НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Общие положения

Нелинейная оптимизационна модель имеет следующий вид:

$$Z = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \to min(max);$$

$$g_1(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_m(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \geq 0.$$

В нелинейных моделях все или хотя бы одна из указанных зависимостей должна быть нелинейной. С точки зрения математического программирования такие модели используются для решения задач нелинейного программирования.

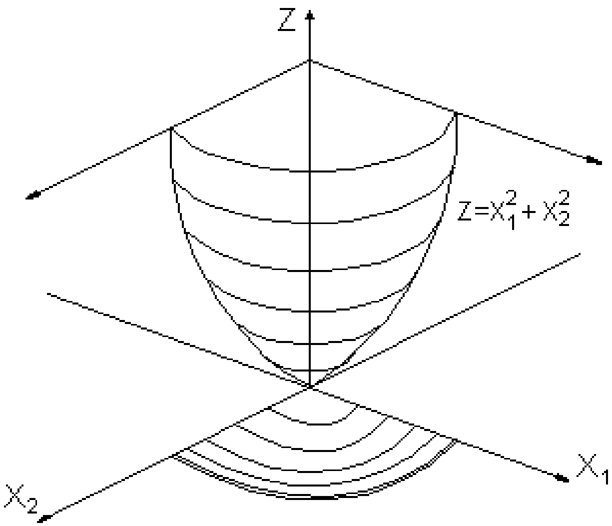
Для анализа нелинейных моделей используется векторный анализ и прежде всего понятие градиента.

Градиент — это вектор, компонентами которого являются частные производные рассматриваемой функции.

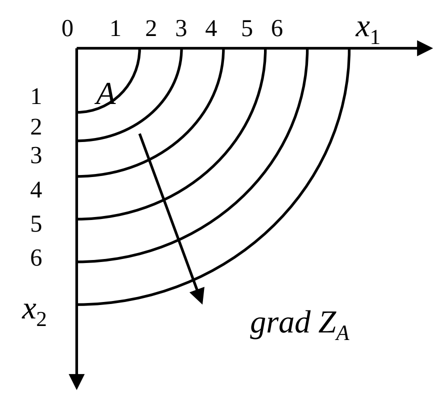
$$Z = f\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\right) \quad gradZ = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x_1}; \dots; \frac{\partial z}{\partial x_j}; \dots; \frac{\partial z}{\partial x_n} \right\}$$

Пример. Определить градиент функции $$Z = x_1^2 + x_2^2$$

в точке $A\{x_1 = 1; \quad x_2 = 2\}$



Как видно из графиков, *градиент* — это вектор, который направлен по нормали к линиям уровня и указывает направление наискорейшего роста функции *Z*.



Метод множителей Лагранжа

Математическая модель задач распределения ресурсов нередко имеет нелинейный характер, а ресурсные ограничения представлены в виде равенств:

$$Z = f\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right) \to max\left(min\right);$$

$$\varphi_1\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right) = 0;$$

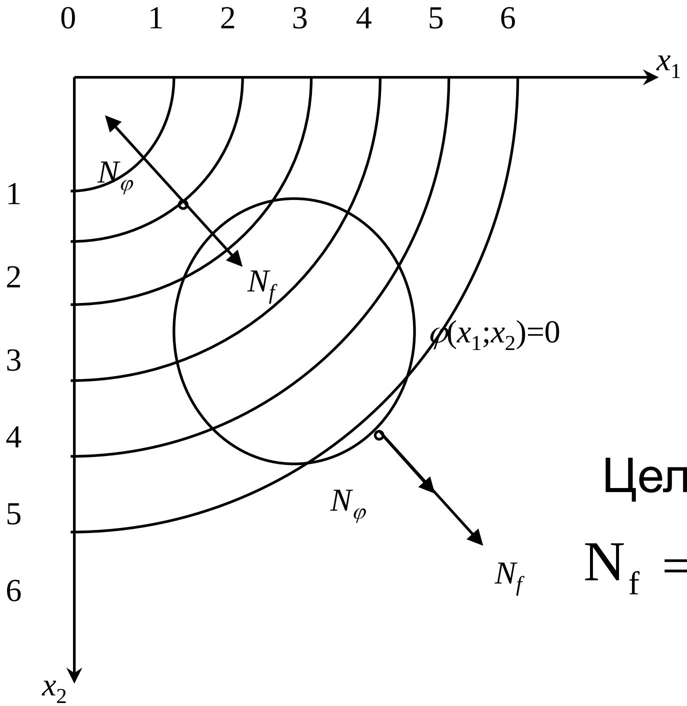
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_m\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right) = 0;$$

