МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ГОРНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Постановка задач оптимизации. Критерий оптимизации

Оптимизация (optimus — наилучший) — выбор решения, обеспечивающего наилучшие результаты функционирования системы.

Система, для которой показатель ее качества имеет экстремальное значение (минимум или максимум), является оптимальной

Математические методы оптимизации служат основным инструментом теории принятия решений и исследования операций.

Критерий оценки достижения поставленной цели называют показателем эффективности критерием оптимальности или оптимизации.

Совокупность параметров системы, при которых обеспечивается экстремум критерия оптимизации, называют оптимальными параметрами

. Целевая функция— зависимость критерия оптимизации от независимых переменных (параметров) задачи.

Примером неправильной постановки задачи оптимизации может слуг требование одновременного достижения нескольких противоречивых максимумов,

правильной — требование достижения максимума (минимума) одного критерия при ограничениях на значения остальных параметров, последнее служит необходимым условием задачи оптимизации.

В качестве достаточного условия задачи оптимизации нужно,

во-первых располагать ресурсами оптимизации. Это значит, что объект оптимизации должен обладать определенными степенями свободы, т.е. управляющими воздействиями, за счет которых можно менять его состояние.

Во-вторых, объект оптимизации должен иметь количественную оценку (критерий оптимизации)

Оптимизация процессов горного производства может быть направлена на получение наиболее дешевого продукта или продукции с высокими показателями качества, наилучшими условиями охраны труда и санитарии, охраны окружающей среды при комплексном использовании полезного ископаемого.

Однако не любая выходная величина может служить критерием оптимизации.

Критерий обладает следующими свойствами: оценивается числом; показатели количества и качества процесса изменяются монотонно (за исключением особых случаев, когда критерий принимает лишь два значения — 0 и 1) по следующему закону — чем больше, тем лучше, или наоборот.

Критерием не может быть величина, значение которой должно иметь некоторый зафиксированный уровень, отклонения от которого в ту или иную сторону недопустимы по физическому или технологическому содержанию процесса.

Признаком оптимальности служит достижение экстремума критерия оптимизации.

Выходных показателей процесса, удовлетворяющих перечисленным условиям, обычно несколько.

Трудность состоит в выборе главного и наиболее важного показателя — критерия оптимизации.

В тех случаях, когда имеет место многокритериальная задача, а таких задач большинство, существуют особые методы их решения.

Главная проблема решения многокритериальной задачи — сведение ее к однокритериальной, так как, в принципе, одновременно достичь экстремальных значений нескольких критериев нельзя.

Неправильно требовать, например, минимума затрат на добычу полезного ископаемого при минимуме энергоемкости и трудоемкости.

Известны различные методы сведения многокритериальной задачи к однокритериальной

В качестве обобщенного критерия предлагается использовать функцию желательности

$$R = \sqrt[m]{R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_m}$$

где m — число рассматриваемых частных критериев оптимизации

Такой подход иногда рекомендуется для оценки качества продукции.

В других случаях из нескольких критериев составляется сумма, частное или произведение.

Например, в числителе дроби ставятся все величины, которые желательно увеличить, а в знаменателе те которые требуется уменьшить.

В таком случае стремятся к максимум обобщенного критерия.

Иногда используют в качестве обобщенного показателя эффективности процесса взвешенную сумму частных критериев

$$R = a_1R_1 + a_2R_2 + \ \ldots + a_iR_i + \ \ldots + a_mR_m,$$

где a_i— весовые коэффициенты, назначаемые субъективно.

Если некоторый Ri желательно увеличить, то ai, при нем берут положительным, в противной ситуации отрицательным.

Такой подход известен при сценке уровня управления производством.

В качестве метода решения многокритериальных задач может использоваться способ выделения области Паретовских решений.

Используется и другой способ сведения многокритериальной задачи к однокритериальной.

Для этого выделяют один главный критерий R_1 и стремят обратить его в максимум, а на другие критерии R_2, R_3…. R_m накладывают ограничения, потребовав, чтобы они были не меньше (в задаче на максимум) данных значений.

В других случаях ранжируют частные критерии оптимизации и выбор оптимального объекта ведут последовательным рассмотрением совокупности объектов с постепенной выбраковкой тех из них, которые имеют худшие показатели на каждом из этапов.

Такой подход применялся выборе сырьевых баз для организации производства с комплексным использованием полезного ископаемого.

Известен также метод решения многокритериальных задач способом последовательных уступок.

Критерии R_1 R_2, R_3…. R_m располагают в порядке убывания важности и определяют решение, обращающее в экстремум самый важный критерий R_1.

Затем, исходя из практических соображений, назначается некоторая уступка ΔR_1, которая необходима для нахождения экстремума следующего по важности критерия R_2.

Далее назначается уступка ΔR_2, и определяется следующий экстремум R_2, и т. д.

В зависимости от поставленной цели применяются экономические, термодинамические, технологические, статистические критерии оптимизации.

Наиболее полные критерии — экономические (приведенные затраты, прибыль, себестоимость, фондоотдача, рентабельность).

Последовательность решения оптимизационных задач:

назначение и выбор критерия оптимизации;
назначение ограничений на R с помощью дополнительных уравнений, неравенств и других условий;
нахождение зависимости R от $x_1, x_2, \ldots, x_m$;

анализ зависимости $R\,(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

с целью определения x_i к числу оптимизирующих воздействий

Уравнение функции цели принимает следующий вид:

$$R = R\,(x_1, x_2, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m),$$

где первые i факторов принимаются переменными, а остальные (контролируемые, регулируемые входы) — как фиксируемые.

В окончательной формулировке задачи требуется найти значения факторов x_i обеспечивающих экстремум критерию R.

