УДК 517.5

Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Якоби

Н.П. Волчкова

§ 1. Введение

Пусть $F(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, т.е. аналитическое продолжение степенного ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l\,(b)_l}{(c)_l\;l!}\,z^l, \quad |z|<1,$$

где

$$(\alpha)_l=\frac{\Gamma(\alpha+l)}{\Gamma(\alpha)} - \text{символ Похгаммера}, \quad \Gamma - \text{гамма-функция}.$$

В работе [1] (см. также [2, гл. 6, п. 198], [3, гл. 2, п. 2.3, формула (17)]) Г.Н. Ватсон получил следующее асимптотическое разложение:

$$F\left(\alpha+\lambda,\,\beta-\lambda;\,\gamma;\,\frac{1-\mu}{2}\right)\sim\frac{\Gamma(\lambda-\beta+1)\,\Gamma(\gamma)}{\pi\,\Gamma(\gamma-\beta+\lambda)}\,2^{\alpha+\beta-1}\,(1-e^{-\zeta})^{1/2-\gamma}\times$$

$$\times(1+e^{-\zeta})^{\gamma-\alpha-\beta-1/2}\left(e^{(\lambda-\beta)\zeta}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s\,\Gamma(s+1/2)}{\lambda^{s+1/2}}+\right.$$

$$\left.+\,e^{\mp\,\pi i(1/2-\gamma)}\,e^{-(\lambda+\alpha)\zeta}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s'\,\Gamma(s+1/2)}{\lambda^{s+1/2}}\right). \qquad (1)$$

Это разложение справедливо при больших $|\lambda|$ и

$$-\frac{\pi}{2}-\omega_2+\varepsilon<\arg\lambda<\frac{\pi}{2}+\omega_1-\varepsilon, \quad \varepsilon>0;$$

в $e^{\mp\,\pi i(1/2-\gamma)}$ верхний или нижний знак берется соответственно в случаях $\operatorname{Im}\lambda>0$ и $\operatorname{Im}\lambda<0$ и при этом

$$1-e^{\zeta}=e^{\zeta}\,(1-e^{-\zeta})\,e^{\mp\,\pi i}.$$

В этих формулах

$$\mu=\operatorname{ch}\zeta=\operatorname{ch}(\xi+i\eta),$$

$$\omega_2=\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}, \quad -\omega_1=\operatorname{arctg}\frac{\eta-\pi}{\xi}, \quad \eta\ge 0,$$

$$\omega_2=\operatorname{arctg}\frac{\eta+\pi}{\xi}, \quad -\omega_1=\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}, \quad \eta\le 0.$$

Числа c_s в (1) таковы, что

$$c_0=1, \quad c_1=\frac{L+M\,e^{\zeta}+N\,e^{2\zeta}}{2\,(1-e^{2\zeta})},$$

где

$$L = (\alpha+\beta-2\gamma+1)^2 - \alpha + \beta - \frac{1}{2},$$

$$M = -2(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2\gamma+1),$$

$$N = (\alpha+\beta-1)^2 + \alpha - \beta + \frac{1}{2}.$$

Число c_0' также равно единице, а c_1' получается из c_1 изменением знака ζ. Общая формула для коэффициентов c_s автору неизвестна.

Из (1) следует подобное разложение для функций Якоби первого рода

$$R_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(-\lambda, \lambda+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-t}{2}\right). \tag{2}$$

Функции Якоби тесно связаны со сферическими функциями на симметрических пространствах ранга один (см. [4, гл. 4]). Сферические функции на евклидовых пространствах легко выражаются через классические функции Бесселя [4, гл. 4]. Функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ имеют при $z\to\infty$, $|\arg z| \le \pi-\varepsilon$ $(\varepsilon\in(0,\pi))$ асимптотическое разложение

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu,2k)(2z)^{-2k} - \right.$$

$$\left.\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu,2k+1)(2z)^{-2k-1}\right], \tag{3}$$

где

$$(\nu,m) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)}$$

(см. [3, том 2, гл. 2, § 29, формула (29.4)]). Разложения такого типа с явными формулами для коэффициентов играют важную роль в ряде вопросов анализа (см., например, [5]–[8]).

