\overline{FO}$	$\overline{CD}$	$\overline{CP}$	$\overline{MN}$	D	$\overline{CD}^{\circ}$
4	6.3	$\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$	$A(1;2)$, $B(3;4)$, $D(5;3)$	$\overline{AC}$	$\overline{MQ}$	$\overline{CA_1}$	$\overline{QB_1}$	A	$\overline{MQ}^{\circ}$
5	6.1	$\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AE}=\bar{e}$	$A(\sqrt{3};1)$, $E(0;-2)$, $B(2\sqrt{3};0)$	$\overline{AO}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{PM}$	C	$\overline{BC}^{\circ}$
6	6.2	$\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{AD}=\bar{c}$	$A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(6;3)$, $D(7;6)$	$\overline{ME}$	$\overline{AE}$	$\overline{EC}$	$\overline{AN}$	E	$\overline{AE}^{\circ}$
7	6.1	$\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{MP}=\bar{m}$	$B(6;2\sqrt{3})$, $C(8;0)$, $M(5;\sqrt{3})$, $P(2;0)$	$\overline{BF}$	$\overline{BE}$	$\overline{CD}$	$\overline{FD}$	E	$\overline{BE}^{\circ}$
8	6.3	$\overline{MN}=\bar{p}$, $\overline{MQ}=\bar{c}$	$M(1;1)$, $N(3;5)$, $Q(4;2)$	$\overline{AB}$	$\overline{BD}$	$\overline{AD}$	$\overline{QC_1}$	B	$\overline{BD}^{\circ}$

Продолжение таблицы 6.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	6.1	$\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{MN}=\bar{p}$	$B(6;0)$, $C(4;-2\sqrt{3})$, $M(4;0)$, $N(1;-\sqrt{3})$	$\overline{AE}$	$\overline{CD}$	$\overline{CE}$	$\overline{AC}$	D	$\overline{CD^\circ}$
10	6.2	$\overline{CB}=\bar{r}$, $\overline{CM}=\bar{s}$, $\overline{CN}=\bar{b}$	$C(4;0)$, $B(1;1)$, $M(-1;-2)$, $N(5;-4)$	$\overline{CD}$	$\overline{BD}$	$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	D	$\overline{BD^\circ}$
11	6.1	$\overline{MN}=\bar{p}$, $\overline{MP}=\bar{m}$	$M(3\sqrt{3};-1)$, $P(\sqrt{3};0)$, $N(2\sqrt{3};-4)$	$\overline{ME}$	$\overline{NE}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	E	$\overline{NE^\circ}$
12	6.3	$\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$	$A(2;-1)$, $B(4;3)$, $D(8;-2)$	$\overline{AR}$	$\overline{A_1C}$	$\overline{RF}$	$\overline{FD}$	R	$\overline{A_1C^\circ}$
13	6.1	$\overline{CD}=\bar{c}$, $\overline{DE}=\bar{q}$	$C(2;\sqrt{3})$, $E(5;0)$, $D(4;\sqrt{3})$	$\overline{BF}$	$\overline{DO}$	$\overline{EF}$	$\overline{NP}$	F	$\overline{DO^\circ}$
14	6.2	$\overline{BF}=\bar{m}$, $\overline{BC}=\bar{b}$, $\overline{BM}=\bar{p}$	$B(0;3)$, $C(4;7)$, $M(-1;-2)$, $F(7;6)$	$\overline{BD}$	$\overline{AD}$	$\overline{AF}$	$\overline{AC}$	D	$\overline{AD^\circ}$
15	6.1	$\overline{CE}=\bar{r}$ $\overline{CD}=\bar{c}$,	$C(0;\sqrt{3})$, $D(1;2\sqrt{3})$, $E(3;2\sqrt{3})$	$\overline{EO}$	$\overline{EF}$	$\overline{EM}$	$\overline{NP}$	F	$\overline{EF^\circ}$
16	6.3	$\overline{PC_1}=\bar{s}$, $\overline{PD_1}=\bar{e}$,	$P(6;8)$, $C_1(3;9)$, $D_1(1;5)$	$\overline{PO}$	$\overline{PN}$	$\overline{DC}$	$\overline{FB}$	N	$\overline{PN^\circ}$
17	6.1	$\overline{CD}=\bar{c}$, $\overline{CA}=\bar{f}$	$C(0;2)$, $D(\sqrt{3};3)$, $A(\sqrt{3};1)$	$\overline{CF}$	$\overline{DE}$	$\overline{EF}$	$\overline{MN}$	E	$\overline{DE^\circ}$

Продолжение таблицы 6.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	6.2	$\overline{AM}=\bar{a}$, $\overline{AE}=\bar{b}$, $\overline{AD}=\bar{c}$	$A(-3;1)$, $M(-2;4)$, $D(3;-2)$, $E(0;3)$	$\overline{AC}$	$\overline{BC}$	$\overline{BE}$	$\overline{BD}$	C	$\overline{BC}^{\circ}$
19	6.1	$\overline{DE}=\bar{d}$, $\overline{NM}=\bar{n}$	$D(8;0)$, $E(6;-2\sqrt{3})$, $N(6;0)$, $M(1;\sqrt{3})$	$\overline{DB}$	$\overline{DA}$	$\overline{EF}$	$\overline{BF}$	B	$\overline{DB}^{\circ}$
20	6.3	$\overline{AN}=\bar{e}$, $\overline{AD}=\bar{s}$	$A(1;1)$, $D(7;-1)$, $N(2;4)$	$\overline{NC}$	$\overline{AC}$	$\overline{DC}$	$\overline{AD_1}$	C	$\overline{AC}^{\circ}$
21	6.1	$\overline{DE}=\bar{d}$, $\overline{NP}=\bar{p}$	$D(-6;0)$, $E(-4;2\sqrt{3})$, $N(-4;0)$, $P(-2;\sqrt{3})$	$\overline{CA}$	$\overline{EF}$	$\overline{EO}$	$\overline{CE}$	F	$\overline{EF}^{\circ}$
22	6.2	$\overline{DF}=\bar{c}$, $\overline{DA}=\bar{m}$, $\overline{DC}=\bar{p}$	$D(4;7)$, $C(-1;7)$, $A(-5;1)$, $F(0;6)$	$\overline{DB}$	$\overline{BC}$	$\overline{MN}$	$\overline{EF}$	B	$\overline{BC}^{\circ}$
23	6.1	$\overline{NM}=\bar{m}$, $\overline{NP}=\bar{p}$	$N(-2\sqrt{3};0)$, $M(-3\sqrt{3};3)$, $P(-\sqrt{3};3)$	$\overline{NA}$	$\overline{MA}$	$\overline{CF}$	$\overline{CD}$	A	$\overline{MA}^{\circ}$
24	6.3	$\overline{RB}=\bar{r}$, $\overline{RN}=\bar{f}$	$R(4;5)$, $B(3;4)$, $N(5;3)$	$\overline{RM}$	$\overline{MN}$	$\overline{AP}$	$\overline{NA_1}$	P	$\overline{MN}^{\circ}$
25	6.1	$\overline{EF}=\bar{p}$, $\overline{FA}=\bar{q}$	$E(4;-9\sqrt{3})$, $F(0;-2\sqrt{3})$, $A(-2;0)$	$\overline{FO}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$\overline{PM}$	C	$\overline{AC}^{\circ}$
26	6.2	$\overline{MB}=\bar{m}$, $\overline{MC}=\bar{n}$, $\overline{MN}=\bar{p}$	$M(3;6)$, $N(9;2)$, $B(4;8)$, $C(7;6)$	$\overline{AB}$	$\overline{CD}$	$\overline{AD}$	$\overline{ME}$	A	$\overline{CD}^{\circ}$