$$m < n.$$

Геометрический смысл такой задачи рассмотрим на примере двумерного случая

$$Z = f(x_1, x_2) \to max(min);$$
$$\varphi(x_1, x_2) = 0.$$



Как видно из графика, функция $Z = f(x_1, x_2)$ достигает экстремального значения в тех точках, в которых нормаль N_f (нормаль к линиям уровня функции *f*) коллинеарна (т.е. лежит на одной прямой) нормали N_φ функции $\varphi(x_1, x_2)$

Целевая функция Z достигает максимума при условии $N_f = \lambda N_\varphi$ и минимума — при условии $N_f = -\lambda N_\varphi$

В данном случае множитель λ показывает соотношение между скалярными величинами векторов N_f и N_φ

Из определения градиента следует, что векторы N_f и N_φ

являются градиентами этих функций. Поэтому справедливы следующие соотношения:

– при минимизации целевой *функции* $$\mathrm{grad} f = -\lambda\,\mathrm{grad}\varphi$$

– при максимизации целевой функции $$\mathrm{grad} f = \lambda\,\mathrm{grad}\varphi$$

После замены градиентов их компонентами получим соотношение

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1};\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right\} = \pm\lambda\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1};\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right\}$$

Аналогичные соотношения справедливы для отдельных компонентов рассматриваемых векторов

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \pm\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_1};\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \pm\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

После преобразования получим $\frac{\partial f}{\partial x_1} \pm \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \pm \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$

Данные выражения являются частными производными функции Лагранжа *L* по x_1 и x_2.

$$\mathrm{L} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) + \lambda\varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$$

Таким образом, применение метода множителей Лагранжа для двумерного случая состоит в следующем.

Для решения экстремальной задачи

$$Z = f(x_1, x_2) \rightarrow max(min) \quad \varphi(x_1, x_2) = 0$$

составляется функция Лагранжа

$$\mathrm{L} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) + \lambda\varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Далее находят частные производные от функции Лагранжа по переменным x_1, x_2 и λ и приравнивают их нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0; \\ \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} = \varphi(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, находят оптимальные значения переменных x_1 и x_2, т.е. находят экстремум целевой функции Z при условии, что переменные x_1 и x_2 удовлетворяют условию

$$\varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = 0$$

Пример

$$Z = x_1^2 + 2x_2^2 \to min \qquad 2x_1 + x_2 = 1$$

Функция Лагранжа:

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{4}{9}; \quad x_1 = \frac{4}{9}; \quad x_2 = \frac{1}{9}.$$

Обобщенная задача, решаемая методом множителей Лагранжа, имеет следующий вид:

$$Z = f\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\right) \to max(min);$$

$$\varphi_i\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = 0;$$

$$n > m.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathrm{Z} = \mathrm{f}\left(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{j}, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\right) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \lambda_\mathrm{i} \varphi_\mathrm{i}\left(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{j}, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}_1} = 0; \dots; \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{n}} = 0; \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda_1} = 0; \dots; \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda_\mathrm{m}} = 0.$$

Примеры решения экономических задач методом множителей Лагранжа

1. *Задача минимизации совокупных издержек при постоянном объеме производства.*

Математическая модель задачи: $$Z = P_L L + P_K K \to min$$

$$BL^{a_1} K^{a_2} = Q^*$$

где *PL, PK* — цены использования факторов производства: соответственно труда и капитала;

L, K — объемы использования соответственно труда и капитала;

B, *a*1 и *a2* — коэффициенты производства функции Кобба-Дугласа;

*Q** — объем производства как постоянная величина.

Выражение (1) представляет собой целевую функцию, отражающую минимизируемую сумму совокупных издержек производства.
Ограничение (2) отражает условие постоянства объема производства.