В окончательной формулировке задачи требуется найти значения факторов x_i обеспечивающих экстремум критерию R

Необходимым элементом оказывается составление и решение уравнений математического описания. Использование аналитических методов при определении решения предпочтительно и более плодотворно, так как при этом удается исследовать характер полученного решения. Однако это не всегда возможно, и поэтому широко используются численные методы оптимизации с применение ЭВМ.

Среди аналитических методов оптимизации следует указать методы испытания функций на экстремум, известные из школьной программы, вариационного исчисления, математического программирования, принцип максимума.

Метод множителей Лагранжа

В тех случаях, когда необходимо исследовать на экстремум функцию z (x,y) при дополнительных одном или нескольких условиях f (x, y) = O, пользуется метод множителей Лагранжа. Это задачи на условный экстремум.

Суть метода заключается в том что вводится функция Лагранжа

$$\Phi(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda f(x, y),$$

λ множитель Лагранжа.

Функция Лагранжа исследуется на экстремум, необходимым условием служит равенство нулю частных производных $\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_\lambda$:

$$\begin{cases} \Phi'_x = z'_x(x, y) + \lambda f'_x(x, y) = 0, \\ \Phi'_y = z'_y(x, y) + \lambda f'_y(x, y) = 0, \\ \Phi'_\lambda = f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из указанной системы уравнений определяем координаты стационарной точки

$$(x_c,\ y_c,\ \lambda),$$

в которой возможен экстремум.

Затем, воспользовавшись достаточным условием или исследованием окрестности

$$(x_c,\ y_c,\ \lambda),$$

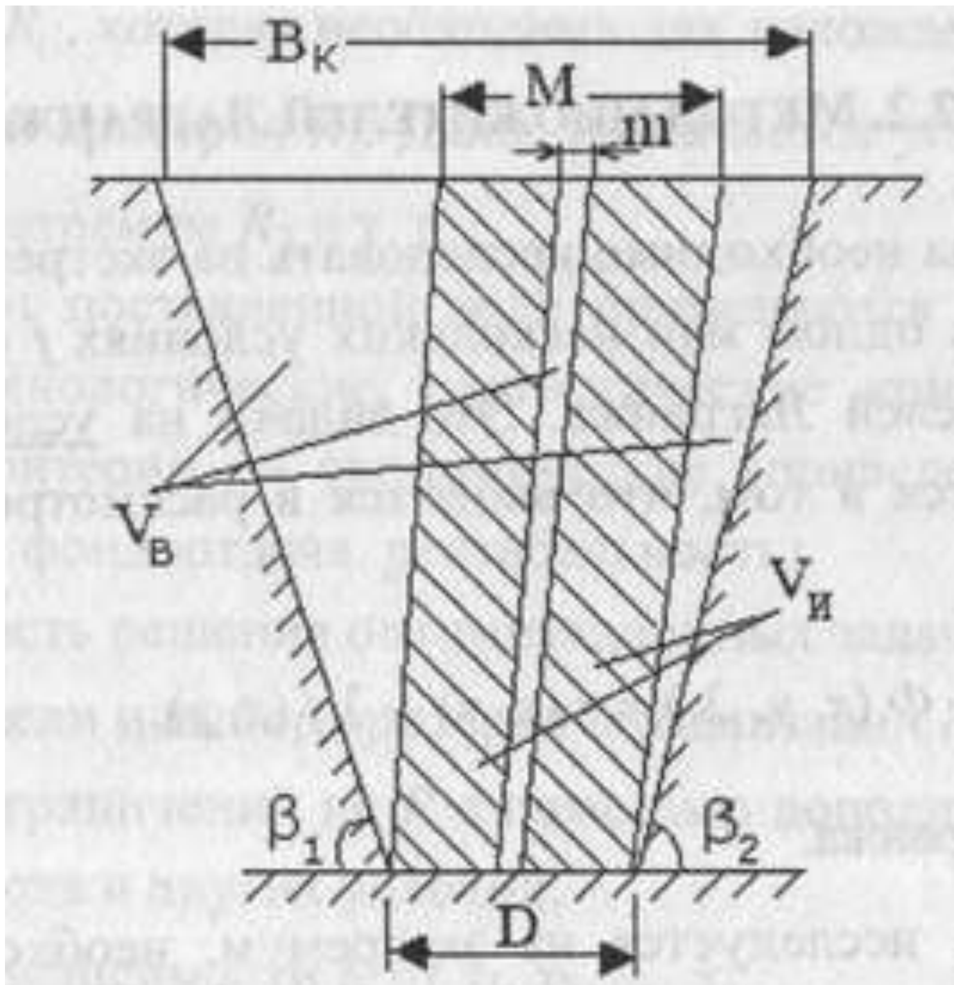
устанавливаем характер экстремума.

С помощью метода множителей Лагранжа легко решаются задачи выбора кратчайшего маршрута трассы магистрального канала, распределения сырья между параллельно работающими установками (прессами), обоснования формы и размеров поперечного сечения каналов прессов и многие другие.

Пример
Определить предельную глубину карьера $H_р$ (рис.) исследованием максимум среднего коэффициента вскрыши

$$K_{ср} = \frac{V_в}{V_и}$$

$V_в$ общий объём пустых пород в конечных контурах карьера,
$V_Н$ — отрабатываемые запасы полезного ископаемого).



Решение

Объём $V_в$ представим в виде

$$V_B = \left[B_K H_P - \frac{1}{2} H_P^2 (ctg\beta_1 + ctg\beta_2) \right] - V_H,$$

где Вк—разнос карьера; β_1, , β_2 —углы погашения бортов карьера.

В этом случае средний коэффициент вскрыши равен

$$K_{cp} = \frac{1}{V_и} \left[B_к H_P - \frac{1}{2} H_P^2 (ctg\beta_1 + ctg\beta_2) \right] - 1.$$

Исследуем на максимум $К_{ср}(Н_р)$ классическим методом.

