Лекция 7
БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

В основе балансовых моделей лежит метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

Балансовая модель выражается в виде системы уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между количеством продукции, производимой различными производственными подразделениями, и совокупной потребностью в этой продукции.

При построении балансовых моделей используются числовые матрицы, поэтому такие модели называются матричными. Матричный метод позволяет придать балансовым моделям строгую математическую форму.

Выделяются следующие основные виды балансовых моделей:

– материальные трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства;

– межотраслевые балансы;

– матричные техпромфинпланы предприятий.

Несмотря на специфику балансовых моделей, их объединяет не только матричный принцип построения и единство системы расчетов, но и аналогичность экономических показателей.

Расчет технико-экономического плана предприятия

С точки зрения производственной структуры предприятия выделяются вспомогательные и основные подразделения. К вспомогательным подразделениям относятся котельные, компрессорные, внутризаводской транспорт и т.д.

Основные подразделения выпускают конечную продукцию. Каждое подразделение нуждается в ресурсах, которые можно разделить на две группы: ресурсы собственного производства, которые создаются в подразделениях данного предприятия, и ресурсы, поступающие на предприятие со стороны.

Для расчета технико-экономического плана предприятия используется следующая информация.

. Матрица норм прямых затрат (A) собственного производства

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1} \ldots a_{jj} \ldots a_{jn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

где a_{jj} — норма расхода j–го ресурса собственного производства, используемого j–м подразделением для производства единицы продукции (j=1, …, n).

Матрица норм прямых затрат (B) ресурсов со стороны

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1j} \ldots b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{i1} \ldots b_{ij} \ldots b_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1} \ldots b_{mj} \ldots b_{mn} \end{pmatrix}$$

где b_{ij} — норма расхода i–го ресурса со стороны для производства единицы продукции j–го подразделения.

Вектор (Y) товарной продукции $$Y=\left(y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_n\right)$$

где y_i — где y_i — объем производства конечной продукции j–м подразделением.

Вектор (P) цен ресурсов со стороны $$P=\left(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_m\right)$$

где p_i — цена i–го ресурса со стороны.

. Вектор (X) объема производства $$X=\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right)$$

где x_j — количество продукции, выпускаемой j–м подразделением.

Расчет объема производства подразделениями предприятия можно выполнить на основе балансовой модели

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots\cdot \\ x_j \\ \cdots\cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}\ldots\ldots a_{jn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots\cdot \\ x_j \\ \cdots\cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots\cdot \\ y_j \\ \cdots\cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

Балансовую модель можно представить в виде матричного уравнения

$$X = AX + Y$$

где X — вектор совокупной продукции подразделений;

Y — вектор товарной продукции подразделений;

A — матрица норм прямых затрат собственного производства.

$$X - AX = Y$$

$$(E - A)X = Y$$

Пре[illegible]ение

$$E = \begin{pmatrix} 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Если матрица (E–A) — неособенная, то она имеет обратную матрицу $(E - A)^{-1}$. Матрица называется неособенной, если ее определитель не равен нулю.

Умножим на $(E–A)^{-1}$ обе части уравнения

$$\left(E-A\right)X=Y$$

$$\left(E-A\right)^{-1}\left(E-A\right)X=\left(E-A\right)^{-1}Y$$

$$\left(E-A\right)^{-1}\left(E-A\right)=E$$

$$EX=X$$

$$X=\left(E-A\right)^{-1}Y$$

Вектор X представляет собой план выпуска продукции подразделениями предприятия. Обозначим через c_i величину ресурсов со стороны i–го вида, затрачиваемую всеми подразделениями в совокупности.

Используя матрицу норм прямых затрат ресурсов со стороны (B), можно записать следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
c_1 &= b_{11}x_1 + \ldots + b_{1j}x_j + \ldots + b_{1n}x_n; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_i &= b_{i1}x_1 + \ldots + b_{ij}x_j + \ldots + b_{in}x_n; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_m &= b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mj}x_j + \ldots + b_{mn}x_n.
\end{aligned}
$$

$$X = (E - A)^{-1} Y$$

$$C = B(E - A)^{-1} Y$$

$$\widetilde{B} = B(E - A)^{-1}$$

$$C = \widetilde{B} Y$$

В результате получаем вектор ресурсов со стороны, затрачиваемых предприятием для выпуска конечной продукции.

Матрицу $\tilde{B}$ можно назвать матрицей норм (коэффициентов) *полных* затрат материальных ресурсов со стороны в подразделениях предприятия. Как указывалось выше, матрица *B* отражает нормы *прямых* затрат ресурсов со стороны.

Для вычисления стоимости ресурсов со стороны используется вектор *P* цен на эти ресурсы

$$d_{ij} = P_i q_{ij}$$

где d_{ij} — денежное выражение затрат *i*–го ресурса со стороны в *j*-м подразделении;

q_{ij} — прямые затраты *i*–го ресурсы со стороны в *j*-м подразделении.

