ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Понятие о законах распределения случайных величин

Случайной **называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное заранее неизвестное значение.**

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные числовые значения с определенными вероятностями.

Непрерывной **называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного интервала.**

Законом распределения дискретной случайной величины **называют соответствие между возможными ее значениями и их вероятностями.**

Его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

В математической статистике под распределением понимают соответствие между наблюдаемыми значениями исследуемого признака и их частотами или относительными частотами, в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Для определения закона распределения весь диапазон наблюдаемых значений рассматриваемого признака делится на интервалы, после этого подсчитывается число наблюдений, попавших в каждый интервал. Число наблюдений называют частотами (n), а их отношение к общему объему наблюдений (m) — относительными частотами (w).

Относительная частота при увеличении числа наблюдений ($m \to \infty$) характеризует вероятность попадания рассматриваемого признака в заданный интервал. Для построения дифференциальной функции распределения строится гистограмма плотности относительных частот

$$P = \frac{n}{m \cdot h}$$

где *P* — плотность относительной частоты;

***n* — частота;**

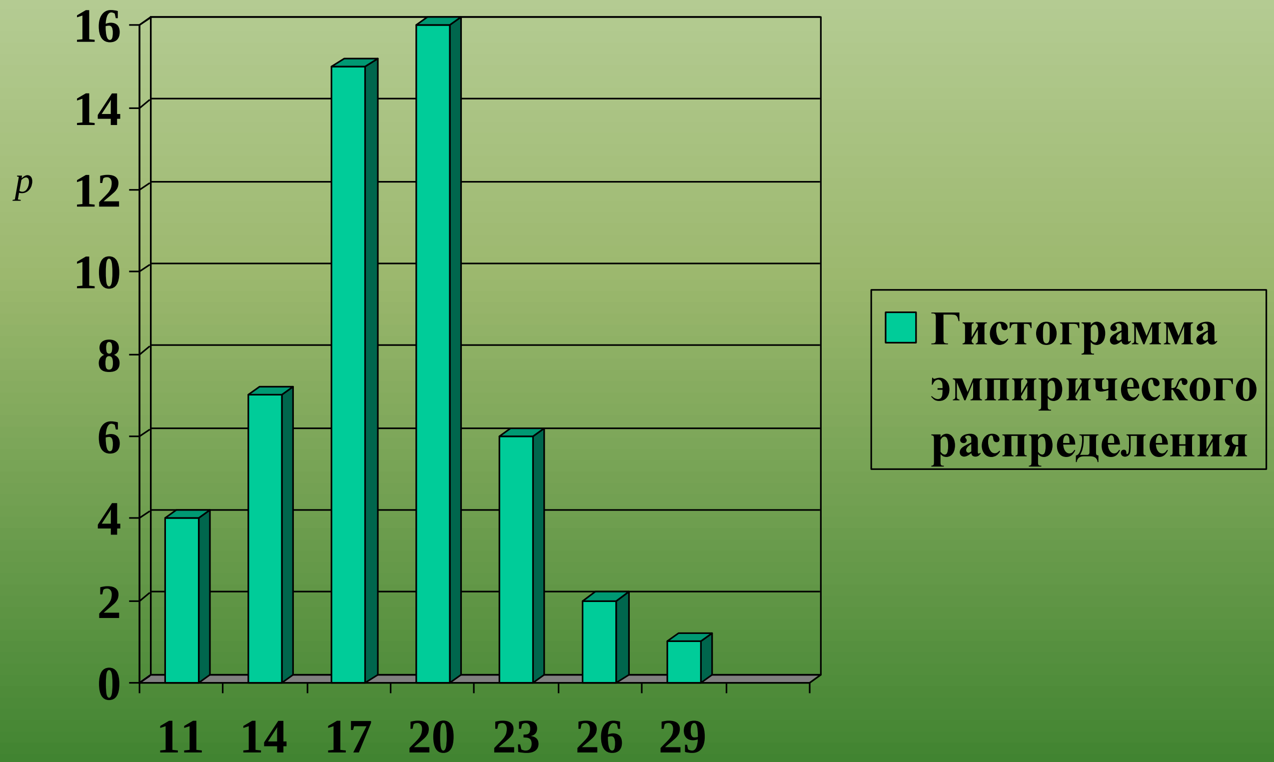
***m* — объем наблюдений;**

***h* — длина интервала.**

Расчеты сводятся в таблицу, в которой указываются границы каждого интервала, частота, относительная частота и плотность относительной частоты.

№ интер-вала	Грани-цы интер-вала	Среднее значение x в интервале, x_i	Часто-та, n	Относитель-ная частота $w = \frac{n}{m}$	Плотность относительной частоты $p = \frac{n}{m \cdot h}$
1	11–14	12,5	4	0,08	0,0267
2	14–17	15,5	7	0,14	0,0467
3	17–20	18,5	15	0,30	0,1000
4	20–23	21,5	16	0,32	0,1068
5	23–26	24,5	6	0,12	0,0400
6	26–29	27,5	2	0,04	0,0133

По данным, приведенным в таблице, строится гистограмма эмпирического распределения По оси абсцисс отложены значения *x*, а по оси ординат — плотность относительной частоты *p*.



