МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор АДИ ГОУВПО «ДонНТУ»
М. Н. Чальцев
16.06.2017 г.

Кафедра «Высшая математика»

ПРАКТИКУМ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ (ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 38.03.05 «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА», 09.03.02 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ», 38.03.04 «ГОСУДАРСТВЕННОЕ И МУНИЦИПАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 08.05.02 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ»)

2/53-2017-06

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия
факультета «Экономика и
управление»
Протокол № 6 от 15.02.2017

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра
«Высшая математика»
Протокол № 6 от 12.12.2016

Горловка – 2017

УДК 517(075)

Практикум. Интегрирование, функции многих переменных и дифференциальные уравнения. Расчетные задания (для студентов направлений подготовки: 38.03.05 «Бизнес-информатика», 09.03.02 «Информационные системы и технологии», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление», 38.03.02 «Менеджмент», 27.03.04 «Управление в технических системах», 08.03.01 «Строительство», 08.05.02 «Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», 23.03.01 «Технология транспортных процессов») [Электронный ресурс] / составители: Л. П. Вовк, Е. А. Королев. – Горловка: ГОУВПО «ДонНТУ» АДИ, 2017.

Содержит список рекомендованной учебной литературы, необходимые для выполнения контрольных заданий. Приведены основные теоретические положения указанных разделов высшей математики и решения типовых задач, предложены варианты индивидуальных заданий контрольной работы по основным разделам курса высшей математики в соответствии с действующей программой курса высшей математики.

Составители:	Вовк Л. П., д-р техн. наук, проф. Королев Е. А., канд. физ.-мат. наук, доц.
Ответственный за выпуск:	Николаенко В. Л.
Рецензент:	Луценко Л. И., канд. физ.-мат. наук, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель данного практикума – ознакомиться с основными методами интегрирования, приложения определенных интегралов и функций многих переменных, а также получить понятие об основных типах дифференциальных уравнений.

Практикум содержит основные теоретические сведения, примеры решения задач, задания для самостоятельной работы.

Каждый студент должен выполнить десять задач, условия которых взяты из [1] и которые приведены в разделе 2 настоящей работы. Выбирать номера задач необходимо согласно варианту, соответствующего номеру зачетной книжки. Например, если студент имеет номер зачетной книжки 8988031, то для выбора номеров задач следует принять во внимание лишь три последние цифры и расположить под ними три первые буквы русского алфавита, например,

0 3 1
а б в

Затем нужно обратиться к помещенной ниже таблице 1.1 и из каждого ее вертикального столбца, обозначенного внизу определенной буквой, взять одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой соответствует этой букве.

Таблица 1.1 – Номера контрольных заданий

№ строки	**Номера контрольных заданий**									
1	285	320	240	258	261	329	340	345	358	362
2	290	317	231	256	268	327	338	344	359	366
3	286	316	238	251	263	325	336	343	360	362
4	282	319	235	252	264	323	334	342	355	370
5	281	313	234	256	270	321	332	341	356	369
6	289	315	239	253	269	328	331	350	357	368
7	287	312	237	260	265	326	333	349	352	367
8	283	318	233	255	262	324	335	348	353	365
9	288	311	232	257	267	322	337	347	354	363
0	284	314	236	254	266	330	339	346	351	364
	в	|б-а|	в	б	|б-а|	б	в	|в-а|	|б-а|	|б-в|

Номера задач, которые нужно решить для варианта 8988031, при а = 0; б = 3; в = 1, находятся таким образом: |б-а| = |3-0| = 3; |в-а| = |1-0| =1; |б-в| = |3-1 |= 2.

Таким образом, имеем следующие номера задач: 285, 316, 240, 251, 263, 325, 340, 345, 360, 366.

1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Решить в соответствии с шифром следующие десять заданий. Данные для выбора конкретных номеров заданий взять из таблицы 1.1, приведенной выше.

Неопределенный и определенный интегралы

В заданиях 281–290 найти неопределенные интегралы. В заданиях а) и б) результаты проверить дифференцированием.

281. а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

282. а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$;

в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}$; г) $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$;

283. а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x\cdot 3^x dx$;

в) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$;

284. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$; б) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$;

285. а) $\int \frac{\cos 3xdx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2e^{3x}dx$;

в) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; г) $\int \frac{\cos xdx}{1+\cos x}$;

286. а) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x\arcsin\frac{1}{x}dx$;

в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$;

287. а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg} x)dx}{1+x^2}$; б) $\int x\ln(x^2+1)dx$;

в) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$;

288. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$; б) $\int x\sin x\cos x dx$;

в) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$;

289. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\int x^2\sin 4x dx$;

в) $\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$; г) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

290. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; б) $\int x\ln^2 x dx$;

в) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; г) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

311. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

312. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ и осью Ox.

313. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=3(1+\cos\phi)$.

314. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r=4\sin 2\phi$.

315. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

316. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью Oy.

317. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{2}{(1+x^2)}$ и $y=x^2$.

318. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(6,8)$.

319. Вычислить длину кардиоиды $r=3(1-\cos\phi)$.

320. Вычислить длину одной арки циклоиды $x=3(t-\cos t)$, $y=3(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

231–240 Дана функция $z = f(x;y)$. Показать, что

$$F(x;y;z;\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}) \equiv 0.$$

231. $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $F = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y^2}$.

232. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $F = x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2$.

233. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

234. $z = e^{xy}$; $F = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz$.

235. $z = \ln(x + e^{-y})$; $F = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2}$.

236. $z = \dfrac{x}{y}$; $F = x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

237. $z = x^y$; $F = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

238. $z = xe^{\frac{y}{x}}$; $F = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

239. $z = \sin(x + ay)$; $F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

240. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $F = (x - y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

251–260 Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

251. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$; $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3$.

252. $z = x^2 + 2y^2 + 1$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$.

253. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$; $x \le 1$, $y \ge 0$, $y \le x$.

254. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$; $x \geq 1$, $y \geq -1$, $x + y \leq 1$.

255. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$; $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

256. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$; $x \geq -1$, $y \geq -1$, $x + y \leq 1$.

257. $z = 10 + 2xy - x^2$; $0 \leq y \leq 4 - x^2$.

258. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$; $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y + 2 \geq 0$.

259. $z = x^2 + xy - 2$; $4x^2 - 4 \leq y \leq 0$.

260. $z = x^2 + xy$; $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$.

261–270 Даны функция $z = f(x;y)$, точка $A(x_0;y_0)$ и вектор $a(a_1;a_2)$.

Найти: 1) $\operatorname{grad} z$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора a.

261. $Z = x^2 + xy + y^2$; $A(1;1)$, $a(2;-1)$.

262. $Z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2;1)$, $a(3;-4)$.

263. $Z = \ln(5x^2 + 3y^2)$; $A(1;1)$, $a(3;2)$.

264. $Z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1;1)$, $a(2;-1)$.

265. $Z = 5x^2 + 6xy$; $A(2;1)$, $a(1;2)$.

266. $Z = \operatorname{arctg}(xy^2)$; $A(2;3)$, $a(4;-3)$.

267. $Z = \arcsin(x^2 / y)$; $A(1;2)$, $a(5;-12)$.

268. $Z = \ln(3x^2 + 4x^2)$; $A(1;3)$, $a(2;-1)$.

269. $Z = 3x^4 + 2x^2 y^3$; $A(-1;2)$, $a(4;-3)$.

270. $Z = 3x^2 y^2 + 5xy^2$; $A(1;1)$, $a(2;1)$.

Дифференциальные уравнения

321–340 Найти общее значение дифференциального уравнения.

321. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$.

322. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

323. $xy' = y\ln(y/x)$.

324. $xy' + y = 3$.

325. $xy' + xe^{y/x} - y = 0$.

326. $y'\cos x = (y+1)\sin x$.

327. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

328. $x^2 y' - 2xy = 3$.

329. $x^2 y' + y - 2xy = 0$.

330. $xy' + y = x + 1$.

331. $(1-x^2)y''=xy'$. 332. $2yy''+(y')^2+(y')^4=0$.

333. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$. 334. $y''+(1/x)y'=x^2$.

335. $1+(y')^2+yy''=0$. 336. $(1+y)y''-5(y')^2=0$.

337. $xy''+2y'=x^3$. 338. $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$.

339. $xy''-2y'\operatorname{tg}x=\sin x$. 340. $3yy''+(y')^2=0$.

341–350 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+py'+qy=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0$.

341. $y''+4y'-12y=8\sin 2x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

342. $y''-6y'+9y=x^2-x+3$; $y(0)=4/3$, $y'(0)=1/27$.

