Основы теории графов

Сетевые методы позволяют воспроизвести и проанализировать структуру экономического процесса или явления.

Научной основой сетевых методов является теория графов.

Граф состоит из множества точек, называемых вершинами, и множества отрезков, соединяющих все или некоторые вершины и называемых дугами.

Граф задается множеством вершин *X* и дуг *U*

$$G=(X,U)$$

Множество вершин и дуг определяют топологию (структуру) графа.

Неориентированным графом **называется пара конечных множеств *(V,E)*, где *V* -произвольное множество объектов, называемых *вершинами,***

и *E* $\subseteq$ *{{i,j} | i,j* $\subseteq$ *V}* -множество неупорядоченных пар вершин,

где {,i *j}* $\subseteq$ *E* называется *ребром.*

Ориентированным графом (орграфом) **называется пара конечных множеств *(V,A),* где *V* - множество вершин, и**

A $\subseteq$ ***{(i,j) | i,j*** $\subseteq$ ***V}*** **- множество упорядоченных пар вершин, где *(i,j)*** $\subseteq$ ***A*** **называется *дугой.***

Мультиграфом (ориентированным мультиграфом) **называется граф с кратными ребрами (кратными дугами).**

Говорят следующее.

Вершина i является *начальной,* а вершина *j - конечной* вершиной дуги (i, *j).*

При этом i и *j - смежные вершины,* а дуга *(i,j) инцидентна* вершинам i и *j.*

Такая же терминология используется для неориентированных графов - смежные вершины и инцидентные ребра.

Дуга *{i,j) выходит из i* и *входит в j.*

Если *{i,j)* -дуга, то i называется *непосредственным предшественником j,* а j - *непосредственным последователем i.*

Количество дуг, входящих в вершину i называется *степенью захода* этой вершины, а количество дуг, выходящих из вершины i называется *степенью исхода* этой вершины.

В неориентированном графе вершины i и *j* называются *концами* ребра *{i,j}*-

Количество ребер, инцидентных вершине i, называется *степенью* вершины i.

Маршрутом в неориентированном графе $G = (V, E)$ называется такая последовательность вершин $W = (v_o, v_1, \ldots , v_k)$, $к > 0$, что $(v_{i-i,}, v_i) \subseteq E$, $i = 1,\ldots,k$.

Граф называется *связным,* если существует маршрут, связывающий любые его две вершины.

Говорят, что маршрут *W* связывает вершины v_o и v_k, а вершины $v_1,\ldots ,v_{k-i}$ являются *внутренними* вершинами этого маршрута.

Количество вершин маршрута называется его *длиной.*

Маршрут *W* называется *замкнутым,* если $к > 0$ и $v_k = v_o$.

Маршрут называется *цепью,* если в нем нет повторяющихся вершин.

Замкнутый маршрут, в котором никакие вершины, кроме первой и последней, не повторяются, называется *циклом.*

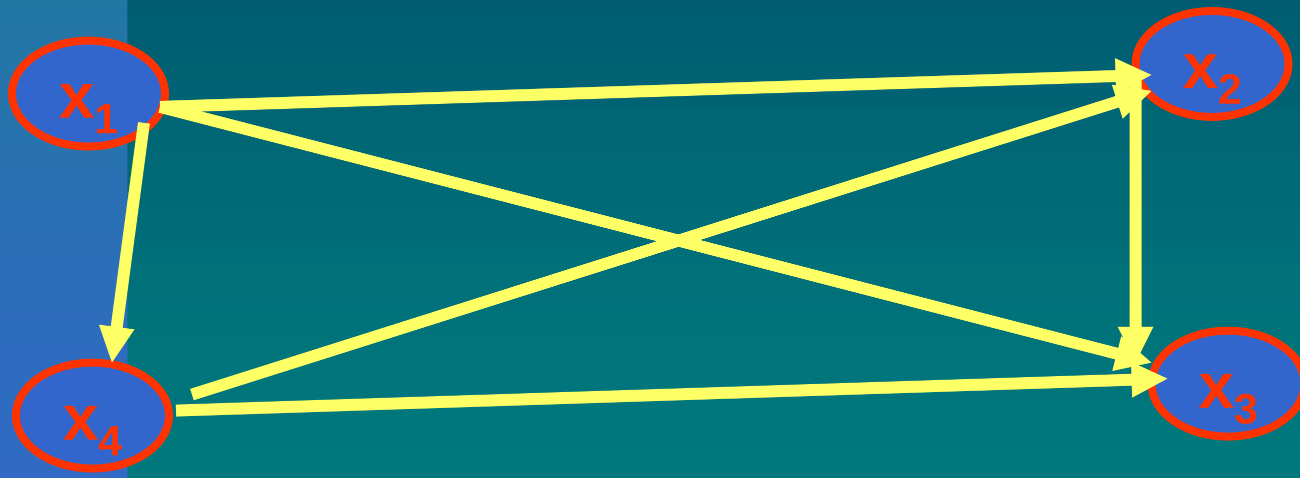
Цикл, который включает все вершины графа, называется *гамильтоновым.*

Граф, который содержит гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым.*

Замкнутый маршрут, который включает каждое ребро графа ровно один раз, называется *эйлеровым маршрутом,* а граф, который содержит такой маршрут, называется *эйлеровым графом*

В экономике и менеджменте, как правило, используются *ориентированные графы*, т.е. такие, у которых указано направление каждой дуги.

Граф называется *полным*, если любые две вершины соединяются дугой

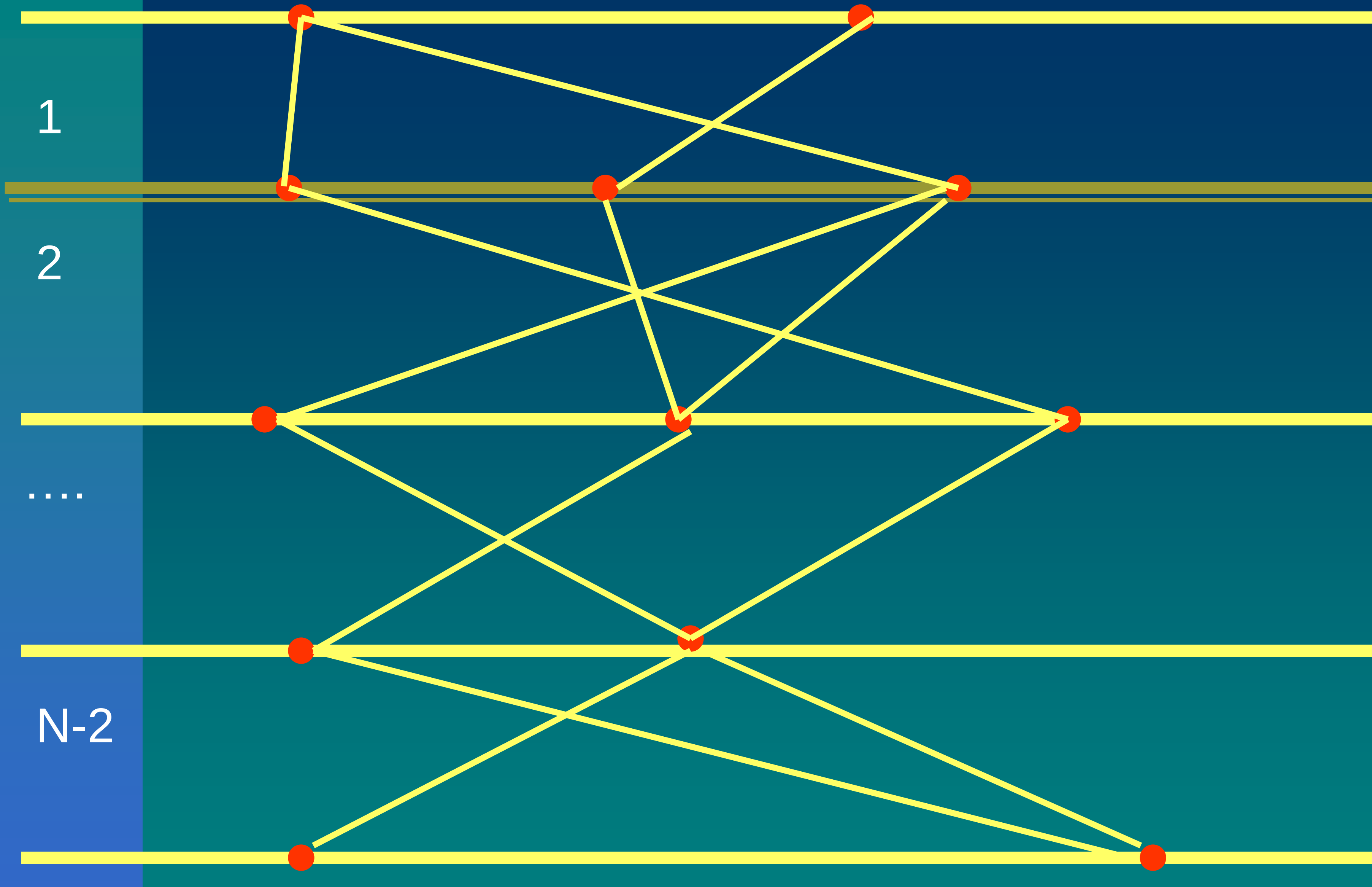


Если эти условия не выполняются, то граф называется *неполным*.

Смежные вершины — это вершины, соединенные дугой. В полном графе все вершины смежные.

Дуги называются *смежными*, если они имеют общую концевую вершину.

Последовательный (многоуровневый) граф имеет несколько уровней (k=1, 2, …, n); дугами соединяются вершины смежных уровней


1
2
....
N-2
N

Считается, что на вершинах графа реализуется числовая функция, если каждой вершине ставится в соответствие число .

$$\lambda_i = \varphi(x_i) \qquad (x_i, x_j) \in U$$

Говорят, что на дугах графа реализуется числовая функция, если каждой дуге ставится в соответствие число l_{ij}.

Путь на графе G — это такая последовательность дуг , в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей. Путь можно обозначить как дугами, так и вершинами, через которые он проходит

$$\mu_u = (u_1, \ldots, u_k)$$

Каждый граф содержит множество M путей из начальной вершины X_1 в конечную X_m.

Длина пути через дуги — это суммарная длина дуг данного пути

Длина пути через вершины — это сумма числовых оценок вершин, через которые проходит данный путь

.

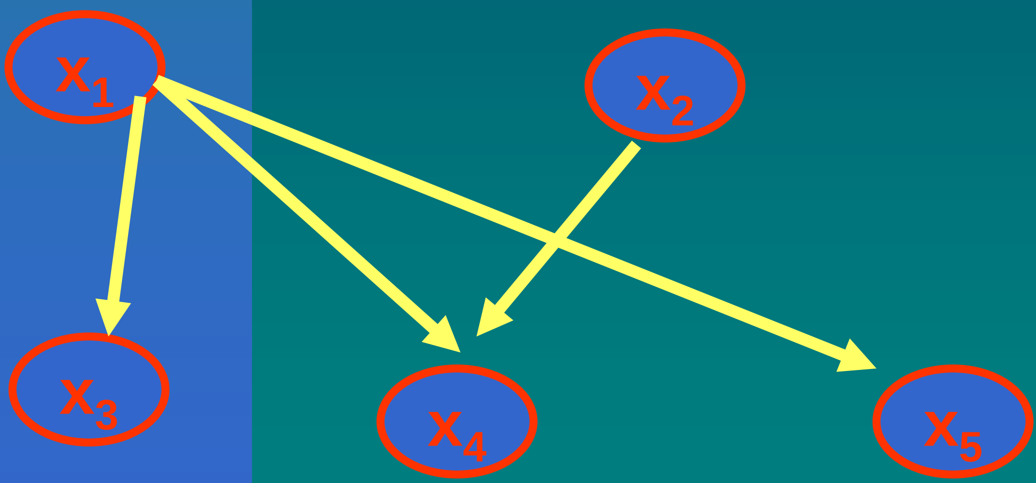
$$l(\mu) = l_{12} + \ldots + l_{(n-1)n}$$

Минимальный (максимальный) путь через дуги графа — это путь с минимальным (максимальным) значением .

Аналогично — является минимальным путем через вершины графа

$$\lambda(\mu) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m$$

Топология графа может быть представлена в виде булевой матрицы, т.е. такой двумерной матрицы, элементами которой являются числа 0 и 1



	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1
x_2	0	1	0

Оптимизационные задачи на графах

Задача определения кратчайшего пути на графе (алгоритм Форда)

Рассмотрим ориентированный неполный граф, на дугах которого реализуется числовая функция, т.е. всем дугам приписаны положительные значения l_{ij}

Необходимо найти кратчайший путь из начальной вершины в конечную .