Находим первую производную К'ср и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{dK_{cp}}{dH_p} = \frac{1}{V_u}\left[B_к - H_p(ctg\beta_1 + ctg\beta_2)\right] = 0,$$

оттуда

$$H_p = \frac{B_к}{\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2}.$$

вторая производная

$$\frac{d^2K_{cp}}{dH_p^2} = -(\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2)$$

меньше нуля, то найденное значение $Н_р$ соответствует максимуму $К_{ср}$.

Учитывая,

$$B_к = K_r(M - m),$$

формулу расчета H_p можно представить в виде

$$H_p = \frac{K_r(M - m)}{\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2},$$

K_r граничный коэффициент вскрыши карьера

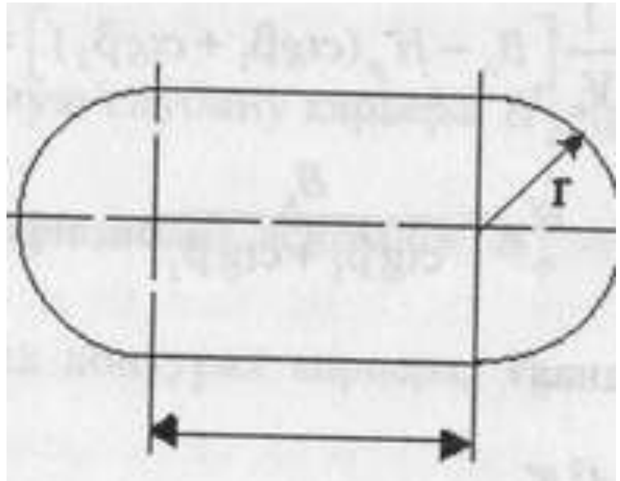
Пример
Оптимальная форма поперечного сечения гранулы определяется условием образование (формование, прессование) происходит при минимума потерь на трение материала (уголь, глина, керамическая масса) о стенки пресс-формы. В связи с этим отношение поверхности объему должно быть наименьшим. Другими словами, требуется определит форму поперечного сечения гранулы, при которой обеспечивается минимум поверхности σ при заданном объеме V.

Принимая во внимание, что боковая поверхность σ и объем V линейно зависят от высоты гранулы h, задача сводится к минимизации периметра U поперечного сечения пресс-формы при данном значении поперечного сечения S.

Требуется определить l° и r° обеспечивающие $\min \{U\}$

при S = const.

Решение.
В общем случае рассмотрим сечение, состоящее из прямоугольника высотой 2r, основанием l, по бокам ограниченное полукругами (рис.).



Периметр равен $U = 2l + 2\pi r$, площадь поперечного сечения $S = \pi r^2 + 2rl$

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = U + \lambda[S - f(r,\ell)] = 2\ell + 2\pi r + \lambda(S - \pi r^2 - 2r\ell).$$

В соответствии с необходимым условием экстремума функции находим частные производные Ф по и приравниваем к нулю:

$$\begin{cases} \Phi_\ell' = 2 - 2r\ell = 0; \\ \Phi_r' = 2\pi - 2\pi r\lambda - 2\ell\lambda = 0; \\ \Phi_\lambda' = S - \pi r^2 - 2r\ell = 0, \end{cases}$$

отсюда

$$\ell^o = 0, \quad r^o = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad \lambda = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, поставленной задаче наиболее соответствует круглое сечение. то есть при изготовлении цилиндрических гранул будет меньше расходоваться энергии на бесполезное трение о стенки пресс-формы вследствие уменьшения трущейся поверхности.

Обобщая результат, отметим, что на изготовление цилиндрических бункеров, банок расходуется меньше материала, на изготовление прямоугольных, отличающихся от цилиндрических форм, емкостей.

Однако ряд процессов (тепло- и массообмен. сушка) интенсифицируются ростом отношения поверхности частицы к ее объему.

Рассматривая общий случай частицы с поперечным сечением и толщиной в, находим, что

$$\sigma = (2\pi r + 2\ell)b + 2(\pi r^2 + 2\ell r),$$

$$V = (\pi r^2 + 2r\ell)b.$$

отношение

$$\frac{\sigma}{V} = \frac{2}{b} + \frac{2(\pi r + \ell)}{\pi r^2 + 2r\ell}.$$

Определив производную отношения $\left(\frac{\sigma}{V}\right)$

по l устанавливаем, что

$$\left(\frac{\sigma}{V}\right)'_{\ell} = \frac{2(\pi r^2 + 2r\ell) - 4r(\pi r + \ell)}{(\pi r^2 + 2r\ell)^2} = -\frac{4\pi r^2}{(\pi r^2 + 2r\ell)^2} < 0$$

и, следовательно, с увеличением l отношение $\left(\frac{\sigma}{V}\right)$ — уменьшается.

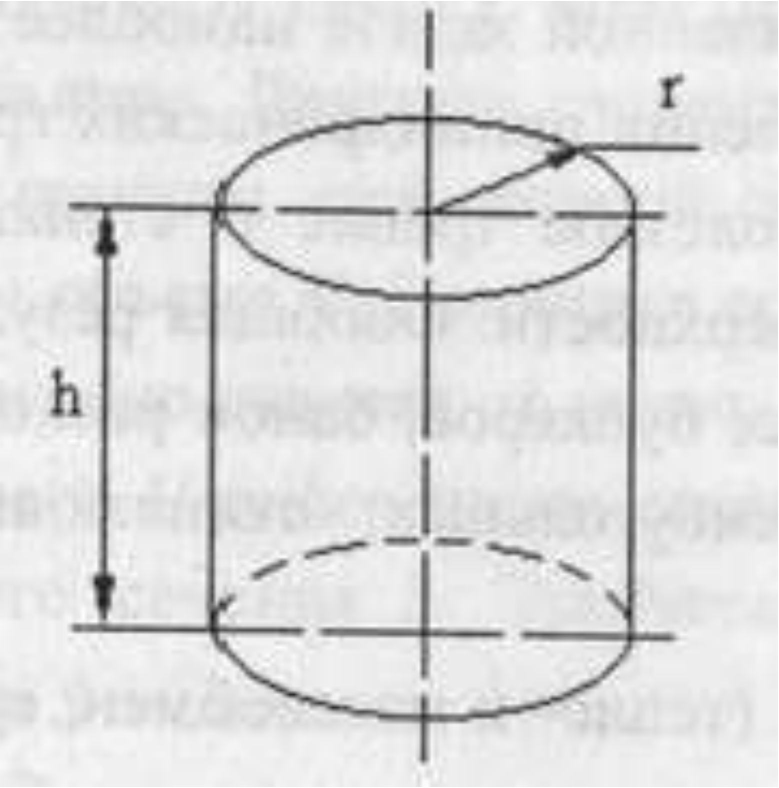
Отсюда следует вывод, что отношение $\left(\frac{\sigma}{V}\right)$