Окончание таблицы 6.1

27	6.1	$\overline{EF}=\bar{e}$, $\overline{EA}=\bar{s}$	$E(5;0)$, $F(4;-\sqrt{3})$, $A(2;-\sqrt{3})$	$\overline{EO}$	$\overline{AB}$	$\overline{AN}$	$\overline{PM}$	B	$\overline{AB}^{\circ}$
28	6.3	$\overline{A_1B_1}=\bar{n}$ $\overline{A_1D_1}=\bar{m}$	$A_1(-1;1)$, $B_1(3;3)$, $D_1(5;0)$	$\overline{A_1O}$	$\overline{A_1C}$	$\overline{BF}$	$\overline{AP}$	C	$\overline{A_1C}^{\circ}$
29	6.1	$\overline{EF}=\bar{e}$, $\overline{FC}=\bar{k}$	$E(8;0)$, $F(6;-2\sqrt{3})$, $C(0;0)$	$\overline{EO}$	$\overline{FA}$	$\overline{AB}$	$\overline{NP}$	A	$\overline{FA}^{\circ}$
30	6.1	$\overline{FA}=\bar{q}$, $\overline{PN}=\bar{n}$	$F(-2\sqrt{3};4)$, $A(0;6)$, $P(0;4)$, $N(\sqrt{3};1)$	$\overline{FD}$	$\overline{FC}$	$\overline{AB}$	$\overline{DB}$	C	$\overline{FC}^{\circ}$

Образец решения варианта ИДЗ-3

Задача. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overline{EF}=\overline{m}$, $\overline{EA}=\overline{n}$, $A(3;0)$, $F(4;\sqrt{3})$, $E(3;2\sqrt{3})$.

1. Построить схематический рисунок.

2. Привести примеры векторов равных, противоположных и коллинеарных векторам $\overline{EF}$ и $\overline{EA}$.

3. Векторы $\overline{AO}$, $\overline{AN}$, $\overline{AB}$, $\overline{PM}$ выразить через векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$.

4. Найти координаты векторов $\overline{AO}$, $\overline{AN}$, $\overline{AB}$, $\overline{PM}$.

5. Найти координаты точки *B*.

6. Найти орт $\overline{AB}^{\circ}$.

Решение. 1. Выполняем схематический рисунок правильного шестиугольника. Отмечаем на нем заданные векторы и точки (рисунок 6.4).

2. а) $\overline{m}=\overline{EF}=\overline{CB}=\overline{DO}=\overline{OA}$; $\overline{n}=\overline{EA}=\overline{DB}$;

б) векторы, противоположные вектору $\overline{m}$: $\overline{FE}$, $\overline{BC}$, $\overline{AO}$, $\overline{OD}$; векторы, противоположные вектору $\overline{n}$: $\overline{AE}$, $\overline{BD}$;

в) векторы, коллинеарные вектору $\overline{m}$: $\overline{AD}$, $\overline{AO}$, $\overline{DA}$; векторы, коллинеарные вектору $\overline{n}$: $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{MN}$, $\overline{EP}$.

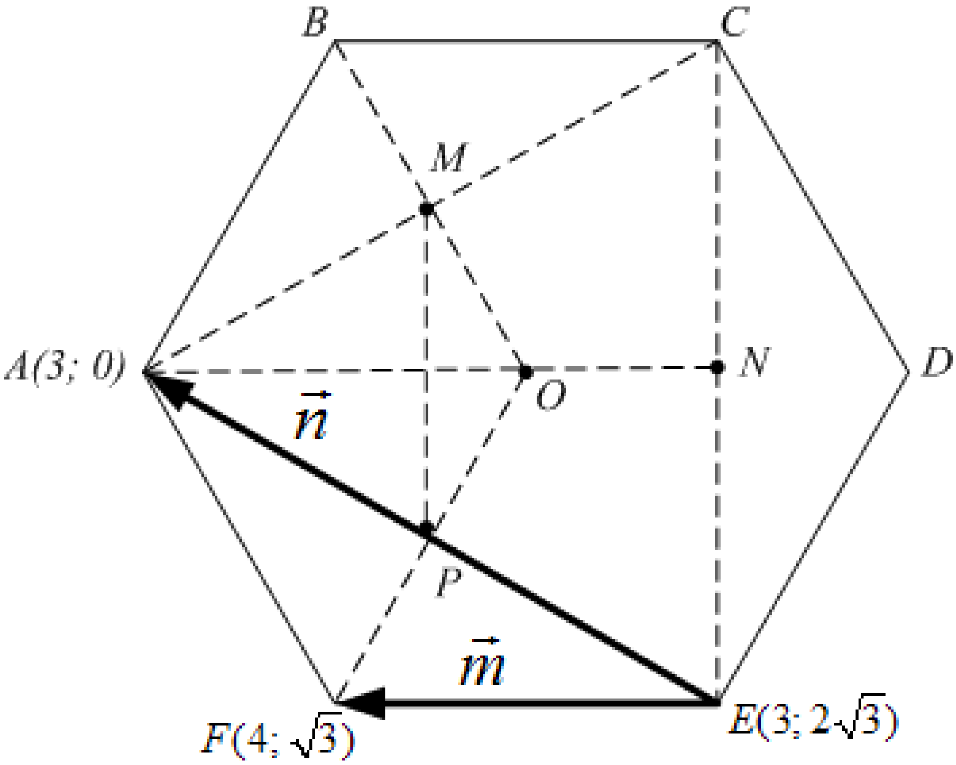

Рисунок 6.4 – Правильный шестиугольник с заданными векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$

3. Применяя правила линейных операций над векторами и геометрические свойства правильного шестиугольника, находим:

$$\overline{AO} = -\overline{m};$$

$$\overline{AN} = \overline{AO} + \overline{ON} = \overline{AO} + \frac{1}{2}\overline{AO} = \frac{3}{2}\overline{AO} = \frac{3}{2}\cdot\left(-\overline{m}\right) = -\frac{3}{2}\overline{m};$$

$$\overline{AB} = \overline{FO} = 2\overline{FP} = 2\cdot\left(\overline{EP} - \overline{EF}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{n} - \overline{m}\right) = \overline{n} - 2\overline{m};$$

$$\overline{PM} = \overline{EN} = \overline{EA} + \overline{AN} = \overline{n} + \left(-\frac{3}{2}\overline{m}\right) = \overline{n} - \frac{3}{2}\overline{m}.$$

4. Координаты векторов $\overline{AO}$, $\overline{AN}$, $\overline{AB}$, $\overline{PM}$ найдем по правилам линейных операций над векторами, заданными своими координатами. Предварительно находим координаты векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$.

$$\overline{m} = \overline{EF} = \left(x_F - x_E; y_F - y_E\right) = \left(4-3; \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) = \left(1; -\sqrt{3}\right),$$

$$\overline{n} = \overline{EA} = \left(x_A - x_E; y_A - y_E\right) = \left(3-3; 0 - 2\sqrt{3}\right) = \left(0; -2\sqrt{3}\right).$$

Тогда:

$$\overline{AO} = -\overline{m} = -\left(1; -\sqrt{3}\right) = \left(-1; \sqrt{3}\right),$$

$$\overline{AN}=-\frac{3}{2}\overline{m}=-\frac{3}{2}\left(1;-\sqrt{3}\right)=\left(-\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\overline{AB}=\overline{n}-2\overline{m}=\left(0;-2\sqrt{3}\right)-2\cdot\left(1;-\sqrt{3}\right)=\left(0-2;-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)=\left(-2;0\right),$$

$$\overline{PM}=\overline{n}-\frac{3}{2}\overline{m}=\left(0;-2\sqrt{3}\right)-\frac{3}{2}\left(1;-\sqrt{3}\right)=\left(0-\frac{3}{2};-2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

