ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

ПОНЯТИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального) с точки зрения некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и пр.), называются оптимизационными.

Оптимизационные задачи (03) решаются с помощью оптимизационных моделей (ОМ) методами математического программирования.

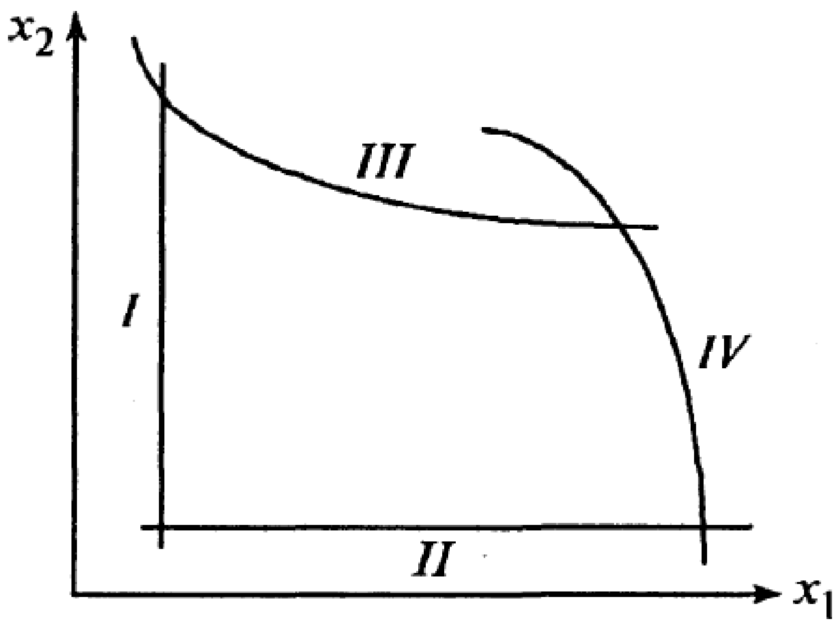
Структура оптимизационной модели состоит из целевой функции, области допустимых решений и системы ограничений, определяющих эту область.
Целевая функция в самом общем виде, в свою очередь, также состоит из трех элементов:
- УПРАВЛЯЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ;
- НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ;
- ФОРМЫ ФУНКЦИИ (ВИДА ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НИМИ).

Область допустимых решений — это область, в пределах которой осуществляется выбор решений. В технико-экономических задачах она ограничена наличными ресурсами, условиями, которые записываются в виде системы ограничений, состоящей из уравнений и неравенств.

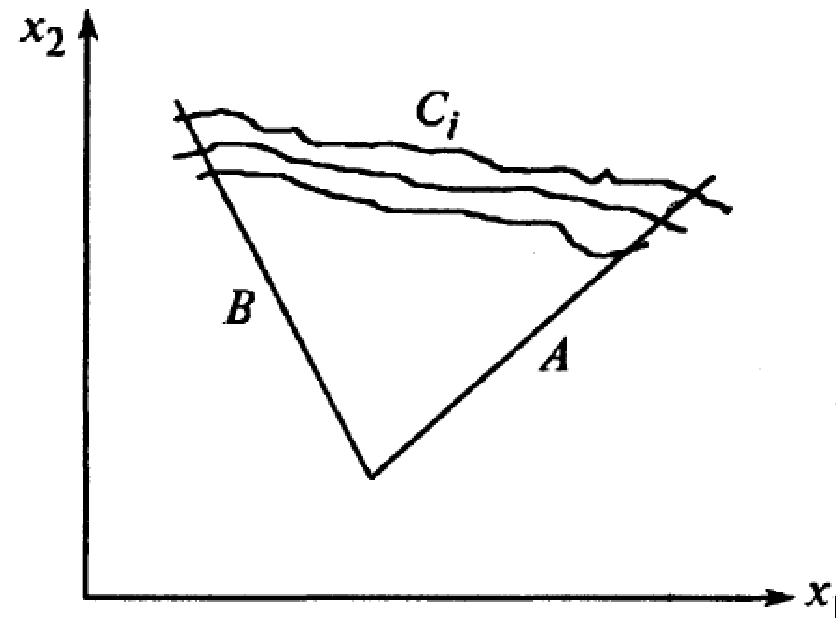
Если система ограничений несовместима, то область допустимых решений является пустой. Ограничения подразделяются:

а) на линейные (I и II) и нелинейные (III И IV) (рис.);

Б) ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ (А, В) и стохастические (группы кривых Ci) (рис.).



. Линейные и нелинейные ограничения



. Детерминированные и стохастические ограничения

Стохастические ограничения являются возможными, вероятностными, случайными.

ОЗ решаются методами математического программирования, которые подразделяются:
- НА ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ;
- НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ;
- динамическое программирование;
- целочисленное программирование;
- выпуклое программирование;
- исследование операций;
- геометрическое программирование и др.

Главная задача математического программирования — это нахождение экстремума функций при ограничениях в форме уравнений и неравенств.

Рассмотрим 03, решаемые методами линейного программирования.

Оптимизационные задачи с линейной зависимостью между переменными

Пусть:

b_i – количество ресурса вида $i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$;

$a_{i,j}$ — НОРМА РАСХОДА i-ТОГО РЕСУРСА НА ЕДИНИЦУ j-ТОГО ВИДА ПРОДУКЦИИ;

x_j — количество продукции вида $j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$;

c_j — прибыль (доход) от единицы этой продукции (в задачах на минимум — себестоимость продукции).

Тогда ОЗ линейного программирования (ЛП) в общем виде может быть сформулирована и записана следующим образом:

Найти переменные $x_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$,

при которых целевая функция

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max (\min),$$

была бы максимальной (минимальной), не нарушая следующих ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_j \geq b_i, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, m.$$

Все три случая можно привести к так называемой канонической форме, введя дополнительные переменные

$$\sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где k — количество дополнительных переменных, и условие неотрицательности искомых переменных: $x_j \geq 0.$

В результате решения задачи находится некий план (программа) работы некоторого предприятия. Отсюда и появилось слово «программирование». Слово «линейное» указывает на линейный характер зависимости как в целевой функции, так и в системе ограничений.

Следует еще раз подчеркнуть, что задача обязательно носит экстремальный характер, т.е. состоит в отыскании максимума или минимума (экстремума) целевой функции.

Геометрическая интерпретация ОЗЛП

Пусть необходимо найти оптимальный план производства двух видов продукции

$$(x_1 \text{ и } x_2),$$

т.е. такой план, при котором целевая функция была бы максимальной, а имеющиеся ресурсы использовались бы наилучшим образом. Условия задачи приведены в табл.

Данные о запасе и нормах расхода ресурсов

Вид продукции	Норма расхода ресурса на единицу продукции			Прибыль на единицу изделия
	A	*B*	*C*	
1	2	0,1	3,5	4
2	1	0,5	1	5
Объем ресурса	12	4	18	–

Оптимизационная модель задачи запишется следующим образом:

а) целевая функция: $4x_1 + 5x_2 \to \max;$

Б) ОГРАНИЧЕНИЯ:

$$2x_1 + x_2 \le 12 \ \text{(ограничение по ресурсу } A\text{)},$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 \le 4 \ \text{(ограничение по ресурсу } B\text{)},$$
$$3{,}5x_1 + x_2 \le 18 \ \text{(ограничение по ресурсу } C\text{)};$$

в) условие неотрицательности переменных:

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

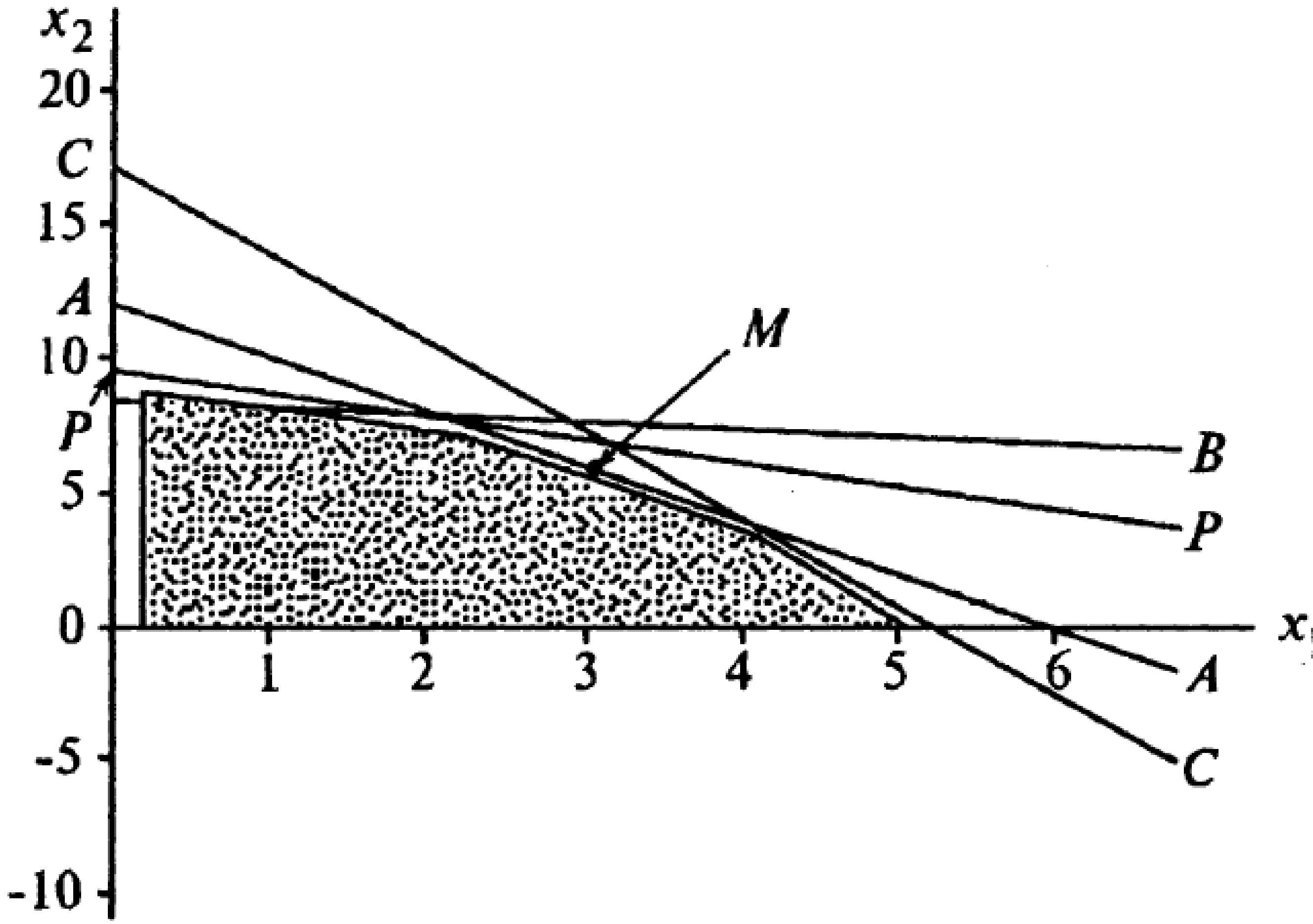
Данную и подобные оптимизационные модели можно продемонстрировать графически (рис.).

Преобразуем нашу систему ограничений, найдя в каждом из уравнений x_2, и отложим их на графике. Любая точка на данном графике

с координатами x_1 и x_2 представляет вариант искомого плана.

Однако ограничение по ресурсу А сужает область допустимых решений. Ими могут быть все точки, ограниченные осями координат и прямой АА, так как не может быть израсходовано ресурса А больше, чем его на предприятии имеется. Если точки находятся на самой прямой, то ресурс используется полностью

Аналогичные рассуждения можно привести и для ресурсов B и C. В результате условиям задачи будет удовлетворять любая точка, лежащая в пределах заштрихованного многоугольника. Данный многоугольник называется областью допустимых решений



Геометрическая интерпретация оптимизационной задачи линейного программирования

Однако нам необходимо найти такую точку, в которой достигался бы максимум целевой функции.

Для этого построим произвольную прямую $4x_1 + 5x_2 = 20,$

(число 20 произвольное). как $x_2 = 4 - 4/5x_1$

Обозначим эту линию PP. В каждой точке этой линии прибыль одинакова. Перемещая эту линию параллельно ее исходному положению, найдем точку, которая удалена от начала координат в наибольшей мере, однако не выходит за пределы области допустимых решений.

Это точка М, которая лежит на вершине многоугольника.

Координаты этой точки $(x'_1 = 3{,}03$ и $x'_2 = 7{,}4)$

и будут искомым оптимальным планом.

Симплексный метод решения ОЗЛП

Симплексный метод — это вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улучшения решений при переходе от одной базисной точки (базисного решения) к другой. При этом значение целевой функции улучшается. Базисным решением является одно из допустимых решений, находящихся в вершинах области допустимых значений. Проверяя на оптимальность вершину за вершиной, приходят к искомому оптимуму. На этом принципе основан симплекс-метод.
Симплекс — это выпуклый многогранник в n-мерном пространстве с $n + 1$ вершинами, не лежащими в одной гиперплоскости (гиперплоскость делит пространство на два полупространства).

Решение оптимизационной задачи линейного программирования в Excel

Пусть предприятие (например, мебельная фабрика) производит столы и стулья. Расход ресурсов на их производство и прибыль от их реализации представлены в табл.

Данные о расходе ресурсов и прибыли от реализации продукции

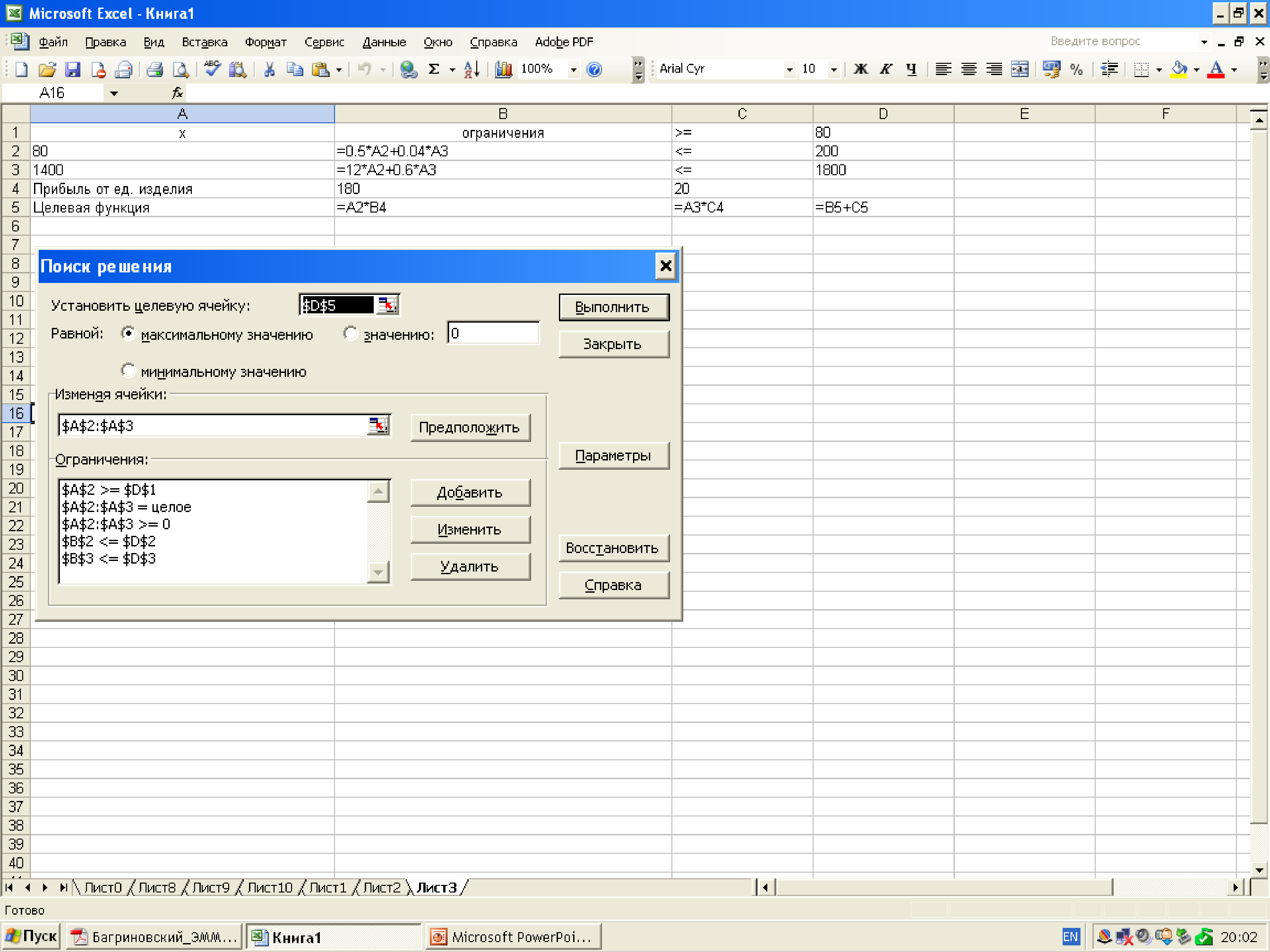
Продукты и ресурсы	Столы	Стулья	Объем ресурсов
Расход древесины на изделие, м^3	0,5	0,04	200
Расход труда, чел.-ч	12	0,6	1800
Прибыль от реализации единицы изделия, руб.	180	20	–