В данной работе исследуются асимптотические свойства функций

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2}; \alpha+1; \sin^2 r\right) \tag{4}$$

$(\alpha,\beta\in\mathbb{C}, \alpha\ne -1,-2,\ldots; 0<r<\pi/2)$ при $\lambda\to\infty$. В силу (2) и (4) они связаны с функциями Якоби равенством

$$R_\lambda^{(\alpha,\beta)}(\cos 2r) = \varphi_{2\lambda+\alpha+\beta+1,\alpha,\beta}(r).$$

Разложение (1) и формула Стирлинга для гамма-функции показывают, что

$$\frac{\sqrt{\pi}\,(\sin r)^{\alpha+1/2}(\cos r)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right)}{\lambda^{\alpha+1/2}} + O\left(\frac{e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}}{\lambda^{\alpha+3/2}}\right).$$

Наша цель – получить общее явное разложение для $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r)$, аналогичное асимптотическому ряду (3).

§ 2. Формулировка основного результата

Положим

$$a_0(r)=0, \quad a_{2k}(r)=\frac{(-1)^{k+1}}{2(2k)!}, \quad a_{2k-1}(r)=\frac{(-1)^k}{2(2k-1)!}\ \operatorname{tg} r, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

$$d_0(r)=0, \quad d_{2k}(r)=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad d_{2k-1}(r)=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\operatorname{ctg} r, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

$$c_k=\sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k}\frac{(1/2+\beta)_{l_1+\cdots+l_k}(1/2-\beta)_{l_1+\cdots+l_k}}{l_1!\ldots l_k!\,(1/2+\alpha)_{l_1+\cdots+l_k}}\,a_1^{l_1}(r)\ldots a_k^{l_k}(r), \tag{7}$$

$$c_k^*=\sum_{j=1}^{k}\frac{(1/2+\beta)_j(1/2-\beta)_j}{j!\,(1/2+\alpha)_j}\sum_{l_1+\cdots+l_j=k}a_{l_1}(r)\ldots a_{l_j}(r), \tag{8}$$

$$\gamma_k=\sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k}\frac{(-1)^{l_1+\cdots+l_k}(1/2-\alpha)_{l_1+\cdots+l_k}}{l_1!\ldots l_k!\,(\sin r)^{1/2-\alpha}}\,d_1^{l_1}(r)\ldots d_k^{l_k}(r), \tag{9}$$

$$\gamma_k^*=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j(1/2-\alpha)_j}{j!\,(\sin r)^{1/2-\alpha}}\sum_{l_1+\cdots+l_j=k}d_{l_1}(r)\ldots d_{l_j}(r). \tag{10}$$

Ниже будет показано (см. леммы 5, 6), что $c_k=c_k^*, \quad \gamma_k=\gamma_k^*$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>-\dfrac{1}{2}$. *Тогда при* $\lambda\to\infty$, $|\arg\lambda|\le\pi-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\pi)$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r)\sim 2\cos\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(1+2\alpha)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(1+2\alpha)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac12\right)}{(2\nu)!}\frac{A_{2\nu}^*}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac12}}+$$

$$+2\sin\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(1+2\alpha)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(3+2\alpha)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac32\right)}{(2\nu+1)!}\frac{A_{2\nu+1}^*}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac32}}.$$

Коэффициенты A_k^* *могут быть вычислены по формуле*

$$A_k^*=\frac{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1)\sin^{-2\alpha}r}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)\cos^{\beta+1/2}r}\ A_k, \tag{11}$$

где

$$A_k=k!\sum_{m=0}^{k}\gamma_m c_{k-m}=k!\sum_{m=0}^{k}\gamma_m^* c_{k-m}^*. \tag{12}$$

Следствие 1. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. *Тогда при* $\lambda \to \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\frac{\sqrt{\pi}\,(\sin r)^{\alpha+1/2}(\cos r)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{\cos\left(\lambda r - \dfrac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right)}{\lambda^{\alpha+1/2}} +$$

$$+\frac{\left(\dfrac{1}{4}-\alpha^2\right)\operatorname{ctg} r + \left(\beta^2 - \dfrac{1}{4}\right)\operatorname{tg} r}{2} \cdot \frac{\sin\left(\lambda r - \dfrac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right)}{\lambda^{\alpha+3/2}} + O\left(\frac{e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}}{\lambda^{\alpha+5/2}}\right). \qquad (13)$$

Отметим, что разложение из следствия 1 содержится в [9, предложение 7.8]. Относительно других частных случаев теоремы 1, см. [2, гл. 6], [7, часть 2, гл. 3], [10, часть 1, гл. 4, предложение 4.5], [11].