увеличивается при заданных r, b с уменьшением l. Наилучшей формой частицы

при определении r в этом случае будет шар (с (уменьшением в отношение — $\left(\frac{\sigma}{V}\right)$ растет).

Пример

Оптимальные значения высоты h и диаметра d = 2 r цилиндрической емкости (брикета, гранулы) находятся из условия минимума поверхности σ(h,r) При заданном значении объема V(h. г) (рис.).



Решение.

По условию задачи нужно минимизировать $\sigma = 2\pi(r^2 + rh),$

$$V = \pi r^2 h = \mathrm{const}\ .$$

Меньшая поверхность при V = const —это меньшие потери топлива от намокания (брикеты), увеличенная прочность (гранулы, брикеты, наименьший расход материала (емкости).

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = 2\pi(r^2 + rh) + \lambda(V - 2\pi r^2 h).$$

Дифференцируем эту функцию по r, h, λ и приравниваем нулю полученные выражения:

$$\begin{cases} \Phi'_r = 2\pi(2r + h) - 2\pi rh\lambda = 0; \\ \Phi'_h = 2\pi r - \pi r^2\lambda = 0; \\ \Phi'_\lambda = V - \pi r^2 h = 0. \end{cases}$$

Решением системы уравнений находим оптимальные значения

$$r^{\circ} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \qquad h^{\circ} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \qquad \lambda = 2\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}.$$

Далее убеждаемся, что в найденной точке min поверхности

$$\sigma_{min} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Таким образом, оптимальным отношением диаметра гранулы к ее высоте равняется

$$\frac{d}{h} = 1.$$

Это значит, что высота угольных брикетов должна равняться ~ 60 мм, а металлические цилиндрические емкости имеют наименьшую металлоемкость при равенстве высоты диаметру.

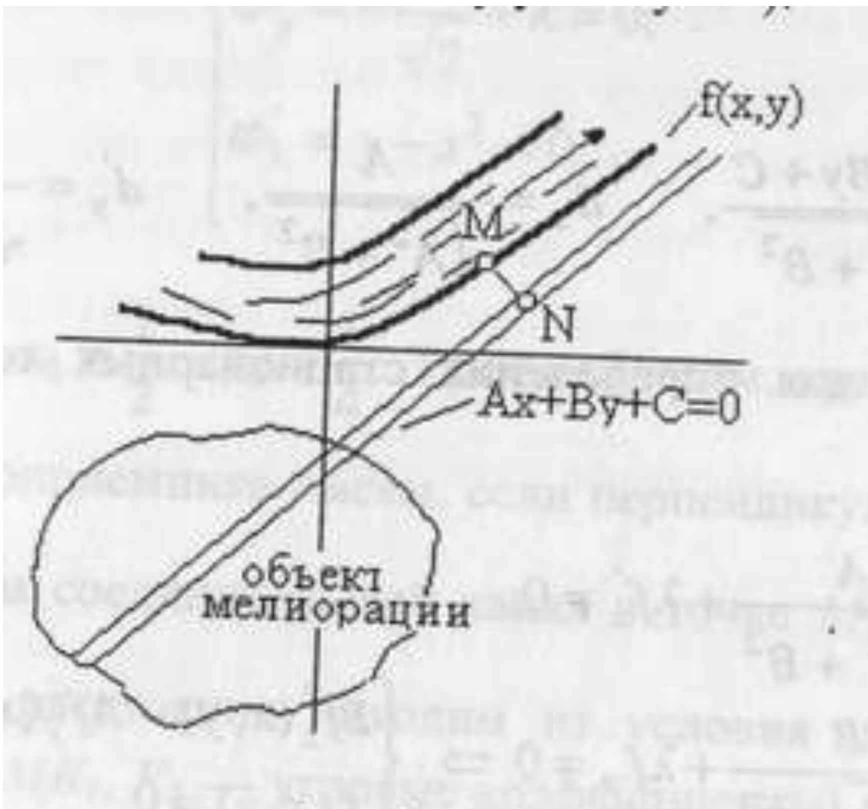
Пример

Одна из многих задач осушения есть прокладка маршрутов каналов.

Известно, что магистральный канал желательно проводить в кратчайшем направлении к водоприемнику (рис.) по самым низким отметкам дна массива. Валовые каналы для уменьшения объема работ и лучшего сброса воды желательно направлять по наибольшему уклону поверхности. Отсюда вытекают математические задачи

на экстремум («кратчайшее расстояние»);

поиск градиента («по наибольшему уклону»).



Решение

В принятой системе координат уравнение магистрального канала имеет вид: $Ax + By + C = 0$.