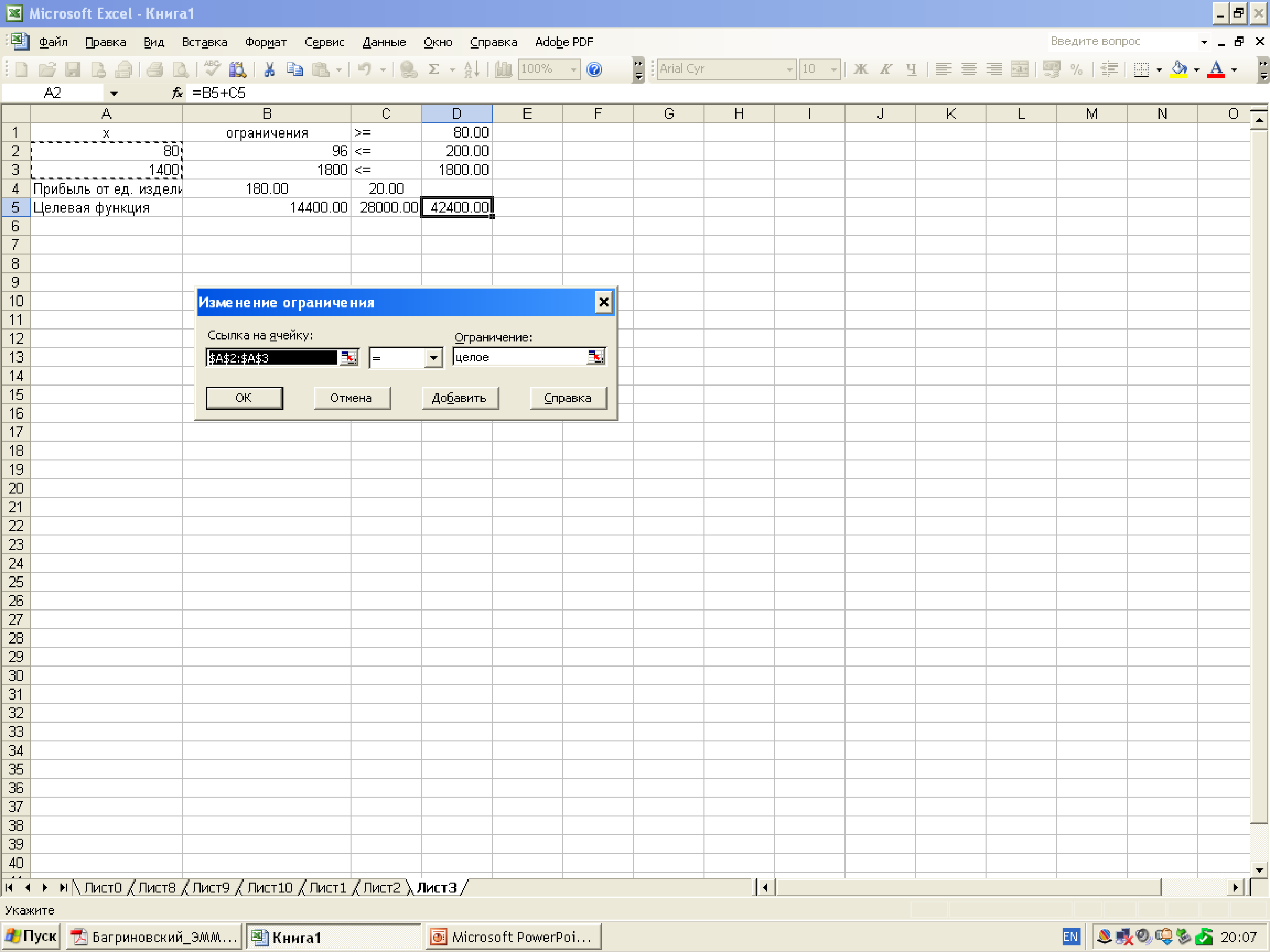
Кроме того, на производство 80 столов заключен контракт с муниципалитетом, который, безусловно, должен быть выполнен. Необходимо найти такую оптимальную производственную программу, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной.

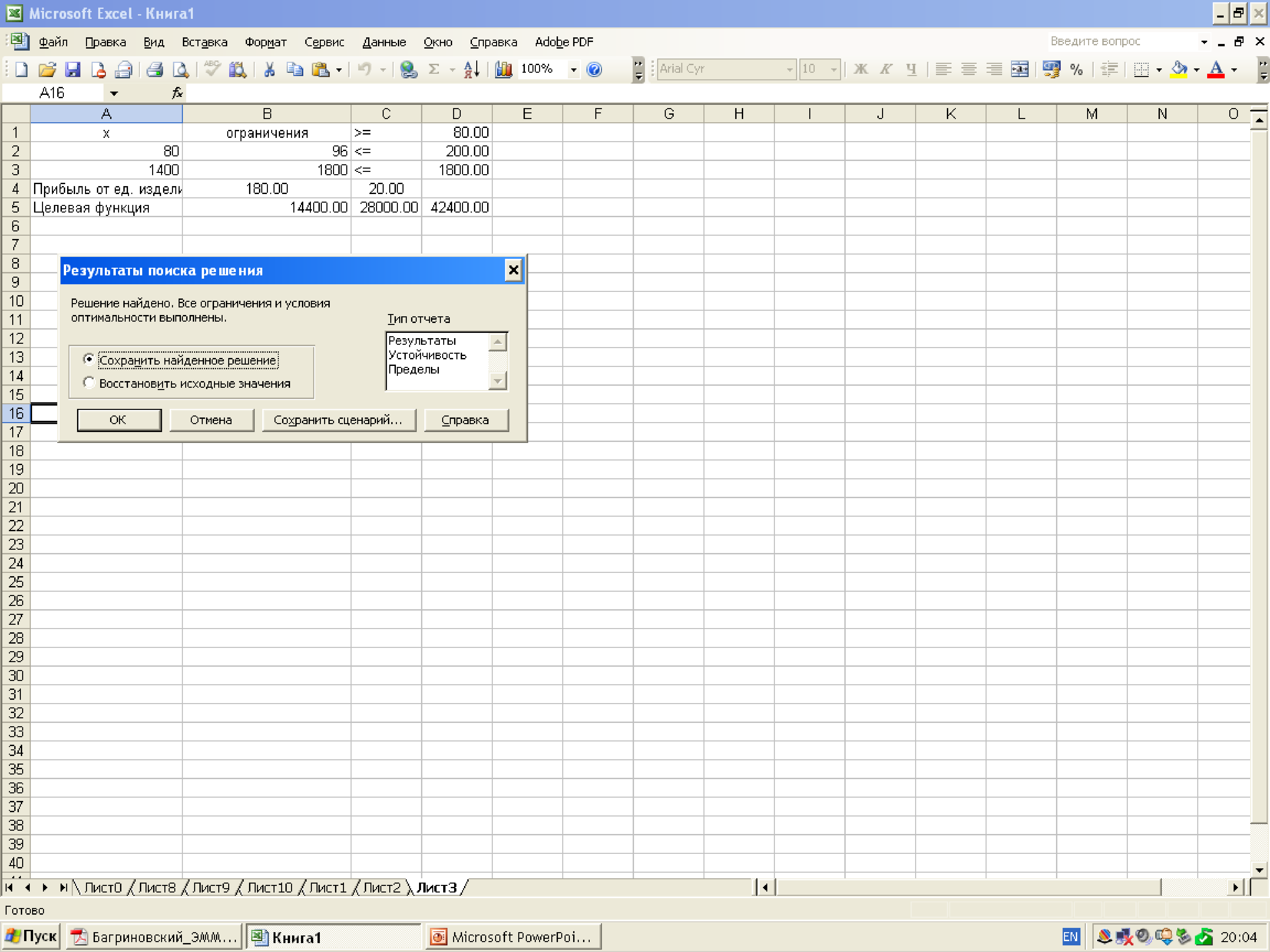
Пусть x_1 — количество столов, x_2 — количество стульев.
Тогда система ограничений и целевая функция запишутся следующим образом:
$180x_1 + 20*x_2$ -» MAX (ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ);
$0,5x_1 + 0,04x_2 <= 200$ (ограничения по древесине);
$12x_1 + 0,6x_2 <= 1800$ (ограничения по труду);
$x_1 > 80$ (КОНТРАКТ С МУНИЦИПАЛИТЕТОМ); X! > 0; X**2** > 0;
x_1 x_2 — целые числа.