Для построения теоретической линии распределения вероятностей (дифференциальной функции распределения) определяются числовые характеристики, или параметры закона распределения: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Аналогом математического ожидания является среднее арифметическое наблюдаемых значений *x*:

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{m} \qquad M(x) = \sum x_i w_i$$

где x_i — среднее значение признака x в i–м интервале;

n_i — частота;

m — объем наблюдений;

$M(x)$ — математическое ожидание признака x;

w_i — относительная частота.

Среднее квадратическое отклонение определяется по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{\sum w_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Анализируя гистограмму эмпирического распределения можно сделать предположение, что признак *x* имеет нормальный закон распределения с параметрами .

Теоретическая линия распределения вероятностей строится в соответствии с формулой дифференциальной функции нормального закона распределения

$$a = M(x) \text{ и } \sigma_x \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

В рассмотренном выше примере закон распределения случайной величины задавался дифференциальной функцией распределения. Этот способ задания закона распределения не единственный. Непрерывную случайную величину можно задать интегральной функцией распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

Интегральная функция распределения определяет для каждого значения *x* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее *x*

$$F(x) = \rho(X < x)$$

Microsoft Excel - ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

C6 = 15,5

$h=$ 3 $m=$ 50

№ интер-вала	Границы интервала	Среднее значение x в интервале, x_i	Частота, n	Относительная частота $w=\frac{n}{m}$	Плотность относительной частоты $p=\frac{n}{m\cdot h}$	$x_i w_i$		
1	11–14	12	4	0,08	0,03	0,96	48	4,62
2	14–17	15,5	7	0,14	0,05	2,17	108,5	2,35
3	17–20	18,5	15	0,3	0,10	5,55	277,5	0,36
4	20–23	21,5	16	0,32	0,11	6,88	344	1,16
5	23–26	24,5	6	0,12	0,04	2,94	147	2,88
6	26–29	27,5	2	0,04	0,01	1,1	55	2,5
					$M(x)=\sum x_i w_i$	**19,6**	19,6	13,9
								3,72

$$\bar{x}=\frac{\sum n_i x_i}{m}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\sum w_i (x_i-\bar{x})^2}$$

1 / равномерное / **нормальное**

Готово

X	F(x)	
11	0,010466	0,007447
12	0,020641	0,013353
13	0,038183	0,022279
14	0,066334	0,034586
15	0,108387	0,049957
16	0,166862	0,067138
17	0,242548	0,083953
18	0,333737	0,097677
19	0,436005	0,105739
20	0,542766	0,106504
21	0,64651	0,099813
22	0,74035	0,087035
23	0,819362	0,070614
24	0,881287	0,053306
25	0,926465	0,037441
26	0,957144	0,024468
27	0,976538	0,014878
28	0,987949	0,008418
29	0,994199	0,004431
30	0,997385	0,00217
31	0,998897	0,000989

Используя дифференциальную функцию распределения вероятностей, можно определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал. Геометрически вероятность попадания в интервал равна площади под кривой $f(x)$ на длине этого интервала. $x_1 \le x \le x_2$

Математически это выражается следующим образом:

$$f(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$f(x_1 \le x \le x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Для выполнения расчетов используются специальные таблицы, которые составлены для преобразованной функции. Вводится новая переменная t (параметр функции Лапласа)