Для оптимизации объемов использования труда и капитала составляется функция Лагранжа (*Ф*):

$$Ф = P_L L + P_K K + \lambda\left(BL^{a_1}K^{a_2} - Q^*\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Ф}{\partial L} = P_L + \lambda a_1 BK^{a_2} L^{a_1 - 1} = 0; \\ \dfrac{\partial Ф}{\partial K} = P_K + \lambda a_2 BL^{a_1} K^{a_2 - 1} = 0; \\ \dfrac{\partial Ф}{\partial \lambda} = BL^{a_1}K^{a_2} - Q^* = 0. \end{cases}$$

Оптимальные значения *L* и *K* определяются путем решения системы уравнений:

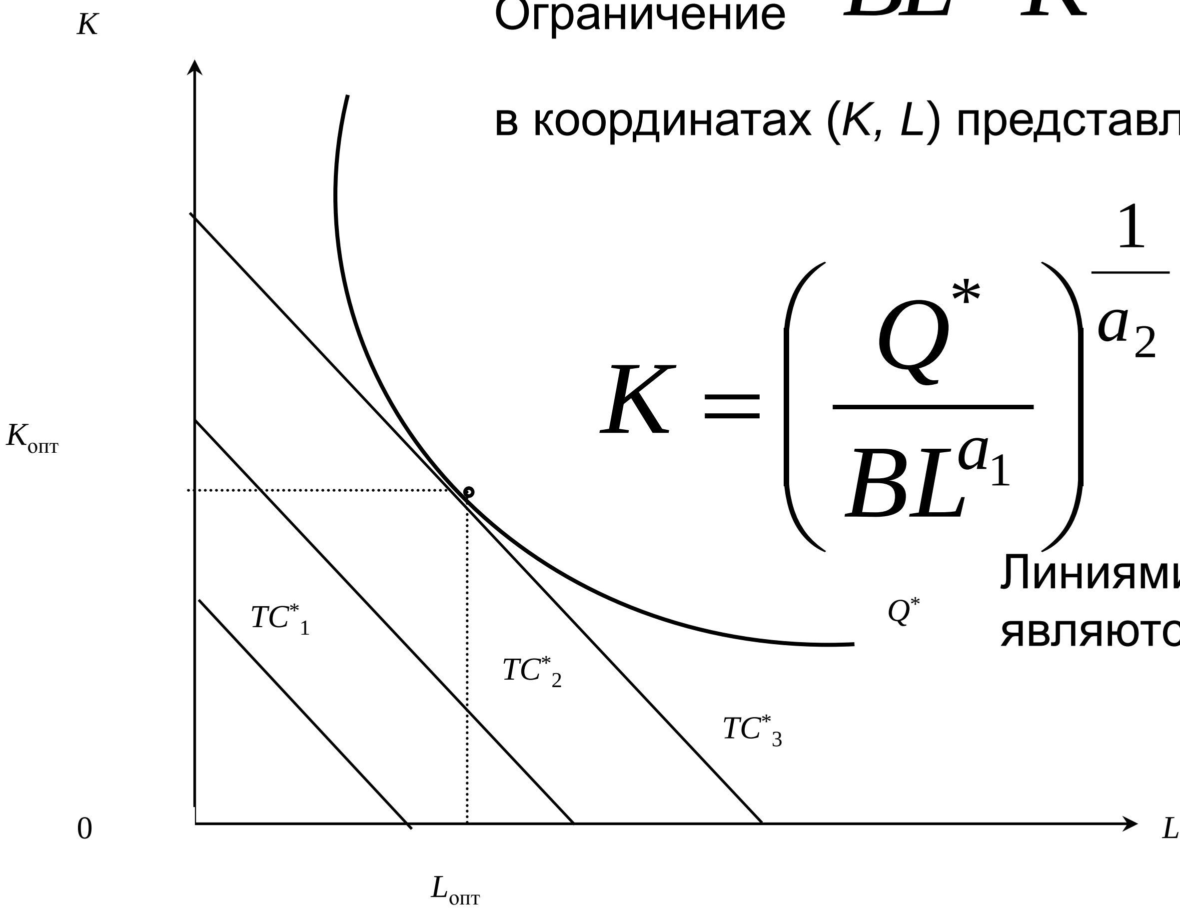
$$K_{\text{опт}} = \left(\frac{Q^*}{B\left(\frac{P_K a_1}{P_L a_2}\right)^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2}} \qquad L_{\text{опт}} = \left(\frac{Q^*}{B\left(\frac{P_L a_2}{P_K a_1}\right)^{a_2}} \right)^{\frac{1}{a_1 + a_2}}$$

Данная задача может быть решения графическим способом или с использованием персонального компьютера

Ограничение $$BL^{a_1}K^{a_2}=Q^*$$

в координатах (*K*, *L*) представляет собой изокванту

$$K=\left(\frac{Q^*}{BL^{a_1}}\right)^{\frac{1}{a_2}}$$



Линиями уровня целевой функции являются изокосты

$$K=\frac{TC^*}{P_K}-\frac{P_L}{P_K}L$$

где *TC** — значения совокупных издержек, соответствующие линиям уровня *Z*.
Как видно из рисунка оптимальные значения *L*опт и *K*опт соответствуют точке касания изокванты и изокосты.