5. Для нахождения координат точки B используем правило нахождения координат вектора, заданного его началом и концом.

$$\overline{AB}=\left(-2;0\right).\ \ \overline{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)=\left(x_B-3;y_B-0\right).$$

Следовательно

$$\begin{cases}x_B-3=-2,\\ y_B-0=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=1\\ y_B=0\end{cases}\Rightarrow B\left(1;0\right).$$

6. Орт $\overline{AB}^{\circ}$ находим, исходя из условия, что

$$\overline{a}^{\circ}=\left(\frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|};\frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}\right),\ \left|\overline{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}.$$

Имеем:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{x_{AB}^2+y_{AB}^2}=\sqrt{\left(-2\right)^2+0^2}=2,$$

$$\overline{AB}^{\circ}=\left(\frac{-2}{2};\frac{0}{2}\right)=\left(-1;0\right).$$

7 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется скаляр, который равняется произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi, \tag{7.1}$$

где $\varphi=(\overline{a}\wedge\overline{в})$ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рисунок 7.1).

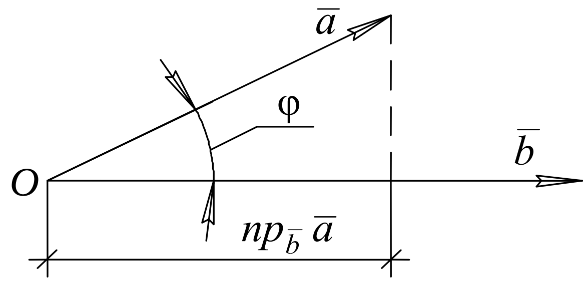

Рисунок 7.1 – Скалярное произведение векторов

Если $\overline{a}=(a_x,a_y,a_z),\overline{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{7.2}$$

Свойства скалярного произведения векторов:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ – коммутативность;

2) $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})=(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot(\lambda\overline{b})$ – ассоциативность относительно скалярного множителя;

3) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ – дистрибутивность;

4) $\overline{a}\cdot\overline{a}=(\overline{a})^2=|\overline{a}|^2$; (7.3)

5) если $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ и наоборот;

6) $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b}=|\overline{b}|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$. (7.4)

Свойства 1, 2 и 3 называют *алгебраическими.* Из них следует, что скалярное умножение двух векторов выполняется по правилам умножения многочленов. Свойство 5 выражает *признак перпендикулярности векторов*

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0. \tag{7.5}$$

Из (7.1) и (7.4) имеем следствия:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}, \tag{7.6}$$

$$np_{\overline{b}}\,\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}. \qquad (7.7)$$

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a} = 5\overline{i} + 4\overline{j} - 6\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{k}$.

Решение. По формуле (7.2) имеем

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 5\cdot 1 + 4\cdot 0 - 6\cdot 3 = -13.$$

Пример 2. Найти проекцию вектора $\overline{b} = (1; -2; 3)$ на вектор $\overline{a} = (4; 6; 0)$.

Решение. По формуле (7.7) имеем:

$$np_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|} = \frac{4\cdot 1 - 2\cdot 6 + 0\cdot 3}{\sqrt{4^2 + 6^2 + 0^2}} = \frac{-8}{52} = \frac{-4}{\sqrt{13}}.$$

Пример 3. Треугольник задан вершинами $A(0; -1; 2)$, $B(-1; -2; 7)$, $C(1; -2; 6)$. Найти его внешний угол при вершине B (рисунок 7.2).

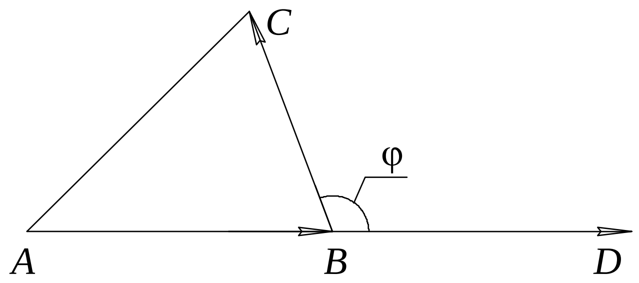

Рисунок 7.2 – Внешний угол φ при вершине *B*

Решение. Неизвестным является угол φ между векторами

$$\overline{BC} = (1+1; -2+2; 6-7) = (2; 0; -1) \text{ и } \overline{BD} = \overline{AB} = (-1; -1; 5).$$

По формуле (7.6) имеем

$$\cos\varphi = \cos(\overline{BC}\,\widehat{\ }\,\overline{BD}) = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{BD}}{|\overline{BC}|\cdot|\overline{BD}|}.$$

Пользуясь формулами (7.2) и (5.4), получим:

$$\overline{BC}\cdot\overline{BD} = -2\cdot 1 - 0\cdot 1 - 1\cdot 5 = -7;\ |\overline{BC}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5};\ |\overline{BD}| = \sqrt{27}.$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{27}} = \frac{-1}{\sqrt{135}};\ \varphi = \arccos\frac{-1}{\sqrt{135}} = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{135}}.$$

Пример 4. Треугольник задан вершинами $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; 2; 2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины B (рисунок 7.3).

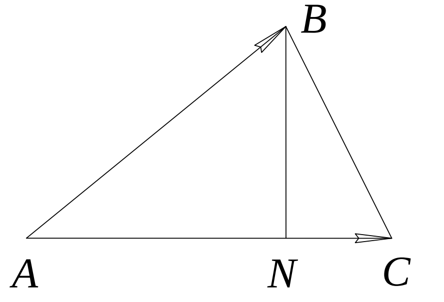

Рисунок 7.3 – ABC – треугольник с высотой BN

Решение. В прямоугольном ΔABN

$$AN = \left|np_{\overline{AC}}\,\overline{AB}\right|,\ \overline{AB} = (-3;\,0;\,-4),\ \overline{AC} = (4;\,4;\,-2).$$

По формуле (7.7):

$$np_{\overline{AC}}\,\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \frac{-3\cdot 4 + 0\cdot 4 + 4\cdot 2}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3},$$

$$AB = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = 5,\ AN = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{25 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{221}}{3}.$$

Пример 5. Доказать теорему косинусов.

Доказательство. Пусть в ΔABC (рисунок 7.4) $\overline{CB} = \overline{a}$; $\overline{CA} = \overline{b}$; $\overline{AB} = \overline{c}$; $(\overline{CA}\,{}^\wedge\,\overline{CB}) = \varphi$. Тогда $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, откуда $\overline{c}^2 = \overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2$.

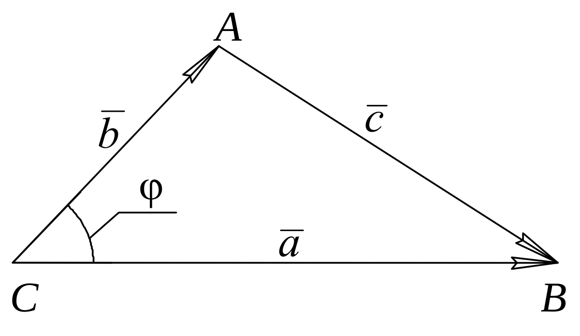

Рисунок 7.4 – Теорема косинусов

Используя (7.3) и (7.1), получим:

$$|\overline{c}|^2 = |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Пример 6. Под действием силы $\overline{F} = (6; 3; 1)$ материальная точка перемещается прямолинейно от точки $M(0; 2; 8)$ до $N(12; 20; 24)$. Вычислить затраченную работу (рисунок 7.5).

