ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБЫЛИ ПРЕДПРИЯТИЯ

ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДСТВА И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Под производством понимается любая деятельность по использованию природных, материально-технических и интеллектуальных ресурсов для получения как материальных, так и нематериальных благ.

С развитием человеческого общества характер производства меняется. На ранних стадиях развития человечества господствовали природные, натуральные, «естественно возникшие» элементы производительных сил. Да и сам человек в это время в большей степени был продуктом природы. Производство в этот период получило название натурального.

С развитием средств производства начинают преобладать «исторически созданные» материально-технические элементы производительных сил. Это эпоха капитала.

В настоящее время решающее значение имеют знания, технологии, интеллектуальные ресурсы самого человека. Наша эпоха — это эпоха информатизации, эпоха господства научно-технических элементов производительных сил. Владение знаниями, новыми технологиями имеет решающее значение для производства. Во многих развитых странах ставится задача всеобщей информатизации общества. Потрясающими темпами развивается всемирная компьютерная сеть Internet.
Традиционно роль общей теории производства выполняет теория материального производства, понимаемая как процесс превращения производственных ресурсов в продукт.

Основными производственными ресурсами являются труд (L) и капитал (K).

Способы производства или существующие производственные технологии определяют, какой объем продукции производится при заданных количествах труда и капитала. Математически существующие технологии выражаются через производственную функцию. Если обозначить объем выпускаемой продукции через У, то производственную функцию можно записать

$$Y = f(K, L).$$

Это выражение означает, что объем выпуска является функцией количества капитала и количества труда. Производственная функция описывает множество существующих в данный момент технологий. Если изобретается лучшая технология, то при тех же затратах труда и капитала объем выпуска увеличивается. Следовательно, изменения в технологии изменяют и производственную функцию.

Методологически теория производства во многом симметрична теории потребления. Однако если в теории потребления основные категории измеряются лишь субъективно или вообще пока не подлежат измерению, то основные категории теории производства имеют объективную основу и могут быть измерены в определенных натуральных или стоимостных единицах

Несмотря на то, что понятие «производство» может представиться очень широким, нечетко выраженным и даже расплывчатым, поскольку в реальной жизни под «производством» понимается и предприятие, и стройка, и сельскохозяйственная ферма, и транспортное предприятие, и очень крупная организация типа отрасли народного хозяйства, тем не менее экономико-математическое моделирование выделяет нечто общее, присущее всем этим объектам.

Этим общим является процесс преобразования первичных ресурсов (производственных факторов) в конечные результаты процесса. Поэтому основным исходным понятием в описании экономического объекта становится «технологический способ», который представляется обычно как вектор ν затрат—выпуска, включающий в себя перечисление объемов затрачиваемых ресурсов (вектор х) и сведения о результатах их преобразования в конечные продукты или другие характеристики (прибыль, рентабельность и т.п.) (вектор у):

$$v = (x; y).$$

Размерность векторов x y также способы их измерения (в натуральных или стоимостных единицах) существенно зависят от изучаемой проблемы, от уровней, на которых ставятся те или иные задачи экономического планирования и управления.

Совокупность векторов — технологических способов, которые могут служить описанием (с допустимой точки зрения исследователя точностью) производственного процесса, реально осуществимого на некотором объекте, называется технологическим множеством V данного объекта.

Для определенности мы будем полагать, что размерность вектора затрат x равна N. а вектора выпуска y — соответственно M.

Таким образом, технологический способ v является вектором размерности (M+N), а технологическое множество

$$V \subset R_{+}^{\bar{M}+\bar{N}}.$$

Среди всех технологических способов, осуществимых на объекте, особое место занимают способы, которые выгодно отличаются от всех прочих тем, что они требуют либо меньших затрат при одинаковом выпуске, либо соответствуют большему выпуску при одинаковых затратах. Те из них, которые занимают в определенном смысле предельное положение в множестве V, представляют особый интерес, поскольку они являются описанием допустимого и предельно выгодного реального производственного процесса.

Скажем, что вектор

$$v^{(1)} = (x^{(1)}; y^{(1)})$$

предпочтительнее, чем вектор $v^{(2)} = (x^{(2)}; y^{(2)})$

с обозначением $v^{(1)} \succ v^{(2)}$,

если выполняются следующие условия:

1) $y_i^{(1)} \geq y_i^{(2)} \quad (i = 1, \ldots, M);$

2) $x_j^{(1)} \leq x_j^{(2)} \quad (j = 1, \ldots, N)$

и при этом имеет место по крайней мере одно из двух:

а) существует такой номер i_0, что $y_{i_0}^{(1)} > y_{i_0}^{(2)}$;

Б) СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ НОМЕР j_0, что $x_{j_0}^{(1)} < x_{j_0}^{(2)}$.

Технологический способ $\tilde{v}$ называется эффективным, если он принадлежит технологическому множеству V и не существует другого вектора $v \in V$,

КОТОРЫЙ БЫЛ БЫ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНЕЕ $\tilde{v}$.

Приведенное определение означает, что эффективными считаются те способы, которые не могут быть улучшены ни по одной затратной компоненте, ни по одной позиции выпускаемой продукции, без того чтобы не перестать быть допустимыми

Множество всех технологически эффективных способов обозначим через V*. Оно является подмножеством технологического множества V или совпадает с ним.

По существу задача планирования хозяйственной деятельности производственного объекта может быть интерпретирована как задача выбора эффективного технологического способа, наилучшим образом соответствующего некоторым внешним условиям.

При решении такой задачи выбора достаточно существенным оказывается представление о самом характере технологического множества V, а также его эффективного подмножества V*

В ряде случаев оказывается возможным допустить в рамках фиксированного производства возможность взаимозаменяемости некоторых ресурсов (различных видов топлива, машин и работников и т.п.). При этом математический анализ подобных производств основывается на предпосылке о континуальном характере множества V, а следовательно, на принципиальной возможности представления вариантов взаимной замены при помощи непрерывных и даже дифференцируемых функций, определенных на V. Указанный подход получил свое наибольшее развитие в теории производственных функций.

С помощью понятия эффективного технологического множества производственную функцию (ПФ) можно определить как отображение

$$y = f(x),$$

где $v = (x; y) \in V^*.$

Указанное отображение, вообще говоря, является многозначным, т.е. множество

$$f(x)$$

содержит более чем одну точку. Однако для многих реалистичных ситуаций производственные функции оказываются однозначными и даже, как сказано выше, дифференцируемыми.

В наиболее простом случае производственная функция есть скалярная функция N аргументов:

$$y = f(x_1, \ldots, x_N).$$

Здесь величина y имеет, как правило, стоимостный характер, выражая объем производимой продукции в денежном выражении.

В качестве аргументов выступают объемы затрачиваемых ресурсов при реализации соответствующего эффективного технологического способа.

Таким образом, приведенное соотношение описывает границу технологического множества V, поскольку при данном векторе затрат $(x_1, \ldots, x_N)$ производить продукции, в количестве большем, чем y, невозможно, а производство продукции в количестве меньшем, чем указанное, соответствует неэффективному технологическому способу.

Выражение для производственной функции оказывается возможным использовать для оценки эффективности принятого на данном предприятии методе хозяйствования. В самом деле, для заданного набора ресурсов можно определить фактический выпуск продукции и сравнить его с рассчитанным по производственной функции. Полученная разница дает полезный материал для оценки эффективности в абсолютном и относительном измерении.

Производственная функция представляет собой очень полезный аппарат плановых расчетов, и поэтому в настоящее время развит статистический подход к построению производственных функций для конкретных хозяйственных единиц. При этом обычно используется некоторый стандартный набор алгебраических выражений, параметры которых находятся при помощи методов математической статистики. Такой подход означает в сущности оценку производственной функции на основе неявного предположения о том, что наблюдаемые производственные процессы являются эффективными. Среди разнообразных типов производственных функций наиболее часто применяются линейные функции вида

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j x_j ,$$

поскольку для них легко решается задача оценивания коэффициентов по статистическим данным, а также степенные функции

$$y = a_0 \prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha_j} ,$$

для которых задача нахождения параметров сводится к оцениванию линейной формы путем перехода к логарифмам.

В предположении о дифференцируемое производственной функции в каждой точке множества X возможных комбинаций затрачиваемых ресурсов полезно рассмотреть некоторые связанные с ПФ величины.

В частности, дифференциал

$$dy = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

представляет собой изменение стоимости выпускаемой продукции при переходе от затрат набора ресурсов

$$x = (x_1, \ldots, x_N)$$

к набору

$$x + dx = (x_1 + dx_1, \ldots, x_N + dx_N)$$

ПРИ УСЛОВИИ СОХРАНЕНИЯ СВОЙСТВА ЭФФЕКТИВНОСТИ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СПОСОБОВ.
ТОГДА ВЕЛИЧИНУ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

$$q_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

можно трактовать как предельную (дифференциальную) ресурсоотдачу или, иными словами, коэффициент предельной продуктивности, который показывает, на сколько увеличится выпуск продукции в связи с увеличением затрат ресурса с номером j на «малую» единицу.

Величина предельной продуктивности ресурса допускает истолкование как верхний предел цены которую производственный объект может уплатить за дополнительную единицу j-того ресурса с тем, чтобы не оказаться в убытках после ее приобретения и использования.

В самом деле, ожидаемый прирост продукции в этом случае составит

$$\Delta_j f = q_j$$

и, следовательно, соотношение

$$p_j \le q_j$$

позволит получить дополнительную прибыль.
В коротком периоде, когда один ресурс рассматривается как постоянный, а другой как переменный, большинство производственных функций обладают свойством убывающего предельного продукта. Предельным продуктом переменного ресурса называют прирост общего продукта в связи с увеличением применения данного переменного ресурса на единицу.