Задача максимизации объема производства при постоянных совокупных издержках.

Математическая модель задачи:

$$Q = BL^{a_1}K^{a_2} \to max \qquad P_L L + P_K K = TC^*$$

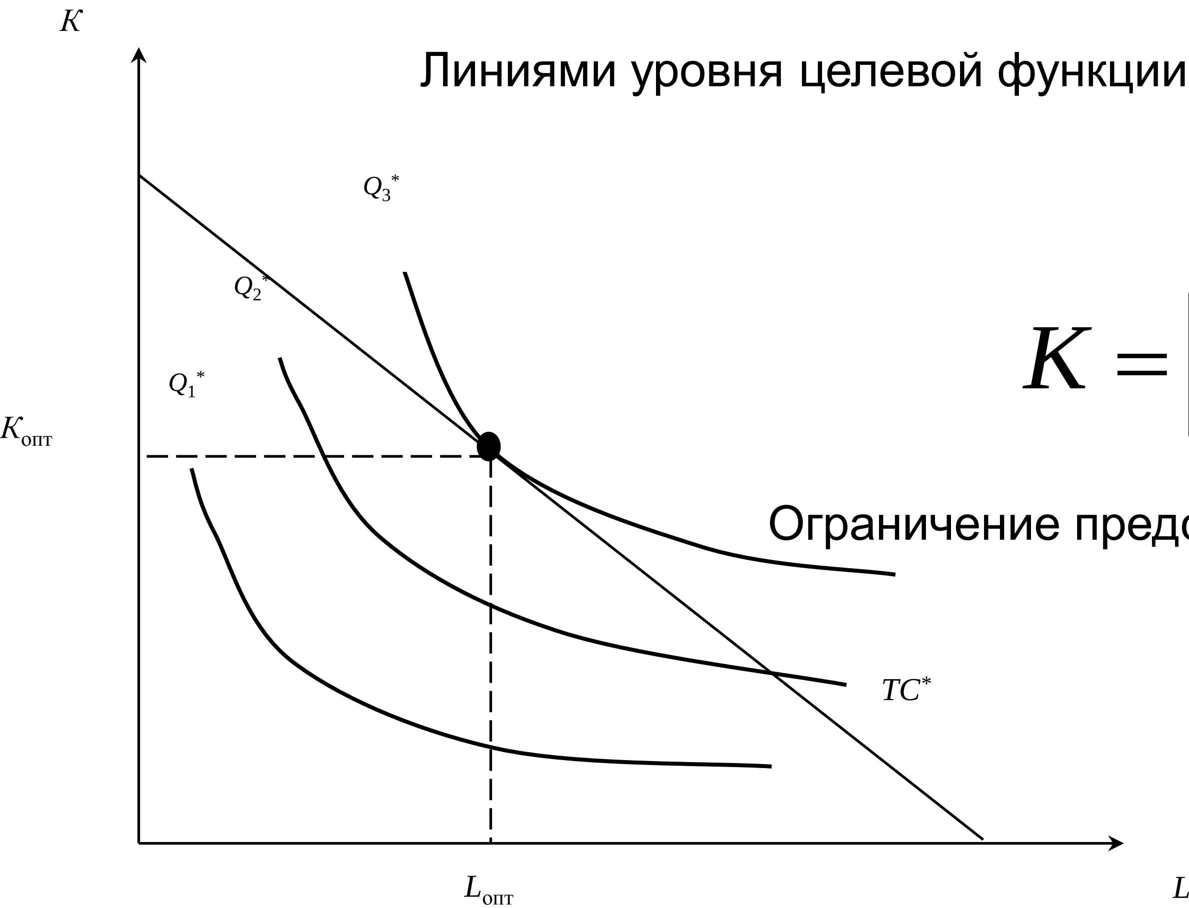
Функция Лагранжа:

$$\Phi = \mathrm{BL}^{a_1}\mathrm{K}^{a_2} + \lambda\left(\mathrm{P_L L} + \mathrm{P_K K} - \mathrm{TC}^*\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial L} = Ba_1 K^{a_2} L^{a_1 - 1} + \lambda P_L = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial K} = Ba_2 L^{a_1} K^{a_2 - 1} + \lambda P_K = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = P_L L + P_K K - TC^* = 0. \end{cases}$$

$$K_{\text{опт}} = \frac{TC^*}{P_K\left(\dfrac{a_1}{a_2} + 1\right)} \qquad L_{\text{опт}} = \frac{TC^*}{P_K\left(\dfrac{a_2}{a_1} + 1\right)}$$

Решение задачи графическим способом представлено на рис.