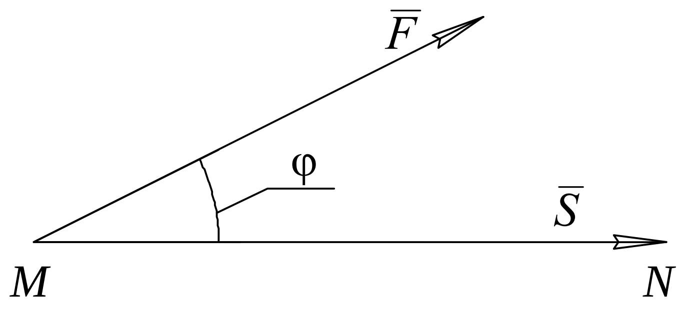

Рисунок 7.5 – Перемещение материальной точки

Решение. Из физики известно, что работа A силы $\overline{F}$ при перемещении вдоль вектора $\overline{S}$ при условии, что $(\overline{F} \wedge \overline{S}) = \varphi$, вычисляется по формуле:

$$A = |\overline{F}| \cdot |\overline{S}| \cdot \cos\varphi, \text{ следовательно } A = \overline{F} \cdot \overline{S}.$$

Так как

$\overline{S} = \overline{MN} = (12; 18; 16)$, то $A = \overline{F} \cdot \overline{MN} = 6 \cdot 12 + 3 \cdot 18 + 1 \cdot 16 = 142$ (ед. работы).

Пример 7. Выяснить зависимость между координатами взаимно перпендикулярных векторов, которые лежат в плоскости *XOY*.

Решение. Пусть $\overline{a} = (a_x, a_y)$ заданный вектор. Очевидно, что существует множество коллинеарных векторов $\overline{b} = (x; y)$, которые перпендикулярны вектору $\overline{a}$. Тогда $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, следовательно $a_x x + a_y y = 0$. Имеем $x = -a_y \cdot \dfrac{y}{a_x}$.

Пусть $\dfrac{y}{a_x} = \lambda$, где $\lambda \in R$. Тогда $x = -\lambda a_y$, $y = \lambda \cdot a_x$.

Следовательно, $\overline{b} = \lambda(-a_y; a_x)$, где $\lambda \in R$. Значит векторы, которые лежат в плоскости *XOY* и перпендикулярны вектору $\overline{a} = (a_x, a_y)$, имеют вид $\overline{b} = \lambda(-a_y; a_x)$. Так, если $\lambda = 1$, то одним из векторов, перпендикулярных вектору $\overline{a}$, является вектор $\overline{b} = (-a_y; a_x)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется скалярным произведением двух векторов?
2. Записать формулы для вычисления скалярного произведения:
а) по определению;
б) через проекцию одного вектора на второй;
в) через координаты перемножаемых векторов.
3. Записать формулу для нахождения проекций вектора на вектор; угла между векторами.
4. Назвать условие перпендикулярности двух векторов.
5. Назвать алгебраические свойства скалярного произведения и прокомментировать их применение.
6. Привести примеры геометрических и механических задач, при решении которых используется скалярное произведение векторов.

Упражнения

1. Найти угол между диагоналями параллелограмма *ABCD*, если $A(0;-1;2)$, $B(-1;-2;7)$, $D(1;-2;6)$.
2. Заданы вершины четырехугольника $A(2;-2;2)$, $B(2;4;0)$, $C(-3;1;1)$, $D(-4;-5;3)$. Доказать, что его диагонали *AC* и *BD* взаимно-перпендикулярные.
3. Под действием силы $\overline{F}=(3;1;2)$ материальная точка перемещается из начала координат вдоль диагонали единичного куба, ребра которого совпадают с осями координат. Вычислить затраченную работу.
4. В треугольнике с вершинами в точках $A(1;3;0)$, $B(3;7;1)$, $C(9;5;2)$ проведены высота *BH* и медиана *BM*. Найти стороны ΔBMH.
5. Из точки $P(2;4)$ на прямую, которая проходит через точки $A(1;2)$, и $B(4;-5)$ опущен перпендикуляр. Найти зависимость между координатами точек, которые лежат на этом перпендикуляре. Дать геометрическое толкование полученному результату.
6. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти угол между боковыми сторонами треугольника.
7. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

8 ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, который удовлетворяет условиям:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a} \wedge \overline{b})$;

2) $\overline{c} \perp \overline{a},\ \overline{c} \perp \overline{b}$;

3) вектор $\overline{c}$ направлен так, что если смотреть с его конца, то кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ осуществляется против хода часовой стрелки (рисунок 8.1).

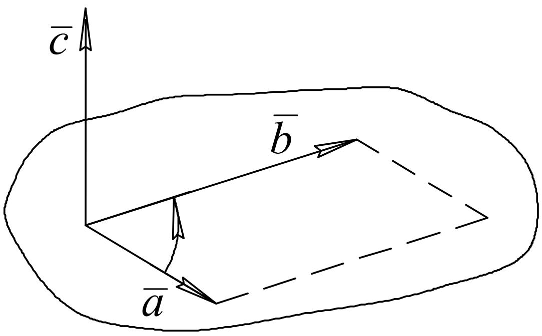

Рисунок 8.1 – Векторное произведение векторов

Если $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (8.1)$$

Свойства векторного произведения векторов:

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$ – антикоммутативность;

2) $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{b})$ – ассоциативность относительно скалярного множителя;

3) $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$ – дистрибутивность;

4) если $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\overline{a} \times \overline{b} = 0$ и наоборот;

5) $|\overline{a} \times \overline{b}| = S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на сторонах.

Из свойств 1, 2 и 3 следует, что раскрытие скобок при векторном умножении выполняется по правилам алгебры при условии, что порядок сомножителей не меняется. Свойство 5

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = S \qquad (8.2)$$

широко применяется при решении геометрических задач. Отметим, что векторное произведение дает возможность найти вектор, перпендикулярный двум заданным векторам (перпендикулярный плоскости, в которой лежат или ей параллельны два вектора).

Пример 1. Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = (-2; 1; 4)$ и $\bar{b} = (3; 5; 0)$.

Решение. Согласно (8.1) имеем

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первой строки

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -20\bar{i} + 12\bar{j} - 13\bar{k}.$$

Пример 2. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$ (рисунок 8.2).

Решение

$S_{\Delta\ ABC} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$. Из (8.2) следует: $S_{ABCD} = \left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right|$.

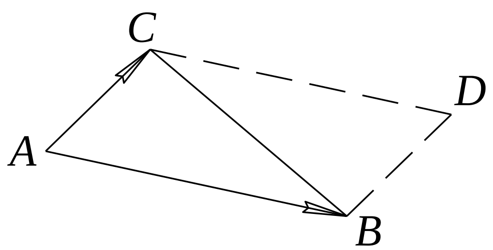

Рисунок 8.2 – ABC – треугольник с заданными вершинами

Поскольку $\overline{AC} = (-3; 2; -6)$ и $\overline{AB} = (-6; -3; 2)$, то

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 2 & -6 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -14\bar{i} + 42\bar{j} - 21\bar{k}.$$

Следовательно,

$$\left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right| = \sqrt{(-14)^2 + 42^2 + 21^2} = 49 \text{ и } S_{\Delta\ ABC} = \frac{49}{2}.$$

Пример 3. Найти вектор, перпендикулярный плоскости ΔABC, если $A(7; -1; -2)$, $B(1; 7; 8)$, $C(3; 7; 9)$ (рисунок 8.3) Убедиться в том, что вектор найден правильно.