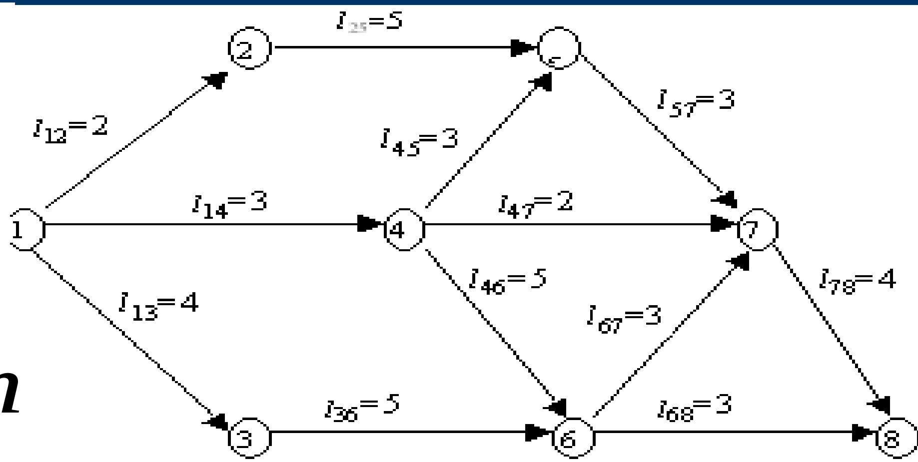
Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$G = \{X, U\}$$

$$\left.\begin{matrix} x_o \le x_i \\ x_i \le x_m \end{matrix}\right\}$$

$$0 < i < m$$

$$x_i \in X$$



Ориентированный неполный граф, на дугах которого реализуется числовая функция

$$l(\mu) = \sum_{j=U_o}^{U_n} l(U_j) \to min$$

$$l(U_j) \ge 0$$

В приведенной математической модели выражения означают:

– целевая функция выражает минимизируемую сумму длин дуг для путей графа из начальной вершины в конечную;

– множество путей на графе ограничивается его топологией (т.е. множеством вершин и дуг);

– ограничение, показывающее, что последовательность вершин упорядочена, граф ориентированный;

– условие неотрицательности длины дуги.

Последовательность решения задачи следующая.

1. Первой вершине присваивается значение $\lambda_1 = 0$
2. Значения последующих вершин рассчитываются по формуле

$$\lambda_j = \min_{U_{ij}} \left\{ \lambda_i + l_{ij} \right\}$$

В соответствии с приведенной формулой из нескольких значений выбирается минимальное и присваивается вершине *j*, при этом дуга, которая обеспечила меньшее значение , запоминается (отмечается на графе).

Значение конечной вершины соответствует величине минимального пути на графе, а последовательность дуг, установленная при движении от конечной вершины к начальной по отмеченным дугам, является искомым кратчайшим путем на графе.

$$G = \{X, U\}$$

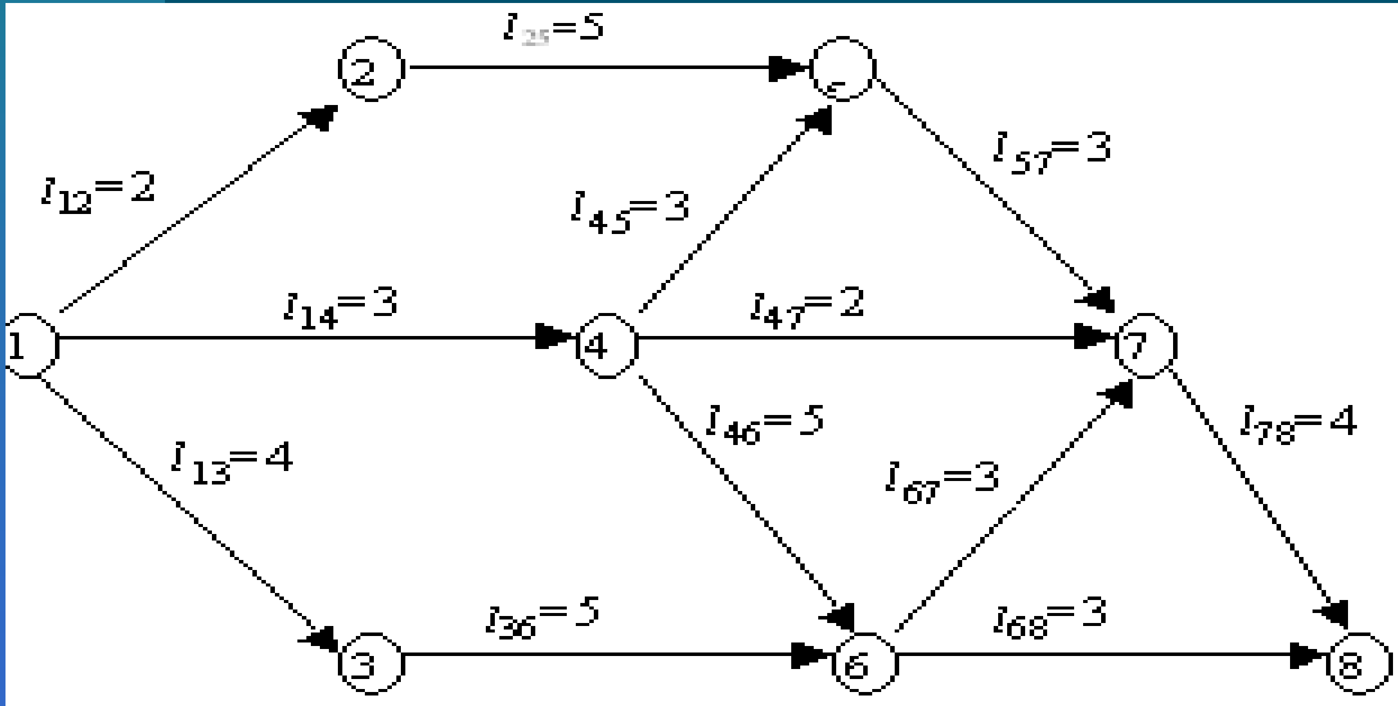
$$l(\mu) = \sum_{j=U_o}^{U_n} l(U_j) \to min$$

$$\left.\begin{aligned} x_o &\le x_i \\ x_i &\le x_m \end{aligned}\right\}$$

$$0 < i < m$$

$$x_i \in X$$

$$l(U_j) \ge 0$$



Ориентированный неполный граф, на дугах которого реализуется числовая функция

Для задачи, представленной на рисунке, расчеты кратчайшего пути выполняются в следующей последовательности 1. $\lambda_1 = 0$

2. $\lambda_2 = \lambda_1 + l_{12} = 0 + 2 = 2$ (отмечается дуга U_{12})

3. $\lambda_3 = \lambda_1 + l_{13} = 0 + 4 = 4$ (отмечается дуга U_{13})

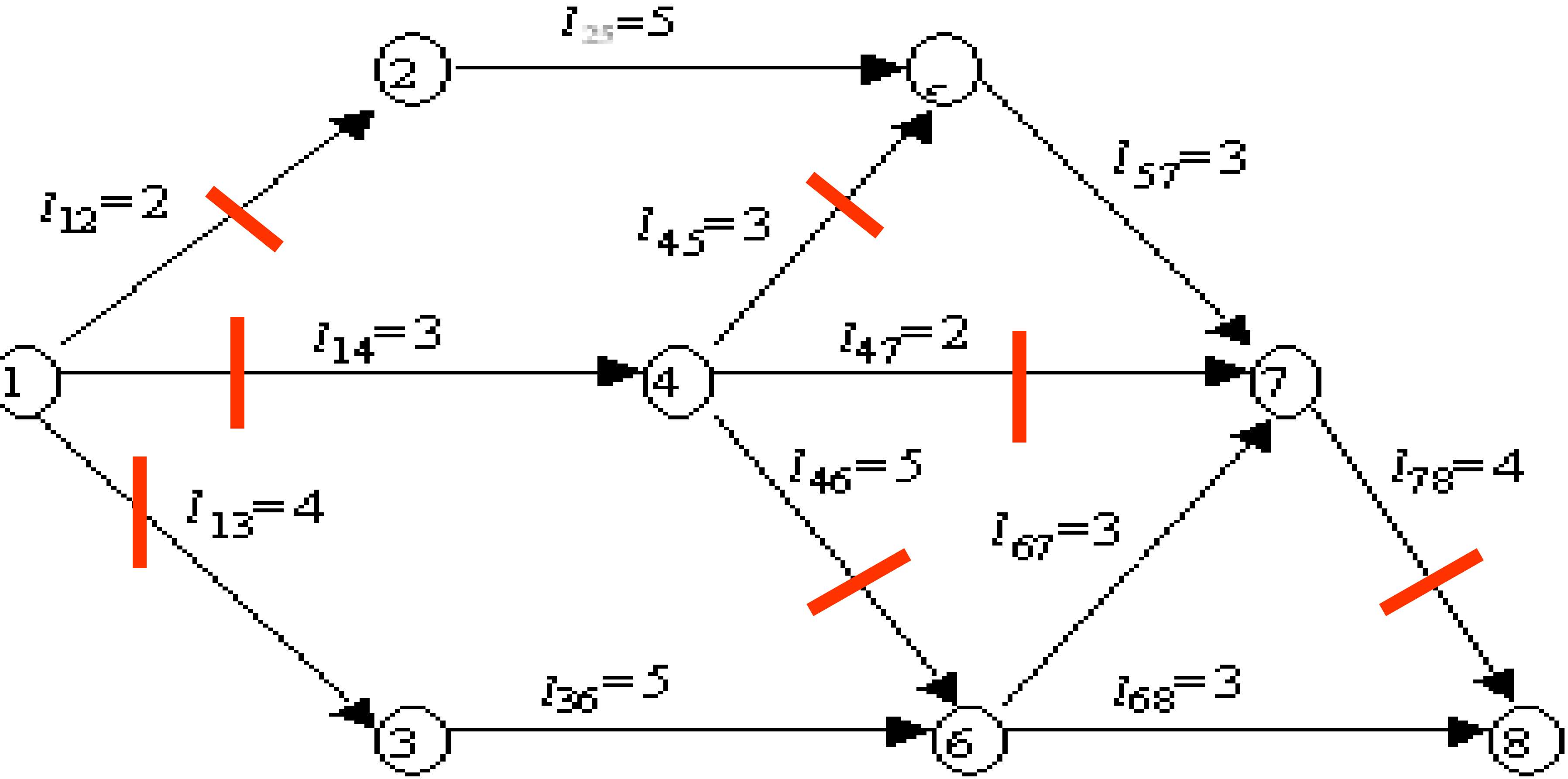
4. $\lambda_4 = \lambda_1 + l_{14} = 0 + 3 = 3$ (отмечается дуга U_{14})

5. $\lambda_5 = min\begin{Bmatrix} \lambda_2 + l_{25} \\ \lambda_4 + l_{45} \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 2+5 \\ 3+3 \end{Bmatrix} = 6$ (отмечается дуга U_{45})

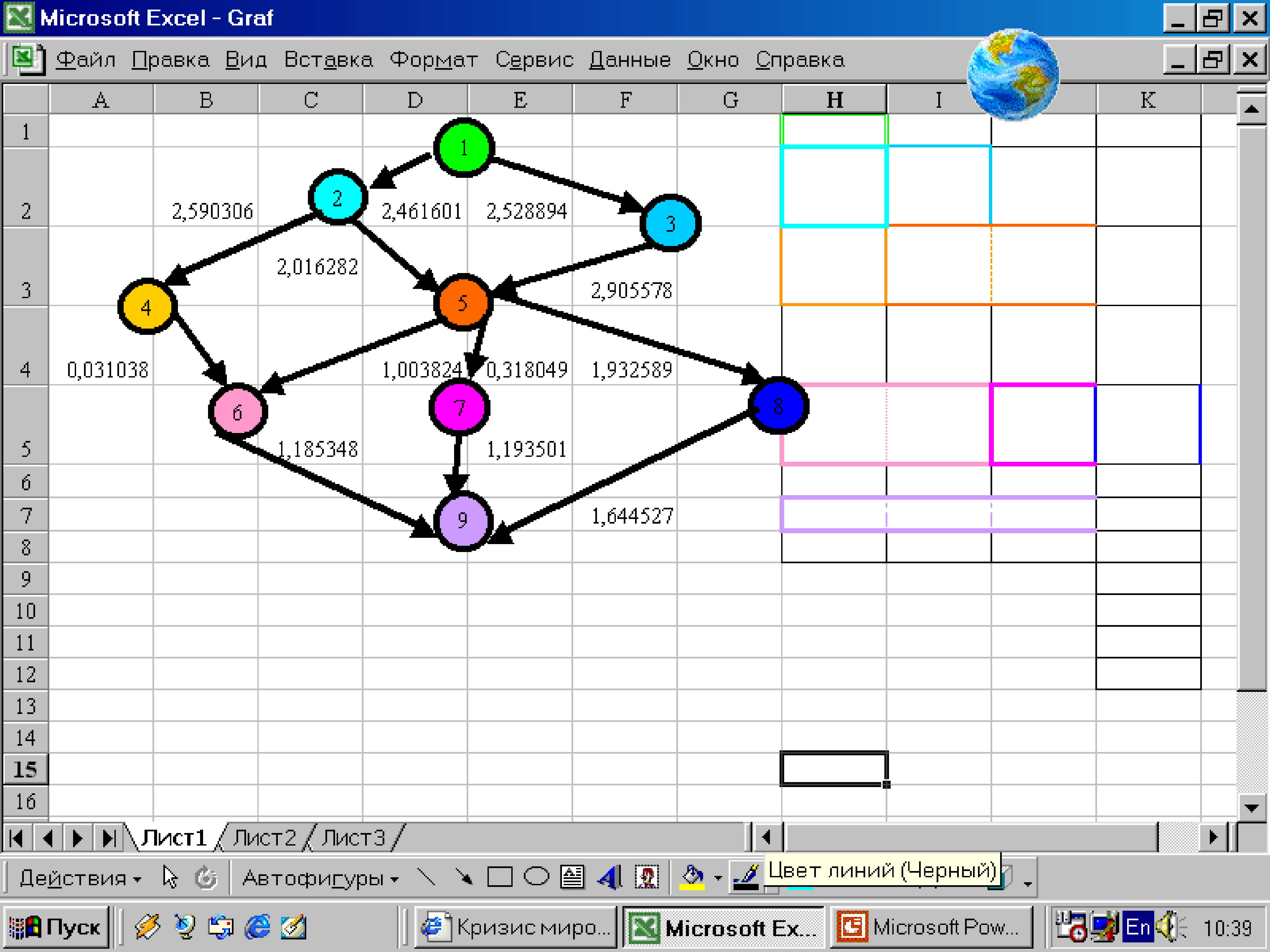
6. $\lambda_6 = min\begin{Bmatrix} \lambda_4 + l_{46} \\ \lambda_3 + l_{36} \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 3+5 \\ 4+5 \end{Bmatrix} = 8$ (отмечается дуга U_{46})