§ 3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Если* $h_0 \in C^\infty[a,b]$, $0 \leq a < b$, $\operatorname{Re} c > 0$, $\operatorname{Re} d > 0$, *то при* $\lambda \to \infty$, $|\arg \lambda| \leq \pi - \varepsilon$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\int_a^b e^{i\lambda t}(t-a)^{c-1}(b-t)^{d-1}h_0(t)dt \sim$$

$$e^{i\lambda a + ic\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(k+c)}{k!}A_k(i\lambda)^{-k-c} + e^{i\lambda b}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(k+d)}{k!}B_k(i\lambda)^{-k-d},$$

где

$$A_k = \frac{d^k}{dt^k}\left((b-t)^{d-1}h_0(t)\right)\Big|_{t=a},$$

$$B_k = \frac{d^k}{dt^k}\left((t-a)^{c-1}h_0(t)\right)\Big|_{t=b}.$$

Утверждение леммы 1 является частным случаем результата, полученного в [12, гл. 2, теорема 10.2]).

Лемма 2. *Если* $\operatorname{Re}\alpha > -\dfrac{1}{2}$, *то*

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}(\sin r)^{-2\alpha}(\cos r)^{-\beta-1/2}\times$$

$$\int_0^r \cos(\lambda x)(\cos x - \cos r)^{\alpha-1/2}\times$$

$$F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos x}{2\cos r}\right)dx.$$

При $\alpha = \beta$ указанная формула совпадает с известной формулой Мелера-Дирихле (см. [3, гл. 3, п. 3.7, формула (27)]). В общем случае утверждение леммы 2 содержится в [9, гл. 7].

Лемма 3. *Для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *справедливо равенство*

$$\frac{\cos^2 t}{\Gamma(\alpha+1)}\,\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{\sin^2 r}{4\Gamma(\alpha+3)}\left((\alpha-\beta+3)^2-\lambda^2\right)\,\varphi_{\lambda,\alpha+2,\beta-2}(r)+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\left(\alpha+1-(\alpha-\beta+2)\sin^2 r\right)\,\varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta-1}(r). \qquad (14)$$

Доказательство. В силу определения (4) имеем

$$\varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta-1}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2}; \alpha+2; \sin^2 r\right), \qquad (15)$$

$$\varphi_{\lambda,\alpha+2,\beta-2}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2}; \alpha+3; \sin^2 r\right). \qquad (16)$$

Используя (4), (15), (16) и формулу

$$c\,(c-1)\,(z-1)\,F(a,b;c-1;z) + c\left[c-1-(2c-a-b-1)\,z\right]F(a,b;c;z)+$$

$$(c-a)\,(c-b)\,z\,F(a,b;c+1;z) = 0.$$

(см. [3, формула 2.8 (30)]), получаем (14). □

Лемма 4. *Для производной порядка* p *от суперпозиции двух функций имеет место формула*

$$(f(\tau(t)))^{(p)} = \sum_{m=0}^{p} \frac{f^{(m)}(\tau(t))}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (\tau(t))^k (\tau^{m-k}(t))^{(p)}, \quad p \geq 0. \qquad (17)$$

Указанное утверждение содержится в [13, доказательство теоремы 2.11].

Следствие 2. *Если* $\tau(0) = 0$, *то*

$$(f \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\dots k_m!}\,\tau^{(k_1)}(0)\dots\tau^{(k_m)}(0), \quad p \geq 1. \qquad (18)$$

Доказательство. Поскольку $\tau(0) = 0$, из (17) имеем

$$(f \circ \tau)^{(p)}(0) = \sum_{m=1}^{p} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \left(\tau^m\right)^{(p)}(0), \quad p \geq 1. \qquad (19)$$

Теперь воспользуемся формулой Лейбница

$$(f_1 \dots f_m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\dots k_m!} f_1^{(k_1)} \dots f_m^{(k_m)}.$$

Положив в этой формуле $f_1 = \ldots = f_m = \tau$, получим

$$(\tau^m)^{(p)} = \sum_{k_1+\dots+k_m=p} \frac{p!}{k_1!\dots k_m!} \tau^{(k_1)} \dots \tau^{(k_m)}, \quad m \geq 1. \qquad (20)$$

Комбинируя (19) с (20), приходим к равенству (18). □

Нам потребуются также следующие формулы, связанные с подстановкой ряда в ряд (см. [14, приложение 1, § 1.3, п. 1.3.6]):