343. $y''+4y=e^{-2x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

344. $y''-2y'+5y=xe^{2x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

345. $y''+5y'+6y=12\cos 2x$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

346. $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

347. $y''-4y'+13y=26x+5$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

348. $y''-4y'=6x^2+1$; $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

349. $y''-2y'+y=16e^x$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

350. $y''+6y'+9y=10e^{-3x}$; $y(0)=3$, $y'(0)=2$.

351–360 Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать данную систему и ее решение в матричной форме.

351. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+6y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+2y. \end{cases}$ 352. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-5x-4y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-3y. \end{cases}$

353. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

354. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

355. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

356. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

357. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

358. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y. \end{cases}$

359. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y. \end{cases}$

360. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

361. Материальная точка массой $m = 2$ г погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости погружения с коэффициентом пропорциональности $k = 0{,}002$ кг/с. Найти скорость точки через 1 с после начала погружения, если в начальный момент она была равна нулю.

362. Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью $\upsilon_1 = 12$ км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен и через 10 с скорость лодки уменьшилась до $\upsilon_1 = 6$ км/ч. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через 1 мин после остановки мотора.

363. Пуля, двигаясь со скоростью $\upsilon_0 = 400$ м/с, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее, испытывая силу сопротивления среды; эта сила сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7\text{м}^{-1}$. Найти скорость пули через 0,001 с после вхождения пули в стену.

364. Материальная точка массой $m = 1$г движется прямолинейно. На нее действует сила в направлении движения, пропорциональная времени с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ кг$\cdot$м/с^3, и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 0{,}003$ кг/с. Найти скорость точки через три секунды после начала движения, если начальная скорость точки была равна нулю.

365. В сосуде 100 л водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью $q = 5$ л/мин, а смесь вытекает с той же скоростью, причем их перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В начальный момент в растворе содержалось $m_0 = 10$ кг соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?
366. Кривая проходит через точку $A(2;-1)$ и обладает тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.
367. Кривая проходит через точку $A(1;2)$ и обладает тем свойством, что произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке на сумму координат точки касания равно удвоенной ординате этой точки. Найти уравнение кривой.
368. Кривая проходит через точку $A(1;2)$ и обладает тем свойством, что отношение ординаты любой ее точки к абсциссе пропорциональна угловому коэффициенту касательной к этой кривой, проведенной в той же точке, с коэффициентом пропорциональности $k = 3$. Найти уравнение кривой.
369. Кривая проходит через точку $A(1;5)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен утроенной абсциссе точки касания. Найти уравнение кривой.
370. Кривая проходит через точку $A(2;4)$ и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания. Найти уравнение кривой.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)dx$ называется общее выражение для всех первообразных функции $f(x)$.

Обозначение

$$\int f(x)dx = F(x)+c, \tag{2.1}$$

где $F'(x)=f(x)$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),\ d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{2.2}$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x)+C. \tag{2.3}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx,\ c=\text{const}. \tag{2.4}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых

$$\int (f_1(x)-f_2(x)+f_3(x))dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$$

Таблица простейших неопределенных интегралов

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+c\ (m\neq -1), \tag{2.5}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \tag{2.6}$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \tag{2.7}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \tag{2.8}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \tag{2.9}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \tag{2.10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c, \tag{2.11}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c, \tag{2.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c, \tag{2.13}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c, \tag{2.14}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c. \tag{2.15}$$

Интегрирование разложением

Метод разложения основан на свойстве 4 неопределенного интеграла.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx.$$

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, пользуясь свойствами 3 и 4 и формулой (3.5), находим

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx = \int (x^2 - 2x + 3) dx =$$

$$= \int x^2 dx - 2\int x dx + 3\int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл и результаты проверить дифференцированием

$$\int \frac{xdx}{(x^2+2)^3}dx..$$

Решение. На основании преобразования дифференциала имеем

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2+2).$$

Применяя формулу (3.5) для случая $u = x^2 + 2, m = -3,$ находим

$$\int \frac{xdx}{(x^2+2)^3}dx = \int (x^2+2)^{-3}\frac{1}{2}d(x^2+2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4(x^2+2)^2 + c}.$$

Проверим полученный результат дифференцированием

$$(-\frac{1}{4(x^2+2)^2} + c)' = (-\frac{1}{4}(x^2+2)^{-2})' + c' =$$

$$= -\frac{1}{4}(-2)(x^2+2)^{-3}2x = \frac{x}{(x^2+2)^3}.$$

На основании свойства 1 приходим к выводу, что задача решена правильно.