Предельный продукт труда можно записать как разность

$$MPL = F(K, L + 1) - F(K, L),$$

где MPL — предельный продукт труда.

Предельный продукт капитала можно также записать как разность

$$MPK = F(K + 1, L) - F(K, L),$$

где МРК — предельный продукт капитала.

Характеристикой производственного объекта является также величина средней ресурсоотдачи (продуктивности производственного фактора)

$$m_j = \frac{y}{x_j},$$

имеющего ясный экономический смысл количества выпускаемой продукции в расчете на единицу используемого ресурса (производственного фактора).

Величина, обратная к ресурсоотдаче $d_j = \frac{1}{m_j}$,

обычно называется ресурсоемкостью, поскольку она выражает количество ресурса у, необходимое для производства одной единицы продукции в стоимостном выражении.

Весьма употребительны и понятны такие термины, как фондоемкость, материалоемкость, энергоемкость, трудоемкость, рост которых обычно связывают с ухудшением состояния экономики, а их снижение рассматривается как благоприятный результат.
Частное от деления дифференциальной продуктивности на среднюю

$$E_j = \frac{q_j}{m_j} = \frac{x_j}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_j}$$

называется коэффициентом эластичности продукции по производственному фактору у и дает выражение относительного прироста продукции (в процентах) при относительном приросте затрат фактора на 1%.

Если E_j<0, то происходит абсолютное снижение выпуска продукции при увеличении потребления фактора j такая ситуация может иметь место при использовании технологически неподходящих продуктов или режимов.
Например, излишнее потребление топлива приведет к излишнему повышению температуры и необходимая для производства продукта химическая реакция не пойдет.

Если 0< E_j< 1, то каждая последующая дополнительная единица затрачиваемого ресурса вызывает меньший дополнительный прирост продукции, чем предыдущая.

Если E_j > 1, то величина приростной (дифференциальной) продуктивности превосходит среднюю продуктивность.

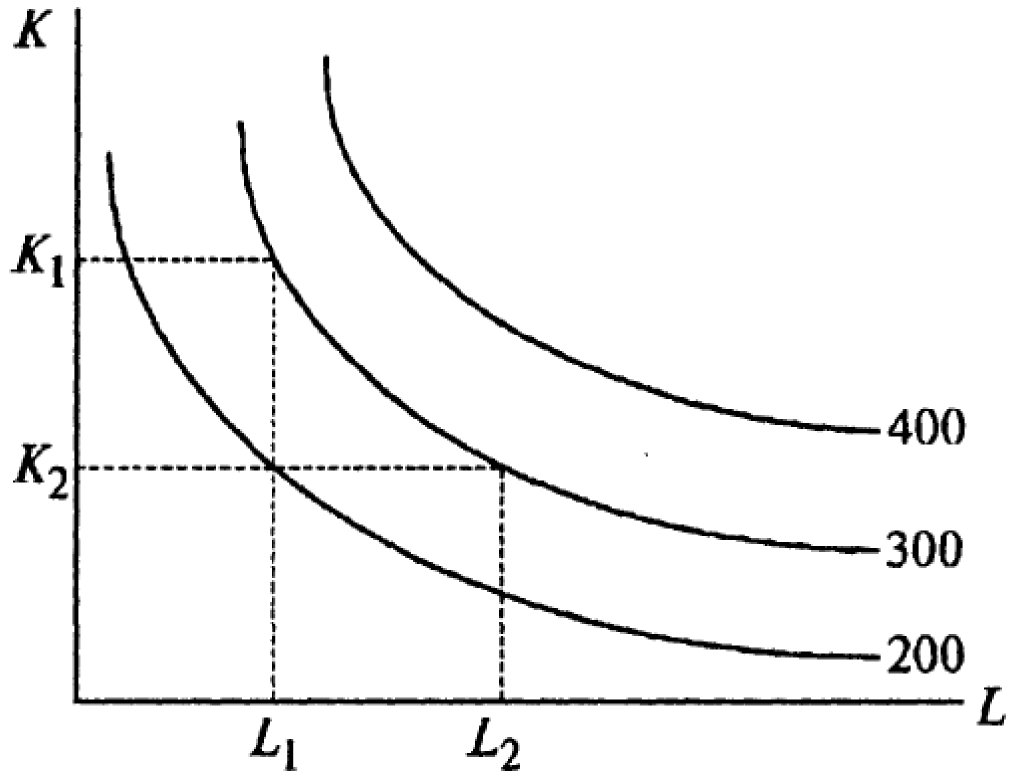
Таким образом, дополнительная единица ресурса увеличивает не только объем выпускаемой продукции, но и среднюю характеристику ресурсоотдачи. Так процесс повышения фондоотдачи происходит, когда вводятся в действие весьма прогрессивные, эффективные машины и приборы. Для линейной производственной функции коэффициент a_j численно равен величине дифференциальной продуктивности j-того фактора, а для степенной функции показатель степени a_j имеет смысл коэффициента эластичности по j-тому ресурсу.

Изокванта и ее типы

При моделировании потребительского спроса один и тот же уровень полезности различных комбинаций потребительских благ графически отображается с помощью кривой безразличия.
В экономико-математических моделях производства каждая технология графически может быть представлена точкой, координаты которой отражают минимально необходимые затраты ресурсов К и L для производства данного объема выпуска.

Множество таких точек образуют линию равного выпуска, или изокванту. Таким образом, производственная функция графически представляется семейством изоквант. Чем дальше от начала координат расположена изокванта, тем больший объем производства она отражает.

В отличие от кривой безразличия, каждая изокванта характеризует количественно определенный объем выпуска.
На рис. представлено три изокванты, соответствующие объему производства в 200, 300 и 400 единиц продукции.



Можно сказать, что для выпуска 300 единиц продукции необходимо $К_1$ единиц капитала и L_1 единиц труда или $К_2$ единиц капитала и L_2 единиц труда, или любая другая их комбинация из того множества, которое представлено изоквантой $У_2$ = 300.

В общем случае в множестве X допустимых наборов производственных факторов выделяется подмножество $X_{\mathbf{c}}$, НАЗЫВАЕМОЕ изоквантой производственной функции, которое характеризуется тем, что для всякого вектора $x \in X_c$

справедливо равенство

$$f(x) = c.$$

Таким образом, для всех наборов ресурсов, соответствующих изокванте, оказываются равными объемы выпускаемой продукции.
По существу изокванта представляет собой описание возможности взаимной замены факторов в процессе производства продукции, обеспечивающей неизменный объем производства. В связи с этим оказывается возможным определить коэффициент взаимной замены ресурсов, используя дифференциальное соотношение вдоль любой изокванты

$$dy = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Отсюда коэффициент эквивалентной замены пары факторов j и k равен:

$$\gamma_{jk} = -\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \bigg/ \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{q_j}{q_k}.$$

Полученное соотношение показывает, что, если производственные ресурсы замещаются в отношении, равном отношению приростных продуктивностей, то количество производимой продукции остается неизменным. Нужно сказать, что знание производственной функции позволяет охарактеризовать масштабы возможности осуществить взаимную замену ресурсов в эффективных технологических способах. Для достижения этой цели служит коэффициент эластичности замены ресурсов по продукции

$$\sigma_{jk} = -\frac{d \ln \left(\dfrac{x_j}{x_k} \right)}{d \ln \left(\dfrac{q_j}{q_k} \right)},$$

который вычисляется вдоль изокванты при неизменном уровне затрат прочих производственных факторов.

Величина σ_{jk} представляет собой характеристику относительного изменения коэффициента взаимной замены ресурсов при изменении соотношения между ними.

Если отношение взаимозаменяемых ресурсов изменится на σ_{jk} процентов, то коэффициент взаимной замены y_{jk} изменится на один процент.

В случае линейной производственной функции коэффициент взаимной замены остается неизменным при любом соотношении используемых ресурсов и поэтому можно считать, что эластичность $\sigma_{jk} = \infty$.
Соответственно большие значения σ_{jk} свидетельствуют о том, что возможна большая свобода в замене производственных факторов вдоль изокванты и при этом основные характеристики производственной функции (продуктивности, коэффициент взаимозамены) будут меняться очень слабо

Для степенных производственных функций для любой пары взаимозаменяемых ресурсов справедливо равенство $\sigma_{jk} = 1$.
В практике прогнозирования и предплановых расчетов часто используются функции постоянной эластичности замены (CES), имеющие вид:

$$y = a_0 \left[\sum_{j=1}^{N} a_j x_j^{-\alpha} \right]^{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Для такой функции коэффициент эластичности замены ресурсов

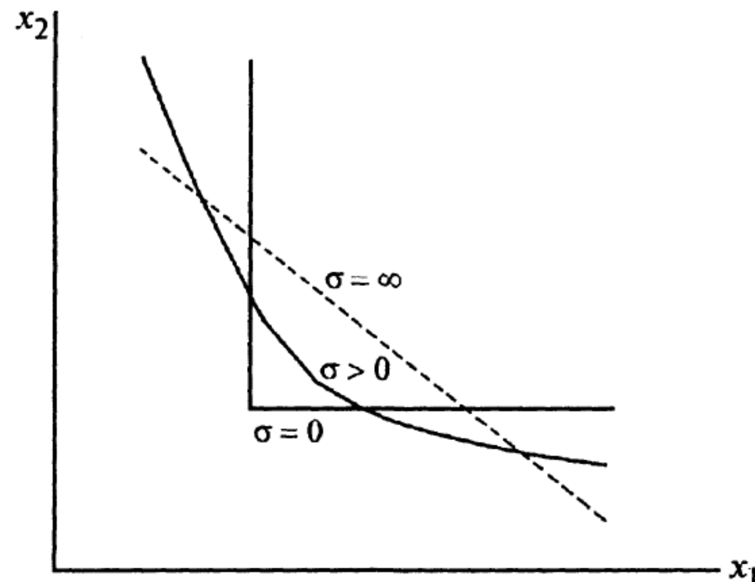
$$\sigma = \frac{1}{1 + \alpha}$$

и не меняется в зависимости от объема и отношения затрачиваемых ресурсов. При малых значениях σ_{jk} ресурсы могут заменять друг друга лишь в незначительных размерах, а в пределе при $\sigma_{jk} = 0$ они теряют свойство взаимозаменяемости и выступают в процессе производства лишь в постоянном отношении, т.е. являются взаимодополняющими.