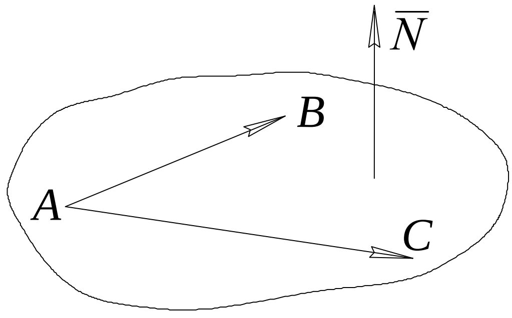

Рисунок 8.3 – $\overline{N}$ – вектор, перпендикулярный плоскости

Решение. Одним из искомых является вектор $\overline{N} = \overline{AB} \times \overline{AC}$. Выполняя необходимые вычисления, последовательно имеем: $\overline{AB} = (-6; 8; 10)$, $\overline{AC} = (-4; 8; 11)$.

$$\overline{N} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & 8 & 10 \\ -4 & 8 & 11 \end{vmatrix} = 8\bar{i} + 26\bar{j} - 16\bar{k}\,.$$

Следовательно, $\overline{N} = (8; 26; -16)$ – один из искомых векторов. Очевидно, что и какой либо вектор $\bar{n} \,//\, \overline{N}$, то есть $\bar{n} = \lambda(4;13;-8)$, также перпендикулярен плоскости ΔABC.

Для проверки убедимся, что $\bar{n}$ перпендикулярен двум векторам, которые лежат в заданной плоскости.

Имеем:

$$\bar{n} \cdot \overline{AB} = \lambda(4; 13; -8) \cdot (-6; 8; 10) = \lambda(-24 + 104 - 80) = 0,$$

$$\bar{n} \cdot \overline{AC} = \lambda(4; 13; -8) \cdot (-4; 8; 11) = \lambda(-16 + 104 - 88) = 0.$$

Таким образом убеждаемся, что вектор $\bar{n}$ перпендикулярен заданной плоскости.

Пример 4. По условию предыдущего примера найти точку, которая лежала бы в плоскости ΔABC.

Решение. Очевидно, что задача имеет множество решений. Пусть $P(x; y; z)$ – искомая точка. Тогда $\overline{AP} = (x-7; y+1; z+2)$ и $\overline{N} \perp \overline{AP}$. А это значит, что $\overline{N} \cdot \overline{AP} = 0$, то есть имеет место уравнение $8(x-7) + 26(y+1) - 16(z+2) = 0$, которое имеет множество решений. Присваивая двум неизвестным произвольные значения, например $y = -1$,

$z=2$, получим $8(x-7)-64=0$, таким образом $x=15$. Следовательно, $P(15; -1; 2)$ – одна из точек, которая лежит в плоскости ΔABC.

Пример 5. Из курса физики известно, что момент силы $\overline{F}$, приложенной в точке A, относительно точки O определяется векторным произведением $\overline{M}=\overline{OA}\times\overline{F}$. Найти момент равнодействующей двух сил $\overline{F_1}=(3; -2; 4)$ и $\overline{F_2}=(-4; 4; -3)$, приложенной в точке $B(1; -4; 3)$ относительно точки $C(4; 0; -2)$, величину момента и его направляющие косинусы.

Решение. Если $\overline{R}$ – указанная равнодействующая, то $\overline{M}=\overline{CB}\times\overline{R}$. Поскольку $\overline{CB}=(-3;-4;5)$ и $\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}=(-1;2;1)$, то:

$$\overline{M}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & -4 & 5\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-14\bar{i}-2\bar{j}-10\bar{k},$$

$$\left|\overline{M}\right|=\sqrt{(-14)^2+(-2)^2+(-10)^2}=\sqrt{320}=8\sqrt{5},$$

$$\cos\alpha=\frac{-14}{8\sqrt{5}}=-\frac{7}{4\sqrt{5}};\ \cos\beta=\frac{-2}{8\sqrt{5}}=-\frac{1}{4\sqrt{5}};\ \cos\gamma=\frac{-10}{8\sqrt{5}}=-\frac{5}{4\sqrt{5}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется векторным произведением двух векторов?
2. Записать формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных координатами.
3. Назвать свойства векторного произведения.
4. Привести примеры геометрических и физических задач, при решении которых используется векторное произведение векторов.

Упражнения

1. Найти площадь диагонального сечения параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=(4;0;4)$, $\bar{b}=(-1;3;2)$, $\bar{c}=(3;5;0)$ как на ребрах.
2. Найти единичный вектор, перпендикулярный плоскости, которая проходит через точки $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; -1)$ и $C(2; 0; 7)$.
3. Убедиться, что векторы $\bar{a}=7\bar{i}+6\bar{j}-6\bar{k}$ и $\bar{b}=6\bar{i}+2\bar{j}+9\bar{k}$ можно рассмотреть как ребра куба. Найти его третье ребро.
4. Найти векторное произведение $(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})$ и дать ему геометрическое толкование.

9 СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, полученное в результате упорядоченного векторно-скалярного произведения.

Исходя из свойств скалярного и векторного произведений, получим *величину* смешанного произведения (рисунок 9.1)

$$\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right| = \left|\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot np_{\bar{a}\times\bar{b}}\,\bar{c}\right| = S_{\bar{a},\bar{b}}\cdot H = V_{n-\partial a}.$$

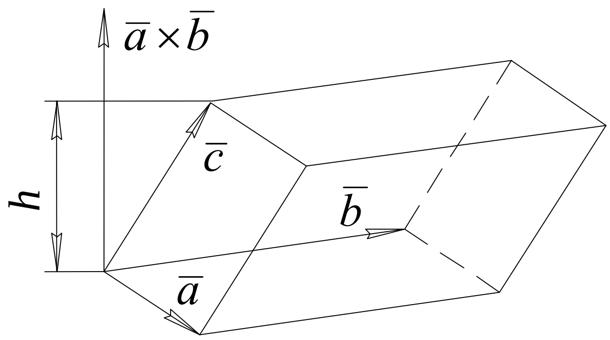

Рисунок 9.1 – $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ – смешанное произведение векторов

Если $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\bar{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{9.1}$$

Свойства смешанного произведения векторов:

1) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$;

2) если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарные, то $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=0$ и наоборот;

3) $\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right| = V_{n-\partial a\ \bar{a},\bar{b},\bar{c}}$. (9.2)

Согласно свойству 1 смешанное произведение сокращенно обозначается так

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,.$$

Свойство 2

$$\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}=0 \tag{9.3}$$

выражает *признак компланарности* векторов.

Свойство 3 широко применяется при решении геометрических задач.

Пример 1. Найти смешанное произведение $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, если $\bar{a}=(3;1;0)$, $\bar{b}=(-5;-4;-5)$, $\bar{c}=(4;2;4)$. Сделать вывод относительно взаимного расположения этих векторов.

Решение. По формуле (9.1) имеем

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ -5 & -4 & -5\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 7 & -4 & -5\\ -2 & 2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}7 & -5\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-18.$$

Так как $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\neq 0$, то векторы некомпланарные.

Пример 2. Найти объем V треугольной призмы, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, если $A(5;2;7)$, $B(7;-6;-9)$, $C(-7;-6;3)$ и $D(1;-5;2)$.

Решение. Объем заданной призмы (рисунок 9.2) равняется половине объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах.

Следовательно, $V=\dfrac{1}{2}V_{п-да}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|$.