$$t = \frac{x - a}{\sigma}$$

в таблице приводятся значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

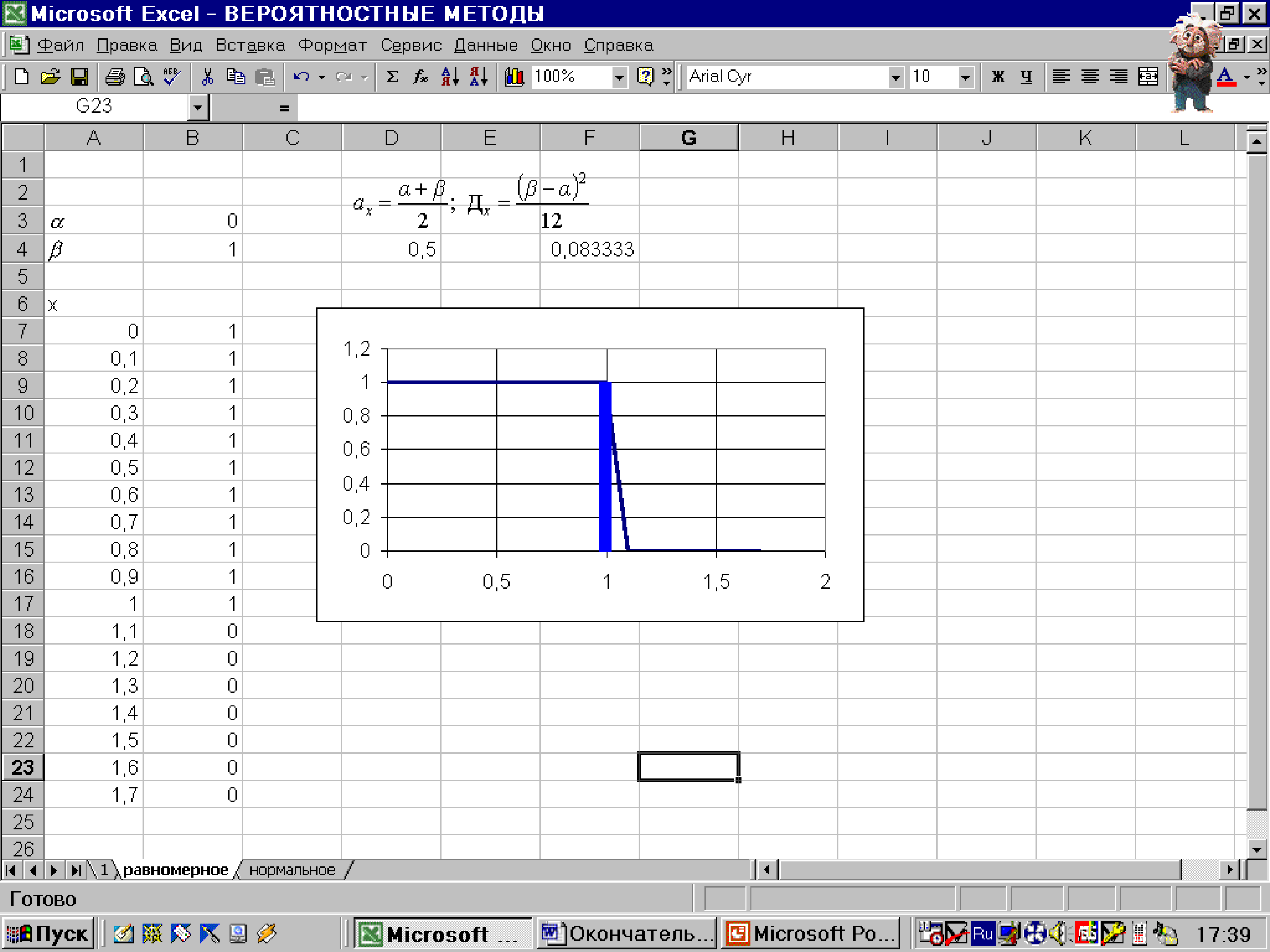
Распределение случайной величины называется *равномерным*, если дифференциальная функция во всем интервале изменения случайной величины имеет постоянное значение

Если случайная величина x изменяется в интервале от α до β, то дифференциальная функция равномерного распределения имеет следующий вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \le x \le \beta; \\ 0, & x < \alpha; \ x > \beta. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины определяются по формулам

$$a_x = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad Д_x = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$


Microsoft Excel - ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка
100%
Arial Cyr
10
G23
=
$a_x = \frac{\alpha + \beta}{2}$; $Д_x = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$
α
0
β
1
0,5
0,083333
x
0 1
0,1 1
0,2 1
0,3 1
0,4 1
0,5 1
0,6 1
0,7 1
0,8 1
0,9 1
1 1
1,1 0
1,2 0
1,3 0
1,4 0
1,5 0
1,6 0
1,7 0
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
1
равномерное
нормальное
Готово
Пуск
Microsoft ...
Окончатель...
Microsoft Po...
Ru
17:39

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x\geq 0.\end{cases}$$

Показательное распределение определяется одним параметром λ, при этом математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины равны между собой

.