Примером производственной функции, описывающей производство в условиях использования взаимодополняющих ресурсов, является функция «выпуска—затрат», которая имеет вид

$$y = \min_j \left\{a_j x_j\right\} \quad (j = 1, \ldots, N),$$

где a_j — постоянный коэффициент ресурсоотдачи j-того производственного фактора. Нетрудно видеть, что производственная функция такого типа определяет выпуск по «узкому месту» на множестве используемых производственных факторов. Различные случаи поведения изоквант производственных функций для различных значений коэффициентов эластичности замены представлены на графике



Различные случаи поведения изоквант

Представление эффективного технологического множества с помощью скалярной производственной функции оказывается недостаточным в тех случаях, когда нельзя обойтись единственным показателем, описывающим результаты деятельности производственного объекта, но необходимо использовать несколько (M) выходных показателей. В этих условиях можно использовать векторную производственную функцию

Важное понятие предельной (дифференциальной) продуктивности вводится соотношением

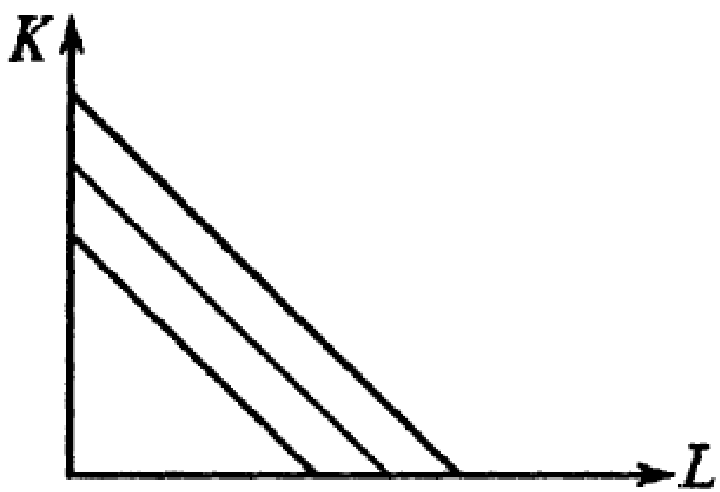
$$q_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, N).$$

Аналогичное обобщение допускают все остальные главные характеристики скалярных ПФ.
Подобно кривым безразличия изокванты также подразделяются на различные типы.

Для линейной производственной функции вида

$$Y = A + b_1 K + b_2 L,$$

где У — объем производства; А, b1, b2— параметры; К, L — затраты капитала и труда, и полном замещении одного ресурса другим изокванта будет иметь линейную форму .

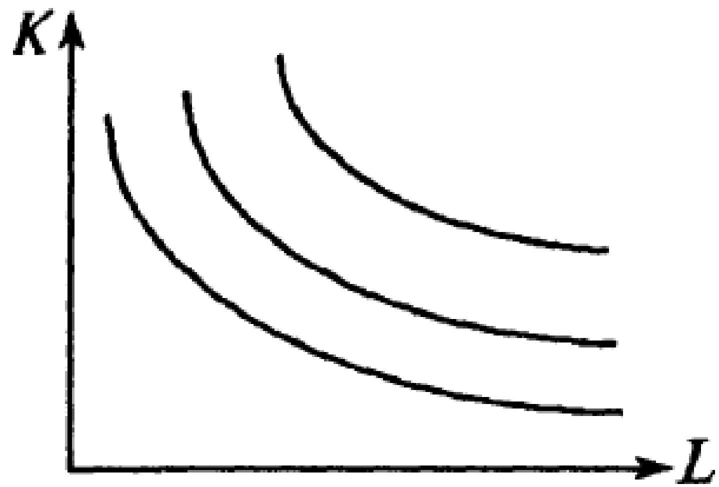


Изокванты
линейного типа

Для степенной производственной функции

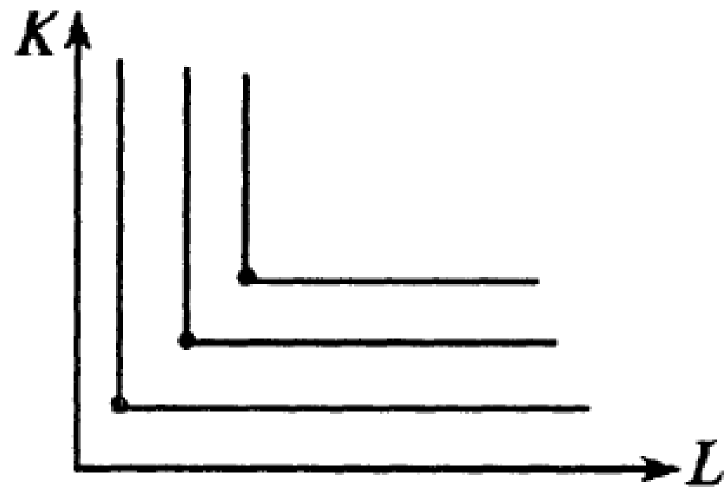
$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

изокванты будут иметь вид кривых



Изокванты степенной производственной функции

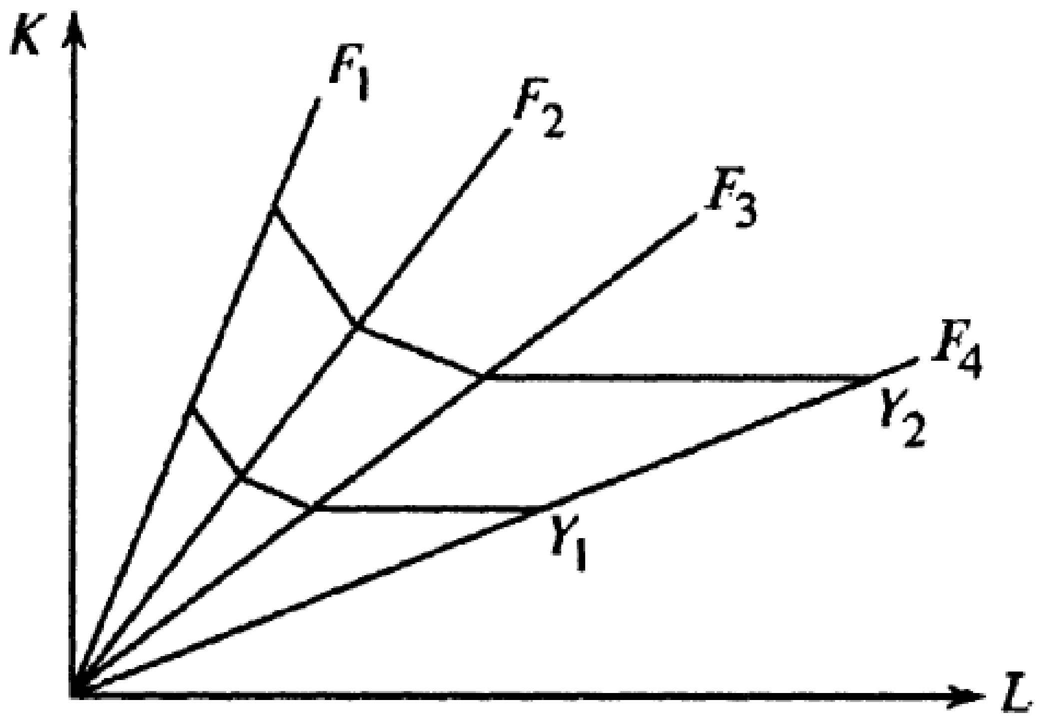
Если изокванта отражает лишь один технологический способ производства данного продукта, то труд и капитал комбинируются в единственно возможном сочетании .



Изокванты при жесткой дополняемости ресурсов

Такие изокванты иногда называют изоквантами леонтьевского типа — по имени американского экономиста В. В. Леонтьева, который положил такой тип изокванты в основу разработанного им метода input—output (затраты—выпуск).

Ломаная изокванта предполагает наличие ограниченного количества технологий Р. Изокванты подобной конфигурации используются в линейном программировании для обоснования теории оптимального распределения ресурсов. Ломаные изокванты наиболее реалистично представляют технологические возможности многих производственных объектов. Однако в экономической теории традиционно используют главным образом кривые изокванты, которые получаются из ломаных при увеличении числа технологий и увеличении соответственно точек излома.



Ломаные изокванты

Оптимальная комбинация ресурсов

Использование аппарата производственных функций дает возможность решения задачи об оптимальном использовании средств, предназначенных для приобретения производственных факторов.