Линиями уровня целевой функции являются изокванты

$$K = \left(\frac{Q^*}{BL^{a_1}} \right)^{\frac{1}{a_2}}$$

Ограничение представляет собой изокосту

$$K = \frac{TC^*}{P_K} - \frac{P_L}{P_K} L$$

где *TC** — заданный уровень совокупных издержек.

На шахте для ведения горных работ по новому пласту планируется проведение n последовательно расположенных горных выработок.

При увеличении площади поперечного сечения отдельно взятой горной выработки будут увеличиваться затраты на её проведение, а депрессия этой выработки (давление движущегося по выработке заданного количества воздуха) будет уменьшаться.

Необходимо установить такие площади поперечных сечений каждой из n последовательно расположенных горных выработок при которых сумма затрат на их проведение будет минимальной при заданной депрессии цепи этих выработок.

Целевая функция и основное ограничение этой задачи запишутся в следующем виде.

Целевая функция

$$З_{\sum} = З_1 + \cdots + З_j + \cdots + З_n \to \min.$$

Основное ограничение $$h_1 + \cdots + h_j + \cdots + h_n = h_з.$$

Здесь $З_{\sum}$ - сумма затрат на проведение цепи горных выработок, грн.;

$З_j$ – затраты на проведение j^й горной выработки, грн.;

$j = 1, 2, \cdots\cdots, n$ - индекс горной выработки;

n - количество горных выработок в цепи;

h_j – депрессия j^й горной выработки, даПа;

$h_з$ – заданная депрессия цепи горных выработок, даПа.

Величина Зj, грн. определяется из выражения $З_j = k_j\ F_j\ l_j$

где k_j – стоимость проведения 1м^3 j^й горной выработки, грн./м^3;

F_j – площадь поперечного сечения j^й горной выработки, м^2;

l_j – длина j^й горной выработки, м.

Депрессия j^й горной выработки h_j, даПа, определяется по формуле

$$h_j = \frac{\alpha_j P_j l_j Q_j^2}{F_j^3}$$

где α_j – коэффициент аэродинамического сопротивления j^й горной выработки, даПа·с^2/м^2

P_j – периметр поперечного сечения j^й горной выработки, м;

Q_j – количество воздуха, проходящего через j^ю горную выработку, м^3/с.

Периметр поперечного сечения $j^{й}$ горной выработки P_j, м определяется из выражения

$$P_j = c_j \sqrt{F}$$

где c_j – коэффициент, характеризующий форму поперечного сечения jй горной выработки (для арочной формы c_j =3,8, для трацепевидной формы c_j =4,16, для круглой формы c_j =3,54).

$$h_j = \frac{\alpha_j C_j l_j Q_j^2}{F_j^{2.5}}$$

$$З_{\sum} = k_1 F_1 l_1 + \cdots + k_j F_j l_j + \cdots + k_n F_n l_n \rightarrow \min.$$

$$\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2,5} + \cdots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2,5} + \cdots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2,5} - h_{з.} = 0.$$

$$F_1 \geq 0, \cdots, F_j \geq 0, \cdots, F_n \geq 0.$$

Математическая модель, представленная выражениями, является задачей нелинейного программирования, решаемой методом неоперенных множителей Лагранжа поскольку:

-- основное ограничения представляют собой нелинейную функцию переменных Fj;

- основное ограничения представляют собой равенство;

- количество основных ограничений (m=1) меньше количества переменных n, если рассматривать цепь, состоящую из 2х и более выработок или равно количеству переменных, если рассматривать отдельно взятую выработку.