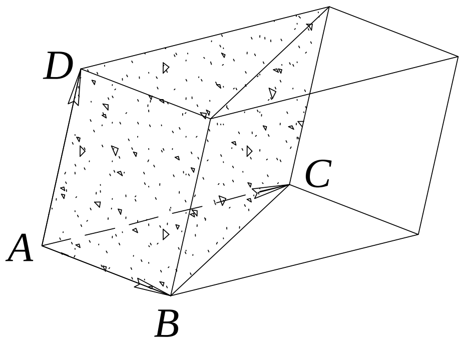

Рисунок 9.2 – Объем призмы

Выполняем необходимые вычисления:

$$\overline{AB}=(2;-8;-16),\ \overline{AC}=(-12;-8;-4),\ \overline{AD}=(-4;-7;-5),$$

$$(\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD})=\begin{vmatrix}2 & -8 & -16\\ -12 & -8 & -4\\ -4 & -7 & -5\end{vmatrix}=2\cdot4\cdot\begin{vmatrix}1 & -4 & -8\\ -3 & -2 & -1\\ -4 & -7 & -5\end{vmatrix}=8\cdot(-57)=-456.$$

Объем призмы $V=\dfrac{1}{2}\left|-456\right|=228$ куб. ед.

Пример 3. Заданы вершины пирамиды $A(-6;4;5)$, $B(-3;2;11)$, $C(0;7;3)$, $D(2;8;-3)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D (рисунок 9.3).

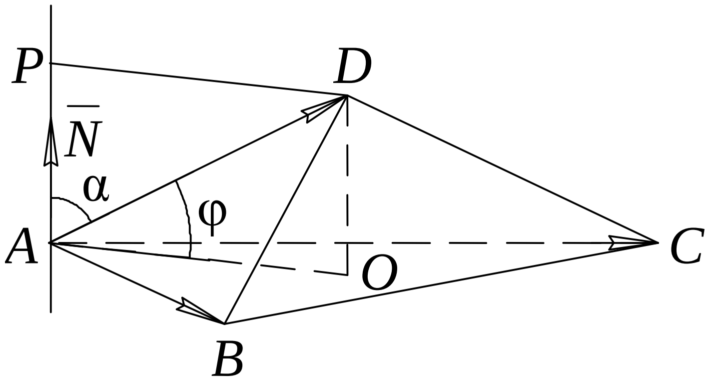

Рисунок 9.3 – *ABCD* – пирамида с высотой *DO*

Решение. Пусть $\overline{N}$ – вектор, перпендикулярный плоскости ΔABC. Тогда $DO = PA = \left| np_{\overline{N}}\, \overline{AD} \right|$. Выполняем необходимые вычисления:

$$\overline{AD} = (8;\, 4;\, -8),\ \ \overline{AB} = (3;\, -2;\, 6),\ \ \overline{AC} = (6;\, 3;\, -2),$$

$$\overline{N} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -14\bar{i} + 42\bar{j} + 21\bar{k}\,.$$

По формуле (7.7)

$$np_{\overline{N}}\, \overline{AD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = \frac{-8 \cdot 14 + 4 \cdot 42 - 8 \cdot 21}{\sqrt{(-14)^2 + 42^2 + 21^2}} = \frac{-122}{49}\,.$$

Следовательно

$$DO = \left| -\frac{122}{49} \right| = \frac{122}{49}\,.$$

Пример 4. По условию предыдущего примера найти угол между ребром *AD* и плоскостью *ΔABC*.

Решение. Искомым является угол φ между ребром *AD* и его проекцией на плоскость *ΔABC*. Таким образом φ = ∠*DAO*. Очевидно, что углы φ и α удовлетворяют одному из условий:

а) φ = 90°– α, если α – острый;

б) φ = α – 90°, если α – тупой.

Используя результаты, полученные в предыдущем примере, найдем α. По формуле (7.6) имеем

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{N}}{\left|\overline{AD}\right| \cdot \left|\overline{N}\right|} = \frac{-122}{\sqrt{8^2 + 4^2 + (-8)^2} \cdot 49} = \frac{-122}{12 \cdot 49} = \frac{-61}{294}\,.$$

Тогда $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{61}{294}\right) = \pi - \arccos\dfrac{61}{294}$ – тупой угол.

Следовательно,

$$\varphi = \alpha - 90^\circ = \pi - \arccos\frac{61}{294} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{61}{294} \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{2} - \arccos 0{,}207 \approx 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется смешанным произведением трех векторов?
2. Записать формулу для вычисления смешанного произведения векторов, заданных координатами.
3. Назвать свойства смешанного произведения векторов.
4. Назвать условие компланарности трех векторов.
5. Привести примеры геометрических задач, при решении которых используется смешанное произведение векторов.

Упражнения

1. Проверить, лежит ли точка $M(4;1;3)$ в плоскости ΔABC, если $A(1;\,2;\,-1)$, $B(4;\,1;\,5)$ и $C(-1;\,2;\,1)$. Какому условию удовлетворяют координаты какой либо точки, которая лежит в заданной плоскости? Найти одну из таких точек.

2. На векторах $\bar{a} = (2;\,4;\,-6)$, $\bar{b} = (0;\,8;\,2)$, $\bar{c} = (4;\,6;\,0)$ как на ребрах построена пирамида. Найти объем этой и срезанной пирамиды при условии, что плоскость сечения проходит через середину высоты. Построить и найти объем тела, полученного вследствие аналогичного срезания каждой из четырех вершин.

3. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\,,\ \bar{q} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}\,,\ \bar{r} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}\,.$$

4. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах

$$\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q} - 5\bar{r}\,,\ \bar{b} = \bar{p} - \bar{q} + 4\bar{r}\,, \text{ и } \bar{c} = \bar{p} - 3\bar{q} + \bar{r}\,,$$

если за основу взят параллелограмм, построенный на $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Кроме того известно, что $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.

10 ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 4

Вершины пирамиды находятся в точках A_m, A_n, A_p, A_q. Согласно варианту взять из таблицы 10.1 значения m, n, p, q и выбрать соответствующую точку среди заданных: $A_1(1; 1; 6)$, $A_2(-2; 1; 0)$, $A_3(-4; 2; -1)$, $A_4(-1; 2; 5)$, $A_5(2; -1; 6)$, $A_6(-1; -1; 0)$, $A_7(-3; 0; -1)$, Выполнить схематический рисунок заданной пирамиды $A_mA_nA_pA_q$ и найти:

1) координаты и модули векторов $\overline{A_mA_n}, \overline{A_mA_p}, \overline{A_mA_q}$;

2) скалярное произведение $\overline{A_mA_n} \cdot \overline{A_mA_p}$;

3) векторное произведение $\overline{A_mA_n} \times \overline{A_mA_p}$;

4) смешанное произведение $(\overline{A_mA_n} \times \overline{A_mA_p}) \cdot \overline{A_mA_q}$;

5) угол между ребрами A_mA_n и A_mA_p;

6) проекцию вектора $\overline{A_mA_n}$ на вектор $\overline{A_mA_p}$;

7) вектор, перпендикулярный грани $A_m\ A_n\ A_p$;

8) площадь грани $A_m\ A_n\ A_p$;

9) объем пирамиды $A_m\ A_n\ A_p\ A_q$;

10) угол между ребром A_mA_q и гранью $A_mA_nA_p$;

11) угол между гранями $A_mA_nA_p$ и $A_mA_nA_q$;

12) длину высоты A_qO, опущенной из вершины A_q;

13) орт вектора $\overline{A_qO}$;

14) вектор $\overline{A_qO}$;

15) точку O.