Точка $M(x,y)$ находится на береговой линии водоприемника уравнение которой $f(x,y)=0$.
Расстояние от точки $M(x,y)$ до магистраного канала $Ax + By + C = 0$ равно (расстояние по прямой)

$$d = \frac{|Ax_o + By_o + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $x_{\circ}$ $y_{\circ}$ — координаты точки M. Необходимо минимизировать $d(x, y)$ при условии $f(x,y)= 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, \lambda) = d(x, y) + \lambda f(x, y),$$

где d(x, y) — функция точки М : λ множитель Лагранжа

Исследуем Ф(x, y, λ) нахождением производных

$$\begin{cases} \Phi'_x = d'_x + \lambda f'_x = 0; \\ \Phi'_y = d'_y + \lambda f'_y = 0; \\ \Phi'_\lambda = f(x, y) = 0. \end{cases}$$

Причем

$$d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad d'_x = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad d'_y = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Следовательно, для определения стационарных точек имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + \lambda f'_x = 0; \\ \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} + \lambda f'_y = 0 \\ f(x, y) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Bf'_x(x, y) - Af'_y(x, y) = 0; \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда береговая линия водоприемника удовлетворительно описывается параболой

$$y = x^2$$

(для этого выбираем начало координат соответственным образом), а линия магистрального канала, проведенного, например, по градиенту поверхности, уравнением прямой

$$x - y - 2 = 0.$$

Требуется найти расстояние от некоторой точки М ($x_\circ$ $y_\circ$)

параболы $y = x^2$ до прямой $x-y-2 = 0$.

Расстояние от точки М ($x_\circ$ $y_\circ$) до прямой $x-y-2 = 0$ ($A = 1, B = -1, C = -2$) равно:

$$d = \frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{2}}.$$

Составим функцию Лагранжа для min {d} при f(x, y) = 0

$$\Phi = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}} + \lambda(y-x^2).$$

Частные производные $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_\lambda$ приравниваем к нулю:

$$\begin{cases} \Phi'_x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2x\lambda = 0; \\ \Phi'_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda = 0; \\ \Phi'_\lambda = y - x^2 = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, кратчайшее расстояние от магистрали до водоприемника имеем, если перпендикулярно к магистральному каналу проведем соединительный канал в точке

$$M\ (\frac{1}{2},\frac{1}{4}).$$

Уравнение прямой кратчайшего расстояния находим из условия перпендикулярности двух прямых

$$K_1 \cdot K_2 = -1$$

(K_1, K_2 — угловые коэффициенты).

Откуда угловой коэффициент соединительного канала K_2 = -1, а его уравнение

$$y=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2}) \quad x+y=\frac{3}{4}.$$

Решаем совместно

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{4}; \\ x-y=2, \end{cases}$$

Решая находим координаты точки N:

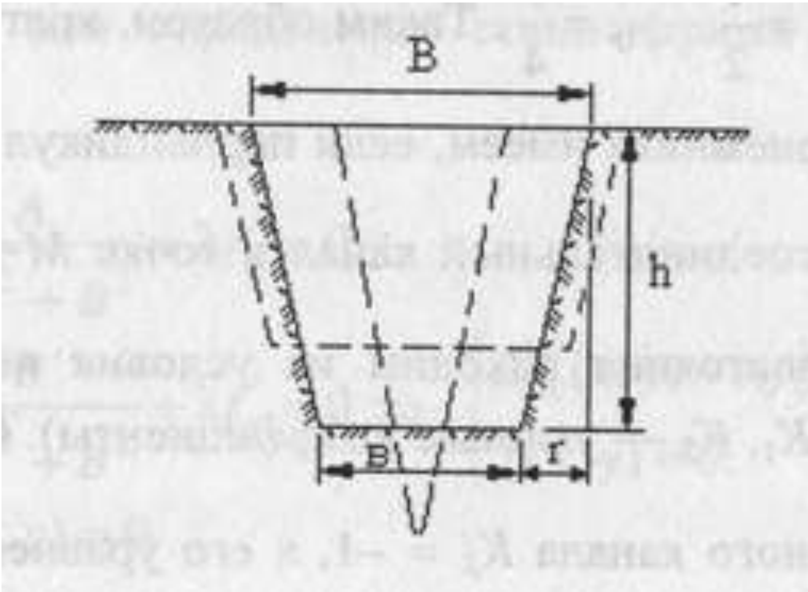
$$x_1 = \frac{11}{8}, \ y_1 = -\frac{5}{8}.$$

Из уравнения d (M) находим длину соединительного канала и объем необходимых работ.

Пример
При рытье каналов осушительной сети в качестве критерия можно рассматривать минимум земляных работ, максимум устойчивости поверхности стенок канала, минимум энергоемкости при его рытье и т.д.
Задача может быть разделена на две части.

В первой части при заданном гидравлическими расчетами поперечном сечении S=const периметр поперечного сечения U должен быть наименьшим, то есть min {U(b,h)} при S(b,h)=const.

Это должно привести к повышению устойчивости стенок канала (минимум поверхности боковых стенок соответствует минимуму их потенциальной энергии), к снижению энергоемкости экскавации грунта при рытье канала и, наконец, к уменьшению потерь воды за счет инфильтрации при транспорте ее водоприемник.



Решение.
Коэффициент заложения откосов $m = \frac{r}{h}$ равен 1,0-1,5 для минеральных грунтов, m = 0,5 для торфяных мягких грунтов.