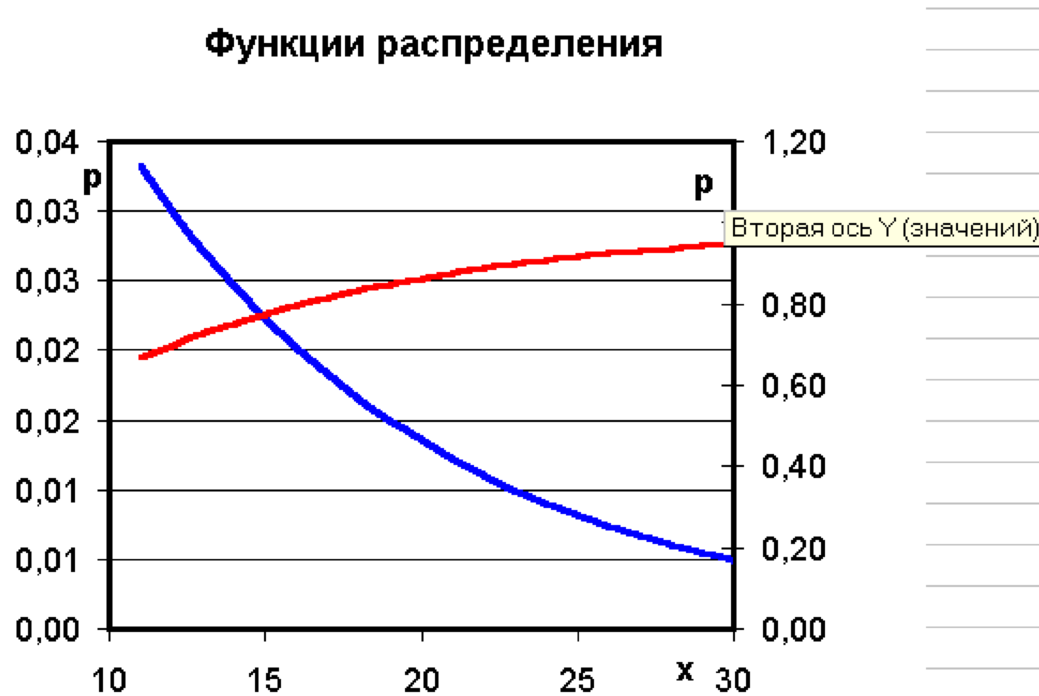
$$a_x=\sigma_x=\frac{1}{\lambda}$$

Показательное распределение можно охарактеризовать, пользуясь интегральной функцией

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}$$

Microsoft Excel - ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

X	F(x)			λ	0,1
11	0,03	0,67			
12	0,03	0,70			
13	0,03	0,73			
14	0,02	0,75			
15	0,02	0,78			
16	0,02	0,80			
17	0,02	0,82			
18	0,02	0,83			
19	0,01	0,85			
20	0,01	0,86			
21	0,01	0,88			
22	0,01	0,89			
23	0,01	0,90			
24	0,01	0,91			
25	0,01	0,92			
26	0,01	0,93			
27	0,01	0,93			
28	0,01	0,94			
29	0,01	0,94			
30	0,00	0,95			
31	0,00	0,95			



равномерное нормальное

Готово

Имитационное моделирование экономических задач

Имитационное моделирование — это численный метод проведения экспериментов на ЭВМ на основе логико-математических моделей, описывающих реальные системы и процессы. Такие модели представляют собой алгоритмы функционирования исследуемых систем, учитывающие факторы неопределенности и весь комплекс взаимосвязей между элементами системы. Машинная имитация позволяет многократно “проигрывать” модель за сравнительно небольшие промежутки времени. Получаемый статистический материал обрабатывается методами математической статистики.

В процессе реализации метода имитационного моделирования решаются следующие задачи:

– составление имитационной модели;
– разработка методики моделирования, которая предусматривает планирование имитационных экспериментов и статистическую обработку эмпирических данных;
– создание программного обеспечения;–реализация имитационной модели и анализ полученных результатов.

Значительная часть экономических и хозяйственных процессов совершается под влиянием случайных факторов. Для принятия обоснованных решений в таких условиях необходимо решать задачи, в которых учитывается влияние неконтролируемых факторов на поведение рассматриваемой системы. Для решения таких задач используется метод Монте-Карло (метод статистических испытаний). Создателями метода Монте-Карло считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама (1949 г).

Алгоритм метода Монте-Карло можно разделить на следующие этапы:

– составление детерминированной математической модели;

– моделирование последовательности случайных чисел с заданным законом распределения;

– многократное решение детерминированной задачи при различных значениях случайных факторов;

– статистическая обработка полученных результатов, принятие решения.

Рассмотрим некоторые способы получения последовательности случайных чисел.

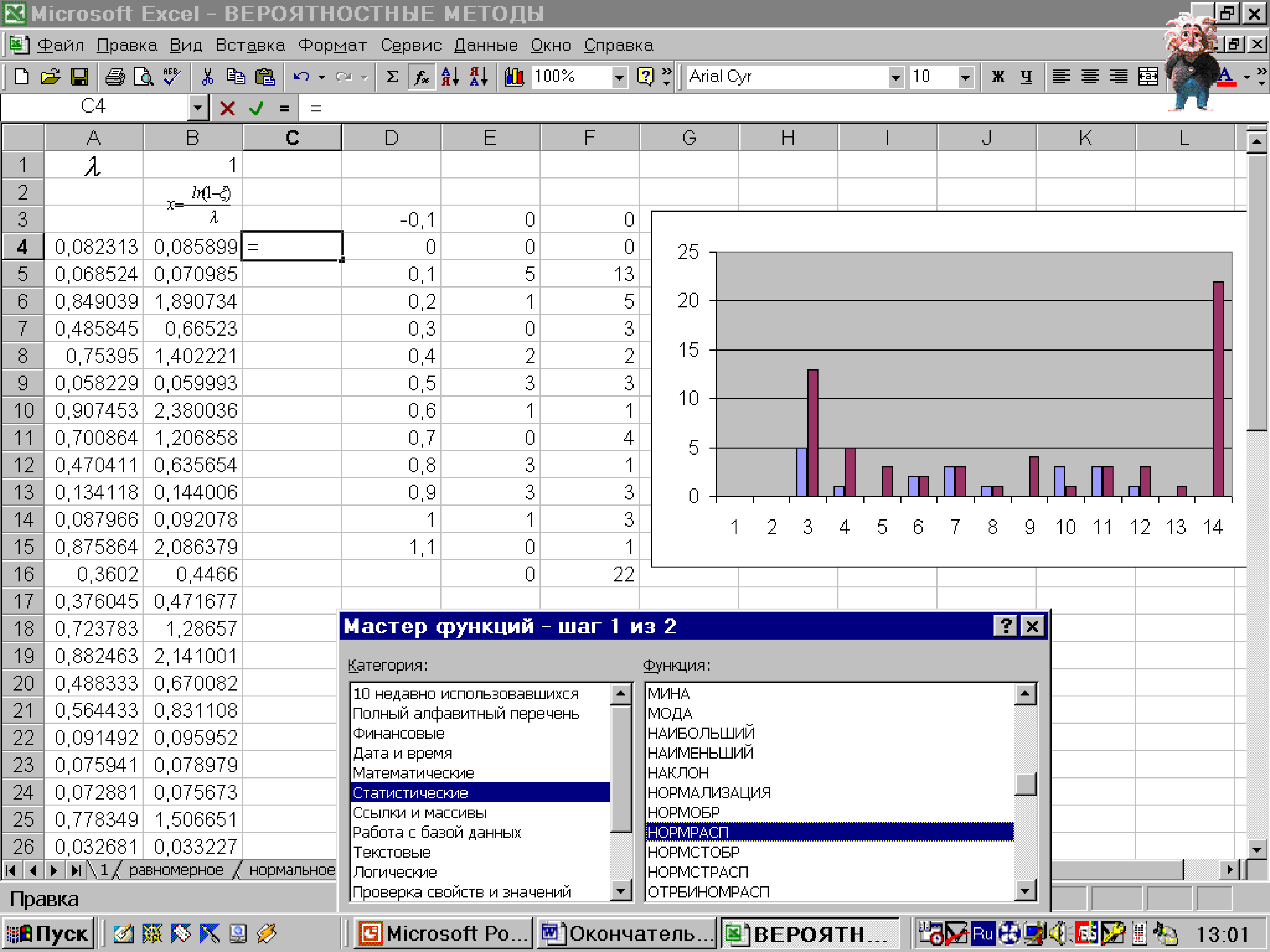
Для этого должны быть известны закон распределения случайной величины и параметры этого закона.