Функция Лагранжа примет вид

$$L = k_1 F_1 l_1 + \cdots + k_j F_j l_j + \cdots + k_n F_n l_n +$$
$$\lambda(\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2,5} + \cdots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2,5} + \cdots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2,5} - h_з).$$

После определения частных производных функции Лагранжа L по Fj и λ и приравнивания их нулю получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial F_1} = k_1 l_1 - 2.5\lambda\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-3.5} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial Fj} = k_j l_j - 2.5\lambda\alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-3.5} = 0,$$

$$F_j = \sqrt[3,5]{\frac{2.5\lambda\alpha_j c_j Q_j^2}{k_j}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial Fn} = k_n l_n - 2.5\lambda\alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-3.5} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2.5} + \cdots + \alpha_{\mathrm{j}} c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2.5} + \cdots$$

$$\cdots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2.5} - h_з = 0.$$

$$\beta_j = l_j \sqrt[3.5]{\alpha_j c_j Q_j^2 k_j^{2.5}}$$

где βj – вентиляционно-стоимостная характеристика jй (j=1,2,…,n) горной выработки.

$$F_j = F_{\text{оптj}} = \sqrt[3{,}5]{\frac{2.5\alpha_j c_j Q_j^2}{k_j} 0{,}4 \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j}{h_з} \right)^{1{,}4}}$$

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Adobe PDF

Вернуть обычный режим

$$\beta_j = l_j \sqrt[3.5]{\alpha_j c_j Q_j^2 k_j^{2.5}}$$

$$\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2,5} + \cdots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2,5} + \cdots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2,5}$$

$$F_j = F_{\text{опт}j} = \sqrt[3,5]{\frac{2.5\alpha_j c_j Q_j^2}{k_j} 0,4 \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \beta_j}{h_з}\right)^{1,4}}$$

$$З_{\Sigma} = k_1 F_1 l_1 + \cdots + k_j F_j l_j + \cdots + k_n F_n l_n \to \min.$$

	A	B	C	D	E	F
7	n	2				
8	α	0,001800	86549,9701	12,32406	41,050835	
9	c	3,8	187536,9299	12,83838	88,949165	
10	Q	80	274086,9		130	
11	l_1	500				
12	L_2	1200				
13	k_1	300				
14	k_2	260			з1	5854182
15	$h_з$	130	з1	19301,28	f1	12,32394
16	Ft	13,8	f1	0,128675	f2	12,83844
17	Fmax	13,8	Ог	130	Ог	130

$$\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2,5} + \cdots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2,5} + \cdots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2,5}$$

пуск | Total Commander 7.0... | Окончательнареда... | Microsoft PowerPoint ... | Методи_r.doc - Micr... | Microsoft Excel - Кур... | EN 22:53 Пт 25

Градиентные методы

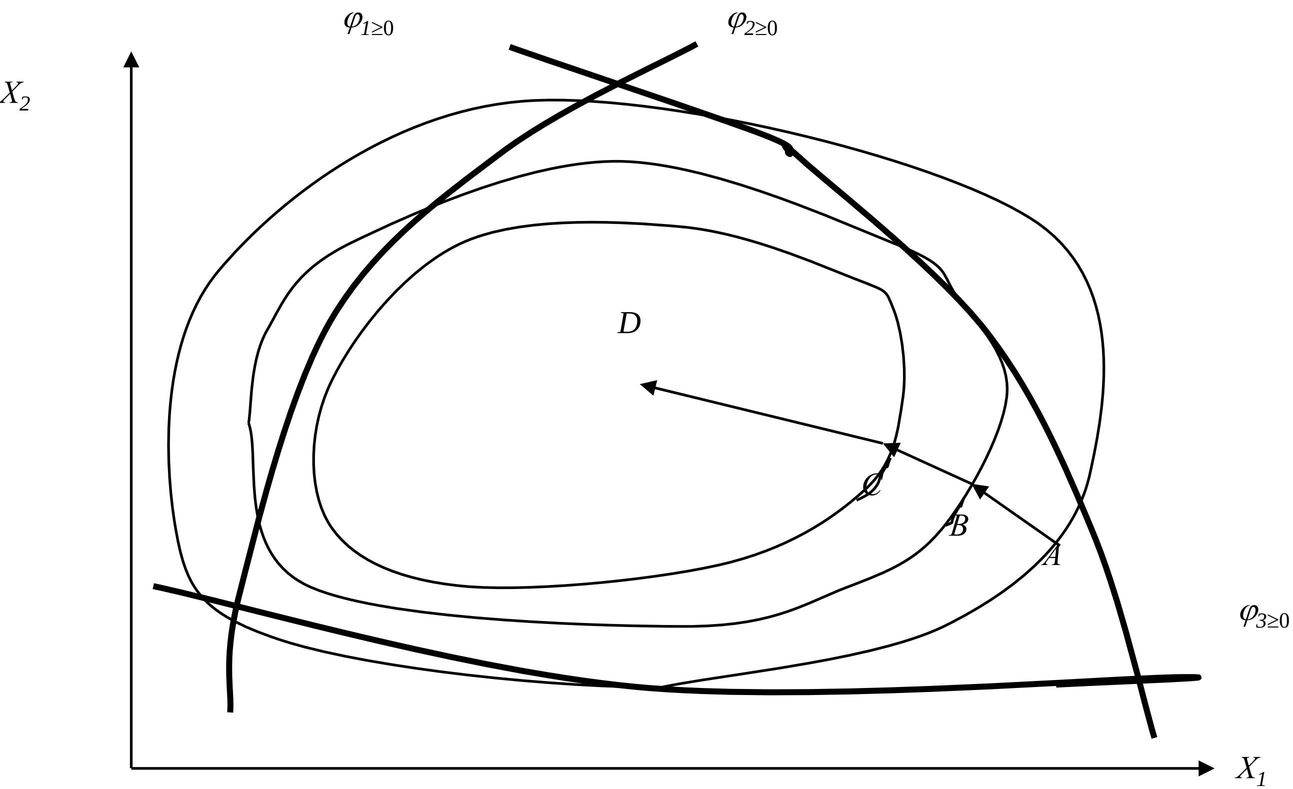
Процесс нахождения оптимального решения задачи с помощью градиентного метода состоит в том, что, начиная с некоторой точки, удовлетворяющей системе ограничений, осуществляется переход к другим точкам, в которых в соответствии с условием задачи целевая функция имеет большее (меньшее) значение. После конечного числа шагов получают с необходимой точностью решение экстремальной задачи.