Для принятых обозначений

$$S = hb + rh = bh + mh^2,$$

$$U = b + 2\sqrt{r^2 + h^2} = b + 2h\sqrt{1+m^2}.$$

Вводим функцию Лагранжа

$$\Phi = b + 2h\sqrt{1+m^2} + \lambda(S - bh - mh^2).$$

Находим производные $\Phi'_в$, $\Phi'_н$, Φ'_λ и, приравняв их нулю, определим оптимальные значения $в^\circ,\ h^\circ$

Коэффициент m=const, так как канал, по условию, отрывается в фунте одного типа:

$$\Phi'_в = 1 - \lambda h = 0;$$

$$\Phi'_h = 2\sqrt{1+m^2} - в\lambda - 2mh\lambda = 0;$$

$$\Phi'_\lambda = S - вh - mh^2 = 0.$$

Откуда $$h^{\circ}=\sqrt{\frac{S}{2\sqrt{1+m^2}-m}};\quad в^{\circ}=\frac{S-mh^{0^2}}{h^0};\quad \lambda=\frac{1}{h^0}.$$

В качестве примера примем S=7,875m (h = 3,5 м; в = 0,5 м; B = 4.0 м; m= 0,5;
U = 8,33 м).
При принятых S и m оптимальные размеры равны

$$h^{\circ}=\sqrt{\frac{7,875}{2\sqrt{1+0,5^2}-0,5}}=2,12\ \text{м};\quad в^{\circ}=\frac{7,875-0,5\cdot 2,12^2}{2,12}=2,65\ \text{м};$$

$$B^0=2,65+2\cdot 0,5\cdot 2,12=4,77\ \text{м}.$$

Оптимальное значение периметра U°=7,39 м, то есть на 13% меньше U=8,33 м.

Вторая часть задачи связана с определением min {B} при S=const.

Это означает стремление уменьшить потери земельных угодий, месторождений под открытую осушительную сеть. В этом случае имеем

$$B = в + 2mh \text{ и } S = вh + mh^2.$$

Следуем на min {B(в,h)} при m=const. S=consl.

Функция Лагранжа

$$\Phi = в + 2mh + \lambda (S - вh - mh^2).$$

Исследуем на минимум $\Phi (h, в, \lambda)$:

$$\Phi'_в = 1 - h\lambda;$$

$$\Phi'_h = 2m - в\lambda - 2mh\lambda = 0;$$

$$\Phi'_\lambda = S - вh - mh^2 = 0.$$

Откуда

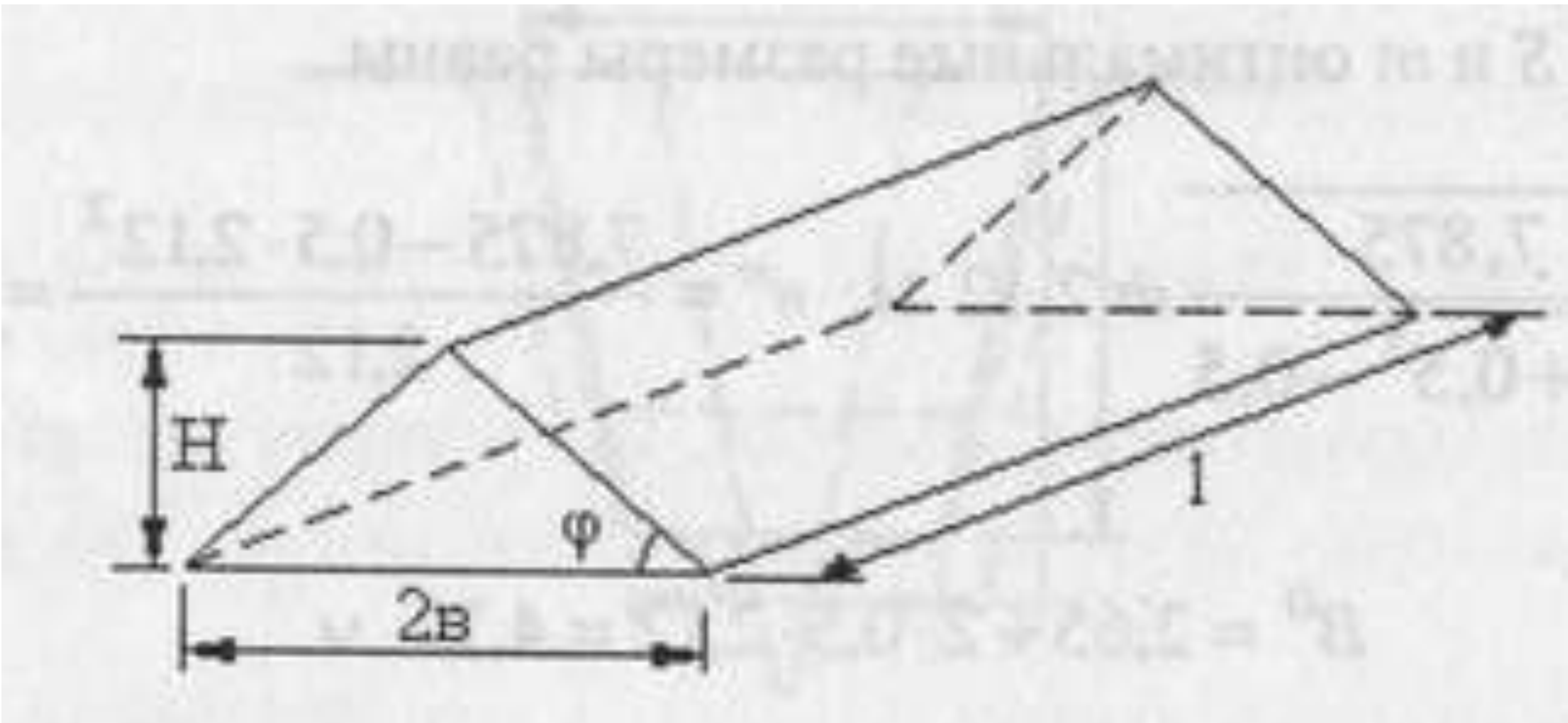
$$h^\circ = \sqrt{\frac{S}{m}}, в^\circ = 0.$$

Таким образом, в тех случаях, когда нет опасности заиления канала, следует проектировать каналы с в = 0 по дну.

Для вышеуказанного примера В= 3,97 м, что приводит к значительному уменьшению потерь площади месторождения под каналы открытой осушительной сети.