Для решения задачи в Excel запишем ее в виде, представленном на рис. .
Для решения задачи вызовем меню Сервис—Поиск решения

В открывшемся диалоговом окне Поиск решения (рис.) укажем:
- адрес целевой ячейки (в нашем примере B5);
- диапазон искомых ячеек (A2:A3);
- ОГРАНИЧЕНИЯ: A2 >= 80,
  A2:A3 = целое, A2:A3 >= 0, B2 <= D2, B3 <= D3.


Microsoft Excel - Книга1
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Adobe PDF
Введите вопрос
100%
Arial Cyr
10
A16
fx
A B C D E F
x
ограничения
>=
80
80
=0.5*A2+0.04*A3
<=
200
1400
=12*A2+0.6*A3
<=
1800
Прибыль от ед. изделия
180
20
Целевая функция
=A2*B4
=A3*C4
=B5+C5
Поиск решения
Установить целевую ячейку:
$D$5
Выполнить
Равной:
максимальному значению
значению:
0
Закрыть
минимальному значению
Изменяя ячейки:
$A$2:$A$3
Предположить
Параметры
Ограничения:
$A$2 >= $D$1
$A$2:$A$3 = целое
$A$2:$A$3 >= 0
$B$2 <= $D$2
$B$3 <= $D$3
Добавить
Изменить
Удалить
Восстановить
Справка
Лист0
Лист8
Лист9
Лист10
Лист1
Лист2
Лист3
Готово
Пуск
Багриновский_ЭММ...
Книга1
Microsoft PowerPoi...
EN
20:02


Microsoft Excel - Книга1
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Adobe PDF
A2
=B5+C5
x
ограничения
>=
80.00
80
96
<=
200.00
1400
1800
<=
1800.00
Прибыль от ед. издели
180.00
20.00
Целевая функция
14400.00
28000.00
42400.00
Изменение ограничения
Ссылка на ячейку:
$A$2:$A$3
=
Ограничение:
целое
ОК
Отмена
Добавить
Справка
Лист0 Лист8 Лист9 Лист10 Лист1 Лист2 Лист3
Укажите
Пуск
Багриновский_ЭММ...
Книга1
Microsoft PowerPoi...
20:07


Microsoft Excel - Книга1
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Adobe PDF
Введите вопрос
Arial Cyr
10
100%
A16
x
ограничения
>=
80.00
80
96
<=
200.00
1400
1800
<=
1800.00
Прибыль от ед. издели
180.00
20.00
Целевая функция
14400.00
28000.00
42400.00
Результаты поиска решения
Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Тип отчета
Результаты
Устойчивость
Пределы
Сохранить найденное решение
Восстановить исходные значения
OK
Отмена
Сохранить сценарий...
Справка
Лист0
Лист8
Лист9
Лист10
Лист1
Лист2
Лист3
Готово
Пуск
Багриновский_ЭММ...
Книга1
Microsoft PowerPoi...
EN
20:04

Двойственная задача ЛП

Двойственная задача ЛП может быть сформулирована следующим образом: найти переменные

$$y_i \ (i = 1, 2, ..., m),$$

при которых целевая функция была бы минимальной

$$Z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

не нарушая ограничений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Данная задача называется двойственной (симметричной) по отношению к прямой задаче, сформулированной во втором параграфе данной главы. Однако правильным будет и обратное утверждение, так как обе задачи равноправны. Компоненты решения двойственной задачи называются объективно обусловленными оценками.

Прямая и обратная задачи ЛП связаны между собой теоремами двойственности.

Первая теорема двойственности.
Если обе задачи имеют допустимые решения, то они имеют и оптимальное решение, причем значение целевых функций у них будет одинаково

$$F(x) = Z(y) \text{ или } \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Если же хотя бы одна из задач не имеет допустимого решения, то ни одна из них не имеет оптимального решения.

Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нєжєсткости).

Для того чтобы векторы $$\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и

$$\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

были оптимальными решениями соответственно прямой и двойственной задачи, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$y_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j - c_j\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Следствие 1. Пусть оптимальное значение некоторой переменной двойственной задачи строго положительно

$$y_i > 0.$$

Тогда из условия получим
$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

или
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i.$$

Экономический смысл данных выражений можно интерпретировать в следующей редакции. Если объективно обусловленная оценка некоторого ресурса больше нуля (строго положительна), то этот ресурс полностью (без остатка) расходуется в процессе выполнения оптимального плана.

Следствие 2. Пусть для оптимального значения некоторой переменной x_i прямой задачи выполняется условие строгого неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i.$$

Тогда, основываясь на том же первом условии, можно заключить, что $y_i = 0.$

Экономически это означает, что если в оптимальном плане какой-то ресурс используется не полностью, то его объективно обусловленная оценка обязательно равна нулю.

Решение двойственной задачи ЛП

Ранее мы рассматривали прямую задачу ЛП:

$$F(x) = 180x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}04x_2 \leq 200$$
$$12x_1 + 0{,}6x_2 \leq 1800$$
$$x_1 \geq 80$$
$$x_1 x_2 \geq 0.$$

В системе неравенств должны быть однотипные знаки «меньше или равно». Поэтому неравенство x_1 > 80 умножим на -1 и поменяем знак неравенства на противоположный.

$$Z(y) = 200y_1 + 1800y_2 - 80y_3 \rightarrow \min$$

$$0{,}5y_1 + 12y_2 - y_3 \geq 180$$

$$0{,}04y_1 + 0{,}6y_2 \geq 20$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Ограничение на целочисленность переменных здесь не требуется.
Решение прямой задачи дало следующие результаты:

$$x_1 = 80; \;\; x_2 = 1400; \;\; F(x) = 42400.$$

В результате решения двойственной задачи получим

$$y_1 = 0; \;\; y_2 = 33{,}3; \;\; y_3 = 220; \;\; Z(y) = 42400.$$

Объективно обусловленная оценка $y_1 = 0$ указывает на то, что у нас избыток древесины: $y_2 = 33{,}3$, т.е. больше нуля. Значит этот ресурс (труд) полностью используется в оптимальном плане.
Значение целевой функции Z(y) равно F(x) = 42400. Это свидетельствует о том, что найденное решение оптимально.

Свойства объективно обусловленных оценок и их анализ

Анализ задачи с использованием объективно обусловленных оценок показывает, что первый ресурс (древесина) расходуется не полностью. Можно убедиться, что для найденного оптимального плана достаточно 96 куб. м древесины, а 104 куб. м избыточны. Изменение ограничения по древесине с 200 до 96 куб. м не повлияет на оптимальный план. Следовательно, объективно обусловленные оценки являются устойчивыми в некоторых пределах изменения исходных условий задачи.

Объективно обусловленные оценки выступают как мера дефицитности ресурсов. Древесина, объективно обусловленная оценка которой у нас равна нулю, не дефицитна, а трудовые ресурсы с объективно обусловленной оценкой, равной в нашей задаче 33,3, дефицитны и используются полностью.

Объективно обусловленные оценки выступают как мера влияния ограничений на целевую функцию при приращении данного ресурса на единицу.

Так, например, уменьшение задания по производству столов с 80 до 79 увеличивает целевую функцию на 220 $., а увеличение трудовых ресурсов с 1800 до 1801 человек увеличивает целевую функцию (если снять условие целочисленности) на 33,3 .

Объективно обусловленные оценки выступают как меры взаимозаменяемости резервов (ограничений).

Так, например, если увеличить задание по производству столов на единицу, то для того чтобы целевая функция осталась прежней, нужно добавить 6,6 чел-ч (220/33,3). В этом случае x_1 будет равен 81, x_2 = 1391, а значение целевой функции составит 42400.