Случайные числа можно получить аналитическим способом. Например, для получения случайных чисел, распределенных по экспоненциальному закону, с параметрами λ и интегральной функцией $y = 1 - e^{-\lambda x}$ используются равномерно распределенные случайные числа в интервале от 0 до 1.

Вместо y подставляется равномерно распределенная случайная величина , искомые случайные числа определяются по функции, являющейся обратной к заданной интегральной функции:

$$\xi = 1 - e^{-\lambda x} \qquad e^{-\lambda x} = 1 - \xi \qquad -\lambda x \ln e = \ln(1-\xi)$$

$$x = -\frac{\ln(1-\xi)}{\lambda}$$



	A	B	C	D	E	F
1	λ	1				
2		$x=-\frac{ln(1-\xi)}{\lambda}$				
3				-0,1	0	0
4	0,082313	0,085899	=	0	0	0
5	0,068524	0,070985		0,1	5	13
6	0,849039	1,890734		0,2	1	5
7	0,485845	0,66523		0,3	0	3
8	0,75395	1,402221		0,4	2	2
9	0,058229	0,059993		0,5	3	3
10	0,907453	2,380036		0,6	1	1
11	0,700864	1,206858		0,7	0	4
12	0,470411	0,635654		0,8	3	1
13	0,134118	0,144006		0,9	3	3
14	0,087966	0,092078		1	1	3
15	0,875864	2,086379		1,1	0	1
16	0,3602	0,4466			0	22
17	0,376045	0,471677				
18	0,723783	1,28657				
19	0,882463	2,141001				
20	0,488333	0,670082				
21	0,564433	0,831108				
22	0,091492	0,095952				
23	0,075941	0,078979				
24	0,072881	0,075673				
25	0,778349	1,506651				
26	0,032681	0,033227				

`` В качестве примера рассмотрим имитационную модель управления запасами. Под запасами понимается пригодные для использования, но временно не используемые ресурсы.

Необходимость создания запасов обусловлена следующими факторами:

– несоответствие ритмов поставок и использования материальных ресурсов;

– случайные колебания спроса на товары, продолжительности интервала времени между поставщиками, объемов поставок;

– сезонность спроса и производства товаров.

С точки зрения ритмичности производства запасы следует увеличивать. Однако при этом будут увеличиваться средства, отвлекаемые из оборота, издержки на хранение материалов, а также потери ресурсов в количественном и качественном отношении.