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, z^k\right)^l = \sum_{k=0}^{\infty}\, c_k\, z^k, \quad |z| < R_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k\, z^k| < R_2, \tag{21}$$

$$c_k = \sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k} \frac{(l_1+\cdots+l_k)!}{l_1!\ldots l_k!}\, b_{l_1+\cdots+l_k}\, a_1^{l_1}\ldots a_k^{l_k}. \tag{22}$$

В частности,

$$c_0 = b_0, \quad c_1 = a_1\, b_1, \quad c_2 = a_1\, b_2 + a_2\, b_1,$$

$$c_3 = a_3\, b_1 + 2\, a_1\, a_2\, b_2 + a_1^3\, b_3,$$

$$c_4 = a_4\, b_1 + 2\, a_1\, a_3\, b_2 + a_2^2\, b_2 + 3\, a_1^2\, a_3\, b_3 + a_1^4\, b_4.$$

Лемма 5. *Пусть*

$$f_1(t) = \left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

Тогда

$$f_1^{(k)}(0) = k!\,\gamma_k = k!\,\gamma_k^*,$$

где константы γ_k *и* γ_k^* *определены в* (9), (10).

Доказательство. Используя разложение косинуса и синуса в степенной ряд, имеем

$$\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t} = \sin r\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_k(r)\, t^k\right), \tag{23}$$

где коэффициенты $d_k(r)$ определены равенством (6). Поскольку

$$f(z) := (1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_l}{l!}\, z^l,$$

то из (23) и (21), (22) находим

$$\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} = (\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) t^k\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} =$$

$$= (\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_l}{l!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) t^k\right)^l = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\, t^k,$$

где коэффициенты γ_k определены в (9). Таким образом, $f_1^{(k)}(0) = k!\,\gamma_k$.

Далее, положим

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r)\, t^k.$$

Тогда $\tau(0)=0$ и $f_1(t)=(\sin r)^{\alpha-\frac12} f(\tau(t))$. Учитывая, что

$$\tau^{(k)}(0)=k!\,d_k(r),\qquad f^{(k)}(0)=(-1)^k\left(\frac12-\alpha\right)_k,$$

по следствию 2 получаем $f_1^{(k)}(0)=k!\,\gamma_k^*$. Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 6. *Пусть*

$$f_2(t)=F\left(\frac12+\beta,\frac12-\beta;\alpha+\frac12;\frac{\cos r-\cos(t-r)}{2\cos r}\right). \tag{24}$$

Тогда

$$f_2^{(k)}(0)=k!\,c_k=k!\,c_k^*,$$

где константы c_k *и* c_k^* *определены в* (7), (8).

Доказательство. Аргумент гипергеометрической функции в (24) можно разложить следующим образом:

$$\tau_*(t):=\frac{\cos r-\cos(t-r)}{2\cos r}=\frac{(1-\cos t)\cos r-\sin t\sin r}{2\cos r}=$$

$$=\frac{1}{2\cos r}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}t^{2k}\cos r+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}t^{2k+1}\sin r\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2\cdot(2k)!}t^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2\cdot(2k+1)!}t^{2k+1}\operatorname{tg} r=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}a_m(r)t^m, \tag{25}$$

где коэффициенты $a_k(r)$ определены в (12). Согласно разложению гипергеометрической функции в степенной ряд

$$F(z):=F\left(\frac12+\beta,\frac12-\beta;\alpha+\frac12;z\right)=\sum_{l=0}^{\infty}b_l\,z^l, \tag{26}$$

где

$$b_l=\frac{\left(\frac12+\beta\right)_l\left(\frac12-\beta\right)_l}{\left(\frac12+\alpha\right)_l\ l!}. \tag{27}$$

Из (21), (22) и (25)–(27) получаем

$$F\left(\frac12+\beta,\frac12-\beta;\alpha+\frac12;\frac{\cos r-\cos(t-r)}{2\cos r}\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}b_l\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m(r)t^m\right)^l=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,t^k.$$

Отсюда $f_2^{(k)}(0) = k!\, c_k$. Далее, поскольку $\tau_*(0) = 0$, $\tau_*^{(k)}(0) = k!\, a_k(r)$,

$$F^{(l)}(0) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\beta\right)_l \left(\frac{1}{2}-\beta\right)_l}{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)_l},$$

из следствия 2 получаем $f_2^{(k)}(0) = k!\, c_k^*$. Таким образом, лемма 6 доказана. $\square$