7. $\lambda_7 = min\begin{Bmatrix} \lambda_5 + l_{57} \\ \lambda_4 + l_{47} \\ \lambda_6 + l_{67} \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 6+3 \\ 3+2 \\ 8+3 \end{Bmatrix} = 5$ (отмечается дуга U_{47})

8. $\lambda_8 = min\begin{Bmatrix} \lambda_7 + l_{78} \\ \lambda_6 + l_{68} \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 5+4 \\ 8+3 \end{Bmatrix} = 9$ (отмечается дуга U_{78})



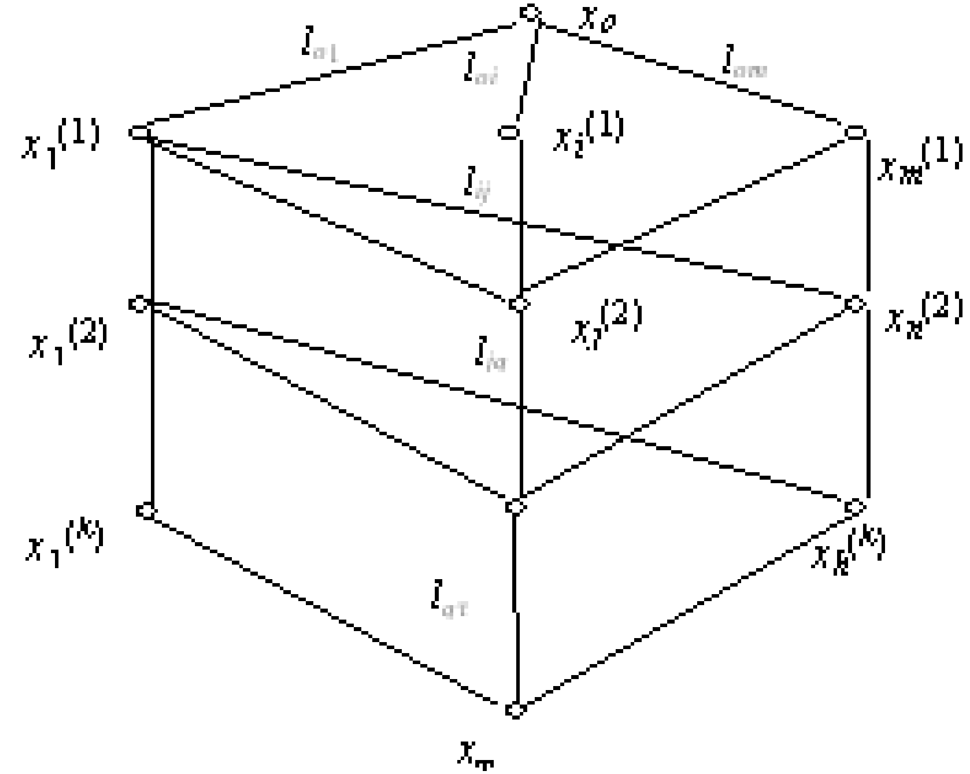
Ориентированный неполный граф, на дугах которого реализуется числовая функция



Microsoft Excel - Graf
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка
A B C D E F G H I K
1 2 3 4 5 6 7 8 9
2,590306
2,461601
2,528894
2,016282
2,905578
0,031038
1,003824
0,318049
1,932589
1,185348
1,193501
1,644527
Лист1 Лист2 Лист3
Действия Автофигуры
Цвет линий (Черный)
Пуск
Кризис миро...
Microsoft Ex...
Microsoft Pow...
En
10:39

Кратчайший путь на последовательном графе, на дугах которого реализуется числовая функция

Последовательный граф задан множеством вершин, расположенных на разных уровнях, и множеством дуг, соединяющих вершины смежных уровней



— Последовательный граф

Числовая функция реализуется на дугах графа: известна длина каждой дуги графа.

Необходимо найти кратчайший путь на графе из начальной вершины $x_о$ в конечную $x_т$.

Задача решается методом оценки вершин каждого уровня.

1-й этап. Оценка вершин первого уровня.

Оценка вершины численно равна длине дуги, входящей в данную вершину.

$$\lambda_i^{(1)} = l_{oi}$$

2-й этап. Оценка вершин второго уровня.

$$\lambda_j^{(2)} = \min_{U_j}\left\{\lambda_i^{(1)} + l_{ij}\right\}$$

к-й этап. Оценка вершин к–го уровня.

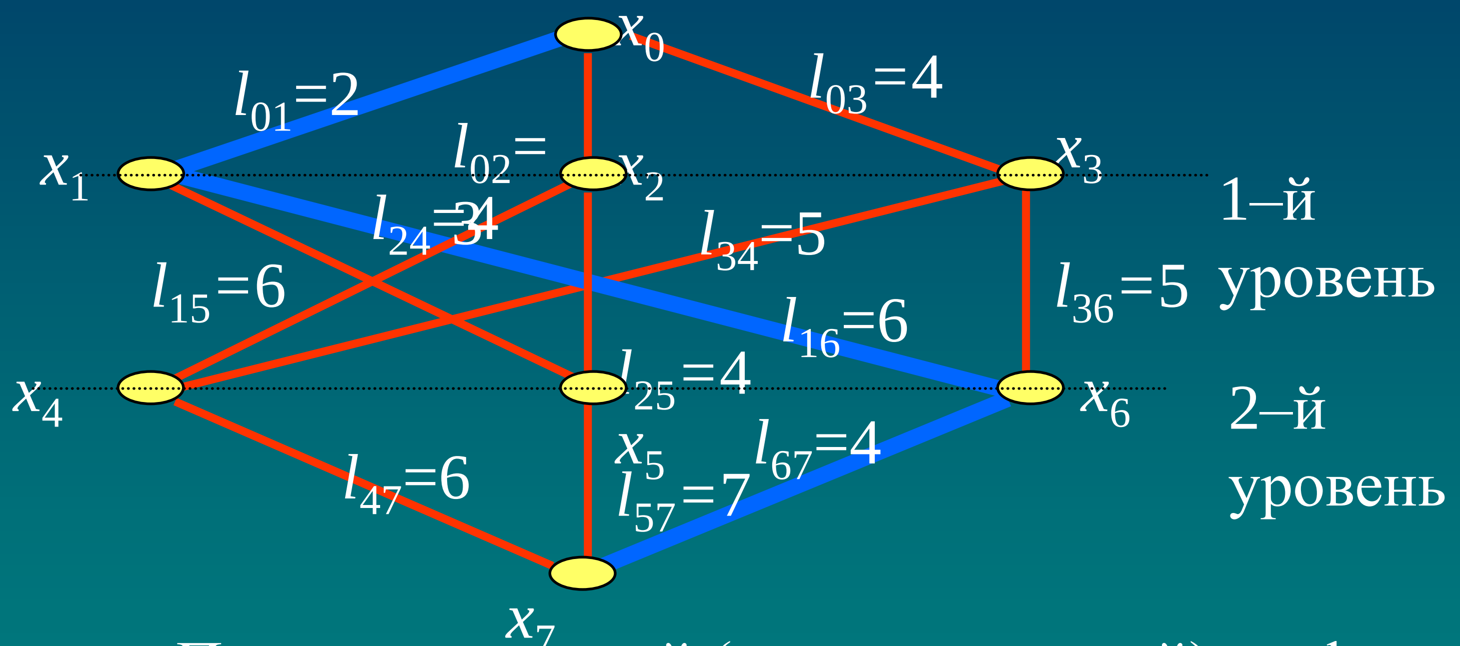
$$\lambda_q^{(к)} = \min_{U_q}\left\{\lambda_p^{(к-1)} + l_{pq}\right\}$$

т-й этап. Оценка конечной вершины $x_т$.

На конечном этапе отмечается дуга, обеспечивающая минимальное значение соответствующей вершины.

Кратчайший путь выделяется в направлении от конечной вершины к начальной в соответствии с отмеченными дугами.

Суммарная длина дуг этого пути численно равна оценке конечной вершины.



Последовательный (многоуровневый) граф (числовая функция реализуется на дугах графа)

1–й этап. Оценка вершин первого уровня:

$$\lambda_1^{(1)} = l_{01} = 2 \qquad \lambda_2^{(1)} = l_{02} = 3 \qquad \lambda_3^{(1)} = l_{03} = 4$$

.Оценка вершин второго уровня:

;

;

$$\lambda_4^{(2)} = min\begin{Bmatrix}\lambda_2^{(1)} + l_{24} \\ \lambda_3^{(1)} + l_{34}\end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix}3+4 \\ 4+5\end{Bmatrix} = 7 \ \left(\text{отмечается дуга } U_{24}\right)$$

$$\lambda_5^{(2)} = min\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(1)} + l_{15} \\ \lambda_2^{(1)} + l_{25}\end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix}2+6 \\ 3+4\end{Bmatrix} = 7 \ \left(\text{отмечается дуга } U_{25}\right)$$

.

$$\lambda_6^{(2)} = min\begin{Bmatrix}\lambda_1^{(1)} + l_{16} \\ \lambda_3^{(1)} + l_{36}\end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix}2+6 \\ 4+5\end{Bmatrix} = 8 \ \left(\text{отмечается дуга } U_{16}\right)$$

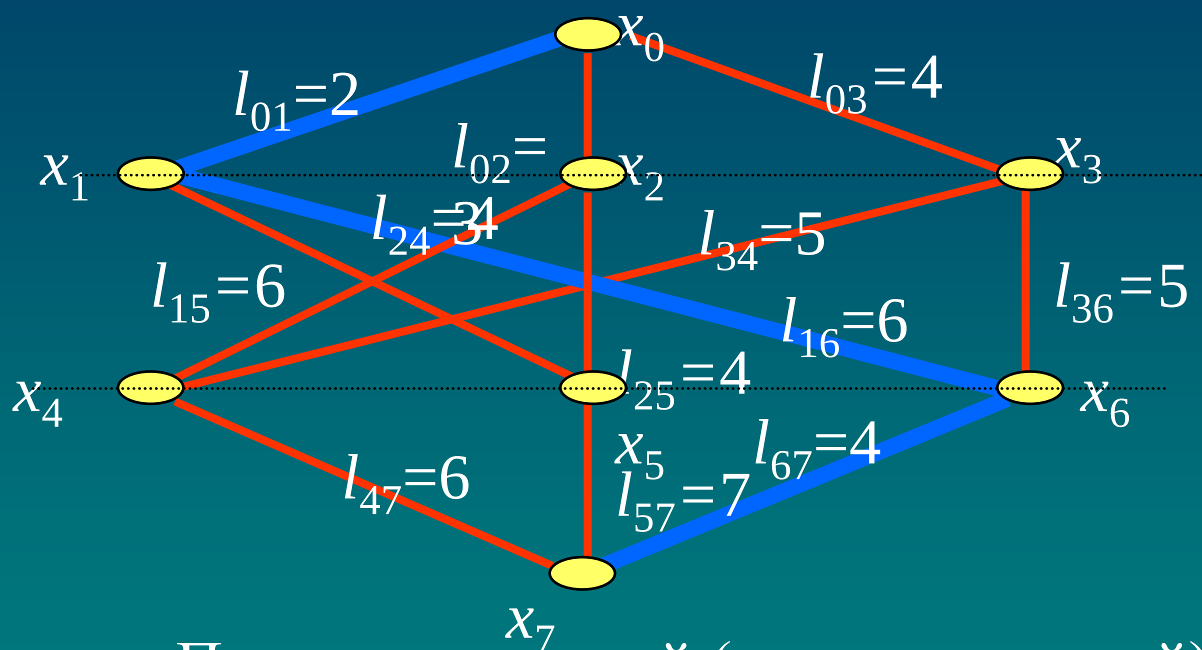
3–й этап.