Таблица 10.1 – Исходные данные для ИДЗ-4

№	m	n	p	q	№	m	n	p	q	№	m	n	p	q
1	1	2	5	3	11	1	3	4	7	21	2	3	7	5
2	1	2	3	6	12	1	3	6	5	22	2	5	6	4
3	1	3	7	2	13	1	3	7	6	23	2	5	7	4
4	1	4	5	2	14	1	5	6	4	24	2	4	7	6
5	1	2	4	6	15	1	5	7	4	25	2	6	7	5
6	1	4	7	2	16	1	6	7	5	26	3	5	7	4
7	1	2	7	5	17	2	4	3	5	27	3	4	7	6
8	1	2	6	7	18	2	4	6	3	28	3	5	6	7
9	1	3	5	4	19	2	3	4	7	29	4	6	7	5
10	1	4	6	3	20	2	3	5	6	30	5	4	6	7

Образец решения варианта ИДЗ-4

Вариант 30

$m = 5$; $n = 4$; $p = 6$; $q = 7$.

A_5 (2; – 1; 6), A_4 (– 1; 2; 5), A_6 (– 1; – 1; 0), A_7 (– 3; 0; – 1) – вершины пирамиды.

Найти:

1) координаты и модули векторов $\overline{A_5A_4}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_5A_7}$;

2) скалярное произведение $\overline{A_5A_4} \cdot \overline{A_5A_6}$;

3) векторное произведение $\overline{A_5A_4} \times \overline{A_5A_6}$;

4) смешанное произведение $\left(\overline{A_5A_4} \times \overline{A_5A_6}\right) \cdot \overline{A_5A_7}$;

5) угол между ребрами A_5A_4 и A_5A_6;

6) проекцию вектора $\overline{A_5A_4}$ на $\overline{A_5A_6}$;

7) вектор, перпендикулярный грани $A_5A_4A_6$;

8) площадь грани $A_5A_4A_6$;

9) объем пирамиды $A_5A_4A_6A_7$;

10) угол между ребром A_5A_7 и гранью $A_5A_4A_6$;

11) угол между гранями $A_5A_4A_6$ и $A_5A_4A_7$;

12) длину высоты A_7O, опущенной из вершины A_7;

13) орт вектора $\overline{A_7O}$;

14) вектор $\overline{A_7O}$;

15) точку O.

Решение. Выполняем схематический рисунок заданной пирамиды (рисунок 10.1).

1. Координаты и модуль вектора находим соответственно по формулам (5.3) и (5.4):

$$\overline{A_5A_4} = (-1-2; 2+1; 5-6) = (-3; 3; -1),$$

$$\left|\overline{A_5A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{19},$$

$$\overline{A_5A_6} = (-1-2; -1+1; 0-6) = (-3; 0; -6),$$

$$\left|\overline{A_5A_6}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{45},$$

$$\overline{A_5A_7}=\left(-3-2;0+1;-1-6\right)=\left(-5;1;-7\right),$$

$$\left|\overline{A_5A_7}\right|=\sqrt{75}\,.$$

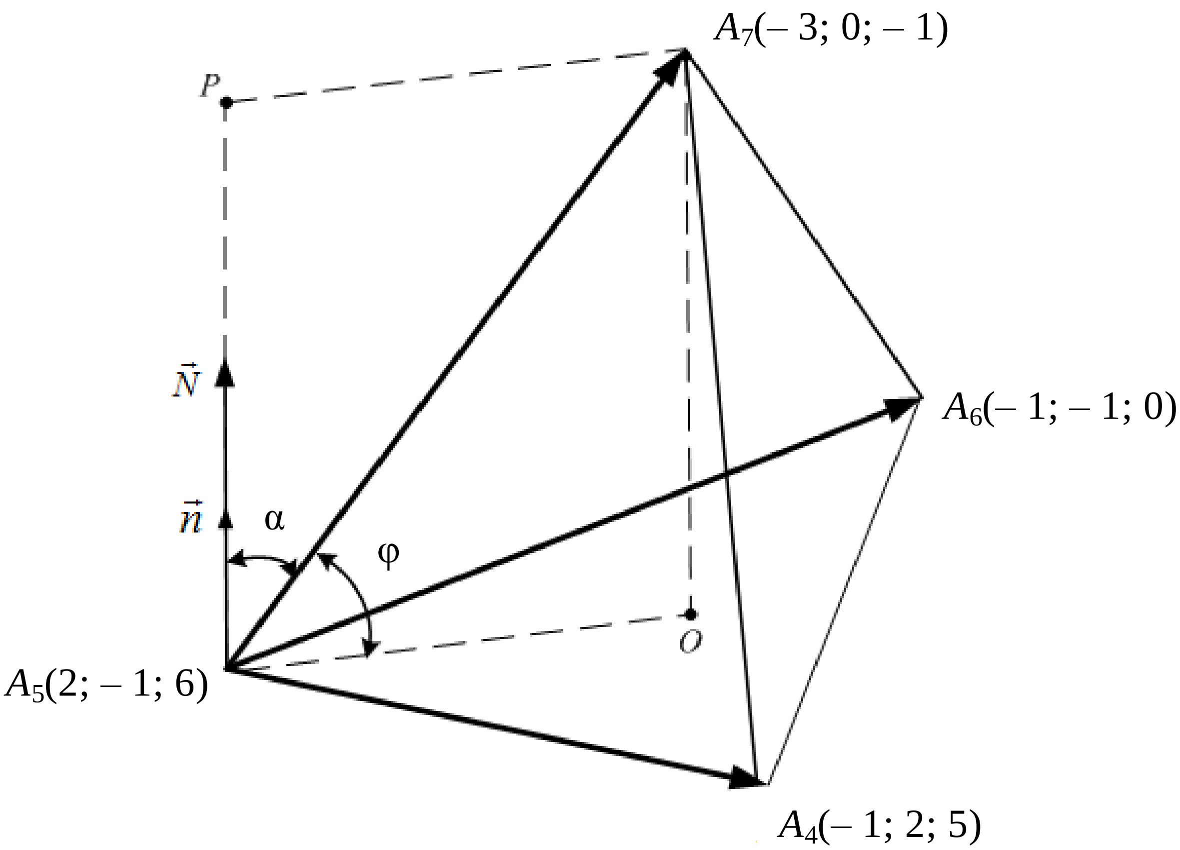

Рисунок 10.1 – $A_4A_5A_6A_7$ – пирамида с заданными вершинами

2. Скалярное произведение векторов вычисляем по формуле (7.2)

$$\overline{A_5A_4}\cdot\overline{A_5A_6}=-3\cdot\left(-3\right)+3\cdot 0+\left(-1\right)\cdot\left(-6\right)=15\,.$$

3. Векторное произведение векторов находим по формуле (8.1)

$$\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -6\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & -6\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -3 & -6\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=-18\bar{i}-15\bar{j}+9\bar{k}.$$

4. Смешанное произведение векторов вычисляем по формуле (9.1)

$$\left(\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}\right)\cdot\overline{A_5A_7}=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -6\\ -5 & 1 & -7\end{vmatrix}=0+90+3-0-18-63=12\,.$$

5. Угол между ребрами A_5A_4 и A_5A_6 – это угол между векторами $\overline{A_5A_4}$ и $\overline{A_5A_6}$, который находим по формуле (7.6):

$$\cos\left(A_5A_4{}^\wedge A_5A_6\right)=\frac{\overline{A_5A_4}\cdot\overline{A_5A_6}}{\left|\overline{A_5A_4}\right|\cdot\left|\overline{A_5A_6}\right|}=\frac{15}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{45}}=\frac{5}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{95}},$$

$$A_5A_4{}^\wedge A_5A_6=\arccos\frac{5}{\sqrt{95}}\approx\arccos 0{,}531\approx 59^\circ.$$