Предположим, что факторы $(x_1, \dots, x_N)$

могут быть закуплены по ценам $(p_1, \dots, p_N)$,

а объем имеющихся средств для приобретения составляет b ($).

Тогда соотношение, описывающее множество допустимых наборов факторов, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j \le b.$$

Граничная линия этого множества, соответствующая полному использованию имеющихся средств, т.е.

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j = b,$$

называется изокостой, поскольку ей отвечают наборы, имеющие одинаковую стоимость b. Задача об оптимальном использовании средств формулируется так: требуется найти набор факторов, который дает наибольший выпуск продукции при ограниченных финансовых средствах b.

Таким образом, требуется найти решение задачи:

$$y = f(x_1, \dots, x_N) \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_j x_j = b$$

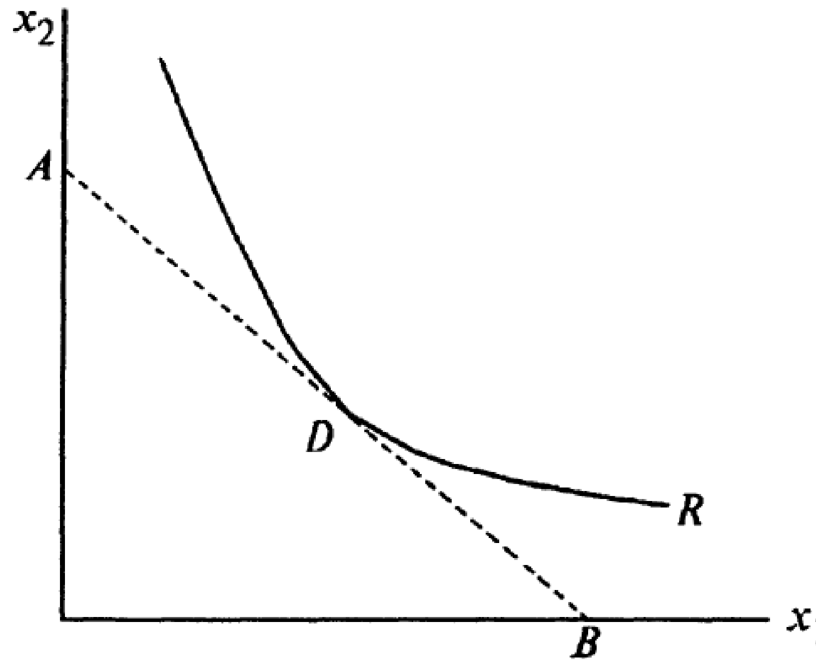
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

-ИСКОМОЕ РЕШЕНИЕ НАХОДИТСЯ ИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda p_j \quad (j = 1, \dots, N) \\ \sum\limits_{j=1}^{N} p_j x_j = b, \end{cases}$$

где λ — множитель Лагранжа.

В частности, если число факторов N=2, задача допускает наглядную геометрическую интерпретацию .



Оптимальная комбинация ресурсов

Здесь отрезок AB есть изокоста, кривая К — изокванта, касающаяся изокосты в точке D которая и соответствует оптимальному набору факторов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

Полезно привести полное решение поставленной задачи для случая двух факторов, т.е. N=2.

Пусть x_1 = K — капитал (основные фонды),
X_2 = b — труд (рабочая сила);

производственная функция

$$y = f(K, L) \to \max;$$

условие ограниченности ресурса $$rK + wL = Q,$$

где r — цена использования машин и оборудования (т.е. услуг капитала), равная норме банковского процента;
w — ставка оплаты труда.

Условия оптимальности имеют вид

$$\text{а) } \frac{\partial y}{\partial K} = r.$$

Это условие означает, что объем используемого капитала должен быть принят на том уровне, когда маргинальная фондоотдача $(\partial y/\partial K)$

равна норме процента; дальнейшее увеличение капитала приведет к снижению его эффективности;

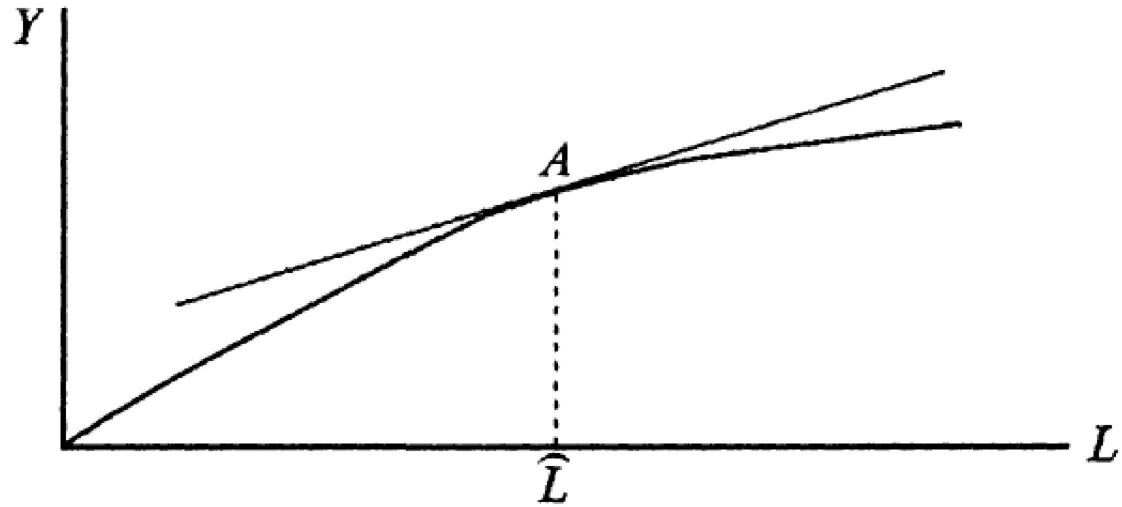
$$\text{б) } \frac{\partial y}{\partial L} = w.$$

Это условие требует, чтобы количество занятой рабочей силы было взято на уровне, когда маргинальная производительность труда

$(\partial y/\partial L)$

равна ставке заработной платы, так как дальнейшее увеличение количества

занятых приводит к убыткам (точка $\hat{L}$ b см. РИС.).



Оптимальное количество занятых

Здесь угловой коэффициент касательной в точке А равен w. Для ПФ типа Кобба—Дугласа задача имеет вид

найти $$\max y = aK^{\alpha} L^{\beta}$$

при условии $$rK + wL =$$

$$\hat{K} = \frac{\alpha b}{(\alpha + \beta) r}; \quad \hat{L} = \frac{\beta b}{(\alpha + \beta) w};$$

Получим следующее решение $$\hat{y} = a\hat{K}^{\alpha} \hat{L}^{\beta}; \quad \hat{\lambda} = \frac{(\alpha + \beta)\hat{y}}{b}.$$

Множитель $\hat{\lambda}$ характеризует здесь предельную продуктивность финансовых средств, т.е. показывает, на какую величину Δy изменится максимальный выпуск продукции $\hat{y}$, если объем средств Ь увеличится на «малую» единицу.

Заметим, что сумма эластичностей капитала (α) и труда (β) характеризует так называемый удельный выпуск (отдачу) при изменении масштаба производства, т.е. когда расход ресурсов (К и L) увеличивается в одинаковое число раз.

Если $\alpha + \beta > 1,$, то отдача возрастает,

если $\alpha + \beta = 1$, то отдача постоянная,

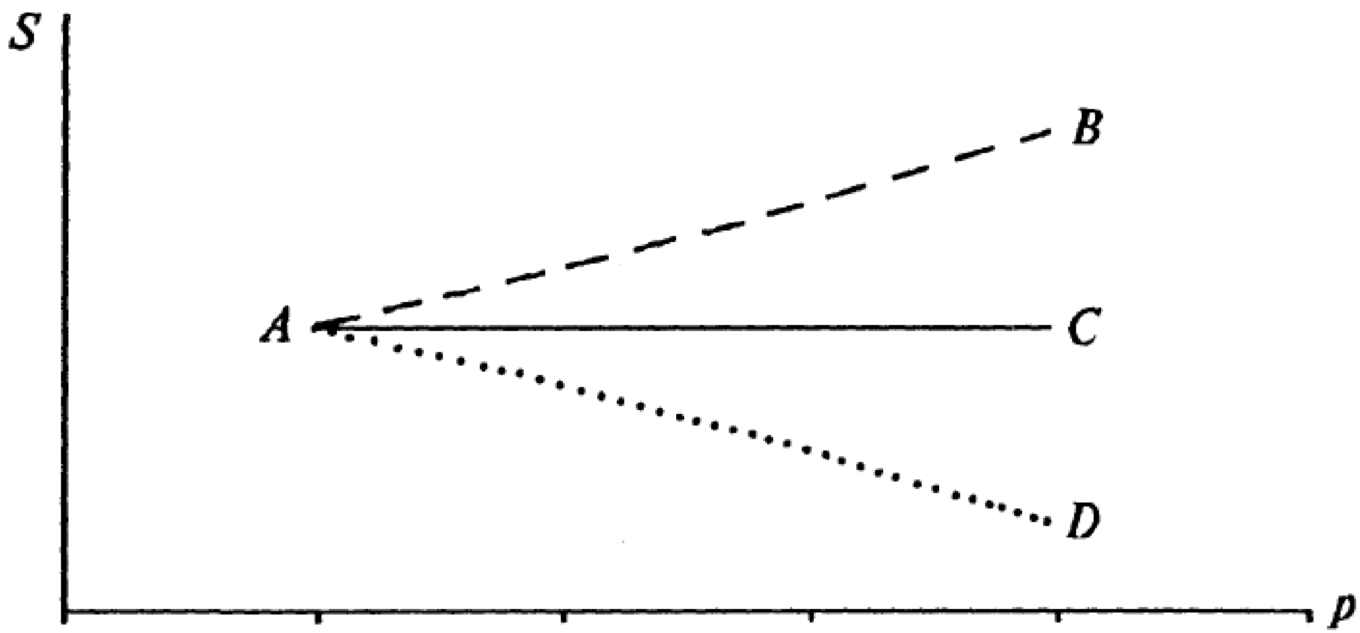
если $\alpha + \beta < 1,$, то отдача убывает, а производственная функция является выпуклой вверх

Функции предложения и их свойства

Функция предложения $S(p)$ описывает зависимость между рыночной ценой товара и его предложением на изолированном рынке этого товара. В общем случае следует исходить из того, что рассматриваемый продукт производится на достаточно большом количестве конкурирующих между собой предприятий. В такой ситуации естественно считать, что каждый производитель стремится к наибольшей прибыли, и его индивидуальный выпуск продукта увеличивается по мере роста цены на этот продукт. Но тогда и общее предложение товара на рынке $S(p)$, как сумма индивидуальных выпусков, является возрастающей функцией цены, т.е. $S'(p) > 0$.