.

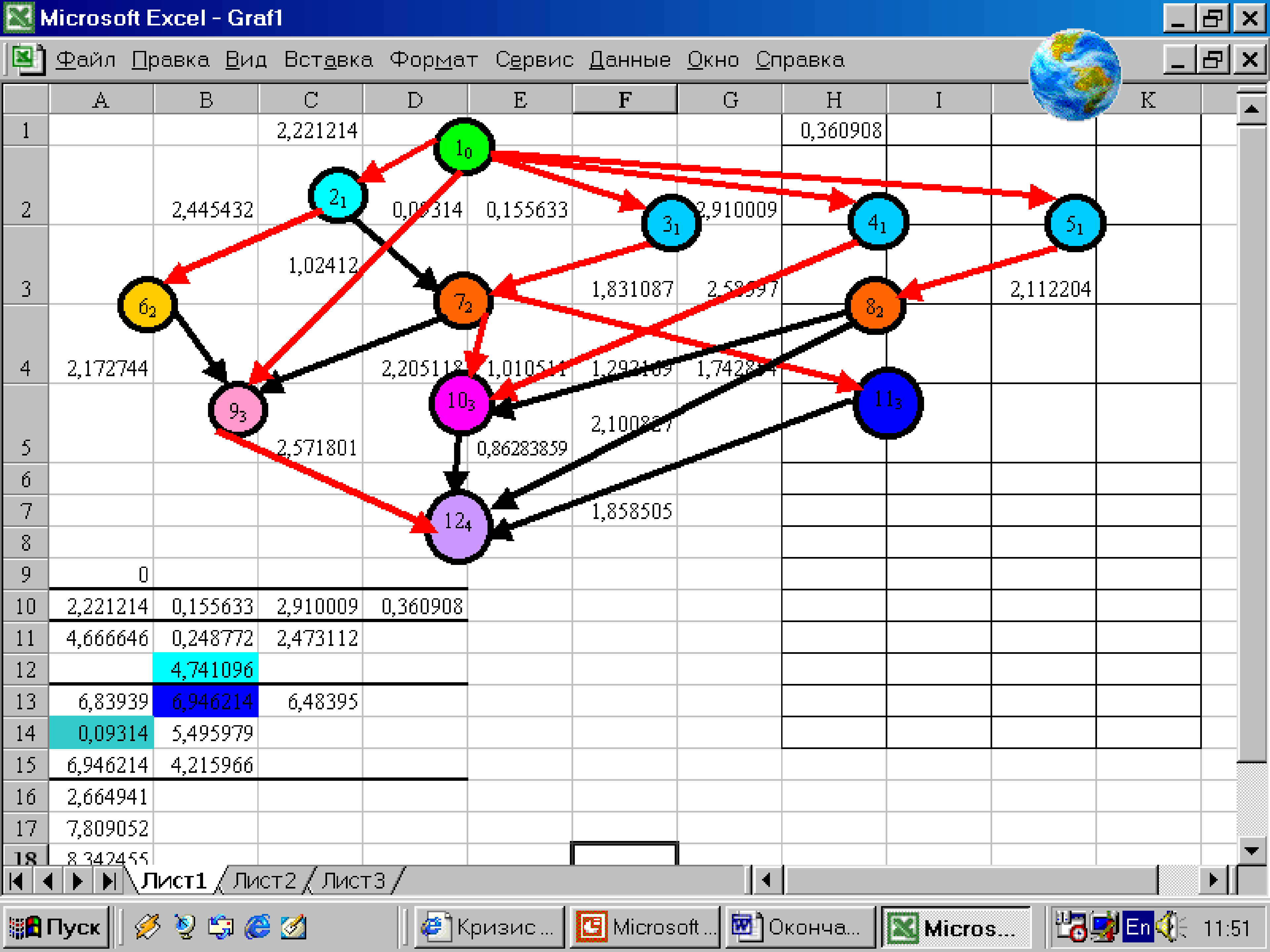
$$\lambda_7^{(3)} = min\begin{Bmatrix}\lambda_4^{(2)} + l_{47} \\ \lambda_5^{(2)} + l_{57} \\ \lambda_6^{(2)} + l_{67}\end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix}7+6 \\ 7+7 \\ 8+4\end{Bmatrix} = 12 \ \left(\text{отмечается дуга } U_{67}\right)$$

Кратчайший путь в соответствии с отмеченными дугами проходит через вершины x_0, x_1, x_6 и x_7.

Длина этого пути численно равна оценке конечной вершины



Последовательный (многоуровневый) граф
(числовая функция реализуется на дугах графа)

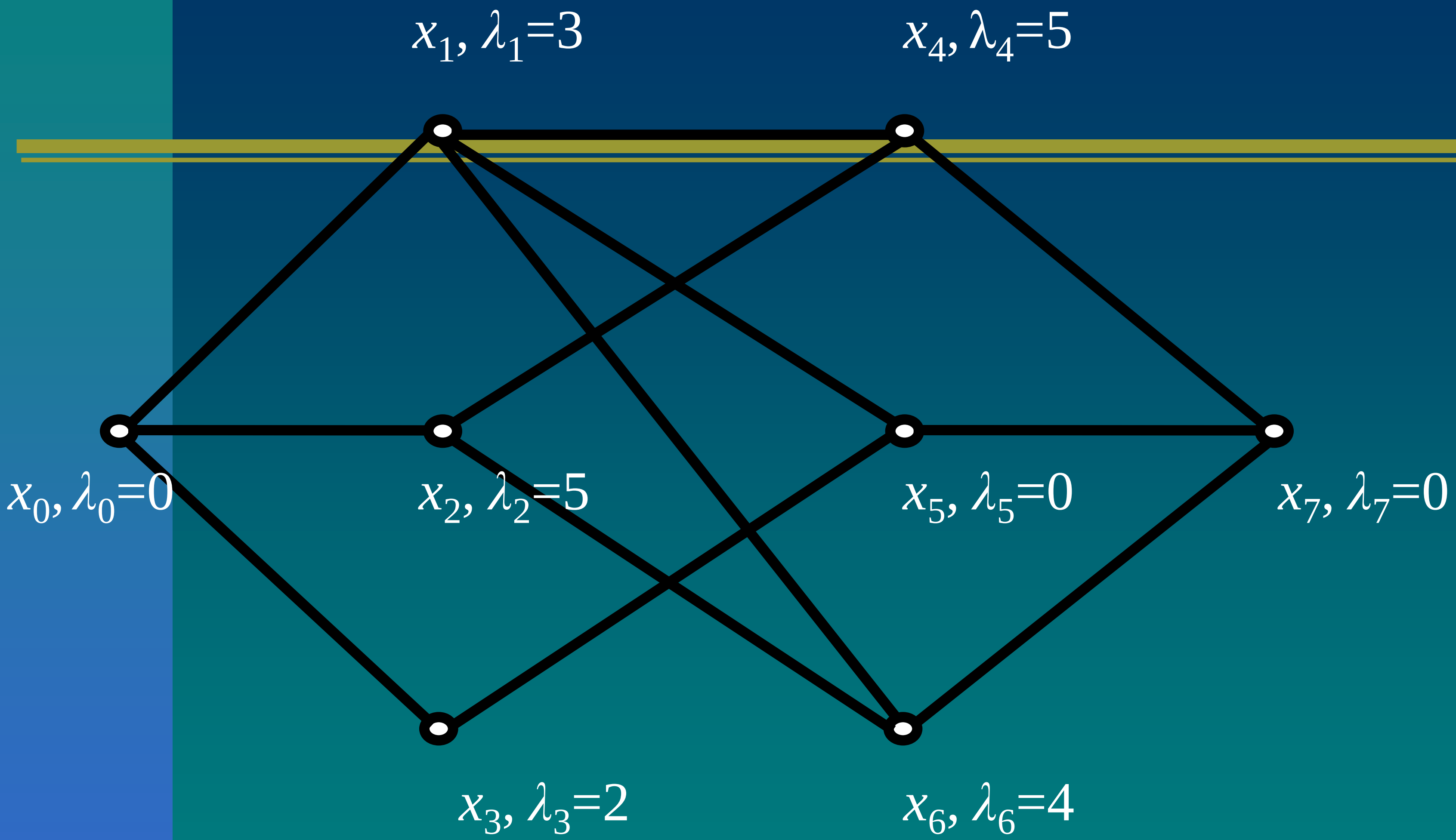

Microsoft Excel - Graf1
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка
A B C D E F G H I K
2,221214
0,360908
2,445432
0,155633
2,910009
1,02412
1,831087
2,112204
2,172744
0,86283859
2,571801
1,858505
1_0
2_1
3_1
4_1
5_1
6_2
7_2
8_2
9_3
10_3
11_3
12_4
0
2,221214 0,155633 2,910009 0,360908
4,666646 0,248772 2,473112
4,741096
6,83939 6,946214 6,48395
0,09314 5,495979
6,946214 4,215966
2,664941
7,809052
Лист1 Лист2 Лист3
Пуск
Кризис ...
Microsoft ...
Оконча...
Micros...
En
11:51

Кратчайший путь на последовательном графе, на вершинах которого реализуется числовая функция

Обозначим номера вершин первого уровня через x_j^1, второго x_j^2, начальную и конечную — соответственно $x_о$ и $x_т$. Оценки этих вершин λ_j^1 , λ_j^2 , $\lambda_о$ и $\lambda_т$

На каждом этапе отмечается дуга, обеспечивающая минимальное значение новой оценки каждой вершины. Кратчайший путь выделяется в направлении от конечной вершины к начальной в соответствии с отмеченными дугами.

Длина кратчайшего пути численно равна новой оценке конечной вершины



Последовательный граф, на вершинах которого реализуется числовая функция

1-й этап. В связи с тем, что , новые оценки вершин первого уровня численно равны старым:

$$\lambda_o = 0 \quad \lambda_1^* = \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2^* = \lambda_2 = 5 \quad \lambda_3^* = \lambda_3 = 2$$

2-й этап. Переоценка вершин второго уровня:

$$\lambda_4^* = min\begin{Bmatrix} \lambda_1^* + \lambda_4 \\ \lambda_2^* + \lambda_4 \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 3+5 \\ 5+5 \end{Bmatrix} = 8 \ (\text{отмечается} \ \ \text{дуга} \, U_{14})$$

.

3-й этап. В связи с тем, что , новая оценка конечной вершины определяется в соответствии с выражением

$$\lambda_5^* = min\begin{Bmatrix} \lambda_1^* + \lambda_5 \\ \lambda_3^* + \lambda_5 \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 3+7 \\ 2+7 \end{Bmatrix} = 9 \ (\text{отмечается} \ \ \text{дуга} \, U_{35})$$