6. Проекцию вектора на вектор находим по формуле (7.7)

$$np_{\overline{A_5A_6}}\overline{A_5A_4}=\frac{\overline{A_5A_4}\cdot\overline{A_5A_6}}{\left|\overline{A_5A_6}\right|}=\frac{15}{\sqrt{45}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

7. Один из векторов, который перпендикулярен плоскости, можно получить как векторное произведение векторов, которые лежат в этой плоскости. Следовательно

$$\overline{N}=\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}=-18\,\bar{i}-15\,\bar{j}+9\bar{k}.$$

8. Площадь грани $A_5A_4A_6$ равняется половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_5A_4}$ и $\overline{A_5A_6}$, как на сторонах. Тогда, согласно свойству векторного произведения, имеем:

$$S_{\Delta A_5A_4A_6}=\frac{1}{2}\left|\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-18)^2+(-15)^2+9^2}=\frac{1}{2}\sqrt{630}.$$

9. Объем пирамиды $A_5A_4A_6A_7$ равняется 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_5A_4}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_5A_7}$, как на ребрах. Тогда, согласно свойству смешанного произведения векторов, имеем:

$$V_{A_5A_4A_6A_7}=\frac{1}{6}V_{n-\partial a}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{A_5A_4}\times\overline{A_5A_6}\right)\cdot\overline{A_5A_7}\right|=\frac{1}{6}\cdot|12|=2.$$

10. Пусть φ – угол между ребром A_5A_7 и гранью $A_5A_4A_6$; α – угол между векторами $\overline{N}$ и $\overline{OA_7}$. Тогда:

φ = 90°– α, если α – острый;

φ = α – 90°, если α – тупой.

Находим угол α по формуле (7.6):

$$\cos\alpha = \frac{\overline{N} \cdot \overline{A_5A_7}}{\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{A_5A_7}\right|} = \frac{-18\cdot(-5)+(-15)\cdot 1+9\cdot(-7)}{\sqrt{630}\cdot\sqrt{75}} \approx 0{,}055\ ;$$

$$\alpha = \arccos 0{,}055 \approx 87^\circ \ \Rightarrow\ \varphi = 90^\circ - 87^\circ = 3^\circ .$$

11. Угол между плоскостями – это угол между их нормальными векторами. Находим нормальный вектор $\overline{N_1}$ грани $A_5A_4A_7$

$$\overline{N} = \overline{A_5A_4} \times \overline{A_5A_7} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\,\bar{i} - 16\,\bar{j} + 12\,\bar{k}\ .$$

Векторы

$$\bar{n} = \frac{1}{3}\overline{N} = -6\,\bar{i} - 5\,\bar{j} + 3\,\bar{k}\ ,$$

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{4}\overline{N_1} = -5\,\bar{i} - 4\,\bar{j} + 3\,\bar{k}$$

также являются нормальными для граней $A_5A_4A_6$ и $A_5A_4A_7$. Поэтому, для нахождения угла β между гранями целесообразнее воспользоваться векторами $\bar{n}$ и $\bar{n}_1$.

$$\cos\beta = \cos\left(\bar{n} \wedge \bar{n}_1\right) = \frac{\bar{n}\cdot\bar{n}_1}{|\bar{n}|\cdot|\bar{n}_1|} =$$

$$= \frac{-6\cdot(-5)+(-5)\cdot(-4)+3\cdot 3}{\sqrt{(-6)^2+(-5)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+3^2}} = \frac{59}{\sqrt{70}\cdot\sqrt{50}} \approx 0{,}997,$$

$$\beta = \arccos\ 0{,}997 \approx 4^\circ .$$

12. Находим длину высоты A_7O

$$A_7O = PA_5 = \left|np_{\overline{\mathrm{N}}}\,\overline{A_5A_7}\right| = \left|np_{\bar{n}}\,\overline{A_5A_7}\right| = \left|\frac{\overline{A_5A_7}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| =$$

$$= \left|\frac{-5\cdot(-6)+1\cdot(-5)+(-7)\cdot 3}{\sqrt{70}}\right| = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0{,}48.$$

13. Поскольку угол α – острый, то векторы $\overline{N}$ и $\overline{OA_7}$ имеют одинаковое направление, а $\overline{N}$ и $\overline{A_7O}$ – противоположно направленные. Значит, $\overline{A_7O}^\circ = -\overline{N}^\circ$. Орт вектора $\overline{N}$ находим по формуле (5.8)

$$\overline{N}^{\circ}=\left(\frac{N_x}{\left|\overline{N}\right|};\frac{N_y}{\left|\overline{N}\right|};\frac{N_z}{\left|\overline{N}\right|}\right)=\left(-\frac{18}{\sqrt{630}};-\frac{15}{\sqrt{630}};\frac{9}{\sqrt{630}}\right)=\left(-\frac{6}{\sqrt{70}};-\frac{5}{\sqrt{70}};\frac{3}{\sqrt{70}}\right).$$

Следовательно,

$$\overline{A_7O}^{\circ}=\left(\frac{6}{\sqrt{70}};\frac{5}{\sqrt{70}};-\frac{3}{\sqrt{70}}\right).$$

14. Вектор $\overline{A_7O}$ находим, исходя из условия, что:

$$\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\overline{a^{\circ}},$$

$$\overline{A_7O}=\left|\overline{A_7O}\right|\cdot\overline{A_7O}^{\circ}=\frac{4}{\sqrt{70}}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{70}};\frac{5}{\sqrt{70}};-\frac{3}{\sqrt{70}}\right)=\left(\frac{12}{35};\frac{10}{35};-\frac{6}{35}\right).$$

15. Находим координаты точки *O*. Так как

$$\overline{A_7O}=\left(x_O-x_{A_7};y_O-y_{A_7};z_O-z_{A_7}\right),$$

то имеем

$$\begin{cases} x_O-x_{A_7}=\dfrac{12}{35}; \\ y_O-y_{A_7}=\dfrac{10}{35}; \\ z_O-z_{A_7}=-\dfrac{6}{35}; \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_O=\dfrac{12}{35}+(-3)=-\dfrac{93}{35} \\ y_O=\dfrac{10}{35}+0=\dfrac{10}{35} \\ z_O=-\dfrac{6}{35}+(-1)=-\dfrac{41}{35} \end{cases}\Rightarrow O\left(-\frac{93}{35};\frac{10}{35};-\frac{41}{35}\right).$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апатенок Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. В. Хейнман. – Минск: Высш. шк., 1990. – 286 с.
2. Беклемешев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов / Д. В. Беклемешев. – М.: Физматлит, 2007. – 360 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
5. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления / Г. Ф. Лаптев. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
6. Рудавський Ю. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю. К. Рудавський. – Л.: 2002. – 262 с.
7. Рудавський Ю. К. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Ю. К. Рудавський. – Л.: 2002. – 256 с.
8. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие: в 3 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Академкнига, 2005. – 352 с.
9. Шнейдер В. Е. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов в 2 т. Т. 1. – изд. 2-е, перераб. и доп. / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. – М.: Высш. школа, 1978. – 384 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Ефремов Николай Федорович

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО КУРСУ«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»
(РАЗДЕЛ «ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ»)
ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 08.05.03 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ», 38.03.04 «ГОСУДАРСТВЕННОЕ И МУНИЦИПАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ», 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»**

Подписано к выпуску 14.03.2017 г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. л. 3,13. Зак. № 73.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, ДНР, г. Горловка, ул. Кирова, 51
E-mail: print-adi@adidonntu.ru

Редакционно-издательский отдел