В более специфических ситуациях (олигополия, монополия) поведение предприятия необязательно определяется стремлением к максимальной прибыли, поскольку при повышении цены производитель может обеспечить себе заметный прирост прибыли и без увеличения объема выпуска. Таким образом, строго говоря, должны быть исследованы случаи, когда $S(p) = const$ или даже $S'(p) < 0$ (рис.).

На рис. представлено семейство функций предложения. Линия АВ соответствует совершенной конкуренции и стремлению производителей к получению максимальной прибыли, линия АС отвечает неизменному выпуску, который тем не менее дает возможность вести хозяйство с приличной прибылью в условиях несовершенной конкуренции; линия АО представляет снижающийся объем производства, что возможно в условиях монополии и резкого роста цен.



Возрастающая, неизменная и убывающая функции предложения

В дальнейшем анализе в качестве основного рассматривается состояние совершенной конкуренции и рост предложения в зависимости от роста цен.

Для практических расчетов применяются функции предложения двух основных видов, параметры которых определяются путем обработки статистических данных:

1) ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

$$S(p) = b_0 + b_1 p \qquad (b_0 > 0;\ \ b_1 > 0);$$

2) степенная функция

$$S(p) = b_0 p^{\beta} \qquad (b_0 > 0;\ \ \beta > 0).$$

Коэффициент эластичности предложения по цене (E_{SP}) показывает, на сколько процентов увеличится предложение товара, если его цена вырастает на 1%.

Для линейной функции предложения

$$E_{Sp} = \frac{b_1 \bar{p}}{\bar{S}},$$

где $\bar{p}, \bar{S}$ — СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ЦЕНЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО ТАБЛИЦЕ НАБЛЮДЕНИЙ.

Для степенной функции $$E_{Sp} = \frac{d \ln S}{d \ln p} = \beta.$$

Для функции предложения, определяемой как решение рассмотренной ниже задачи оптимизации прибыли, имеем

$$S(p) = \left(\frac{p - a}{bh}\right)\frac{1}{h - 1}.$$

Эластичность предложения по цене

$$E_{Sp} = \frac{1}{(h-1)} \cdot \frac{p}{(p-a)},$$

т.е. полностью определяется характером постоянных и переменных издержек. В более общем случае объем предложения j-того товара рассматривается не только в зависимости от его цены (p_j), но и от цен на другие товары. В этой ситуации система функций предложения имеет вид

$$S_j = S_j(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_n) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

где n — количество наименований товаров.

Товары i и j называются конкурирующими, если перекрестная эластичность,

$$E_{S_j p_i} < 0,$$

т.е. при увеличении цены p_i уменьшается выпуск j-того товара;
товары являются комплектными, если

$$E_{S_j p_i} > 0.$$

В этом случае рост производства одного товара необходимо вызывает увеличение выпуска другого.

Моделирование издержек и прибыли предприятия (фирмы)

В основе построения моделей поведения производителя (отдельного предприятия или фирмы; объединения или отрасли) лежит представление о том, что производитель стремится к достижению такого состояния, при котором ему была бы обеспечена наибольшая прибыль при сложившихся рыночных условиях, т.е. прежде всего при имеющейся системе цен.

Наиболее простая модель оптимального поведения производителя в условиях совершенной конкуренции имеет следующий вид: пусть предприятие (фирма) производит один продукт в количестве y физических единиц. Если p — экзогенно заданная цена этого продукта и фирма реализует свой выпуск полностью, то она получает валовой доход (выручку) в размере

$$R(y) = py.$$

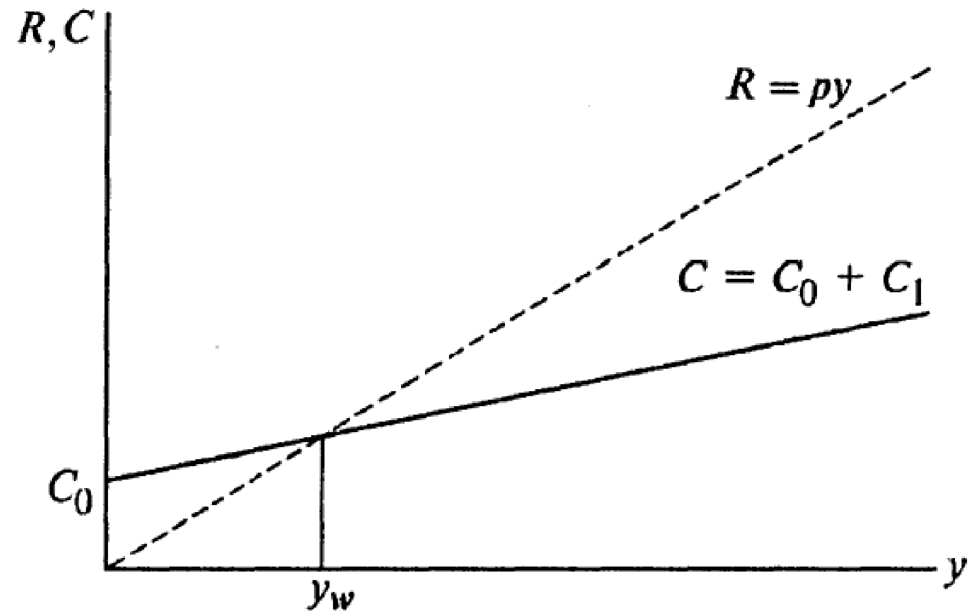
В процессе создания этого количества продукта фирма несет производственные издержки в размере С (у).
При этом естественно считать, что $C'(y) > 0$, т.е. издержки возрастают с увеличением объема производства.
Также обычно полагают, что $C''(У) > 0$ Это означает, что дополнительные (маргинальные) издержки на производство каждой дополнительной единицы продукции возрастают по мере увеличения объема производства. Это предположение связано с тем, что при рационально организованном производстве, при малых объемах могут быть использованы лучшие машины и высококвалифицированные работники, которых уже не окажется в распоряжении фирмы, когда объем производства вырастет.

На рис. представлены типичные графики функций R (y) и C (y). Производственные издержки состоят из следующих составных частей:

1) МАТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ C_m, В ЧИСЛО КОТОРЫХ ВХОДЯТ РАСХОДЫ НА СЫРЬЕ, МАТЕРИАЛЫ, ПОЛУФАБРИКАТЫ И Т.П.
Разность между валовым доходом и материальными затратами называется добавленной стоимостью (условно чистой продукцией):

$$VA = Z = R - C_m;$$

2) расходы на оплату труда C_L;



Линии выручки и издержек предприятия

3) РАСХОДЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ, РЕМОНТОМ МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ, АМОРТИЗАЦИЯ, ТАК НАЗЫВАЕМАЯ ОПЛАТА «УСЛУГ КАПИТАЛА» C_k;

4) дополнительные расходы C_r,
связанные с расширением производства, строительством новых зданий, подъездных путей, ЛИНИЙ связи и т.д.

Совокупные производственные издержки:

$$C = C_m + C_L + C_k + C_r.$$

Как уже было отмечено выше, $$C = C(y),$$

однако эта зависимость от объема выпуска (у) для разных видов издержек различна.

А именно имеют место:
а) постоянные расходы C_o, которые практически не зависят от у, в т.ч. оплата административного персонала, аренда и содержание зданий и помещений, амортизационные отчисления, проценты за кредит, услуги связи и т.п.;

Б) ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЪЕМУ ВЫПУСКА (ЛИНЕЙНЫЕ) ЗАТРАТЫ C_1 сюда входят материальные затраты C_m, оплата труда производственного персонала (часть C_L), расходы по содержанию действующего оборудования и машин (часть C_k) и т.п.:

$$C_1 = ay,$$

где а — обобщенный показатель затрат указанных видов в расчете на одно изделие;

в) «сверхпропорциональные» (нелинейные) затраты C_2, в составе которых выступают приобретение новых машин и технологий (т.е. затраты типа C_r), оплата сверхурочного труда и т.п. Для математического описания этого вида затрат обычно используется степенная зависимость

$$C_2 = by^h \qquad (h > 1).$$

Таким образом, для представления совокупных издержек можно использовать модель

$$C(y) = C_0 + C_1 + C_2 = C_0 + ay + by^h.$$

(Заметим, что условия $C'(y) > 0$, $C''(y) > 0$ для этой функции выполнены.)