Метод подстановки

Интегрирование путем введения новой переменной (метод подстановки) основано на формуле

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (2.16)$$

где $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменной t.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

Решение. Применим тригонометрическую подстановку $x = 2\,\mathrm{tg}\,t$.

Отсюда

$$dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}, \sqrt{x^2+4} = \sqrt{4tg^2 t + 4} = 2\sqrt{tg^2 t + 1} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{2}{\cos t}.$$

Следовательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \int \frac{2/\cos^2 t}{(2/\cos t)^3}dt = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + c.$$

Так как $\operatorname{tg} t = x/2$, то

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x/2}{\sqrt{1+(x/2)^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + c.$$

Метод интегрирования по частям

Если $u = \varphi_1(x)$, v=$\varphi_2(x)$ – дифференцируемые функции от x, то из формулы для дифференциала произведения двух функций $d(u \cdot v) = udy + vdu$ получаем формулу интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2.17)$$

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической трансцендентной функции.

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой путем интегрирования определяют v.

Пример 4. Найти интеграл $\int (4x^3 + 6x + 7)\ln dx$.

Решение. Положим $u = \ln x$, $dv = (4x^3 + 6x + 7)dx$, тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = x^4 + 3x^2 + 7x$.

По формуле (3.17) получим

$$(4x^3 + 6x + 7)\ln xdx = (x^4 + 3x^2 + 7x)\ln x - \int \frac{x^4 + 3x^2 + 7x}{x}dx =$$

$$\int = (x^4 + 3x^2 + 7x)\ln x - \int (x^3 + 3x + 7)dx = (x^4 + 3x^2 + 7x)\ln x -$$

$$-(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 7x) + c.$$

Интегрирование рациональных функций

Неопределенный интеграл от целой рациональной функции (многочлена) находим непосредственно

$$\int (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n)dx = a_0 \int dx + a_1 \int xdx + ... + \int a_n x^n dx.$$

Интегрирование дробной рациональной функции после выделения целой части сводится к интегрированию правильной рациональной дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (2.18)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, причем степень $P(x)$ ниже степени $Q(x)$.

Если многочлен $Q(x)$ имеет действительные различные корни $a, b, ..., l$ соответственно кратности $\alpha, \beta, ..., \lambda$ и комплексные попарно сопряженные корни $\alpha_\kappa \pm i\beta_\kappa (\kappa = 1,2,...,s)$ соответственно кратности $v_1, v_2, ..., v_s$, т. е.

$$Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta ... (x-l)^\lambda (x^2 + p_1 x + q_1)^{v_1} \cdot$$
$$\cdot (x_2 + p_2 x + q_2)^{v_2} ... (x^2 + p_s x + q_s)^{v_s},$$

то справедливо разложение дроби (3.18) на простейшие дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} +$$
$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + ... + \frac{L_1}{(x-l)} + \frac{L}{(x-l)^2} + ... + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda} + \frac{C_1 x + d_1}{x^2 + p_1 x + q_1} +$$
$$+ \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + ... + \frac{C_{v_1} x + D_{v_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{v_1}} + ... + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_s x + q_s} + \qquad (2.19)$$
$$+ \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} + ... + \frac{M_{v_s} x + N_{v_s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{v_s}}.$$

Постоянные $A_1, A, ..., A_\alpha, B_1, ..., B_\beta, L_1, ..., L_\lambda, C, D_1, ..., M_{v_{\alpha s}} N_{v_\alpha}$ находим методом неопределенных коэффициентов.

После разложения на простейшие слагаемые интегрирование правильной рациональной дроби сводим к интегрированию простейших рациональных дробей.

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{9-5x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx.$

Решение. Разложим сначала правильную рациональную дробь на простейшие дроби, для чего нужно найти корни ее знаменателя.

$$\frac{9-5x}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Один корень получаем непосредственно, это $x_1 = 1$. Так как

$$\frac{\left(x^3-6x^2+11x-6\right)}{(x-1)}=x^2-5x+6,$$

то $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)\left(x^2-5x+6\right)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

Поэтому получаем $x_2=2$, $x_3=3$.

Итак, многочлен имеет действительно простые корни $x_1=1$, $x_2=2$, $X_3=3$. В соответствии с формулой (3.19) разложим данную дробь на простейшие

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Слагаемых вида $\dfrac{mx+n}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ разложение не содержит, так как комплексных корней нет. Приводя дроби в правой части к общему знаменателю, получаем

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Сравниваем числители

$$9-5x=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Раскрывая скобки в правой части и группируя члены, находим:

$$9-5x=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим три уравнения для определения неизвестных коэффициентов *A, B, C*:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=5 \\ 6A+3B+2C=9 \end{cases} \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A=2$, $B=1$, $C=-3$.