Метод градиентов с конечным шагом

Этот метод целесообразно использовать для нахождения решения нелинейных задач выпуклого программирования, в которых всякий локальный экстремум одновременно является глобальным.
Математическая модель решаемой задачи имеет следующий вид:

$$Z = f(x_1, x_2) \to min(max);$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2) \geq 0; \\ \varphi_2(x_1, x_2) \geq 0; \\ \varphi_3(x_1, x_2) \geq 0. \end{cases}$$



Процесс решения задачи начинается с точки $A\left(x_1^{(A)}; x_2^{(A)}\right)$

Итерационный процесс решения задачи включает следующие этапы.

1. Определения градиент функции $f\left(x_1; x_2\right)$ в точке *A*

$$gradf = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1};\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right\} \quad gradf_A = \left\{a_1^{(A)};\ a_2^{(A)}\right\}$$

2. Составляется параметрическое уравнение точки, движущейся в направлении градиента

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + a_1^{(k)} h$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + a_2^{(k)} h$$

где *h* — итерационный параметр, величина которого указывает длину шага в направлении градиента.

3. Определяются координаты точки *B*

$$x_1^{(B)} = x_1^{(A)} + a_1^{(A)} h \qquad x_2^{(\mathrm{B})} = x_2^{(B)} + a_2^{(B)} h$$

4. Проверяется соответствие условий (2) точке *B*.

5. Определяется значение целевой функции в точке *B*

$$Z_B = f\left(x_1^{(B)};\ x_2^{(B)}\right)$$

6. Если $Z_B > Z_A$

определяется градиент в точке *B*

$$gradf_B = \left\{a_1^{(B)};\ a_2^{(B)}\right\}$$

7. Итерационный процесс продолжается пока градиент целевой функции станет равным нулю