Пример

Определить размеры штабеля (навала, валка) угля при условии минимума поверхности в заданном объеме (рис.). Эта постановка задачи выкает из требования минимизации потерь или затрат например на тент .



Поверхность штабеля равна $$\sigma = 2\ell\sqrt{H^2 + в^2},$$

объем $$V = Hв\ell$$

(с целью упрощенная вычислений торцевой поверхностью пренебрегаем в силу ее малости по сравнению с остальной боковой поверхностью).
Требуется определить Н и в, при которых штабель имеет наименьшую поверхность при условии

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H}{в} \le 1,$$

, где $\varphi \le 45°$ — угол естественного откоса

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = 2\ell\sqrt{H^2 + в^2} + \lambda(V - Hв\ell),$$

а затем находим частные производные и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \Phi'_в = \dfrac{2в\ell}{\sqrt{H^2 + в^2}} - \lambda H\ell = 0; \\ \Phi'_н = \dfrac{2H\ell}{\sqrt{H^2 + в^2}} - \lambda в\ell = 0; \\ \Phi'_\lambda = V - Hв\ell = 0. \end{cases}$$

Откуда находим

$$H^\circ = в^\circ = \sqrt{\frac{V}{\ell}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = 1,\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{H}.$$

По условию

$$\Phi''_{вв} \cdot \Phi''_{нн} - (\Phi''_{вн}) > 0$$

устанавливаем, что в точке Н=в минимум так как

$$\Phi''_{вв} = \frac{2\ell H^2}{(H^2 + в^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \qquad \Phi''_{нн} = \frac{2\ell в^2}{(H^2 + в^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Таким образом, штабель имеет наименьшую поверхность, если его высота в два раза меньше ширины, то есть при $\varphi = 45°$. К этому следует стремиться, зная что всякое уменьшение угла φ приводит к увеличению потерь при хранении. Например, штабель с откосом боковой поверхности $\varphi = 30$. а это бывает при долгом хранении угля в штабеле, имеет боковую поверхность на 8% больше.

Расчеты показывают что при изменение φ пределах 40-45° существенного изменения поверхности не наблюдается (до 0,7%).

Пример

Контейнер для хранения и перевозки грузов устанавливается в кузове автомобиля. Одним из условий может быть плотная установка контейнеров платформе, например, кузова автомобиля. Использование Лагранжа позволяет решить и эту задачу выбора размеров контейнера при данном объеме V и ширине основания l таким образом, чтобы он имел меньшую материалоемкость, т.е. при заданных V и l определить размеры так, чтобы контейнер имел наименьшую поверхность σ.

Решение.
Объем и поверхность контейнера в виде параллелепипеда соответственно равны

$$V = в\,\ell\,H \text{ и } \sigma = 2(H\ell + Hв + в\ell),$$

H и в — высота и длина основания контейнера.

Функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi = 2(H\ell + Hв + в\lambda) + \lambda(V - в\ell H)$$

Находим производные $\Phi'_H, \Phi'_в, \Phi'_\lambda$

и приравниваем их к нулю

$$\begin{cases} \Phi'_H = 2\ell + 2в - \lambda в\ell = 0; \\ \Phi'_в = 2H + 2\ell - \lambda\ell H = 0; \\ \Phi'_\lambda = V - в\ell H = 0. \end{cases}$$

Минимум поверхности контейнера имеем при $H = в = \sqrt{\frac{V}{\ell}}$.

Исследованием $\sigma(H, в)$ и $V(H, в)$

устанавливаем $\min \sigma$ при $H = в$.

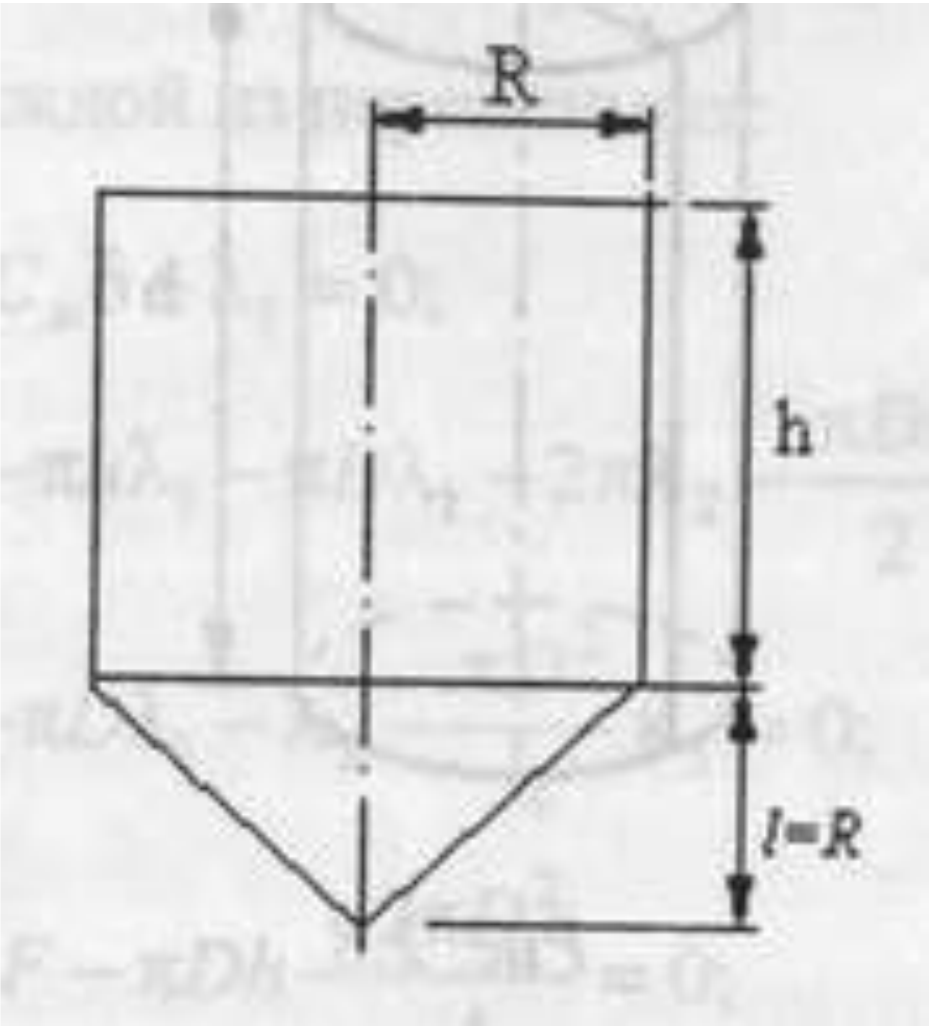
Следует заметить, что V и l определяются из условия требований транспорта продукции.