Следует иметь в виду, что при существенном изменении исходных условий задачи обычно получается уже другая система оценок. Следовательно, объективно обусловленные оценки обладают свойством конкретности, так как определяются совокупностью условий данной задачи. Для другой задачи и других условий их значения будут совершенно иными.

Разработка производственной программы фирмы

Разработку производственной программы фирмы можно выполнить, используя метод производственных функций, который дает возможность получить описание эффективного технологического множества в терминах связи между «входом» (затратами производственных факторов) и «выходом» (результатами производственной деятельности) объекта. Однако во многих случаях представляется полезным иметь сведения о структуре того или иного эффективного технологического способа, т.е., если возможно, понять, комбинацией каких более простых процессов он является.

В качестве основной модели, позволяющей дать описание не только связей «вход»—«выход», но и параметров внутреннего состояния производственной системы, применяется, как правило, линейная модель производства. Эта модель строится исходя из предположения, что всякий допустимый технологический способ (в том числе эффективный) может быть представлен в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами так называемых базисных производственных способов.

Наиболее распространенное истолкование такого представления основывается на том, что производственное предприятие рассматривается как объединение параллельно работающих взаимосвязанных цехов, участков и т.п., причем в каждом из них используется некая определенная технология. Тогда описание такой технологии (т.е. производство продукции и соответствующие затраты) можно считать базисным производственным способом.
Время работы цеха по этой технологии обычно называют интенсивностью базисного способа.
В рассматриваемом примере все основные показатели затрат и выпуска для производственного объекта в целом оказываются суммой подобных же величин по отдельным цехам.

Говоря более точно, линейные модели производства основаны на следующих гипотезах о свойствах технологического множества V:

1. ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО К ЯВЛЯЕТСЯ КОНУСОМ В R_+^{m+n},
Т.Е. ДЛЯ ЛЮБОГО $\alpha > 0$ ИМЕЕТ МЕСТО СЛЕДУЮЩИЙ ФАКТ:

ЕСЛИ $v \in V,$ то $\alpha v \in V.$

.

Последнее означает, что вместе с допустимым технологическим способом

$$v = (x, y)$$

допустимой является также технология, для которой затраты и выпуск увеличены (уменьшены при $\alpha < 1$) в одной и той же пропорции.

Имеет место аддитивность технологических способов,

т.е. если $v^{(1)} \in V$ и $v^{(2)} \in V$,

то $(v^{(1)} + v^{(2)}) \in V$.

Данная предпосылка выражает упомянутое выше свойство параллельности технологий:
если допустимым является выпуск продукции в размере $y^{(1)}$ при затратах $x^{(1)}$,
ТАКЖЕ ВЫПУСК $y^{(2)}$ ПРИ ЗАТРАТАХ $x^{(2)}$,
ТО ВОЗМОЖЕН ВЫПУСК $(y^{(1)} + y^{(2)})$
ПРИ ЗАТРАТАХ РЕСУРСОВ $(x^{(1)} + x^{(2)})$.

СУЩЕСТВУЕТ КОНЕЧНЫЙ ВЫБОР БАЗИСНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ

СПОСОБОВ $(v_1, \ldots, v_n)$,

ПРИ ПОМОЩИ КОТОРЫХ МОГУТ БЫТЬ ПРЕДСТАВЛЕНЫ ВСЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ $v \in \bar{V}$,

Т.Е. ДЛЯ всякого v найдутся такие неотрицательные числа

$$z_1, \ldots, z_n,$$

называемые интенсивностями базисных способов, для которых справедливо соотношение

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j z_j .$$

Выполнение указанных трех предположений означает, что множество V является выпуклым многогранным конусом.

В конкретной задаче планирования производства обычно используется подмножество множества V, определяемое системой ограничений двух видов.

Условия первого вида предназначены для характеристики ограниченности запасов ресурсов, которые необходимы для осуществления производственного процесса.

Группу условий второго вида образуют плановые задания по отдельным видам продукции, комплектам или стоимостным показателям.

Ограничивающие условия обоих видов записываются обычно в терминах интенсивностей базисных технологий. При этом произвольная базисная технология (с номером у) имеет вид

$$v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}),$$

где m — общее число компонент (продуктов и ресурсов).

В некоторых случаях различные виды компонент отличаются знаками (например, положительные числа относятся к продуктам, а отрицательные представляют объемы затрачиваемых ресурсов), но в большинстве случаев смысл каждой компоненты специально оговаривается.

Условия ресурсного характера общего типа имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, mm),$$

где mn — число общих ограничений «меньше или равно».

Кроме того, возможны локальные ограничения

$$z_j \leq \hat{b}_j,$$

которые отражают ограниченность производственной мощности по j-тому базисному способу. Ограничения, отражающие необходимость выполнения планового задания по некоторому продукту, вообще говоря, имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \geq b_i \quad (i = mm + 1, \ldots, m).$$

Таким образом, линейная модель производства позволяет представить взаимозаменяемость и комбинирование фиксированных технологических способов, считающихся основными, в некоторых пределах, обозначенных ресурсами и плановыми ограничениями.

Рассматривая производственный объект как кибернетическую систему, можно сказать, что характеристики основных производственных способов (их коэффициенты затрат и выпуска) являются основными параметрами системы, а обусловленные плановым решением значения интенсивностей (z_j) представляют собой описание состояния системы.

Плановое решение определяется на множестве возможных состояний Z при помощи некоторого правила выбора «наилучшего» состояния. По существу формирование такого правила выбора отражает представление об интересах производственного объекта и связанного с этим выделением множества эффективных технологических способов. Указанное правило выбора может быть сформулировано при помощи некоторого формализованного критерия (скалярная оптимизация) или набора ряда оценочных показателей (многокритериальная оптимизация). Оно может быть по существу неформальным правилом, если окончательный выбор решения зависит от условий среды, окружающей данный производственный объект, от предыдущих решений и, наконец, от субъективных оценок руководителей.

В рассматриваемой нами модели очень часто используется скалярное правило выбора наилучшего состояния, базирующееся на нахождении оптимального значения некоторой целевой функции. Эта функция обычно имеет смысл выпуска наибольшего возможного количества продукции либо в стоимостном выражении, либо в заданном комплекте. Зачастую применяются целевые функции, выражающие максимизацию прибыли или минимизацию затрат.

Если целевая функция является линейной относительно искомых интенсивностей основных технологических способов, то возникает линейная оптимизационная модель производства, которая, с одной стороны, благодаря своей относительной простоте доступна для достаточно детального математического анализа, а с другой стороны, имеет самостоятельное значение как инструмент принятия и поддержки решения в достаточно несложных ситуациях, а также как элемент более сложных конструкций решающих систем.

Обратимся далее к одной из линейных оптимизационных моделей, которая представляет собой способ решения задачи оптимизации производственной программы в условиях фиксированных цен на продукцию для предприятия, хозяйственный интерес которого состоит в получении наибольшей выручки (товарной продукции).

Пусть в процессе производства используется m видов ресурсов, запасы которых также фиксированы. Тогда вектор затрат—выпуска, описывающий основной технологический способ, запишется следующим образом:

$$v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}; c_j).$$

Здесь неотрицательные числа $a_{ij}\ (i = 1, \ldots, m)$

представляют собой нормы затрат производственных факторов, а c_j — стоимость товарной продукции, полученную предприятием при реализации технологии v_j единичной интенсивностью.

Если имеющиеся запасы ресурсов составляют $b_i\ (i = 1, \ldots, m)$,

то оптимизационная модель для разработки программы предприятия имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$z_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Предположим, что полученная задача линейного программирования имеет единственное решение

$$\hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n).$$

Тогда технологический способ

$$\hat{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \hat{z}_j$$

есть эффективный способ, позволяющий выполнить оптимальную производственную программу и получить максимальный объем товарной продукции:

$$\hat{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{z}_j.$$

Допустим далее, что запасы используемых ресурсов

$$b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

могут изменяться в некоторых пределах.

Если при этом не меняется оптимальный базис представленной выше задачи линейного программирования, то в силу теоремы двойственности

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{u}_i ,$$

где $\hat{u}_i \ (i = 1, \ldots, m)$ — оптимальные оценки, которые являются компонентами решения двойственности задачи.