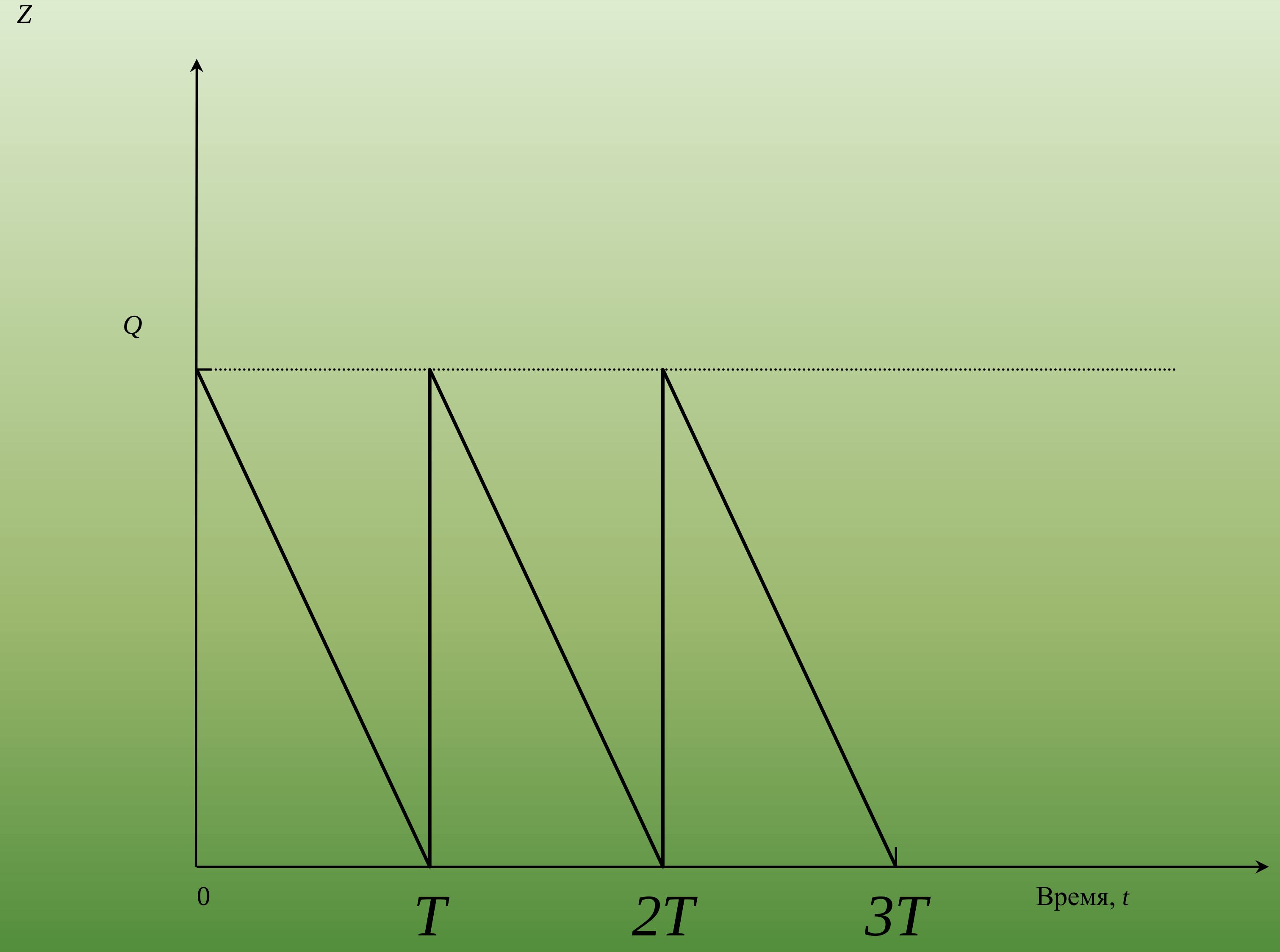


Схема движения одно-продуктового запаса

Детерминированная модель управления запасами имеет следующую целевую функцию,

$$c = (c_{х} + c_{п} + c_{ш}) \cdot \frac{1}{T} \to min \qquad C_x = \frac{1}{2} a_1 Q T$$

где c — затраты по обслуживанию запасов в единицу времени;

$c_{х}$ — затраты на хранение запасов на складе;

$c_{п}$ — затраты на организацию поставок;

$c_{ш}$ — затраты на штрафы из-за дефицита необходимых ресурсов

где — коэффициент пропорциональности, соответствующий величине затрат на хранение единицы среднего объема запасов в единицу времени;

Q — объем партии поставляемых ресурсов (объем заказа);

Если дефицит ресурсов не допускается, то $C_{ш}=0$.
Тогда

$$C = \frac{1}{2} a_1 Q + \frac{C_{п}}{T} \to min$$

Объем поставки зависит от интенсивности спроса на ресурсы

$$Q = a_2 T$$

где a_2 — интенсивность расходования запасов

$$C = \frac{1}{2} a_1 a_2 T + \frac{C_{п}}{T} \to min$$

Оптимальная периодичность поставок определяется методом дифференцирования:

$$\frac{dC}{dT} = \frac{1}{2} a_1 a_2 - \frac{C_{п}}{T^2} = 0 \qquad T^* = \sqrt{\frac{2C_{п}}{a_1 a_2}}$$

Оптимальный объем партии поставки определяется из выражения

$$Q^* = a_2 T^* = \sqrt{\frac{2C_{\text{п}} a_2}{a_1}}$$

Формула была получена Вильсоном в 1928 г. и носит его имя.

Для реализации имитационной модели показатели детерминированной модели распределяются следующим образом.

1. Переменные, которые определяют состояние системы в произвольный момент времени:

$C_х$ — затраты на хранение;

$C_п$ — стоимость поставки;

t — текущее время;

t' — момент реализации поставки;

q — текущее значение запаса.