Следовательно

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}.$$

и поэтому

$$\int\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}\right)dx=$$
$$=\int\frac{1}{x-2}dx+2\int\frac{1}{x-1}dx-3\int\frac{1}{x-3}dx=$$
$$=\int\frac{d(x-2)}{x-2}dx+2\int\frac{d(x-1)}{x-1}-3\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$
$$=\ln|x-2|+2\ln|x-1|-3\ln|x-3|+c.$$

Таким образом

$$\int\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}dx=\ln\left|\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^3}\right|+c.$$

Вычисление определенного интеграла

1. Теорема Ньютона – Лейбница. Определенный интеграл от непрерывной функции на данном промежутке равен разности значений любой первообразной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \tag{2.20}$$

где $F'(x)=f(x)$.

2. Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{2.21}$$

где $x=\varphi(t), a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$;

$t-$новая переменная;

$\alpha,\beta-$новые пределы интегрирования.

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)du(x). \tag{2.22}$$

Площадь фигуры в декартовых и полярных координатах

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком кривой $y=f(x)$, слева и справа – прямыми $x=a$, $x=b$, соответственно, снизу – осью OX, вычисляем по формуле

$$S=\int\limits_{b}^{a} f(x)dx \qquad \text{или} \qquad S=\int\limits_{b}^{a} ydy. \tag{2.23}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t), y=y(t),$ то

$$S=\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt. \tag{2.24}$$

Площадь сектора $OAB,$ ограниченного кривой, заданной уравнениями в полярных координатах $r=r(\phi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha,$ $\varphi=\beta\ (\beta\geq\alpha),$ вычисляем по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{2.25}$$

Длина дуги плоской кривой

Длина дуги плоской кривой, определяемой в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x),$ находится по формуле

$$L=\int_b^a \sqrt{1+y'^2\,dx}, \tag{2.26}$$

где a и b – абсциссы начала и конца дуги, соответственно.

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

причем $\alpha\leq t\leq\beta,$ а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, то длина дуги

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \tag{2.27}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi),$ а полярный угол φ на дуге изменяется от α до β, то длина дуги вычисляется по формуле:

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi. \tag{2.28}$$

Объем тела вращения

Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$ и $y = b$, вычисляем по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \quad \text{или} \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (2.29)$$

Пример 6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной осями координат и параболой

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

Решение. Найдем точки пересечения кривой с осями координат: при $x = 0,\ y = a$, при $y = 0,\ x = a$. Таким образом, отрезок интегрирования – $[a, b]$.

Далее, из уравнения параболы получим

$$y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2.$$

Поэтому по формуле (3.29)

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^4 dx =$$

$$= \pi \int_0^a \left(a^2 - 4\left(\sqrt{a}\right)^3 \sqrt{x} + 6ax - 4\sqrt{a}\left(\sqrt{x}\right)^3 + x^2 \right) dx =$$

$$= \pi \left(a^2 x - 4\left(\sqrt{a}\right)^3 \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} 2 + 6a\frac{x^2}{2} - 4\sqrt{a}\,\frac{\left(\sqrt{x}\right)^5}{3} 2 + \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{15}\pi a^3.$$

3. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x; y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x{}'(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \text{ (частная производная по } x\text{)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_x{}'(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \text{ (частная производная по } y\text{)}.$$

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Обозначения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Употребляются и другие обозначения:

$$Z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \ Z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); Z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Если смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывные, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования, т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Пример 7. Доказать, что функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

Решение. Найдем сначала частные производные данной функции:

$$u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$u'_x = -x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{2}{3}};$$

$$u''_{xx} = 3x^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u'_y = -y\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u''_{yy} = 3y^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u'_z = -z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}};$$

$$u''_{zz} = 3z^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Сложив вторые производные, получим

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0.$$

Наибольшее и наименьшее значение функции

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней наибольшего и наименьшего значений или в критических точках, или в точках, лежащих на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области необходимо:

1. Найти критические точки (лежащие внутри данной области) и вычислить в них значения функции.
2. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области.
3. Сравнить все полученные значения функции: самое большее (меньшее) и будет наибольшим (наименьшим) значением функции в данной области.

Пример 8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Решение. Находим первые частные производные $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases},$$

получим одну критическую точку $P_0(0;0)$, в которой значение функции равно нулю.