Рассмотрим возможные варианты поведения предприятия (фирмы) для двух случаев:

1. ПРЕДПРИЯТИЕ ИМЕЕТ ДОСТАТОЧНО БОЛЬШОЙ РЕЗЕРВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ И НЕ СТРЕМИТСЯ К РАСШИРЕНИЮ ПРОИЗВОДСТВА, ПОЭТОМУ МОЖНО ПОЛАГАТЬ, ЧТО $C_2 = 0$ и совокупные издержки являются линейной функцией объема выпуска:

$$C(y) = C_0 + ay.$$

Прибыль составит

$$\Pi(y) = R - C = py - (C_0 + ay).$$

Очевидно, что при малых объемах выпуска

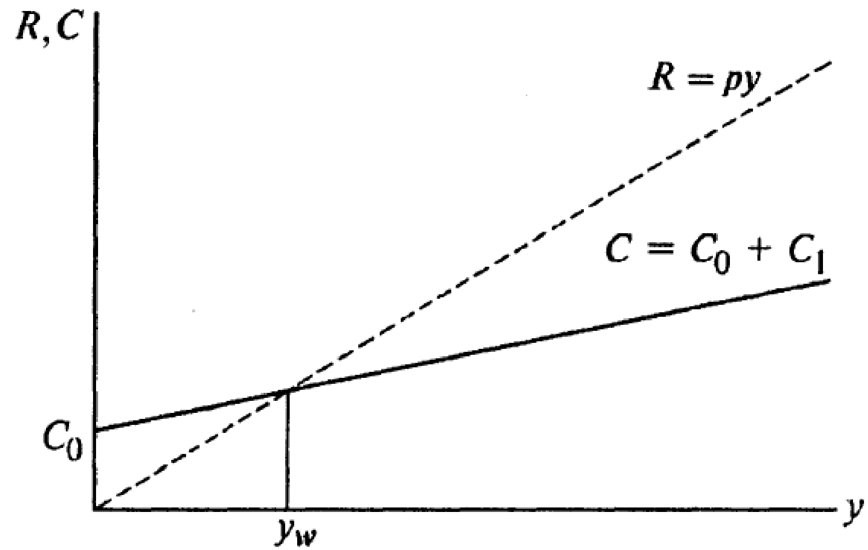
$$0 \le y \le y_w$$

фирма несет убытки, так как П < 0.

Здесь y_w — точка безубыточности (порог рентабельности), определяемая соотношением

$$\Pi(y_w) = 0.$$

Если $y > y_w$ то фирма получает прибыль, и окончательное решение об объеме выпуска зависит от состояния рынка сбыта производимой продукции (см. рис.).



Линии выручки и издержек предприятия

2. В более общем случае, когда $C2 \neq 0$, имеются две точки безубыточности

$$y_e^{(1)} \text{ и } y_e^{(2)},$$

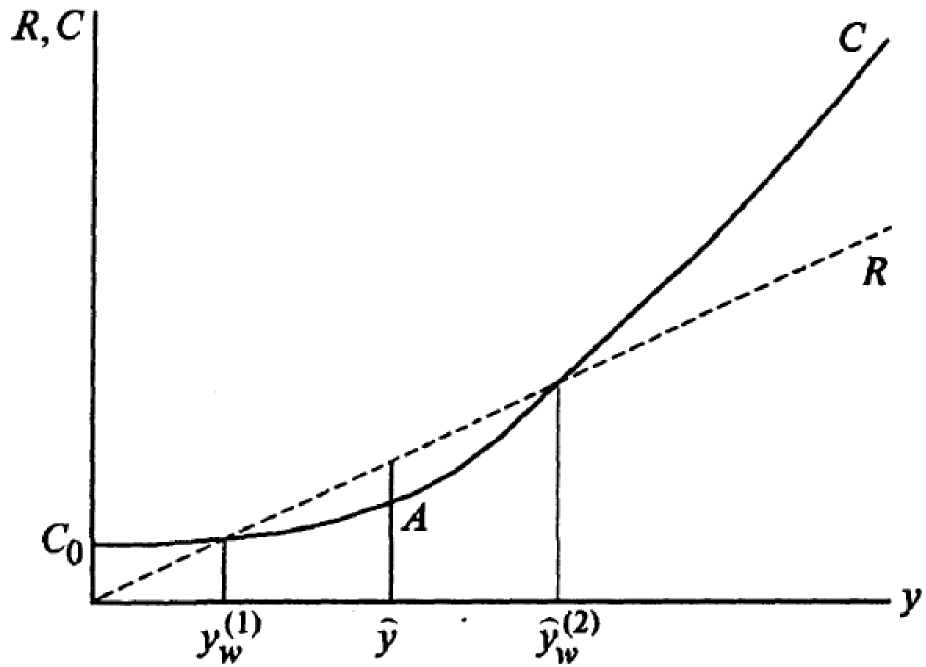
ПРИЧЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ ПРИБЫЛЬ ФИРМА ПОЛУЧИТ, ЕСЛИ ОБЪЕМ ВЫПУСКА y удовлетворяет условию

$$y_e^{(1)} < y < y_e^{(2)}.$$

На этом отрезке в точке $y = \hat{y}$

достигается наибольшее значение прибыли. Таким образом, существует оптимальное решение задачи о максимизации прибыли. В точке А, соответствующей издержкам при оптимальном выпуске, касательная к кривой издержек С параллельна прямой линии дохода К.

Следует заметить, что окончательное решение фирмы также зависит от состояния рынка, но с точки зрения соблюдения экономических интересов ей следует рекомендовать оптимизирующее значение выпуска (рис.).



Оптимальный объем выпуска

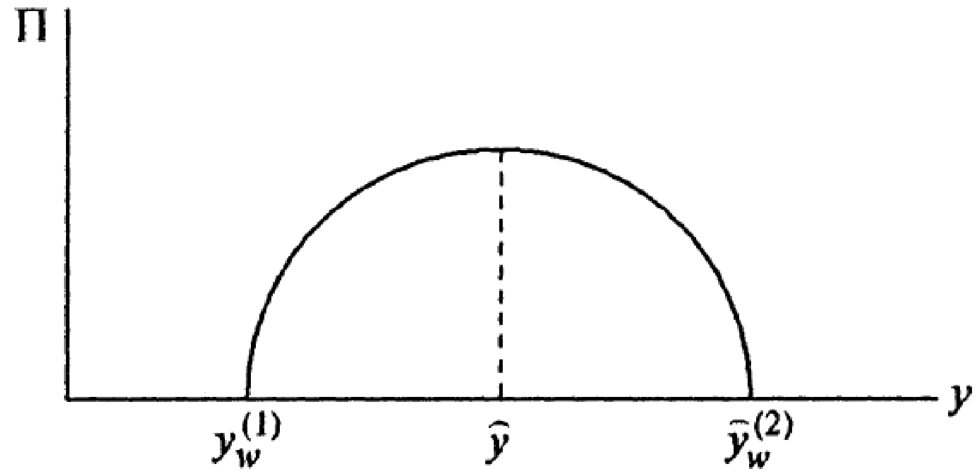
В общем случае, когда C (y) является нелинейной возрастающей и выпуклой вниз функцией (так как C'(y) > 0 и C"(y) > 0) объема выпуска, ситуация полностью аналогична той, которая рассмотрена выше. По определению прибылью считается величина

$$\Pi(y) = R(y) - C(y).$$

Точки безубыточности $y_e^{(1)}$ и $y_e^{(2)}$ определяются из условия равенства прибыли нулю, а максимальное ее значение достигается в точке $\hat{y}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\Pi'(\hat{y}) = 0 \quad \text{или} \quad R'(\hat{y}) - C'(\hat{y}) = 0.$$

Таким образом, оптимальный объем производства характеризуется тем, что в этом состоянии маргинальный валовой доход $(R'(y))$ в точности равен маргинальным издержкам $C'(y)$.



Точка максимума прибыли
и зона безубыточности

В самом деле, если $y < \hat{y}$, то $R'(y) > C'(y)$,

И ТОГДА СЛЕДУЕТ УВЕЛИЧИТЬ ВЫПУСК ПРОДУКЦИИ, ПОСКОЛЬКУ ОЖИДАЕМЫЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ДОХОД ПРЕВЫСИТ ОЖИДАЕМЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИЗДЕРЖКИ.

ЕСЛИ ЖЕ $y > \hat{y}$, то $R'(y) < C'(y)$,

и всякое увеличение объема уменьшит прибыль, поэтому естественно рекомендовать уменьшить объем производства и придти в состояние

$$y = \hat{y}$$

$$\hat{y} = \left(\frac{p-a}{bh}\right)^{\frac{1}{h-1}}.$$

Нетрудно видеть, что при увеличении цены (p) оптимальный выпуск, а также прибыль увеличиваются, т.е.

$$\frac{d\hat{y}}{dp} > 0.$$

Это верно также и в общем случае, так как

$$\frac{d\hat{y}}{dp} = \frac{1}{C''(\hat{y})} > 0.$$

Методы учета научно-технического прогресса

Общепризнанным следует считать тот факт, что с течением времени на предприятии, сохраняющем фиксированную численность работников и постоянный объем основных фондов, выпуск продукции увеличивается.