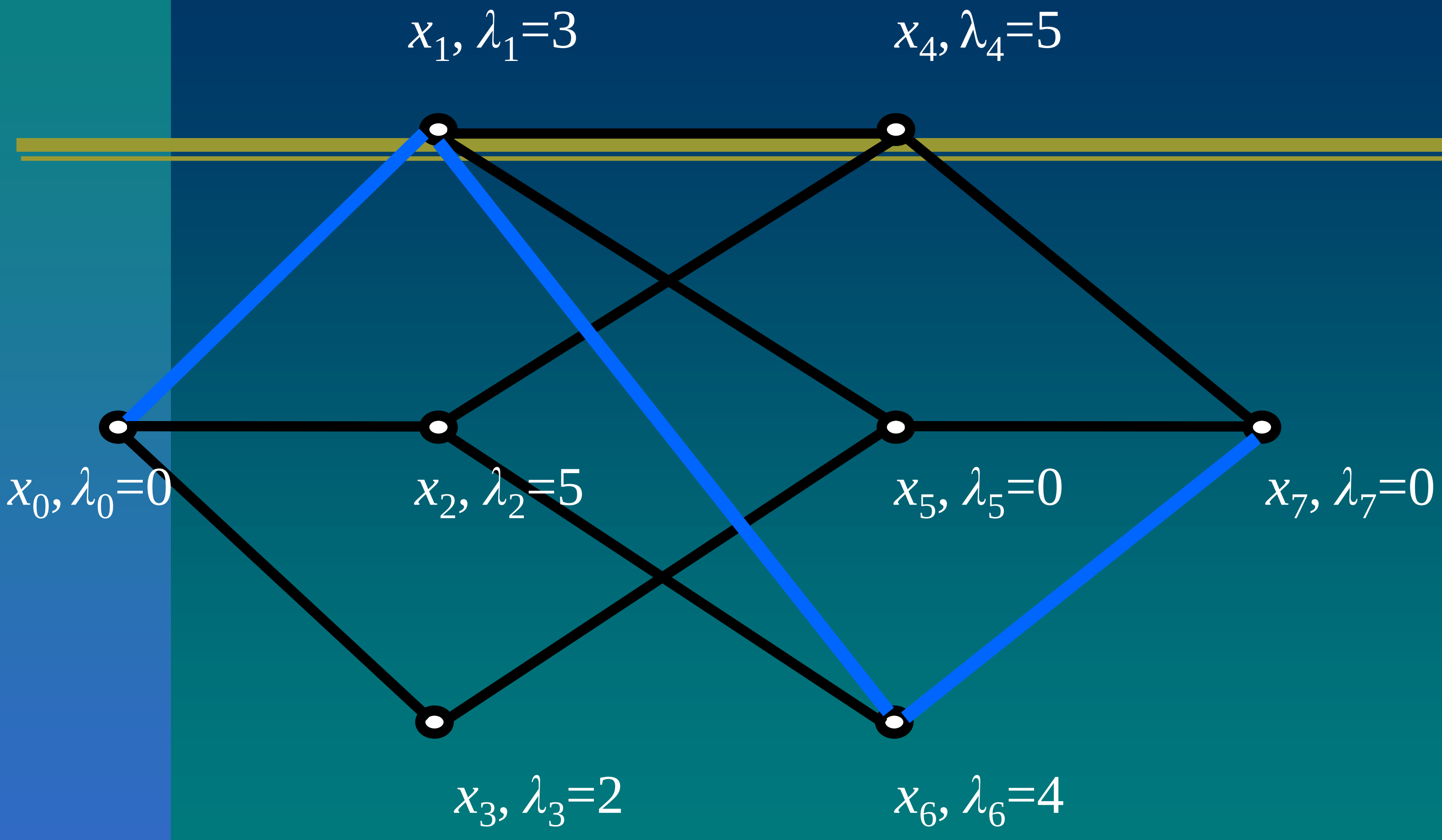
$$\lambda_6^* = min\begin{Bmatrix} \lambda_1^* + \lambda_6 \\ \lambda_2^* + \lambda_6 \end{Bmatrix} = min\begin{Bmatrix} 3+4 \\ 5+4 \end{Bmatrix} = 7 \ (\text{отмечается} \ \ \text{дуга} \, U_{16})$$

Минимальное значение

определяет дуга U_{67}.

$$\lambda_7^* = min\left\{\lambda_4^*; \lambda_5^*; \lambda_6^*\right\} = min\{8;9;7\} = 7$$

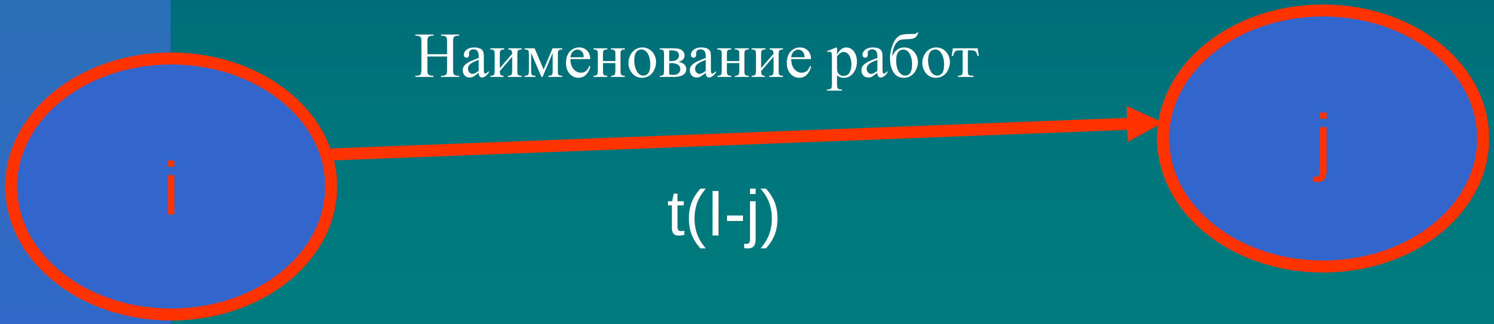
.



Последовательный граф, на вершинах которого реализуется числовая функция

Система анализа, планирования и управления с использованием сетевых графиков

Методы сетевого планирования и управления широко используются для анализа затрат времени на выполнение комплекса работ, оптимизации сроков выполнения работ по стоимости, оптимального распределения ресурсов, а также решения других задач, направленных на повышение эффективности производства.



Сетевой график — это графическая схема последовательности выполнения комплекса взаимосвязанных работ.

Работа в сетевом графике — это процесс, для выполнения которого требуется затраты времени и ресурсов.

Событие — это факт окончания одних работ и возможности начала других (последующих данному событию) работ.

Каждая работа определяется двумя событиями: предшествующим (i) и последующим (j). Работа обозначается символом — $(i–j)$, а длительность ее выполнения — $t(i–j)$.

Обычно на сетевом графике над стрелками записываются наименования работ, а под стрелками — продолжительность их выполнения

Полный путь сетевого графика — это путь от начального до конечного события.

Длина полного пути равна сумме продолжительностей составляющих его работ.

Полный путь с наибольшей продолжительностью называется *критическим путем* и определяет общую продолжительность выполнения всего комплекса работ.

Подкритический путь — это полный путь сетевого графика, продолжительность которого незначительно отличается от длительности критического пути.

Продолжительность выполнения любой работы имеет вероятностный характер. В связи с этим ожидаемое время выполнения работ $t(i\text{-}j)$ определяется на основе трех (a, m, b) или двух (a, b) оценок времени, которые устанавливаются ответственными исполнителями работ:

a — оптимистическая оценка, т.е. минимально возможное время выполнения работы в благоприятных условиях;

m — наиболее вероятная оценка времени выполнения работы;

b — пессимистическая оценка, т.е. максимально возможное время выполнения работы при неблагоприятных условиях.

На основе этих оценок $t(i–j)$ определяется по одной из формул:

$$t(i-j) = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$t(i-j) = \frac{3a + 2b}{5}$$

Расчет сетевого графика выполняется с целью определения следующих параметров:

– раннего срока свершения события $t_р(j)$;

– позднего срока свершения события $t_п(j)$;

– резерва времени свершения события $P(j)$.

Ранний срок свершения события – это максимальное время свершения события, соответствующее наибольшему по продолжительности пути от начального события до данного события j

$$t_p(j) = \max_{U_j}\{t_p(i) + t(i-j)\}$$

$$t_{кр} = t_р(n)$$

Ранние сроки всех событий сетевого графика рассчитываются в направлении от начального события к конечному.

Ранние сроки свершения событий позволяют установить критический путь сетевого графика, определяющий общую продолжительность выполнения рассматриваемого комплекса работ

Для событий, лежащих на критическом пути

$$P(\text{кр}) = 0$$

Поздний срок свершения события определяется в обратном направлении от конечного события к начальному по формуле

$$t_n(i) = \min_{U_i}\{t_n(j) - t(i-j)\}$$

Для конечного события поздний срок свершения события принимается равным раннему сроку

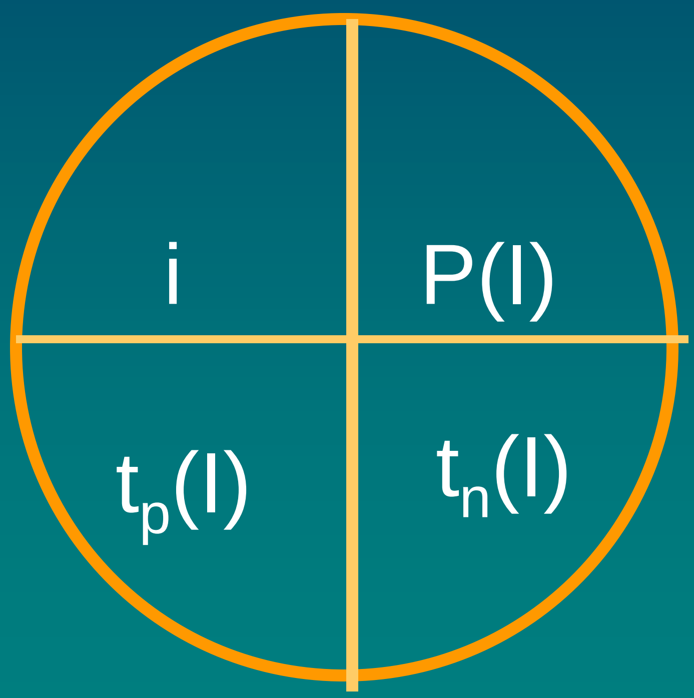
$$t_n(n) = t_\text{р}(n) = t_\text{кр}$$

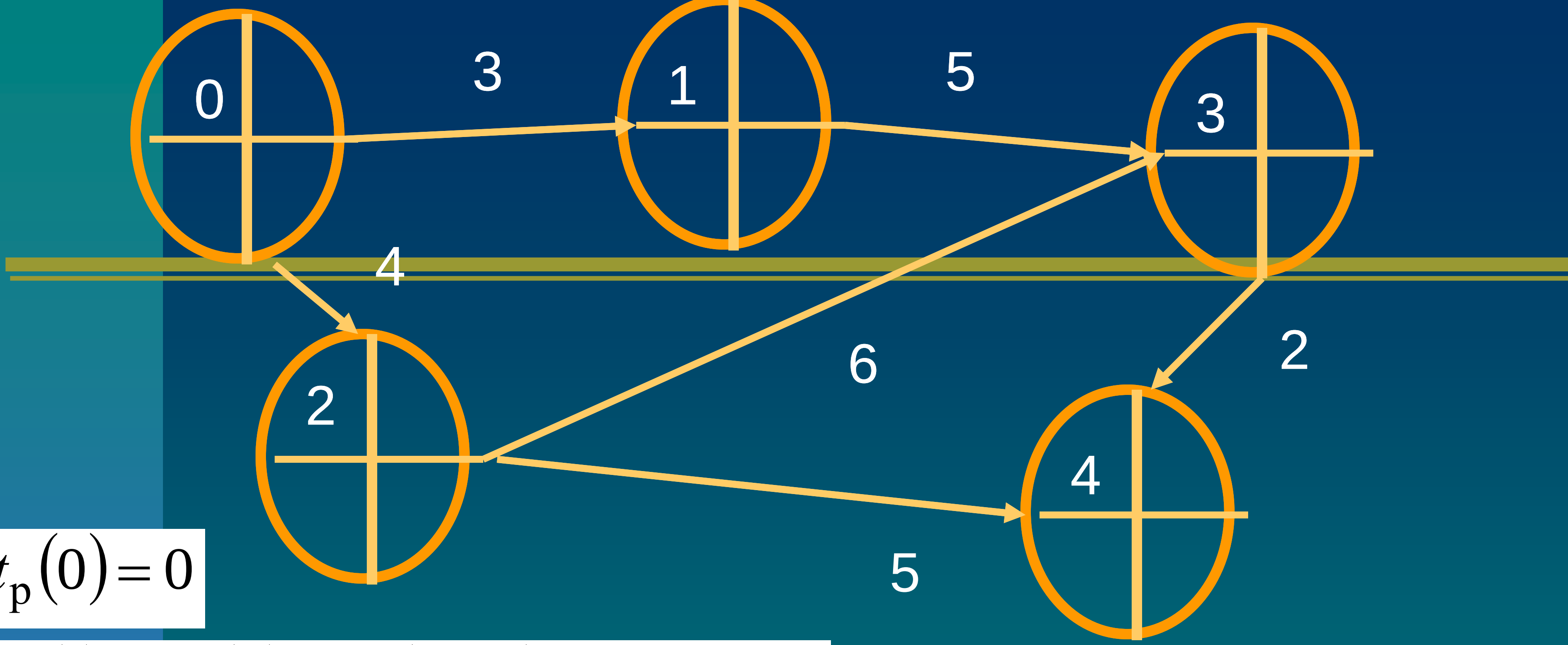
Для начального события $t_n(0) = 0.$

Резерв времени события $P(i)$ — это запас времени между ранним и поздним сроками свершения события i

$$P(i) = t_n(i) - t_\text{р}(i)$$

Для расчета сетевого графика каждое событие изображается в виде круга, разделенного на четыре части