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значение функции на границе, т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 4$. Для точек этой окружности функцию $z = x^2 - y^2$ можно представить как функцию одной переменной x, $z = x^2 - \left(4 - x^2\right)$, т. е. $z = 2x^2 - 4$, причем $-2 \le x \le 2$.

Итак, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных на окружности $x^2 + y^2 = 4$ мы свели к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z = 2x^2 - 4$ на отрезке $[-2;2]$.

Найдем критические точки функции в интервале $[-2;2]$ и вычислим значения функции в этих точках и на концах интервала. Имеем $z'_x = 4x$, $4x = 0$, откуда получаем критическую точку $x = 0$; $z\big|_{x=0} = -4$.

Далее, находим $z\big|_{x=-2} = 4$, $z\big|_{x=2} = 4$. Таким образом, функция имеет наибольшее – значение, равное 4, и наименьшее значение, равное (–4).

Итак, наибольшее значение функция $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$ принимает в точках $M_1(-2;0)$ и $M_2(2;0)$ окружности $x^2 + y^2 = 4$ и наименьшее в точках $M_3(0;2)$ и $M_4(0;-2)$ той же окружности.

Производная по направлению

Теорема. Для всякой дифференцируемой функции $u(x, y, z)$ существует производная по любому направлению λ, причем

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (3.1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, и $\cos\gamma$ – направляющие косинусы луча λ.

Пример 9. Находим частные производные функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz\,,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

и вычисляем их значения в точке P

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P = 2\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P = 10\,,\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P = 5\,.$$

Так как проекции вектора $\overline{PQ}$ равна 2,–2 и 1, то его направляющими косинусами будут:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{-2}{3},\ \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2\frac{2}{3} + 10\left(-\frac{2}{3}\right) + 5\frac{1}{3} = -\frac{11}{3}\,.$$

Знак «минус» показывает, что в данном направлении функция u убывает.

Градиент

Градиентом в точке $P(x, y, z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = u(x, y, z)$, называется вектор, равный

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\,.$$

Градиент функции $u(x, y, z)$ мы будем обозначать одним из символов $\mathrm{grad}\,u(x, y, z)$, $\mathrm{grad}\,u$, $\mathrm{grad}\,u(p)$. Следовательно, по определению

$$\mathrm{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\,. \tag{3.2}$$

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим сначала примеры интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4.1}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ разлагаются на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной:

$$dx \cdot f_1(x) f_2(y) + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \tag{4.2}$$

Для решения уравнений такого типа необходимо обе его части разделить на произведение таких сомножителей, чтобы при dx осталась только функция от x, а при dy – функция от y. После этого необходимо проинтегрировать обе части уравнения (4.2).

Дифференциальное уравнения 1-го порядка называется однородным, если его можно представить в виде:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4.3}$$

где первая часть функции только от отношения $\frac{y}{x}$.

В частности, уравнение, записанное в виде $y' = f(x,y)$, является однородным, если $f(x,y)$ есть отношение двух однородных многочленов одной и той же степени. Поэтому, если при замене в уравнении x на kx и y на ky уравнение сокращается на k и не изменяется, то оно является однородным. Интегрируется однородное уравнение с помощью подстановки

$$\frac{y}{x} = t, \ y = tx, \ y' = t'x + t,$$

где $t = t(x)$ – новая искомая функция.

После замены уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение называется линейным, если оно содержит y и y' в первой степени. Его можно представить в виде

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{4.4}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные функции.

Решение этого уравнения находим в виде произведения двух функций от x

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определяется на основании уравнения $v(x) = 0$.

Пример 10. Решить уравнение $y' - y' \operatorname{ctg} x = \sin x$.

Решение. Убедившись, что данное уравнение линейное, полагаем

$$y = u \cdot v.$$

Тогда $y' = u'v + v'u$ и данное уравнение преобразуется к виду

$$u'v + v'u - uv \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x,$$

$$u'v + u\left(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x\right) = \sin x.$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можно взять произвольно, то выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения:

$$v' - v \cdot \operatorname{ctg} x = 0.$$

Тогда для нахождения u получим уравнение

$$u'v = \sin x.$$

Решая первое из этих уравнений, найдем v, разделяя переменные и интегрируя, находим его простейший, отличный от нуля частный интеграл:

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{ctg} x dx;$$

$$\ln v = \ln \sin x;$$

$$v = \sin x.$$

Подставляя v во второе уравнение и решая его, найдем u как общий интеграл этого уравнения

$$u' \cdot \sin x = \sin x;\ u' = 1;\ du = dx;\ u' = x + c.$$

Зная u и v, найдем искомую функцию y:

$$y = u \cdot v = (x + c)\sin x.$$

Теперь рассмотрим уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка. Некоторые уравнения 2-го порядка можно проинтегрировать, понизив их порядок с помощью замены переменной. Простейшими уравнениями 2-го порядка, допускающими понижение порядка, являются следующие уравнения:

1. Уравнение $y'' = f(x)$. Так как $y'' = (y') = \dfrac{d(y')}{dx}$, то $\dfrac{d(y')}{dx} = f(x)$.

Имеем уравнение 1-го порядка относительно y'. Интегрируя его, получим

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1.$$

Интегрируя еще раз, находим общее решение данного уравнения

$$y = \int\left[F(x) + C_1\right]dx = \int F(x)dx + C_1x + C_2.$$

2. Уравнение $y'' = f(x, y')$. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Введя новую функцию $y' = p(x)$ и заметив, что $y'' = p'(x)$, получим уравнение 1-го порядка относительно функции $p(x)$:

$$p' = f(x, p).$$

Интегрируя его, получим решение этого уравнения $p = \varphi(x, C_1)$.

Заменяя функцию p на y' и интегрируя уравнение:

$$y' = \varphi(x, C_1),$$

получаем общее решение данного уравнения

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

3. Уравнение $y'' = f(y, y')$. Это уравнение не содержит явно независимой переменной x. Для понижения порядка введем новую функцию $y' = p(y)$, тогда $y'' = p' \cdot p$. Подставляя выражения для y' и y'' в данное уравнение, получим уравнение 1-го порядка относительно функции $p(y)$:

$$p'p = f(y, p).$$

Пусть функция $p(y) = \varphi(y, C_1)$ является общим решением этого уравнения. Учитывая, что $p(y) = y'$, получаем с разделяющимися переменными

$$y' = \varphi(y, C_1).$$

Интегрируя его, находим общий интеграл данного уравнения

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Следующий тип задач – линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Это уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – заданные числа.

Для нахождения общего решения такого уравнения достаточно знать его фундаментальную систему частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Фундаментальную систему частных решений находим, зная корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$:

1. Корни характеристического уравнения действительные и различные $k_1 \neq k_2$. В этом случае $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Корни характеристического уравнения равны: $k_1 = k_2$; в этом случае

$$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = e^{k_2 x}$$

а общее решение

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Корни характеристического уравнения комплексные, т. е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta_i$.

В этом случае частные решения записываются в виде

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \cos\beta x,$$

а общее решение

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p и q – некоторые числа;

$f(x)$ – известная функция. Общее решение представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y(x) = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x).$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения $y(x)$ можно применить метод вариации постоянных. Однако для уравнения с постоянными коэффициентами, правые части которых имеют специальный вид, существует более простой способ нахождения частного решения $\tilde{y}(x)$.

Этот метод называется методом подбора частного решения по виду функции в правой части:

1. Правая часть уравнения

$$f(x)=p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_{n-1}x+a_n.$$

В этом случае частное решение $\tilde{y}(x)$ следует искать в виде

$$\tilde{y}=Q_n(x)x^r,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными коэффициентами;
r – число корней характеристического уравнения, равных нулю.

2. Если первая часть уравнения $f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$, то частное решение $\tilde{y}$ следует искать в виде

$$\tilde{y}=Q_n(x)e^{\alpha x}x^r,$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными коэффициентами;
r – число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентами α в показателе.

3. Если правая часть уравнения $f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x$, где M, N, β – заданные числа, то частное решение $\tilde{y}$ следует искать в виде

$$\tilde{y}=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)x^r,$$

где A и B – неизвестные коэффициенты, а r равно числу корней характеристического уравнения, совпадающих с β_i.