Легко видеть, что полученное соотношение можно рассматривать как определение скалярной производственной функции, причем в качестве дифференциальной продуктивности ресурса с номером i выступает оптимальная оценка $\hat{u}_i$.

Приведенное представление распространяется и на более общую ситуацию, когда в пределах изменения запасов ресурсов b_i происходит смена оптимального базиса.

Тогда оптимальные оценки следует считать, вообще говоря, многозначными функциями от запасов ресурсов, а производственную функцию

$$\hat{c} = f(b_1, \ldots, b_m)$$

определить в каждой точке как минимум из конечного числа линейных функций

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{(1)} b_i; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^{(2)} b_i; \quad \sum_{i=1}^{n} u_i^{(s)} b_i,$$

Где $u^{(1)}, \ldots, u^{(s)}$ — СУТЬ ВЕРШИНЫ МНОГОГРАННИКА,

ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ МНОЖЕСТВОМ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ. ТАКОГО РОДА ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ, ОНА ИМЕЕТ НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВО ВСЕХ ТОЧКАХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, КРОМЕ ТОЧЕК, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМ СМЕНЫ ОПТИМАЛЬНОГО БАЗИСА. СЛЕДУЕТ ЗАМЕТИТЬ, ЧТО ПРИ увеличении запаса некоторого ресурса (b_i) при неизменных количествах прочих ресурсов, соответствующая оптимальная оценка $(\hat{u}_i)$ уменьшается.

При достаточно больших значениях некоторое количество ресурса становится излишним, а оценка $\hat{u}_i$ становится равной нулю.

Это означает, что в рассматриваемом случае используемые ресурсы являются не взаимозаменяемыми, а взаимодополняющими.

В частном случае, когда в задаче присутствуют лишь локальные ограничения

$$z_0 \to \max; \quad \underset{u_i}{a_i z_0 \le b_i} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где через z_0 обозначен объем выпускаемой продукции,

через a_i — ресурсоемкость единицы продукции по i-тому ресурсу, решение можно представить в виде

$$z_0 = \min_i \frac{b_i}{a_i}.$$

Это выражение известно так же, как производственная функция для взаимодополняющих (комплементарных) производственных факторов, и широко применяется в сложных моделях производства.

Величина оптимальной оценки $\hat{u}_i$ производственного фактора имеет троякий смысл: измерителя дополнительного вклада единицы i-того фактора в повышении значения целевой функции; коэффициента, характеризующего относительную дефицитность этого фактора по сравнению с другими, а также выражает верхний предел цены, которую согласен заплатить производитель за дополнительную единицу ресурса.

Для того, чтобы подробнее остановиться на стоимостной интерпретации оптимальных оценок, воспользуемся двумя группами соотношений между оптимальными решениями прямой и двойственной задач линейного программирования (ЛП).

Прямой задаче ЛП

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$z_j \ge 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

соответствует

двойственная задача:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$u_i \ge 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Пусть $\hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n); \hat{u} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_m)$

— оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач.

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$1)\ \hat{u}_i\left(b_i - \sum_{o=1}^{m} a_{ij}\hat{z}_j\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$2)\ \hat{z}_j\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{u}_i - c_j\right) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Рассматривая условия первой группы, можно установить, что при $\hat{u}_i$,

т.е. в том случае, когда оптимальная оценка /-того ресурса строго положительна, необходимо выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{z}_j = b_i.$$

Таким образом, оптимальный (эффективный) технологический способ использует данный ресурс полностью.

Отсюда можно заключить, что этот производственный фактор является ограничивающим, и дополнительное поступление некоторого количества ресурса приведет к увеличению целевой функции.

Если такой функцией является выпуск товарной продукции (или прибыль), то увеличение ресурса на единицу сулит получение дополнительной продукции на сумму $\hat{u}_i$ денежных единиц.

Следовательно, производство может приобрести указанную единицу по цене

$$p_i \le \hat{u}_i$$

и ожидать получение дополнительной прибыли.

Если же i-тый ресурс используется не полностью в процессе производства, то его оптимальная оценка обязательно равна нулю

$$\hat{u}_i = 0.$$

В самом деле, малое дополнительное увеличение такого ресурса не приведет к увеличению выпуска, поскольку в данный момент имеется его излишек.

В связи с этим затраты на приобретение дополнительного количества не являются оправданными. Здесь нужно отметить некоторые недостатки этого рассуждения.

Во-первых, приведенная оценка сохраняет свой смысл лишь для достаточно малых количеств дополнительного ресурса, которые не приводят к изменению оптимального базиса задачи ЛП, а следовательно, и к изменению системы оптимальных оценок. Вполне возможно, что существенное дополнительное количество ресурса сделает более выгодным и приведет к включению в оптимальный план другой технологический способ, который связан с эффективным использованием упомянутого ресурса, что сразу повлечет изменение его оптимальной оценки в сторону увеличения.

Во-вторых, приведенное рассуждение основывается на статической модели производства, в которой весь процесс происходит в сравнительно короткий период времени. Поэтому оптимальная оценка характеризует ресурс лишь с точки зрения эффективности его использования лишь в этом кратком периоде, не затрагивая проблемы формирования запасов и движения ресурсов во времени.

Тем не менее приведенное стоимостное истолкование оптимальных оценок служит надежной базой для концепции «теневых» или расчетных цен, лежащих в основе расчета между подразделениями внутри предприятия или производственного объединения.

Условия второй группы могут быть также использованы для составления расчетных цен на готовую продукцию.

Предположим, что базисный технологический способ с номером j имеет конечным результатом выпуск определенного вида продукции j (в натуральном выражении, равном q_i)

Тогда, если в оптимальном решении прямой задачи $\hat{z}_j > 0$,

то технологический способ у рекомендован к осуществлению и в оптимальном плане предлагается производить продукцию с номером j.

Из соответствующего соотношения второй группы вытекает, что

при $\hat{z}_j > 0$

ИМЕЕТ МЕСТО РАВЕНСТВО

$$c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i .$$

Таким образом, при фиксированной цене изделия c_j, оптимальные оценки $\hat{u}_i$ выражают разложение цены по отдельным элементам совокупных затрат с учетом ограниченности ресурсов, представленных в рассматриваемой модели.

Конечно, для создания более полной картины распределения затрат по элементам необходимо использовать более детальные модели производства.

Если в число ограничений включаются трудовые ресурсы, многие виды материальных ресурсов, лимиты капитальных вложений, то цена продукции представляется как сумма расчетной заработной платы, материальных затрат и затрат на пополнение и создание новых производственных фондов.

Некоторым недостатком приведенного представления является отсутствие в нем выражений для прибавочного продукта и дополнительного полезного эффекта у потребителя, которые присутствуют в большинстве концепций формирования цены.

В связи с этим данное соотношение следует рассматривать лишь в контексте приведенной модели производства, как средство анализа внутренних свойств исследуемого производственного объекта. С этой точки зрения соотношения второй группы и вытекающие из них следствия удобно использовать для оценки экономической эффективности новых предлагаемых базисных производственных способов. В самом деле, из соотношений второй группы вытекает, что если для некоторого базисного технологического способа i выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{u}_i > c_j,$$

которое означает, что затраты ресурсов, исчисленные с помощью оптимальных оценок, как внутренних цен, превосходят ожидаемую выручку от продажи j-того изделия, то необходимо $\hat{z}_j = 0.$

ПОСЛЕДНЕЕ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ТАКОЙ «НЕРЕНТАБЕЛЬНЫЙ» БАЗИСНЫЙ СПОСОБ НЕ РЕКОМЕНДУЕТСЯ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНЕ ПРОИЗВОДСТВА

Пусть теперь предлагается новый технологический способ вида

$$(a_{1l}, \ldots, a_{il}, \ldots, a_{ml}; c_l).$$

Если оказывается, что

$$c_l \leq \sum_{i=1}^{m} a_{il}\hat{u}_i,$$

то предлагаемый способ не следует включать в число базисных, поскольку он не дает дополнительной выгоды по сравнению с уже используемыми.

Если же имеет место обратное неравенство $$c_l > \sum_{i=1}^{m} a_{il}\hat{u}_i,$$

то следует ввести предлагаемую технологию в состав базисных и найти оптимальное решение новой, расширенной, задачи.

Если в результате расчета получим интенсивность $\hat{z}_l > 0,$ то новая технология станет составной частью оптимального способа.

Рассмотренная статическая задача максимизации выручки широко используется для разработки производственной программы на производственных участках, цехах, т.е. таких объектах, функционирование которых обеспечивается в основном за счет привлечения ресурсов, предоставляемых извне обычно некоторым управляющим центром.