$$t_\text{р}(0)=0$$

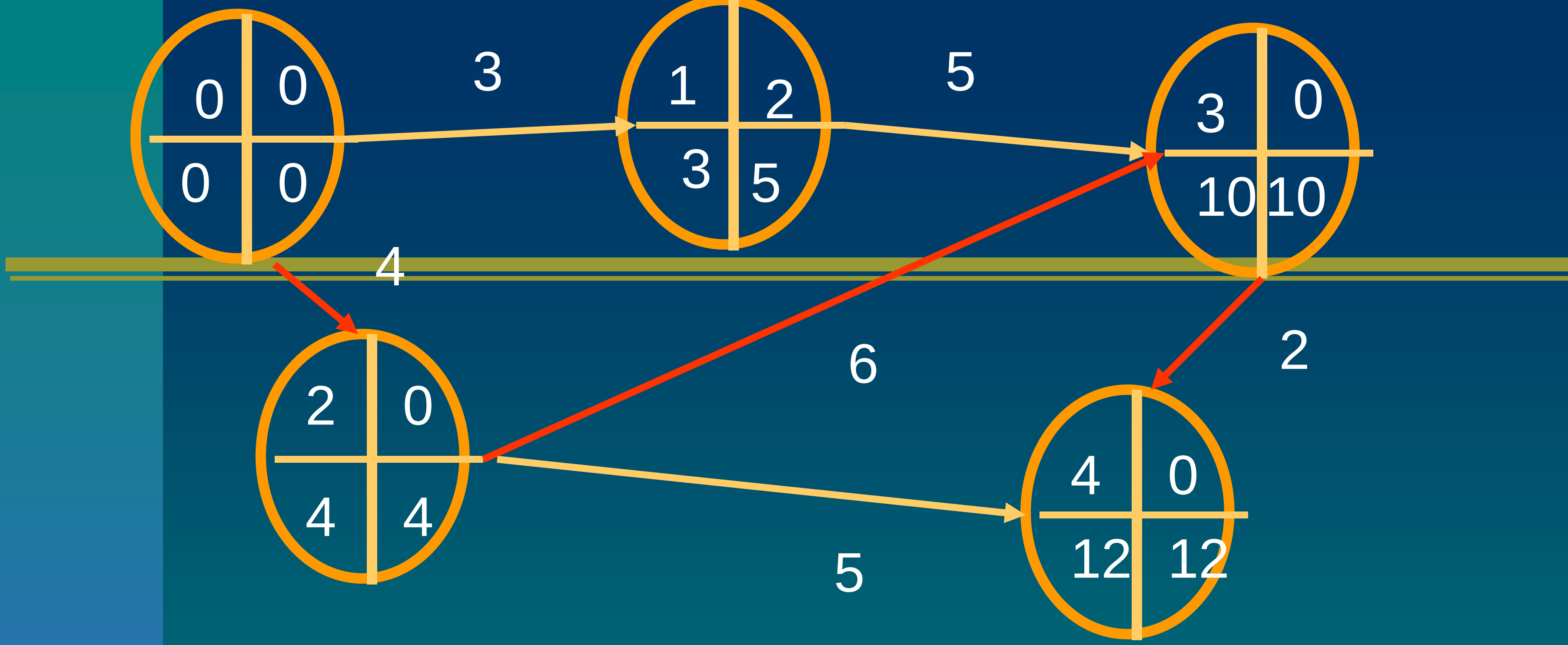
$$t_\text{р}(1)=t_\text{р}(0)+t_\text{р}(0-1)=0+3=3$$

$$t_\text{р}(2)=t_\text{р}(0)+t_\text{р}(0-2)=0+4=4$$

$$t_\text{р}(3)=max\begin{Bmatrix} t_\text{р}(1)+t(1\text{-}3) \\ t_\text{р}(2)+t(2\text{-}3) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3+5 \\ 4+6 \end{Bmatrix}=10$$

$$t_\text{р}(4)=max\begin{Bmatrix} t_\text{р}(3)+t(3\text{-}4) \\ t_\text{р}(2)+t(2\text{-}4) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 10+2 \\ 4+5 \end{Bmatrix}=12$$

Расчет ранних сроков свершения событий



Как видно из графика критический путь проходит через события 0–2–3–4.

Расчет поздних сроков свершения событий

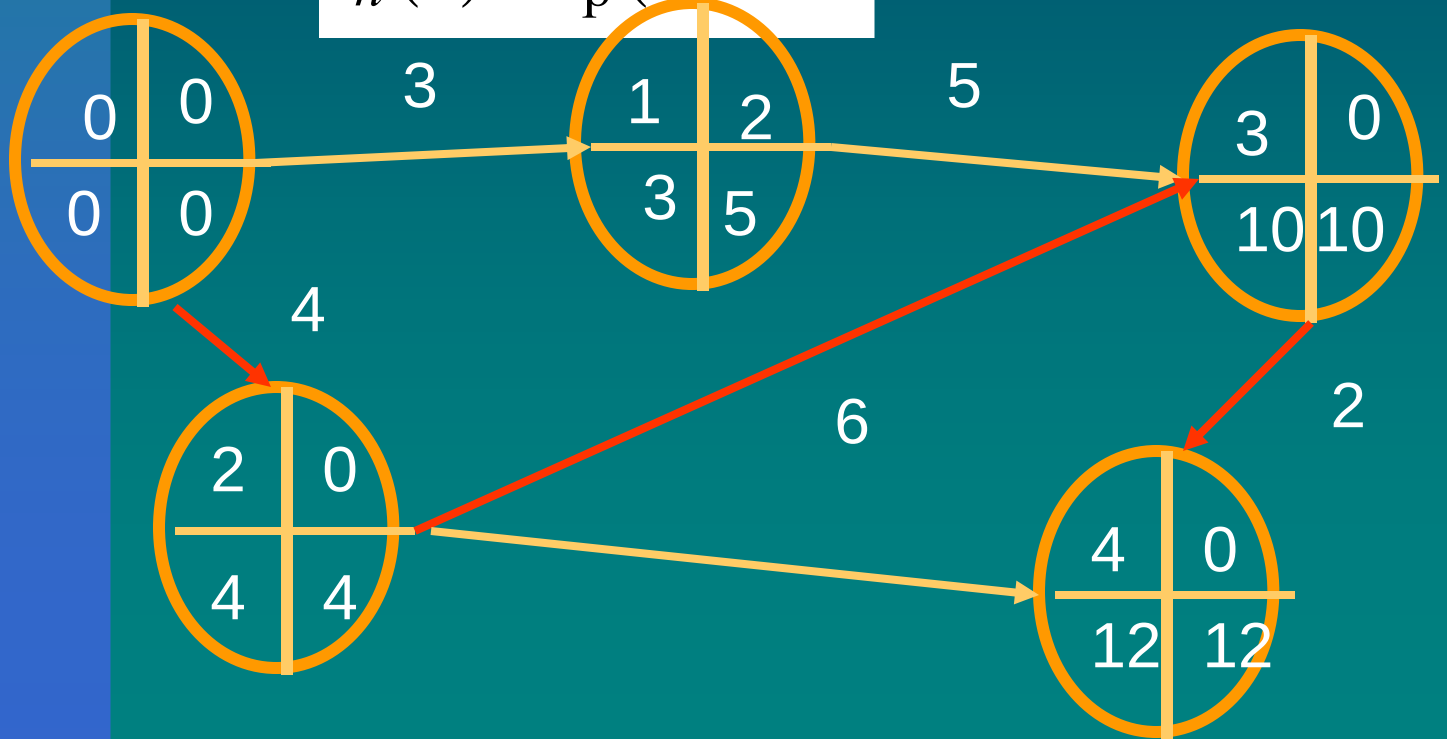
$$t_n(0)=0$$

$$t_n(1)=t_n(3)-t_\text{р}(1-3)=10-5=5$$

$$t_n(2)=min\begin{Bmatrix} t_n(1)+t(2\text{-}3) \\ t_n(2)+t(2\text{-}4) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 10+6 \\ 12+5 \end{Bmatrix}=4$$

$$t_n(3)=t_n(4)-t_\text{р}(3-4)=12-2=10$$

$$t_n(4)=t_\text{р}(4)=12$$



Расчет резервов времени

$$P(0)=0$$

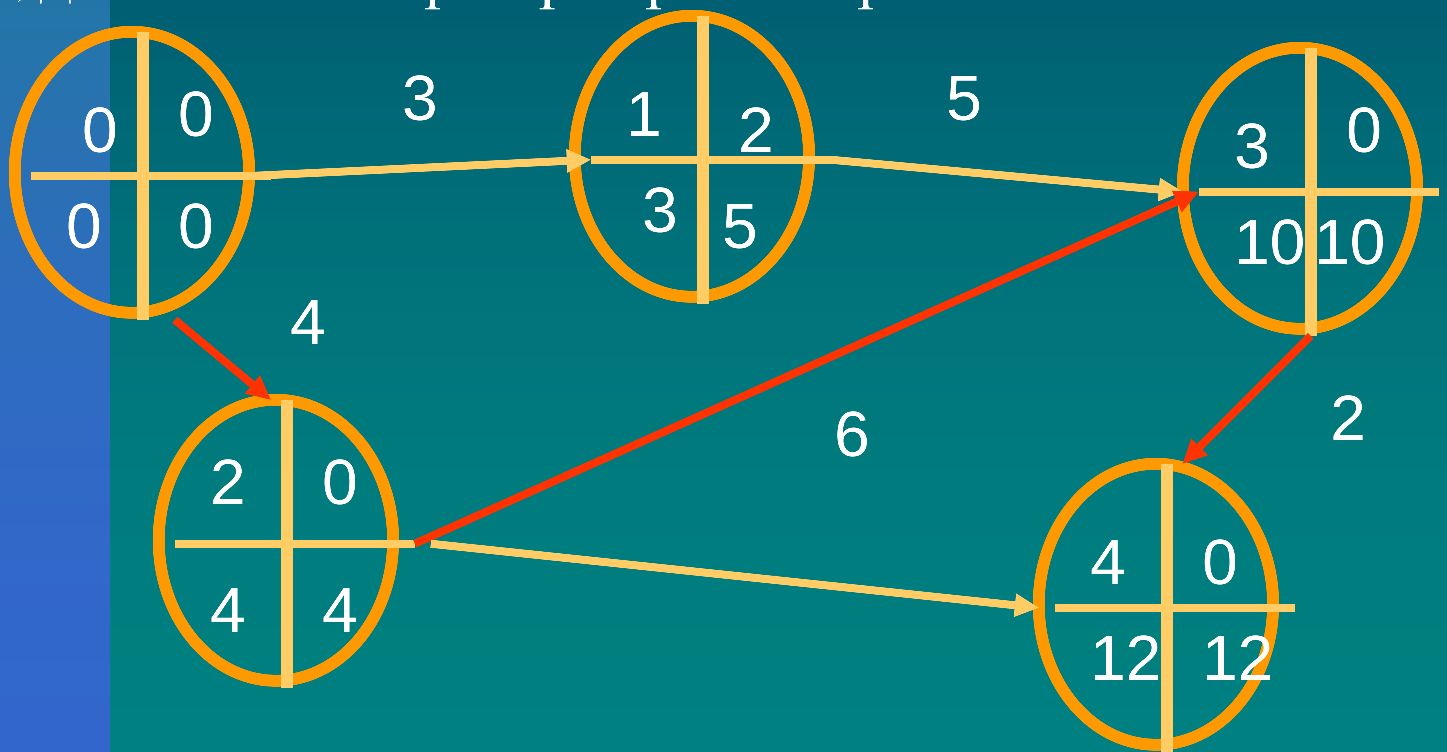
$$P(1)=t_n(1)-t_{\text{р}}(1)=5-3=2$$

$$P(2)=t_n(2)-t_{\text{р}}(2)=4-4=0$$

$$P(4)=0$$

$$P(3)=t_n(3)-t_{\text{р}}(3)=10-10=0$$

Для событий 0, 2, 3, 4, лежащих на критическом пути, резерв времени равен 0, для события 1 резерв времени равен 2.



Оптимизация работ критического пути по стоимости

При сравнении продолжительности критического пути $(t_{\text{кр}})$ с директивным сроком $(T_{\text{дир}})$ выполнения комплекса работ может возникнуть ситуация, при которой

$$t_{\text{кр}} > T_{\text{дир}}$$

Это свидетельствует о том, что комплекс работ не будет выполнен в требуемый срок, что недопустимо. Поэтому сетевой график должен быть пересмотрен. Прежде всего, необходимо сократить общую продолжительность работ критического пути. Сокращение длительности критического пути требует увеличения скорости выполнения всех работ критического пути или некоторых из них. Возникает задача распределения скоростей выполнения работ с таким расчетом, чтобы продолжительность критического пути не превышала директивного срока при минимальном увеличении затрат на выполнение работ.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

; (1)

; (2)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} f\left(V_i\right) \rightarrow min$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{V_i} = T_{\text{дир}}$$

$$v_{i\ min} \leq v_i \leq v_{i\ max}$$

е – $f\left(V_i\right)$ зависимость затрат на выполнение i–й работы как функция скорости ее выполнения;

Q_i – объем i–й работы;

v_i – скорость выполнения i–й работы.

Целевая функция (1) выражает минимизируемую сумму затрат на выполнение работ критического пути. Ограничение (2) отражает общую продолжительность работ критического пути, неравенство (3) учитывает возможные пределы скорости выполнения каждой из работ.