Пример 11. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y''+y=xe^x+2e^{-x},$$

удовлетворяющие начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2+1=0.$$

Оно имеет корни $k_{1,2}=\pm i$, а потом общее решение однородного уравнения

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Пользуясь принципом наложения, частное решение исходного уравнения следует искать в виде

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=(Ax+B)e^x+C_e^{-x}.$$

Находим производные:

$$\tilde{y}' = A_e^x + \left(Ax + B\right)e^x - Ce^{-x};$$

$$\tilde{y}'' = 2Ae^x + \left(Ax + B\right)e^x + Ce^{-x}.$$

Подставляем выражения для $\tilde{y}, \tilde{y}''$ в исходное уравнение

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = 2Axe^x + \left(2A + 2B\right)e^x + 2Ce^{-x} = -xe^{-x} + 2e^{-x}.$$

Приравниваем коэффициенты при xe^x, e^x, e^{-x} в левой и правой частях равенства:

$$2A = 1;\ 2A + 2B = 0;\ 2C = 2,$$

$$A = \frac{1}{2};\ B = -\frac{1}{2};\ C = 1.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}\left(x - 1\right)e^x + e^{-x}.$$

Находим производную y'

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}\left(x - 1\right)e^x + \frac{1}{2}e^x - e^{-x}.$$

Используем начальные условия:

$$y\left(0\right) = C_1 - \frac{1}{2} + 1 = 0;$$

$$y'(0) = C_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0,$$

$$C_1 = -\frac{1}{2};\ C_2 = 1.$$

Подставляем эти значения в выражение для y и находим искомое частное решение.

$$y = -\frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\left(x - 1\right)e^x + e^{-x}.$$

Следующий тип задач связан с решением нормальных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами.

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Особенности нормальной системы:

1. Все, входящие в систему уравнения, являются уравнениями 1-го порядка.
2. Все уравнения системы разделены относительно производных искомых функций.

Решением системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$, удовлетворяющих каждому из уравнений системы.

Нормальную систему можно свести к одному уравнению 1-го порядка относительно одной неизвестной функции. Этот метод называется методом исключения неизвестных.

Если правые части нормальной системы дифференцированных уравнений являются линейными функциями относительно $x_1, x_2, \cdots, x_n$, то система дифференцированных уравнений называется линейной. В этом случае для решения системы может быть применен матричный метод (видоизмененный метод Эйлера).

Пример 12. Найти общее решение системы линейных дифференцированных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 7x + 3y;$$

$$\frac{dy}{dt} = 6x + 4y.$$

с помощью характеристического уравнения и записать данную систему и ее решение в матричной форме.

Решение. Ведем матрицу системы и вектор неизвестных функций

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \ \overline{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда система может быть записана в матричной форме

$$\frac{d\overline{z}}{dt} = A \cdot \overline{Z}.$$

Составим характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(7-\lambda)\cdot(4-\lambda)=18=0;$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$

По теореме Виета находим корни характеристического уравнения – характеристические числа матрицы:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 10.$$

При $\lambda = 1$ уравнения для определения собственного вектора $\bar{u}_1 = (p_1; p_2)$ имеют вид:

$$(7-1)p_1 + 3p_2 = 0; \; 6p_1 + (4-1)p_2 = 0.$$

$$2p_1 + p_2 = 0.$$

Последнее определяет вектор

$$\bar{u}_1 = (1;-2).$$

При $\lambda = 10$ получаем уравнения для определения компонента второго собственного вектора $\bar{u}_2 = (q_1; q_2)$:

$$(7-10)q_1 + 3q_2 = 0;$$

$$6q_1 + (4-10)q_2 = 0.$$

или

$$q_1 - q_2 = 0.$$

Это уравнение определяет вектор

$$\bar{u}_2 = (1;1).$$

Общее решение исходной системы запишем в векторном виде

$$\bar{Z} = C_1\bar{u}_1 + C_2\bar{u}_2,$$

или в компонентах

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{10t};$$

$$y(t) = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов Ю. С. Высшая математика / Ю. С. Арутюнов, А. П. Полозков, Д. П. Полозков; под. ред. Ю. С. Арутюнова. – М.: Высш. шк., 1985. – 144 с.
2. Шнейдер В. Е. Краткий курс высшей математики. Т.1, 2 / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов – М.: Высш. шк. 1978.
3. Гусак А. А. Пособие к решению задач по высшей математике / А. А. Гусак – Минск: Высш. шк., 1973. – 530 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Вовк Леонид Петрович
Королев Евгений Александрович

**ПРАКТИКУМ.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ (ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 38.03.05 «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА», 09.03.02 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ», 38.03.04 «ГОСУДАРСТВЕННОЕ И МУНИЦИПАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 08.05.02 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ»)**

Подписано к выпуску 16.06.2017 г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. л. 2,13. Зак. № 200.

Государственное образовательное учереждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, ДНР, г. Горловка, ул. Кирова, 51
E-mail: print-adi@adidonntu.ru

Редакционно-издательский отдел