2. Управляемые переменные:

Q — объем поставки;

q_{min} — минимальный уровень запаса.

3. Неуправляемые параметры:

a_1 — затраты на хранение запаса на конец дня;

$C_п$ — затраты на организацию одной поставки;

T — период поставки ресурсов.

4.

Экзогенные переменные:

X — ежедневный спрос на ресурс (случайная величина с известным законом распределения вероятностей)

λ — время задержки поставки (интервал времени между моментом подачи заявки на поставку и ее реализацией — случайная величина с известным законом распределения вероятностей).

Методом имитационного моделирования необходимо найти оптимальные значения Q^* q^*_{min}

при которых суммарные затраты на поставки и хранения в течение T дней будут минимальными.

Поскольку ежедневный спрос и задержка поставок — случайные величины, то сумма затрат

$$C = f(Q, q_{min})$$

представляет собой случайную величину, закон распределения вероятностей которой заранее неизвестный. Математическое ожидание затрат при фиксированных значениях переменных Q и q_{min} оцениваются с помощью выборочного среднего путем многократной реализации модели

$$\bar{c} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i(Q, q_{min})$$

где N — число реализаций имитационной модели.

Понятие о теории массового обслуживания

Первые задачи теории массового обслуживания были рассмотрены в начале нашего столетия. Первоначально в этих задачах решались вопросы обслуживания абонентов телефонной станции. На развитие теории массового обслуживания большое влияние оказали работы известного датского ученого А.К.Эрланга (1878–1929) — сотрудника Копенгагенской телефонной компании. Основные его исследования в этой области относятся к 1908–1922 гг.

В дальнейшем интерес к задачам теории массового обслуживания значительно возрос. Такие задачи возникают не только в телефонных системах, но и в естествознании, в технике, экономике, транспорте, организации производства и т.д.

Для уяснения принципа решения задач теории массового обслуживания рассмотрим общую характеристику системы массового обслуживания.

Работа системы состоит в выполнении поступающих на нее заявок, или требований. Заявки могут выполняться одним обслуживающим аппаратом (одноканальная система) или несколькими аппаратами (многоканальная система).

Поток заявок и длительность их обслуживания носят вероятностный характер.

Каждая система массового обслуживания в зависимости от числа обслуживающих аппаратов и их производительности обладает какой-то пропускной способностью.

Задачи теории массового обслуживания состоят в установлении зависимостей между производительностью обслуживающего аппарата, характером потока заявок и эффективностью функционирования системы (ее пропускной способностью).

Системы массового обслуживания делятся на два основных типа:

а) системы с ожиданием,

б) системы с отказами (потерями).

В системах с ожиданием заявка, поступавшая в момент, когда все обслуживающие аппараты заняты, становится в очередь и ждет, пока освободится какой-либо аппарат.

В системах с отказами заявка, заставшая все обслуживающие аппараты занятыми, не ждет, а покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

Эффективность работы этих двух типов систем характеризуется различными показателями.

Для оценки пропускной способности систем с ожиданиями важно знать среднее время ожидания начала обслуживания.

Для систем с отказами время ожидания теряет смысл, здесь важна другая характеристики — вероятность отказа, которая довольно полно характеризует систему обслуживания.

Для систем с ожиданием кроме средней длительности ожидания представляет интерес средняя длина очереди, загруженность обслуживающих аппаратов, законы распределения длины очереди и др.

На практике нередко возникают задачи, которые не могут быть отнесены к двум названным выше системам обслуживания. Например, иногда мы отказываемся от обслуживания только потому, что не можем долго ожидать начала обслуживания. (Заказывая телефонный разговор, мы предупреждаем, что можем ожидать только определенное время, по истечении которого заказ будет снят).

В некоторых случаях может быть ограничено время пребывания в системе обслуживания (время ожидания плюс время обслуживания).

Таким образом, к названным задачам мы можем прибавить новые задачи близкие по характеру:

1) системы с ограниченной длиной очереди (требование на обслуживание остается в очереди до тех пор, пока очередь не достигнет некоторого заранее заданного размера K).

2) системы с ограниченным временем ожидания (требование ожидает начала обслуживания не более заданного времени τ, после чего покидает систему обслуживания).

3) системы с ограниченным временем пребывания (время пребывания в системе — ожидание начала обслуживания плюс время самого обслуживания — ограничивается величиной τ. Требование может покинуть систему, так и не дождавшись, начала обслуживания или покинуть систему, дождавшись начала обслуживания, но, не дождавшись его окончания).

4) системы обслуживания с преимуществом (в потоке требований, поступающих в систему обслуживания, имеются такие, которые обслуживаются вне очереди; Например, срочные телеграммы передаются раньше обыкновенных даже в том случае когда простые телеграммы сданы раньше срочных).

Для систем массового обслуживания важно установить закономерности, которым подчиняются моменты поступления заявок в систему.