1-й этап. Определяются численные значения возможных сроков выполнения каждой работы

;

$$t_{i\,min} = \frac{Q_i}{V_{i\,max}}$$

$$t_{i\,max} = \frac{Q_i}{V_{i\,min}}$$

$$t_{i\,min} \le t_i \le t_{i\,max}$$

.

Возможное время выполнения каждой работы представляется в виде целочисленного ряда

,

$$t_i = k\Delta t$$

где k – целое число;

Δt – шаг изменения времени выполнения работ.

$$t_{i\,min} = k_{min}\Delta t$$

$$t_{i\,max} = k_{max}\Delta t$$

Составляются варианты распределения сроков выполнения работ, соответствующие ограничению , которое представляется в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = T_{\text{дир}}$$

.

Варианты распределения сроков пересчитываются в варианты распределения скоростей выполнения работ

$$V_i = \frac{Q_i}{t_i}$$

.

Определяются суммарные затраты на выполнение работ по вариантам в соответствии с целевой функцией .

В качестве оптимального принимается вариант, обеспечивающий минимальные затраты на выполнение работ критического пути.

Пример. Критический путь сетевого графика составляют три работы. Стоимость каждой работы в зависимости от скорости ее выполнения составляет соответственно $19V_1$, $38V_2$ и $57V_3$. Объемы работ: Q_1=6; Q_2=15 и Q_3=18. Технологически возможные скорости выполнения работ: , и .

$$1 \le V_1 \le 3 \qquad 2 \le V_2 \le 5 \qquad 3 \le V_3 \le 6$$

Директивный срок выполнения всего комплекса работ составляет 15 мес. Определить продолжительность каждой работы при условии минимальной стоимости выполнения работ критического пути.

Математическая модель задачи:

$$Z = 19V_1 + 38V_2 + 57V_3 \to min$$

$$\frac{6}{V_1} + \frac{15}{V_2} + \frac{18}{V_3} = 15$$

$$1 \le V_1 \le 3$$

$$2 \le V_2 \le 5$$

$$3 \le V_3 \le 6$$

1-й этап. Определение численных значений длительности каждой работы:

$$\frac{Q_2}{V_{2\,max}} \le t_2 \le \frac{Q_2}{V_{2\,min}}$$

$$t_1 = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$\frac{Q_1}{V_{1\,max}} \le t_1 \le \frac{Q_1}{V_{1\,min}}$$

$$t_2 = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

$$\frac{Q_3}{V_{3\,max}} \le t_3 \le \frac{Q_3}{V_{3\,min}}$$

$$t_3 = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$2 \le t_1 \le 6$$

$$3 \le t_2 \le 7{,}5$$

$$3 \le t_3 \le 6$$

2-й этап. Варианты распределения длительности выполнения работ

t_i	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
t_1	2	3	3	4	4	5	5	6
t_2	7	6	7	7	6	5	6	4
t_3	6	6	5	4	5	5	4	5
$T_{дир}$	15	15	15	15	15	15	15	15

3-й этап. Варианты распределения скоростей выполнения работ

Скорость	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
V_1	3,0	2,0	2,0	1,5	1,5	1,2	1,2	1,0
V_2	2,1	2,5	2,1	2,1	2,5	3,0	2,5	3,8
V_3	3,0	3,0	3,6	4,5	3,6	3,6	4,5	3,6

4-й этап. Определение стоимости выполнения каждой работы и суммарной стоимости по вариантам

Стоимость	Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_1	57,0	38,0	38,0	28,5	28,5	22,8	22,8	19,0
Z_2	81,4	95,0	81,4	81,4	95,0	114,0	95,0	142,5
Z_3	171,0	171,0	205,2	256,5	205,2	205,2	256,5	205,2
ΣZ	309,4	304,0	324,6	366,4	328,7	342,0	374,5	366,7

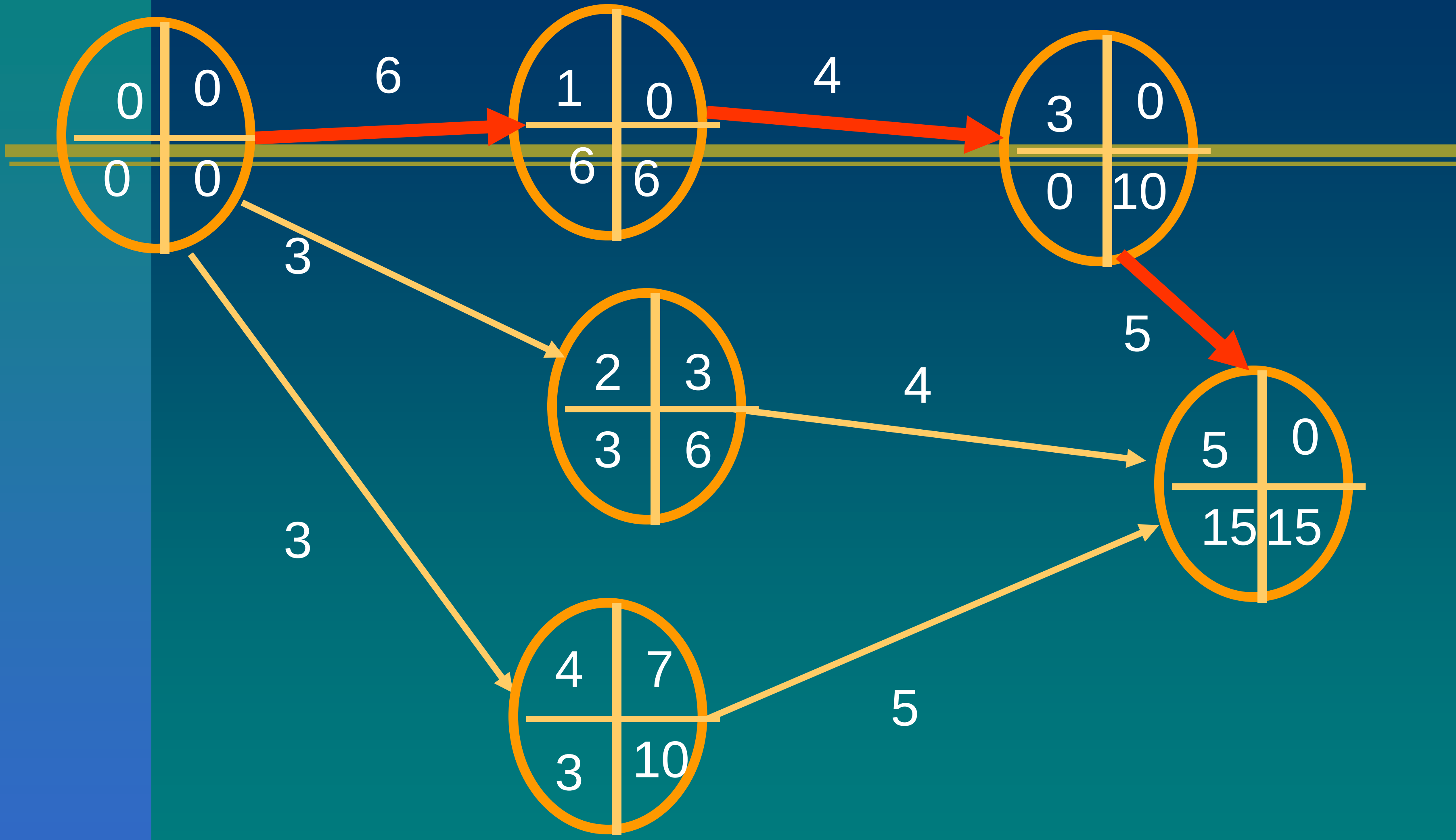
Как видно из таблицы, наименьшую стоимость работ имеет второй вариант .Таким образом, оптимальные сроки выполнения работ имеют следующие значения: t_1=3; t_2=6; t_3=6.

Распределение ресурсов при выполнении комплекса работ

Решение задачи распределения ресурсов включает следующие этапы.

1. Построение и расчет сетевого графика.
2. Составление ленточно-сетевого графика.
3. Построение диаграммы распределения ресурса.
4. Оценка неравномерности потребления ресурса. Оптимизация плана распределения ресурса.

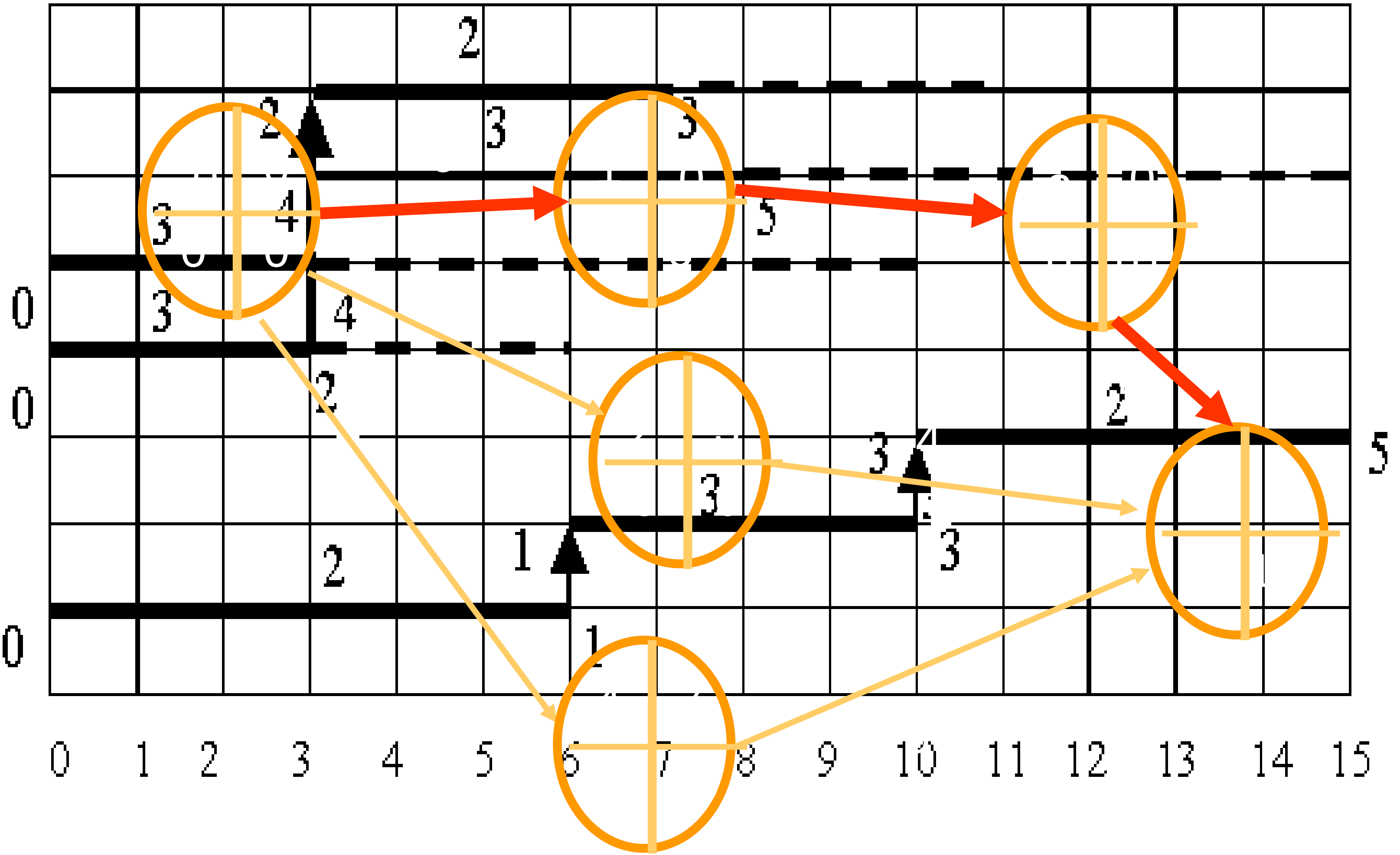
Построение и расчет сетевого графика осуществляется описанным выше способом. На сетевом графике указывается последовательность выполнения работ и их взаимоувязка, однако он недостаточно нагляден для решения задачи распределения ресурсов.



0
0
0
0
6
1
0
6
6
4
3
0
0
10
3
2
3
3
6
4
5
5
0
15
15
3
4
7
3
10
5

При построении ленточно-сетевого графика на горизонтальной оси наносится равномерная шкала времени. Каждая работа изображается в виде отрезка, длина которого равна продолжительности выполнения этой работы.