Затраты на ресурсы со стороны в стоимостном выражении (D_i) можно рассчитать по формулам

$$D_i = P_i c_i$$

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}$$

Себестоимость единицы продукции каждого подразделения определяется с учетом норм прямых затрат собственного производства (*A*), норм прямых затрат ресурсов со стороны (*B*) и цен на ресур

$$s_j = \sum_{j=1}^{n} s_j a_{jj} + \sum_{i=1}^{m} P_i b_{ij}$$

где s_j — себестоимость единицы продукции, выпускаемой *j*-м подразделением;

a_{jj} — норма расхода *j*–го ресурса собственного производства, используемого *j*–м подразделением;

P_i — цена *i*–го ресурса со стороны;

b_{ij} — норма расхода *i*–го ресурса со стороны, используемого *j*–м подразделением.

В матричном виде уравнение может быть записано следующим образом

$$S = SA + PB$$

где S — вектор себестоимости продукции j-го подразделения.

Для определения неизвестной матрицы S преобразуем уравнение

$$S - SA = PB$$

$$S(E - A) = PB$$

$$S(E - A)(E - A)^{-1} = PB(E - A)^{-1}$$

$$\tilde{B} = B(E - A)^{-1} \qquad S = PB(E - A)^{-1} \qquad S = P\tilde{B}$$

Зная значения элементов матрицы *S*, можно определить совокупные издержки *j*–го подразделения (*Z*) для производства продукции

$$Z = XS$$

где *Z* — вектор совокупных издержек *j*-го подразделения

$$z_j = s_j x_j$$

Балансовый метод позволяет оптимизировать производственную программу предприятия по стоимостному критерию, т.е. оценивать различные варианты производственной программы с использованием матричных моделей и выбирать наилучшие из них

Таким образом, алгоритм расчета технико-экономического плана предприятия включает следующие этапы.

Исходные данные.

A — матрица норм прямых затрат ресурсов собственного производства;

B — матрица норм прямых затрат ресурсов со стороны;

P — вектор цен ресурсов со стороны;

Y — вектор плана товарной продукции предприятия.

1. расчет матрицы норм полных затрат ресурсов собственного п

$$\tilde{A} = (E - A)^{-1}$$

2. Расчет вектора выпуска продукции подразделениями предприятия

$$X = \tilde{A}Y$$

Расчет матрицы норм полных затрат ресурсов со стороны

$$\tilde{B} = B\tilde{A}$$

Расчет вектора потребности в ресурсах со стороны

$$C = \tilde{B}Y \quad \text{или} \quad C = BX$$

Расчет вектора себестоимости единицы продукции каждого подразделения

$$S = P\tilde{B}$$

Расчет вектора совокупных издержек каждого подразделения

$$Z = SX$$

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса

Модель межотраслевого баланса отражает систему, состоящую из n отраслей, совокупный продукт которых делится на две части, промежуточный и конечный продукт. Каждая отрасль рассматривается как производящая и как потребляющая.

Основу информационного обеспечения балансовой модели составляет матрица межотраслевых потоков продукции x_{ij}, где i и j — соответственно номера производящих и потребляющих отраслей. Конечная продукция всех отраслей производства представляется в виде вектора Y_j и отражает объем продукции, используемой на потребление и накопление.

Национальный доход в стоимостном выражении представляет собой сумму чистой продукции и амортизации. Чистая продукция понимается как сумма оплаты труда и чистого дохода отраслей. Сумма амортизации и чистой продукции j-й отрасли условно называется чистой продукцией

Основу экономико-математической модели межотраслевого баланса составляют два следующих соотношения.

Во-первых, сумма материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равна валовой продукции этой отрасли $\left(X_j\right)$

$$X_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Z_j; \quad \left(j = \overline{1,\ n}\right)$$

Во-вторых, валовая продукция *j*-й отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_j; \quad \left(j = \overline{1,\ n}\right)$$

Валовой общественный продукт представляет собой сумму $\sum X_i$

Поэтому системы уравнений

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j; \qquad \left(j = \overline{1, n}\right)$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i; \qquad \left(i = \overline{1, n}\right)$$

можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} Z_j;$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Уравнение показывает, что в межотраслевом балансе национальный доход в отношении стоимостного состава равен национальному доходу с точки зрения материального (продуктового) состава.

Для каждой отрасли можно рассчитать коэффициенты (нормы) прямых материальных затрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n,$$

где a_{ij} — затраты промежуточной продукции i-й отрасли для производства единицы продукции j-й отрасли.

можно записать

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i$$

$$\tilde{X} = AX + Y$$

Система уравнений называется экономико-математической моделью межотраслевого баланса (моделью Леонтьева, моделью «затраты-выпуск»).

Используя эту модель можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли

$$Y = (E - A)X$$

или объемы валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1} Y$$

Обозначим через $B = \left(b_{ij}\right)$

коэффициенты полных материальных затрат, можно записать соотношение

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j$$

$$X = BY$$

Модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции в народном хозяйстве позволяют анализировать такие важные экономические показатели, как труд, фонды и цены.