В более общем случае возникает вопрос о наилучшем использовании финансовых средств, предназначенных для приобретения внешних ресурсов.

ОБОБЩЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

В ТЕХ СЛУЧАЯХ, КОГДА САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ ФУНКЦИОНИРУЕТ В РЫНОЧНЫХ УСЛОВИЯХ, НЕОБХОДИМО ВОЗНИКАЕТ ВОПРОС О НАИЛУЧШЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ И ЗАЕМНЫХ ФИНАНСОВЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРИОБРЕТЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ КОЛИЧЕСТВ РЕСУРСОВ, КОТОРЫЕ МОГУТ ПРИМЕНЯТЬСЯ НАРЯДУ С НЕКОТОРЫМИ ФИКСИРОВАННЫМИ ФАКТОРАМИ (НАПРИМЕР, ЗДАНИЯМИ, СООРУЖЕНИЯМИ, МАШИНАМИ И Т.П.).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТАКОЙ ЗАДАЧИ ОСНОВАНА НА РАЗДЕЛЕНИИ ВСЕХ РЕСУРСОВ НА ПОСТОЯННЫЕ РЕСУРСЫ, ЗАПАСЫ КОТОРЫХ СЧИТАЮТСЯ ЗАДАННЫМИ

$$(b_i) \quad (i = 1, \ldots, m_1),$$

и нанимаемые (арендуемые) ресурсы

$$(i = m_1 + 1, \ldots, m),$$

запасы которых определяются косвенным образом через сумму собственных средств и кредита (К).

Рассмотрим ниже модели двух типов. В модели первого типа все производственные процессы являются краткосрочными в том смысле, что результаты производства появляются на рынке в течение одного периода (года), а нанимаемые производственные факторы взаимозаменяемы. В этой ситуации модель оптимизации товарной продукции имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m_1)$$

$$p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le K_i \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=m_1+1}^{m} K_i \le K$$

$$z_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n); \quad K_i \ge 0 \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m)$$

Здесь p_i — цены капитальных факторов; K_i — средства, выделяемые на их приобретение.

Таким образом, задача состоит в определении не только интенсивностей производственных способов, но и нахождении оптимального распределения финансовых ресурсов.

Двойственная задача к приведенной линейной программе выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m_1} u_i b_i + wKb_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} u_i a_{ij} + \sum_{i=m_1+1}^{m} p_i v_i a_{ij} \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$w \geq v_i \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m)$$

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m_1)$$

$$w \geq 0; \quad v_i \geq 0.$$

Здесь приняты обозначения:

w — двойственная оценка финансовых ресурсов;
u_i — оценка фиксированного ресурса;
v_i — оценка нанимаемого ресурса.

Модели второго типа имеют динамический характер. Они описывают более реалистичную обстановку, когда производственные процессы могут быть не только краткосрочными, но и долгосрочными, в том смысле, что их результаты появятся на рынке не в данном исходном периоде, а в некотором последующем.

В этом случае при выборе наилучшего решения необходимо учесть, что денежная выручка, полученная, например, в следующем году, должна быть приведена (дисконтирована) на основе процентной ставки за кредит.
Таким образом, следует принять в расчетах, что

$$c_j^{(t+1)} = \frac{c_j^t}{1+r},$$

где r — ставка банковского процента (0 < r < 1).

Мы приведем пример построения динамической модели для простого случая, когда все множество производственных процессов может быть разбито на два подмножества:

S множество краткосрочных процессов;

L множество долгосрочных процессов, результаты которых появляются на второй год.

Модель позволяет найти оптимальное решение для исходного года, но с учетом зависимости результатов от времени изготовления изделий:

$$\sum_{j\in S} c_j z_j + \sum_{j\in L} \frac{c_j}{1+r} z_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le b_i \quad (i = 1, \ldots, m_1)$$

$$p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le K_i \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=m_1+1}^{m} K_i \le K$$

$$z_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, n); \quad K_i \ge 0 \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m).$$

Анализ представленной модели при различных вариантах изменения цен на продукцию (c_j), цен на покупные ресурсы (p_i), а также ставки банковского процента (r) позволяет выбрать наиболее удачную программу в меняющихся условиях рынка

Большой интерес представляют производственные объекты, деятельность которых основана на самофинансировании.

Это означает, что возможность приобретения производственных ресурсов в основном зависит от того, насколько успешной была хозяйственная деятельность предприятия в предыдущие периоды. Таким образом модель, представляющая поведение предприятия, по существу должна быть динамической. Оставаясь в рамках линейных моделей, рассмотрим следующую простую динамическую оптимизационную модель

$$f_t = \sum_{i=1}^{n} c_j^t z_j^t \to \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t z_j^t \le b_i^t \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$z_j^t \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, m),$$

где запасы ресурсов b_i^t в каждый п ериод (год) t определяются

при помощи параметров $\beta_i \ (i = 1, \ldots, m)$ как доли оптимального выпуска продукции в предыдущем периоде

$$b_i^t = \beta_i \hat{f}_{t-1} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Используя соотношения, вытекающие из теории двойственности, имеем

$$\hat{f}_t = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \hat{u}_i^t \right) \hat{f}_{t-1}.$$

Таким образом получаем, что темп роста производства продукции на подобном хозрасчетном предприятии определяется величиной

$$\lambda^t = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \hat{u}_i^t.$$

Поскольку величины оптимальных оценок обусловливаются в основном технологическими коэффициентами и ценами на продукцию, то определение наилучшего темпа роста λ^t может быть сделано путем рационального выбора параметров β_i, которыми в значительной мере может распоряжаться само предприятие. Из приведенной формулы, в частности, вытекает очевидная зависимость между долей средств, которые необходимо направить на развитие предприятия, и эффективностью использования ресурсов на этом предприятии.

Если эффективность, характеризуемая оптимальными оценками, велика, то высокий темп развития производства обеспечивается и при малых значениях коэффициентов β_i.

Для иллюстрации рассмотрим следующий простой пример. Пусть динамическая модель предприятия имеет вид

$$5z_1 + 6z_2 + 6z_3 \to \max$$

$$3z_1 + 2z_2 + z_3 \le \beta_1 \hat{f}_{t-1}$$

$$z_1 + 3z_2 + 4z_3 \le \beta_2 \hat{f}_{t-1}$$

$$z_1 \ge 0; \quad z_2 \ge 0; \quad z_3 \ge 0.$$

При $\beta_1 = \beta_2$ ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕСУРСОВ РАВНЫ

$$u_1 = \frac{14}{11} = 1{,}273; \quad u_2 = \frac{13}{11} = 1{,}182,$$

следовательно, величина

$$\lambda^t = 1{,}273\beta_1 + 1{,}182\beta_2.$$

Если

$$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}41, \text{ то } \lambda^t = 1{,}006;$$
$$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}42, \text{ то } \lambda^t = 1{,}031;$$
$$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}44, \text{ то } \lambda^t = 1{,}080;$$
$$\beta_1 = \beta_2 = 0{,}45, \text{ то } \lambda^t = 1{,}105.$$

Таким образом, в данном случае достаточно высокий темп роста производства (около 8—10% в год) может быть достигнут лишь при условии отчисления на развитие предприятия примерно 90% выручки. Подобные расчеты могут быть положены в основу выбора системы экономических нормативов для групп однородных предприятий и отраслей промышленности.

МОДЕЛИ МОГУТ СЛУЖИТЬ ОСНОВОЙ РАСЧЕТОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ (ФИРМ). ОДНАКО ВО МНОГИХ СЛУЧАЯХ ОБЪЕКТ ТАКОГО ТИПА СЛЕДУЕТ РАССМАТРИВАТЬ КАК СОСТАВНУЮ ЧАСТЬ БОЛЕЕ СЛОЖНОЙ ОТРАСЛЕВОЙ, РЕГИОНАЛЬНОЙ ИЛИ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ.