Это означает, что помимо обычных производственных факторов, связанных с затратами ресурсов, существует фактор, который обычно называют научно-техническим прогрессом (НТП). Этот фактор можно рассматривать как синтетическую характеристику, отражающую совместное влияние на экономический рост многих существенных явлений, среди которых нужно отметить следующие:

а) улучшение со временем качества рабочей силы вследствие повышения квалификации работников и освоения ими методов использования более совершенной техники;

Б) УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ ПРИВОДИТ К ТОМУ, ЧТО ОПРЕДЕЛЕННАЯ СУММА КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ (В НЕИЗМЕННЫХ ЦЕНАХ) ПОЗВОЛЯЕТ ПО ПРОШЕСТВИИ ВРЕМЕНИ ПРИОБРЕСТИ БОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНУЮ МАШИНУ;

в) улучшение многих сторон организации производства, в том числе снабжения и сбыта, банковских операций и других взаимных расчетов, развитие информационной базы, образование различного рода объединений, развитие международной специализации и торговли и т.п.

В связи с этим термин «научно-технический прогресс» можно интерпретировать как совокупность всех явлений, которые при фиксированных количествах затрачиваемых производственных факторов дают возможность увеличить выпуск качественной, конкурентоспособной продукции. Весьма расплывчатый характер такого определения приводит к тому, что исследование влияния НТП проводится лишь как анализ того дополнительного увеличения продукции, которое не может быть объяснено чисто количественным ростом производственных факторов.

Главный подход к учету НТП сводится к тому, что в совокупность характеристик выпуска или затрат вводится время (t) КАК НЕЗАВИСИМЫЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ФАКТОР И РАССМАТРИВАЕТСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВО ВРЕМЕНИ ЛИБО ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ, ЛИБО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА.

Остановимся на способах учета НТП путем преобразования производственной функции (ПФ), причем за основу примем двухфакторную ПФ:

$$y = f(K, L),$$

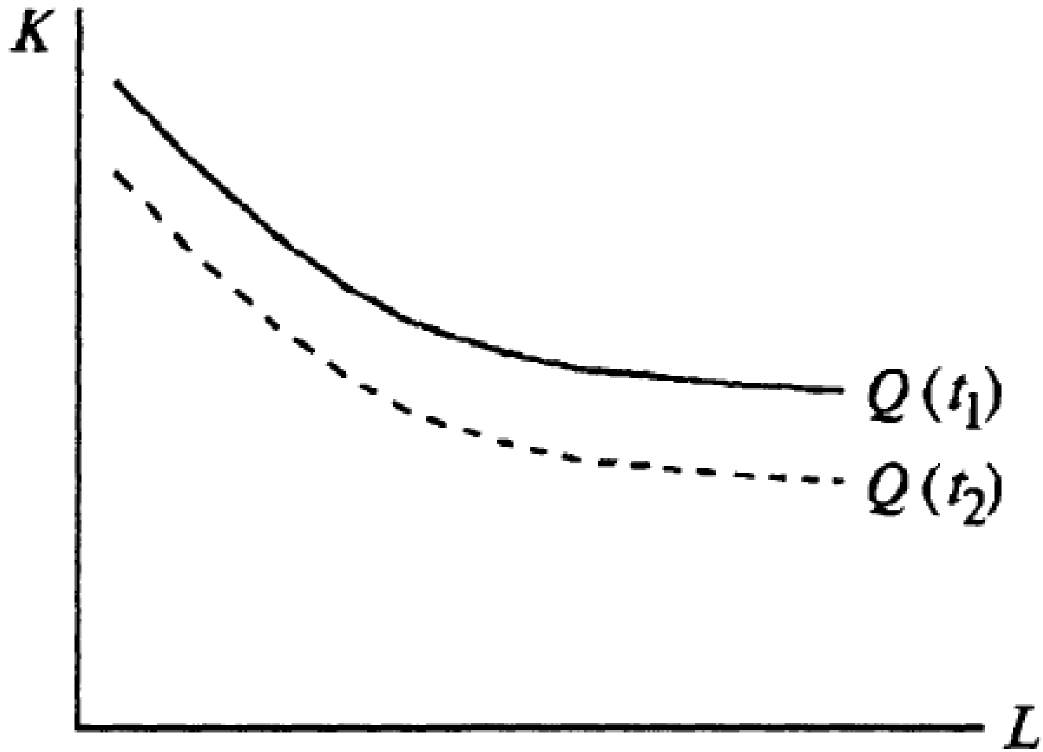
где в качестве производственных факторов выступают капитал (К) и труд (L). Модифицированная ПФ в общем случае имеет вид

$$y = f(K, L, t),$$

причем выполняется условие $\frac{\partial f}{\partial t} > 0,$

которое и отражает факт роста производства во времени при фиксированных затратах труда и капитала.

Геометрическая иллюстрация такого процесса дана на рис. где показано, что изокванта, соответствующая выпуску продукции в объеме Q), смещается с течением времени ($t_1 > t_2$) вниз и налево.



Рост производства во времени при фиксированных затратах труда и капитала

При разработке конкретных модифицированных ПФ обычно стремятся отразить характер НТП в наблюдаемой ситуации. При этом различают четыре случая:

а) существенное улучшение со временем качества рабочей силы позволяет добиться прежних результатов с меньшим ко вид НТП часто называют трудосберегающим.

Модифицированная ПФ имеет вид $y = f(K, l(t)L)$,

где монотонная функция $l(t)$
характеризует рост производительности труда;

Б) ПРЕИМУЩЕСТВЕННОЕ УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА МАШИН И ОБОРУДОВАНИЯ ПОВЫШАЕТ ФОНДООТДАЧУ, ИМЕЕТ МЕСТО КАПИТАЛОСБЕРЕГАЮЩИЙ НТП И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ПФ:

$$y = f(k(t)K, L),$$

где возрастающая функция k(t) отражает изменение фондоотдачи;

в) если имеет место значительное влияние обоих упомянутых явлений, то используется ПФ в форме

$$y = f(k(t)K, l(t)L);$$

г) если же нет возможности выявить влияние НТП на производственные факторы, то применяется ПФ в виде

$$y = a(t)\ f(K, L),$$

где a(t) — ВОЗРАСТАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ, ВЫРАЖАЮЩАЯ РОСТ ПРОДУКЦИИ ПРИ НЕИЗМЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЗАТРАТ ФАКТОРОВ.

ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ И ОСОБЕННОСТЕЙ НТП ИСПОЛЬЗУЮТСЯ НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РЕЗУЛЬТАТАМИ ПРОИЗВОДСТВА И ЗАТРАТАМИ ФАКТОРОВ. К ИХ ЧИСЛУ ОТНОСЯТСЯ:

а) средняя производительность труда $l = \frac{y}{L}$,

Б) СРЕДНЯЯ ФОНДООТДАЧА $k = \frac{y}{K}$,

в) коэффициент фондовооруженности работника $x = \frac{K}{L}$,

г) равенство между уровнем оплаты труда и предельной (маргинальной) производительности труда

$$w = \frac{\partial y}{\partial L},$$

д) равенство между предельной фондоотдачей и нормой банковского процента

$$\frac{\partial y}{\partial K} = r.$$

Говорят, что НТП является нейтральным, если он не изменяет с течением времени определенных связей между приведенными величинами.
Рассмотрим далее три случая:

1) ПРОГРЕСС НАЗЫВАЕТСЯ НЕЙТРАЛЬНЫМ ПО ХИКСУ, ЕСЛИ В ТЕЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ ОСТАЕТСЯ НЕИЗМЕННЫМ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ФОНДОВООРУЖЕННОСТЬЮ (x) и предельной нормой замены факторов (w/r).

В частности, если $w/r = \text{const},$ то замена труда на капитал и наоборот не принесет никакой выгоды и фондовооруженность x = K/L также останется постоянной.
Можно показать, что в этом случае модифицированная ПФ имеет вид

$$y = a(t)\ f(K, L)\ ,$$

и нейтральность по Хиксу эквивалентна рассмотренному выше влиянию НТП непосредственно на выпуск продукции. В рассматриваемой ситуации изокванта с течением времени смещается налево вниз путем преобразования подобия, т.е. остается в точности той же формы, что и в исходном положении;

2) прогресс называется нейтральным по Харроду, если в течение рассматриваемого периода времени норма банковского процента (r) зависит лишь от фондоотдачи (k), т.е. на нее не влияет НТП. Это означает, что предельная фондоотдача установлена на уровне нормы процента и дальнейшее увеличение капитала нецелесообразно.

Можно показать, что такой тип НТП соответствует производственной функции

$$y = f(K, l(t)L),$$

т.е. технический прогресс является трудосберегающим;

3) ПРОГРЕСС ЯВЛЯЕТСЯ НЕЙТРАЛЬНЫМ ПО СОЛОУ, ЕСЛИ СОХРАНЯЕТСЯ НЕИЗМЕННЫМ РАВЕНСТВО МЕЖДУ УРОВНЕМ ОПЛАТЫ ТРУДА (w) И ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬЮ ТРУДА И ДАЛЬНЕЙШЕЕ УВЕЛИЧЕНИЕ ЗАТРАТ ТРУДА НЕВЫГОДНО. МОЖНО ПОКАЗАТЬ, ЧТО В ЭТОМ СЛУЧАЕ ПФ ИМЕЕТ ВИД

$$y = f(k(t)K,\ L),$$

т.е. НТП оказывается фондосберегающим.