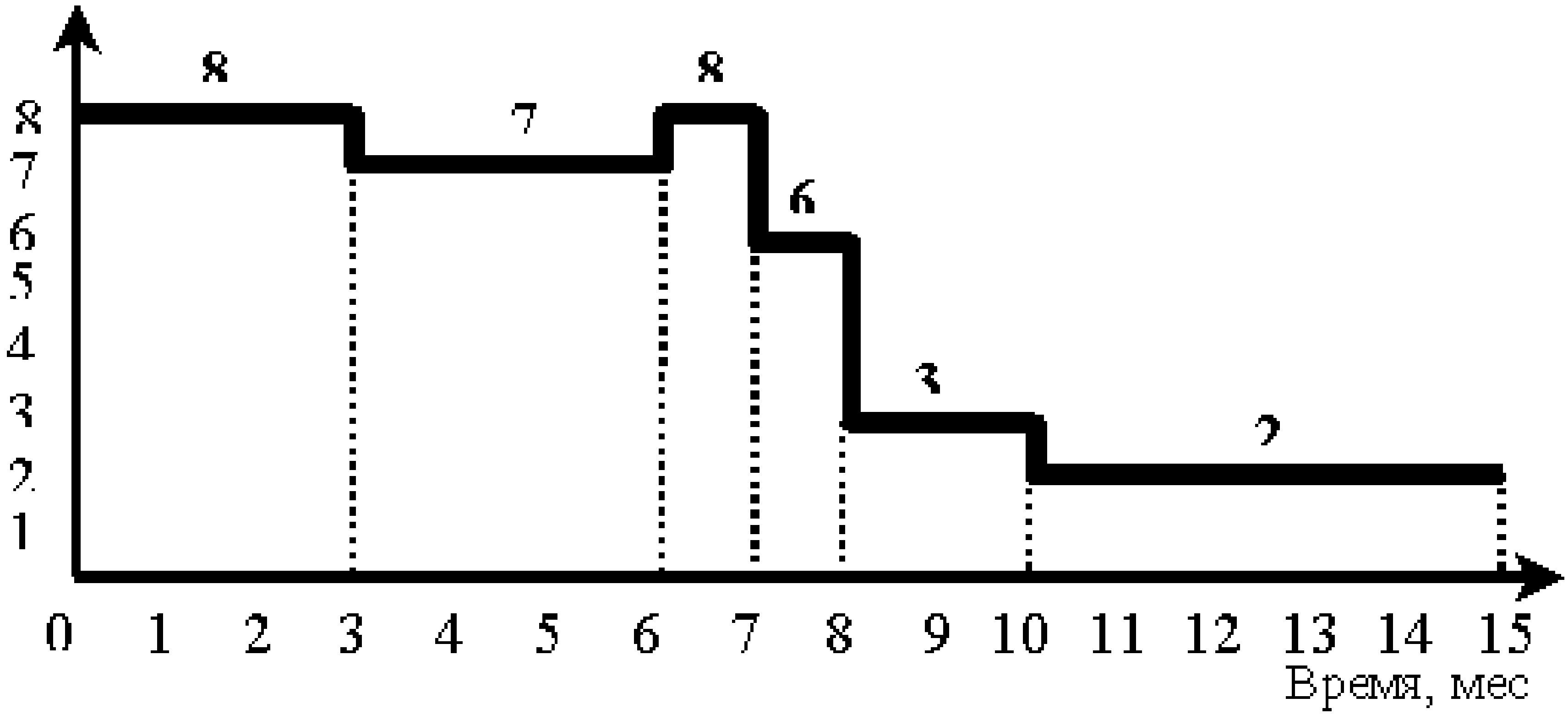
Начало выполнения работы $(i-j)$ соответствует раннему сроку свершения события i. Резерв времени по каждой работе изображается пунктирной линией. Потребные затраты ресурса указываются над соответствующими линиями работ.



— Исходный ленточно-сетевой график

Диаграмма распределения ресурсов во времени строится на основе исходного ленточно - сетевого графика. Цифры на диаграмме получены путем сложения потребности ресурса по одновременно выполняемым работам.

Как видно из диаграммы, ресурсы в течение рассматриваемого периода времени распределены весьма неравномерно.



— Диаграмма распределения ресурса во времени

Для оценки неравномерности потребления ресурса может быть использовано среднее квадратическое отклонение ресурса

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \left(R_k - \overline{R}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} t_k}}$$

где t_k – продолжительность k–го периода времени, в течение которого потребление ресурса остается постоянным;

R_k – количество ресурса, потребляемого в период времени k;

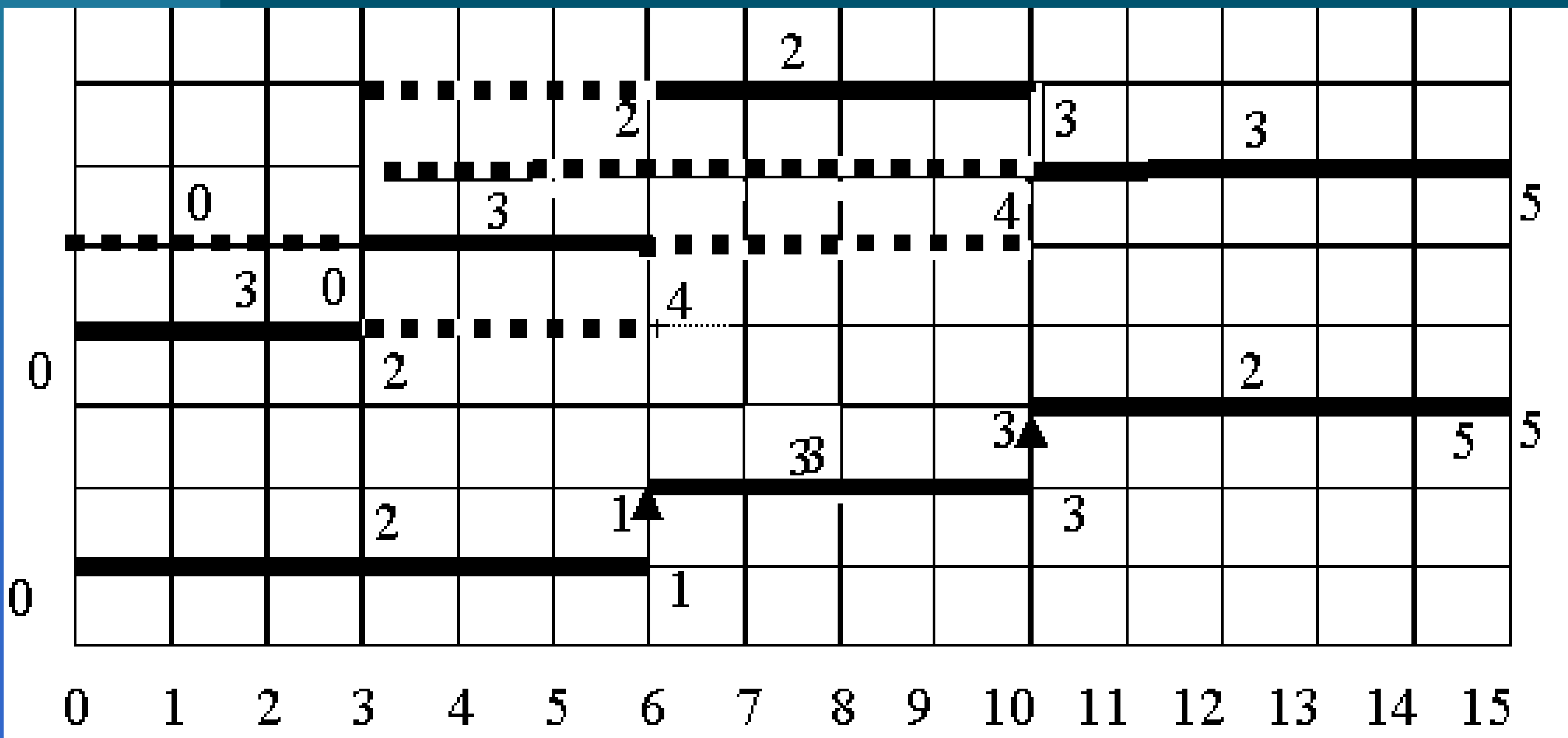
$\overline{R}$ – среднее количество потребляемого ресурса

$$\overline{R} = \frac{\sum t_k R_k}{\sum t_k}$$

Для диаграммы, показанной на рисунке, среднее количество потребляемого ресурса $\overline{R}$ и среднее квадратическое отклонение σ_R рассчитываются следующим образом

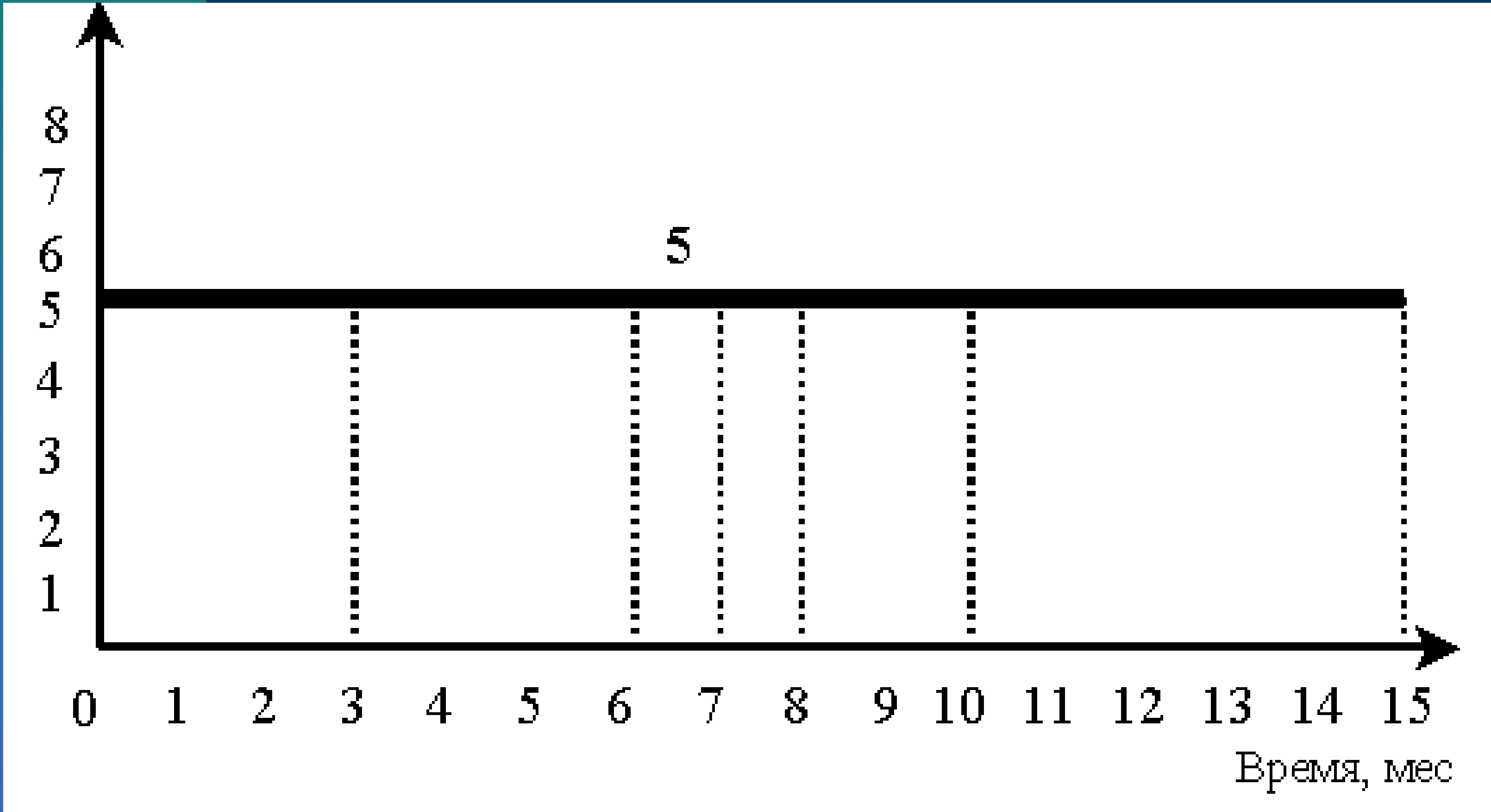
$$\overline{R} = \frac{3\cdot 8+3\cdot 7+1\cdot 8+1\cdot 6+2\cdot 3+5\cdot 2}{15} = 5$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{3(8-5)^2+3(7-5)^2+1(8-5)^2+1(6-5)^2+2(3-5)^2+5(2-5)^2}{15}} = 2{,}6$$



Задача оптимизации плана распределения ресурса формулируется следующим образом: при заданном времени выполнения комплекса работ необходимо определить сроки начала и окончания работ с таким расчетом, чтобы неравномерность потребления ресурса была минимальной.

Задача решается графическим способом: на ленточно-сетевом графике работы смещаются в пределах их резервов времени с целью снижения неравномерности потребления ресурса. При этом рассматриваются различные варианты выполнения работ во времени, которые оцениваются по принятому критерию σ_R . Как видно из рисунка, равномерное распределение ресурса может быть достигнуто путем смещения во времени сроков выполнения работ 2–3, 4–5 и 0–4.


8
7
6
5
4
3
2
1
5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Время, мес