В ТАКОЙ ОБСТАНОВКЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ АВТОНОМНЫЕ МОДЕЛИ НЕ ОТРАЖАЮТ МНОГИХ ТРЕБОВАНИЙ, КОТОРЫЕ СЛОЖНАЯ СИСТЕМА (ЕЕ РЕГУЛИРУЮЩИЙ ЦЕНТР) ПРЕДЪЯВЛЯЕТ К ПРЕДПРИЯТИЮ КАК ЭЛЕМЕНТУ СВОЕЙ ПОДСИСТЕМЫ. НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫМ СПОСОБОМ ВЫРАЖЕНИЯ ТАКОЙ «ВЕРТИКАЛЬНОЙ» СВЯЗИ ОКАЗЫВАЕТСЯ ФОРМУЛИРОВКА СПЕЦИАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ВИДАМ ИЛИ ГРУППАМ ИЗДЕЛИЙ В ФОРМЕ ЗАКАЗА (КОНТРАКТА), ОБЯЗАТЕЛЬНОГО ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ НА ДАННОМ ПРЕДПРИЯТИИ.

РАЗРАБАТЫВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ В ЭТИХ УСЛОВИЯХ, ПО-ПРЕЖНЕМУ ИСХОДЯТ ИЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j ,$$

максимизация которой соответствует хозяйственным интересам рассматриваемого объекта.

ГРУППА ОГРАНИЧЕНИЙ, В УСЛОВИЯХ ВЫПОЛНЕНИЯ КОТОРЫХ ПРОИСХОДИТ ОПТИМИЗАЦИЯ, СОСТОИТ ИЗ ЧЕТЫРЕХ ГЛАВНЫХ ПОДГРУПП:

а) условия, отражающие ограниченность трудовых, материальных и энергетических ресурсов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m_1).$$

Здесь через m_1 обозначено число строго лимитированных видов ресурсов, запасы которых не могут быть увеличены в течение расчетного периода;

Б) УСЛОВИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НЕОБХОДИМОСТЬЮ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРАКТОВ ЦЕНТРА ПО ГРУППАМ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ИЗДЕЛИЙ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \geq S_i \quad (i = m_1 + 1, \ldots, m).$$

Здесь величина m определяется количеством таких «заказных» групп изделий;

в) условия, выражающие ограниченность производственной мощности по выпуску изделия определенного вида, т.е. «локальные» ограничения типа

$$z_j \le d_j \quad (j \in N_1 \subset N).$$

Здесь $N = \{1, \ldots, n\}$,

число элементов множества N_1 определяется количеством изделий, по которым лимитирована производственная мощность;

г) условия, определяемые заказом на конкретные, строго указанные виды продукции (изделия):

$$z_j \ge l_j \quad (j \in N_2 \subset N).$$

Количество номеров и сами номера определяются спецификой заказа (контракта) центра.

Путем соединения перечисленных соотношений и требовании максимизации целевой функции / получается линейно-программная модель для определения оптимального плана производства предприятия, действующего в условиях обязательного выполнения заказа. Вообще говоря, ограничения этой модели являются противоречивыми и система условий может оказаться несовместимой. Возникающая в этом случае задача максимизации целевой функции называется несобственной. Решение несобственных задач линейного программирования осуществляется специальными методами, основанными либо на коррекции системы ограничений, либо на применении методов регуляризации.

Причиной возникновения несовместимости может служить либо несогласованность заказа, с одной стороны, и ресурсных и мощностных ограничений — с другой; либо определенные неточности в задании основных технологических способов и ограничительных условий. Мы будем исходить из того, что эти недостатки устранены специальными приемами и в дальнейшем изложении изучается случай, когда система ограничений совместна и поставленная задача имеет оптимальное решение.

В целях проведения дальнейшего экономико-математического анализа обозначим двойственные переменные, соответствующие ограничениям подгруппы (а) через

$u_i \quad (i = 1, \ldots, m_1);$

ограничениям подгруппы (б) через

ограничениям подгруппы (в) через v_i , $(i = m_1 + 1, \ldots, m);$

для подгруппы (г) через $u'_j,$

В указанных обозначениях функционал двойственной задачи имеет вид

$$g = \sum_{i=1}^{m_1} b_i y_i - \sum_{i=m_1+1}^{m} s_i v_i + \sum_{j \in N_1} d_j u'_j - \sum_{j \in N_2} l_j v'_j .$$

В силу равенства оптимальных значений прямой и двойственной задачи имеем, что максимальная величина целевой функции $\hat{f}$ может быть представлена при помощи соотношения

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{m_1} b_i \hat{u}_i - \sum_{i=m_1+1}^{m} s_i \hat{v}_i + \sum_{j \in N_1} d_j \hat{u}'_j - \sum_{j \in N_2} l_j \hat{v}'_j .$$

Здесь через $\hat{u}_i,\ \hat{v}_i,\ \hat{u}'_j,\ \hat{v}'_j$

обозначены компоненты оптимального решения двойственной задачи.

Из приведенного соотношения видно, что каждая оптимальная оценка $\hat{u}_i, \hat{u}'_i$

сохраняет свой смысл приростной продуктивности ресурса (в случае оценки $\hat{u}'_i$ производственной мощности).
Величина такой оценки показывает, что при увеличении ресурса (мощности) на дополнительную «малую единицу» максимальное значение целевой функции увеличится на $\hat{u}_i$, (соответственно $\hat{u}'_i$).

Из той же формулы вытекает, что оптимальная оценка $\hat{v}_i$
может быть интерпретирована как мера потери в целевой функции, которая возникает, если заказ по i-той группе изделий будет увеличен.

Аналогичный смысл следует придать оптимальной оценке $\hat{v}'_j$

относительно «индивидуального» заказа изделия с номером j.

Таким образом, если среди указанных оптимальных оценок имеются отличные от нуля, то возникает возможность количественного измерения несоответствия между заданиями центра и хозяйственными интересами производственной единицы. Полученная информация может быть использована для согласования интересов верхнего и нижнего звеньев при помощи специальных мер, включающих в себя изменения цен изделий, подбор уточненных значений экономических нормативов, компенсационных платежей.

4. Если в ходе производственного процесса становятся возможными значительные изменения интенсивностей технологических способов, то предположение о пропорциональности затрат ресурсов и результатов хозяйственной деятельности является, вообще говоря, неверным.

Тем самым нарушается одна из важнейших предпосылок построения линейной модели и становится необходимым использовать более сложные, нелинейные модели производства. При этом обычно сохраняется смысл понятия интенсивности производственного способа и ее содержательная интерпретация, что позволяет использовать ее в качестве промежуточного аргумента в зависимости между затратами и результатами.

Наиболее естественным обобщением линейной модели является выпуклая модель производства, в которой множество допустимых интенсивностей описано при помощи ограничений вида:

$$g_i(z_i, \ldots, z_n) \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

С вогнутыми (выпуклыми вниз) функциями $g_i(z)$.

Применяется следующее скалярное правило выбора наилучшего решения

$$f(z) \doteq f(z_1, \ldots, z_n) \to \max,$$

где f — выпуклая вверх функция своих аргументов, которая обычно имеет смысл выпуска товарной продукции.

Свойство выпуклости функции f(z), а также вогнутости функций $g_i/(z)$ связано с представлением об убывающей эффективности производства, т.е. о снижении предельных норм выпуска $\partial f/\partial z_j$

и увеличении предельных норм затрат $(\partial g_i/\partial z_j)$

при расширении масштабов производства, т.е. интенсивностей z_i

Напомним, что в линейных моделях производства эти нормы считаются постоянными, т.е. не зависящими от масштабов производства.

Аналогом двойственных оценок линейной модели в рассматриваемом случае служат оптимальные значения множителей Лагранжа в задаче нахождения седловой точки функции

$$L(z, u) = f(z) + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(b_i - g_i(z)\right).$$

Точка $(\tilde{z}, \tilde{u})$ называется седловой точкой функции L в положительном ортанте (m + n)-мерного пространства переменных

$$z_j \; (j = 1, \ldots, n); \; u_i \; (i = 1, \ldots, m),$$

ЕСЛИ ВЫПОЛНЕНЫ УСЛОВИЯ

$$L(z, \tilde{u}) \le L(\tilde{z}, \tilde{u}) \le L(\tilde{z}, u)$$

для всех

$$z \ge 0; \; u \ge 0.$$

Иными словами в точке $(\tilde{z}, \tilde{u})$ достигается максимальное значение функции Лагранжа по группе переменных интенсивностей и минимальное по множителям Лагранжа. Для выпуклой задачи оптимизации, дополненной условием телесности, седловая точка функции Лагранжа всегда существует.

При этом ее первая компонента $\tilde{z}$
является решением задачи оптимизации,

а вторая компонента $\tilde{u}$

дает оптимальный набор множителей Лагранжа, которые используются для параметрического анализа оптимальных планов.