§ 4. Доказательство теоремы 1

По лемме 2 имеем равенство

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)} (\sin r)^{-2\alpha} (\cos r)^{-\beta-1/2}\, I(\lambda), \tag{28}$$

где

$$I(\lambda) = 2\int\limits_0^r \cos(\lambda x)(\cos x - \cos r)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos x}{2\cos r}\right) dx.$$

Представление для $I(\lambda)$ можно записать в виде

$$I(\lambda) = \int\limits_{-r}^{r} e^{i\lambda x}\,(\cos x - \cos r)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos x}{2\cos r}\right) dx =$$

$$= e^{-i\lambda r}\int\limits_0^{2r} e^{i\lambda t}\,(\cos(t-r) - \cos r)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos(t-r)}{2\cos r}\right) dt =$$

$$= e^{-i\lambda r}\int\limits_0^{2r} e^{i\lambda t}\, t^{\alpha-1/2}\,(2r-t)^{\alpha-1/2}\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t\,(2r-t)}\right)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos(t-r)}{2\cos r}\right) dt.$$

Из асимптотического разложения интегралов Фурье (см. лемму 1) имеем

$$I(\lambda) \sim e^{-i\lambda r} \left(e^{i\pi\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{k!} \frac{A_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. e^{2i\lambda r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{k!} \frac{A_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}} \right),$$

где

$$A_k = \frac{d^k}{dt^k} \left(\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t} \right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \left. F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos(t-r)}{2\cos r} \right) \right) \right|_{t=0}, \quad k \geq 0. \tag{29}$$

Отсюда

$$I(\lambda) \sim 2\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(2\alpha+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{1}{2}}} +$$

$$2\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(2\alpha+3)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu+1+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{3}{2}}}. \tag{30}$$

При этом для коэффициентов A_k из (29) справедливо соотношение

$$A_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!\,(k-m)!} f_1^{(m)}(0)\, f_2^{(k-m)}(0) =$$

$$= k! \sum_{m=0}^{k} \gamma_m c_{k-m} = k! \sum_{m=0}^{k} \gamma_m^* c_{k-m}^* \tag{31}$$

(см. леммы 5, 6). Используя (28), (30) и (31) получаем утверждение теоремы 1.

В заключение отметим, что разложение (13) при $\operatorname{Re}\alpha > -\dfrac{1}{2}$ является непосредственным следствием теоремы 1. В общем случае (13) получается отсюда методом продолжения по параметру с использованием леммы 3 (см. [12, гл. 2, § 10, п. 10.3, доказательство формулы (10.61)]).

Список литературы

[1] G.N. Watson, "Asymptotic expansions of hyperheometric functions", *Trans. Cambridge. Philos. Soc.*, **22** (1918), 277–308.

[2] Е.В. Гобсон, *Теория сферических и эллипсоидальных функций*, ИЛ, М., 1952. – 476 с.

[3] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, I, II: Наука, М., 1973.

[4] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987.

[5] M. El Harchaoui, "Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules)", *J. Analyse Math.*, **67** (1995), 1–37.

[6] M. Berkani, M. El Harchaoui, R. Gay, "Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique – Cas des deux boules", *J. Complex Variables*, **43** (2000), 29–57.

[7] V.V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[8] Вит.В. Волчков, Н.П. Волчкова, "Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве", *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 169–197.

[9] V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer-Verlag, London, 2009.

[10] V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov, *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*, Birkhäuser, Basel, 2013.

[11] Н.П. Волчкова, "Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса", *Труды ИПММ НАН Украины*, **20** (2010), 34–38.

[12] Э.Я. Риекстыньш, *Асимптотические разложения интегралов*, I: Зинатне, Рига, 1974.

[13] R.J. Nessel, E. Wickeren, "Local Multiplier Criteria in Banach Spaces", *Mathematica Balkanica. New Series*, **2**:2-3 (1988), 114–132.

[14] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983. – 750 с.

Аннотация

Н.П. Волчкова

Изучаются асимптотические свойства гипергеометрической функции Гаусса. Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Якоби первого рода.

Ключевые слова: асимптотический ряд, функции Якоби, симметрические пространства

Библиография: 14 названий.

Abstract

N.P. Volchkova

We study asymptotic properties of the Gauss hyperheometric function. An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Jacobi functions of the first kind is obtained.

Bibliography: 14 titles.

Key words: asymptotic expansion, Jacobi functions, symmetric spaces