Наиболее типичным для системы массового обслуживания является простейший поток, который удовлетворяет следующим условиям:

1) *стационарность* (это означает, что вероятность поступления заявки в любой промежуток времени (T, $T+t$) не зависит от T, т.е. начала этого промежутка, а зависит только от величины этого промежутка t и количества заявки, которое может поступить в этот период.);

2) *отсутствие последействия* (это означает, что вероятность наступления заявки в любой промежуток времени (T, $T+t$) не зависит от вероятности поступления заявок в другие промежутки времени);

3) *ординарность потока* — означает практическую невозможность появления за короткий промежуток времени более одной заявки.

Простейший поток играет в теории массового обслуживания важную роль. Простейший поток часто встречается на практике, кроме того, даже при потоке заявок, отличающемся от простейшего, часто можно получить удовлетворительные по точности результаты.

Для характеристики потока важно знать закон распределения продолжительности промежутка времени между двумя соседними событиями (T). Функция распределения этой случайной величины T будет равна

$$F(t) = P(T < t)$$

$F(t)$ можно определить через вероятность противоположного события

Это вероятность того, что на участке времени продолжительностью t не появится ни одного из последующих событий

$$P_o(t) = \frac{(\lambda t)}{o!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \qquad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Плотность распределения получаем путем дифференцирования

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Как видно из формулы, мы получили показательный закон распределения с параметром t.

Показательным законом распределения может быть описано время обслуживания одной заявки.

Рассмотрим в качестве случайной величины время обслуживания $T_{об}$.

Пусть $G(t)$ — будет функция распределения этой случайной величины

$$G(t) = P(T_{об} < t)$$

, ,

При показательном законе плотность распределения имеет вид

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t > 0)$$

где μ — величина, обратная среднему времени обслуживания одной заявки

$$\mu = \frac{1}{t_{об}}$$

При пуассоновском распределении потока заявок и показательном распределении времени обслуживания для решения задач теории массового обслуживания можно применить аппарат марковских случайных процессов.

Процесс называется *марковским*, если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Обозначим через $f(t)$ некоторый процесс, в любой момент времени описывающий состояние системы массового обслуживания. Примером процесса $f(t)$ может служить число требований, находящихся в системе обслуживания в любой момент времени *t*. Процесс $f(t)$ может рассматриваться как совокупность нескольких параметров, имеющих определенный физический смысл. Например, при рассмотрении системы обслуживания электромеханического оборудования фирмы имеет смысл считать процесс двумерным $f(t)=\{f_1(t),\ f_2(t)\}$

где число заявок на ремонт оборудования в момент времени *t*; —

число неисправных единиц оборудования в тот же момент времени.

Решение задачи методом цепей Маркова сводится к следующему. Выбираются такие моменты времени $\{t_n\}$ что значения процесса $\{f(t_n)\}$ образуют цепь Маркова.

Затем методами, обычными для цепей Маркова, исследуется распределение случайных величин $f(t_n)$. По этому распределению делают выводы о свойствах исходного процесса $f(t)$; кроме того, сами величины $f(t_n)$ дают исчерпывающую информацию о функционировании системы массового обслуживания.

Выше мы рассматривали только стационарные потоки. Для нестационарного потока основной характеристикой является мгновенная плотность

$$\lambda(t)$$

, т.е. число заявок, приходящихся на элементарный промежуток времени Δt.

Поток событий ординарный, без последействия с переменной плотностью $\lambda(t)$ называется нестационарным пуассоновским потоком. Для такого потока число событий, попадающих на участок длиной τ, начинающийся в точки t_o, подчиняется закону Пуассона

$$P_{\overline{m}}(\tau, t_o) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

где a — математическое ожидание числа событий на участке от t_o до $t_o + \tau$

$$a = \int_{t_o}^{t_o+\tau} \lambda(t)\,dt$$

Как видно из приведенной формулы, величина «а» зависит не только от длины участка τ, но и от его положения на оси оt.

Существуют потоки с ограниченным последействием. Ординарный поток однородных событий называется потоком Пальма, если промежутки времени между последовательными событиями t_1, t_2, … представляют собой независимые случайные величины, распределенные по показательному закону.

Отдельные детали какого- нибудь механического устройства выходят из строя независимо одна от другой.

Вышедшие из строя детали мгновенно заменяются новыми. Срок безотказной работы детали случаен. В данных условиях поток отказов представляет собой поток Пальма. Если срок безотказной работы детали будет распределен по показательному закону, то поток Пальма превращается в простейший.

К потокам с ограниченным последействием относятся также потоки Эрланга.

` Если из простейшего потока выбросить каждую вторую точку, то оставшиеся точки образуют поток, который называется потоком Эрланга первого порядка. Очевидно, этот поток будет также потоком Пальма, так как независимые промежутки времени в простейшем потоке после суммирования их по два также будут независимыми.

Если в простейшем потоке выбросить по две соседние точки, а каждую третью оставить, то получится поток Эрланга второго порядка.

Аналогично можно получить поток Эрланга k–го порядка.

Применение потоков Эрланга удобно при решении практических задач, задаваясь различными «k» можно получить любую степень последействия. Если k=0, последействие отсутствует — получается простейший поток. При k=∞ между моментами появления событий будут жесткие функциональные связи. Таким образом, порядок потока Эрланга может служить мерой последействия, имеющегося в потоке.