Дадим графическое представление трех типов НТП на примере линейной производственной функции

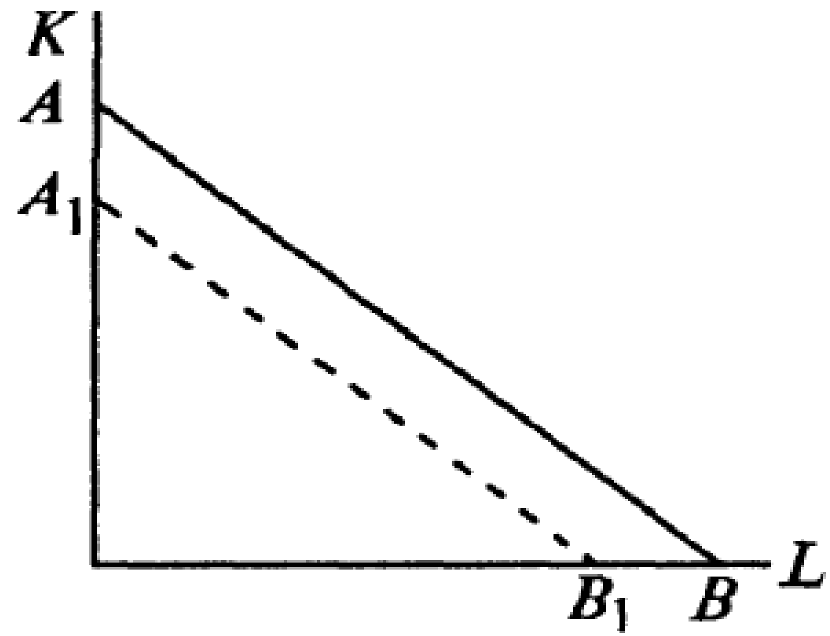
$$y = bK + cL \qquad (b > 0,\ \ c > 0).$$

В случае нейтральности по Хиксу имеем модифицированную ПФ

$$y = a(t)\,(bK + cL),$$

где a(t) — возрастающая функция t

Это означает, что с течением времени изокванта Q(отрезок прямой AB) смещается к началу координат параллельным переносом (рис.) в положение A_1B_1,



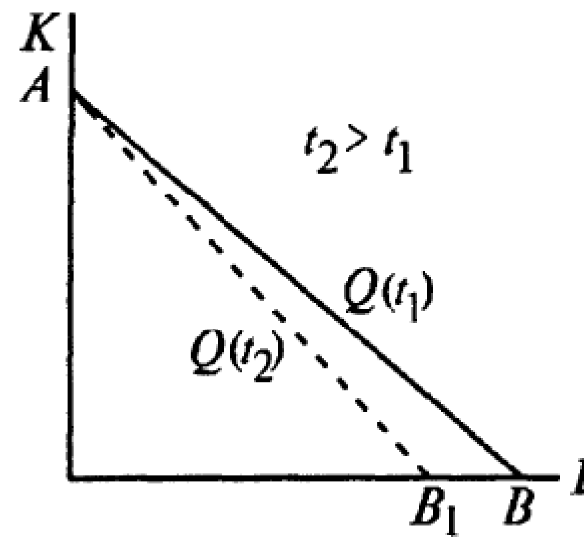
Сдвиг изокванты при нейтральном НТП по Хиксу

В случае нейтральности по Харроду модифицированная ПФ имеет вид

$$y = bK + cl(t)L,$$

где l(t) —- возрастающая функция.

Очевидно, что с течением времени точка А остается на месте и изокванта смещается к началу координат при помощи поворота в положение AB_1 (рис.).

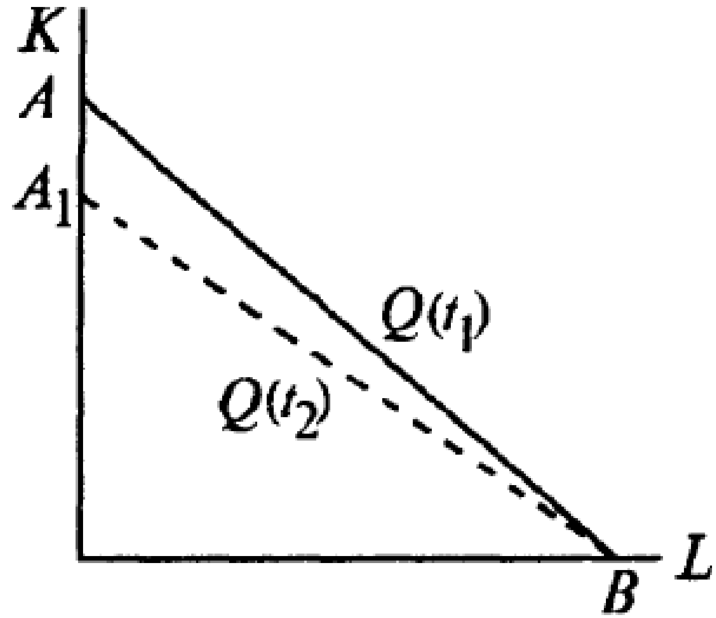


Сдвиг изокванты при трудосберегающем НТП

Для прогресса, нейтрального по Солоу, соответствующая модифицированная ПФ

$$y = bk(t)K + cL,$$

где k(t) — возрастающая функция. Изокванта смещается к началу координат, но точка B не сдвигается, и происходит поворот в положение A_1B (рис.).



Сдвиг изокванты при фондосберегающем НТП

При построении моделей производства с учетом НТП в основном используются следующие подходы:
а) представление об экзогенном (или автономном) техническом прогрессе, который существует также в том случае, когда основные производственные факторы не изменяются. Частным случаем такого НТП является нейтральный прогресс по Хиксу, который обычно учитывается с помощью экспоненциального множителя, например:

$$y = ae^{\lambda t} f(K, L).$$

Здесь $\lambda > 0$, характеризует темп НТП. Нетрудно видеть, что время здесь выступает как независимый фактор роста производства, однако при этом создается впечатление, что НТП происходит сам по себе, не требуя дополнительных затрат труда и капиталовложений;

Б) ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ТЕХНИЧЕСКОМ ПРОГРЕССЕ, ОВЕЩЕСТВЛЕННОМ В КАПИТАЛЕ, СВЯЗЫВАЕТ РОСТ ВЛИЯНИЙ НТП С РОСТОМ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ. ДЛЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЭТОГО ПОДХОДА ЗА ОСНОВУ БЕРЕТСЯ МОДЕЛЬ ПРОГРЕССА, НЕЙТРАЛЬНОГО ПО СОЛОУ

$$y = f(k(t)K,\ L),$$

которая записывается в виде

$$y = f(K_0 + k(t)\Delta K,\ L),$$

где Ко — основные фонды на начало периода,
ΔК — накопление капитала в течение периода, равное сумме инвестиций.

Очевидно, что если инвестирование не производится, то ΔК — 0, и увеличение выпуска продукции за счет НТП не происходит;

в) рассмотренные выше подходы к моделированию НТП обладают общей чертой: прогресс выступает как заданная экзогенно величина, которая влияет на производительность труда или фондоотдачу и посредством этого сказывается на экономическом росте.

Однако в долгосрочном плане НТП является и результатом развития, и, в значительной мере, его причиной. Поскольку именно экономическое развитие позволяет богатым обществам финансировать создание новых образцов техники, а затем уже пожинать плоды научно-технической революции. Поэтому вполне правомерен подход к НТП как эндогенному явлению, вызванному (индуцированному) экономическим ростом.

Здесь выделяются два основных направления моделирования НТП:

1) МОДЕЛЬ ИНДУЦИРОВАННОГО ПРОГРЕССА ОСНОВАНА НА ФОРМУЛЕ

$$y = f(k(t)K, l(t)L),$$

причем предполагается, что общество может распределять предназначенные для НТП инвестиции между его различными направлениями.

Например, между ростом фондоотдачи (к(t) (улучшение качества машин) и ростом производительности труда (l(t)) (повышение квалификации работников) или выбором наилучшего (оптимального) направления технического развития при данном объеме выделенных капитальных вложений;

2) модель процесса обучения в ходе производства, предложенная К. Эрроу, основана на наблюдаемом факте взаимного влияния роста производительности труда и количества новых изобретений. В ходе производства работники приобретают опыт и время на изготовление изделия уменьшается, т.е. производительность труда и сам трудовой вклад зависят от объема производства

$$L = \varphi(y).$$

В свою очередь, рост трудового фактора, согласно производственной функции

$$y = f(K, L),$$

приводит к росту производства. В простейшем варианте модели используются формулы:

$$L = y^h L_0 \qquad (1 > h > 0),$$

$$y = aK^{\alpha} L^{\beta} \qquad (\alpha > 0, \ \beta > 0)$$

(производственная функция Кобба—Дугласа).

Отсюда имеем соотношение

$$y^{1-\beta h} = aK^{\alpha} L_0^{\beta},$$

которое при заданных функциях К(t) и L(t) показывает более быстрый рост у, обусловленный отмеченным выше взаимным влиянием НТП и экономического развития.

Пусть, например: $\alpha = \frac{1}{3}; \ \beta = \frac{2}{3}; \ h = \frac{1}{2}.$

Тогда рост без учета взаимного влияния описывается уравнением

$$y = aK^{\frac{1}{3}} L_0^{\frac{2}{3}},$$

а рост с учетом взаимного влияния уравнением

$$y^{\frac{2}{3}} = aK^{\frac{1}{3}} L_0^{\frac{2}{3}},$$

Или

т.е. оказывается существенно более быстрым

$$y = a^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}} L_0,$$

Для линейной модели:

$$y = bk + cL,$$

$$L = \alpha Y,$$

$$Y(1 - \alpha c) = bK,$$

$$Y = \frac{b}{1 - \alpha c} K,$$

т.е. фондоотдача увеличивается.