$$gradf_K = \{0;\ 0\}$$

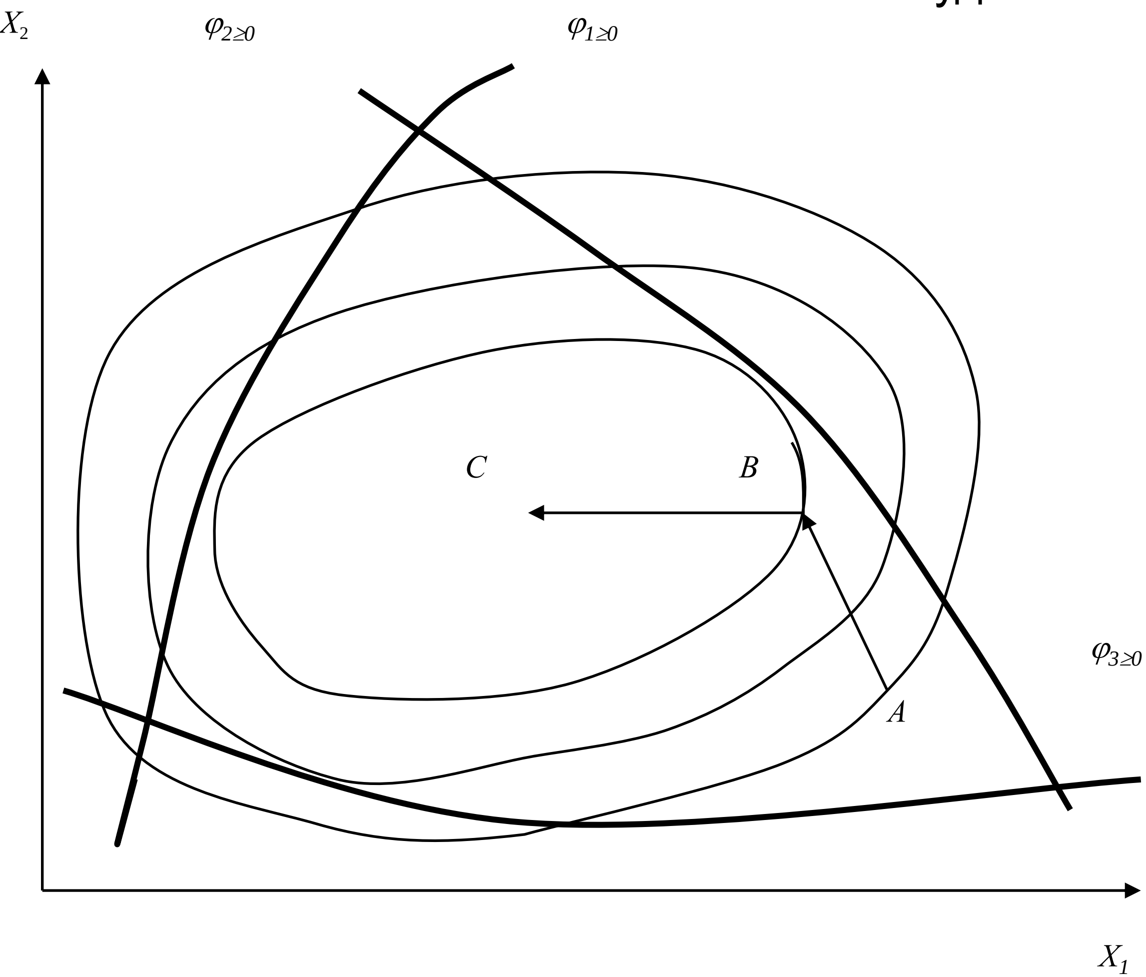
Метод наискорейшего спуска

Этот метод является частным случаем метода градиентов с конечным шагом. Процесс решения экстремальной нелинейной задачи включает следующие этапы.

1. В качестве исходной принимается точка $A\left(x_1^{(A)}; x_2^{(A)}\right)$

удовлетворяющая системе ограничений

$$\begin{cases} \varphi_1\left(x_1; x_2\right) \geq 0; \\ \varphi_2\left(x_1; x_2\right) \geq 0; \\ \varphi_3\left(x_1; x_2\right) \geq 0. \end{cases}$$



2. Определяется функции $Z = f(x_1; x_2)$ в точке *A*

$$grad f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1};\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\} \qquad grad f_A = \left\{ a_1^{(A)};\ a_2^{(A)} \right\}$$

3. Составляется параметрическое уравнение точки, движущейся в направлении градиента

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + a_1^{(k)} h \qquad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + a_2^{(k)} h$$

4. Определяется оптимальная длина шага в направлении градиента. Оптимальным считается такой шаг, при котором последующая точка *B* будет соответствовать максимуму (минимуму) функции

$$Z = f(x_1; x_2)$$

в плоскости градиента

$$Z = f\left\{ \left(x_1^{(A)} + a_1^{(A)} \cdot h \right);\ \left(x_2^{(A)} + a_2^{(A)} \cdot h \right) \right\} \to max(min)$$

Величина оптимального шага $h_{опт}$ определяется путем дифференцирования функции Z.

$$\frac{\partial f}{\partial h} = 0$$

5. После определения координат точки B итерационный процесс продолжается пока градиент функции Z станет равным нулю.