Так V выбираться по условию грузоподъемности а l из условия размещения n- го числа контейнеров в кузове

Пример

Определение емкости (бункера) цилиндр + конус может проводиться при условии минимальной материалоёмкости материала и уменьшения интенсивности охлаждения

Сформулированное условие требует нахождения R h (рис.) при которых бункер цилиндр + конус имеет наименьшую поверхность σ при заданном объеме V.



Отождествим поставленную задачу с оптимизацией периметра поперечного сечения о бункера:

$$\sigma = 2R + 2\sqrt{2}R + 2h$$

при

$$S = 2Rh + R^2$$

(площадь поперечного сечения отождествим с объемом).

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = (2R + 2\sqrt{2}R + 2h) + \lambda(2Rh + R^2 - S).$$

$$\Phi'_h, \Phi'_R, \Phi'_\lambda$$

Находим частные производные

и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \Phi'_R = 4{,}82 + 2h\lambda + 2R\lambda = 0; \\ \Phi'_h = 2 + 2R\lambda = 0; \\ \Phi'_\lambda = 2Rh + R^2 - S = 0, \end{cases}$$

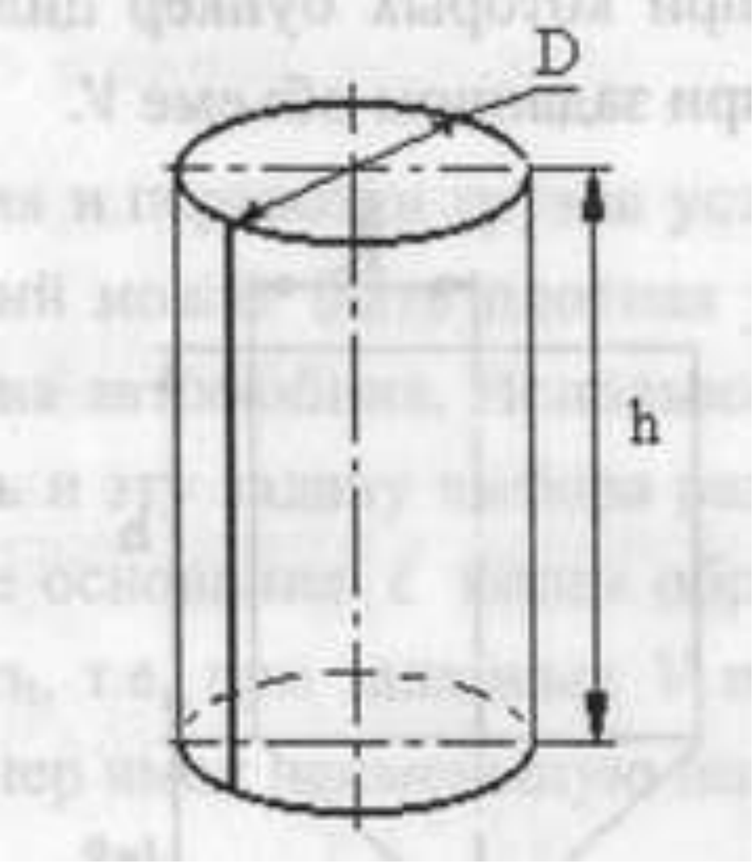
откуда устанавливаем оптимальное соотношение размеров бункера цилиндр- конус

$$h = \sqrt{2}R.$$

Пример

Определить размеры цилиндрической емкости заданного объема V так что бы стоимость ее изготовления была минимальной.

Учитываются расходы на стоимость металла, толщина которого δ , стоимость сварки емкости сверху, сбоку, снизу.



Решение

Функцию платежа S, которую нужно свести к минимуму, можно записать в виде

$$S(F,\ell) = C_м \delta F + C_п \ell,$$

где $C_м$ — стоимость 1 м^2 металла; $C_п$— стоимость 1 м сварки; F — площадь поверхности емкости; l — длина швов сварки у одной емкости.

Дополнительные условия — ограничения, налагаемые геометрическими соображениями:

$$F = \pi D h + \frac{2\pi D^2}{4}; \ \ell = 2\pi D + h; \ V = \frac{\pi D^2}{4} h.$$

Таким образом, необходимо минимизировать функцию S(F,l),на которую налагаются следующие связи:

$$\varphi_1(F, D, h) = F - \pi D h - \frac{2\pi D^2}{4} = 0;$$

$$\varphi_2(D, h, \ell) = \ell - 2\pi D - h = 0;$$

$$\varphi_3(D, h) = V - \frac{\pi D^2 h}{4} = 0.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = S(F, \ell) + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3$$

и затем в соответствии с необходимым условием экстремума найдем частные производные $\Phi(F, \ell)$

по каждой из переменных:

$$\Phi'_F = C_м \delta + \lambda_1 = 0;$$

$$\Phi'_D = -\pi h \lambda_1 - \pi D \lambda_1 - 2\pi \lambda_2 - \frac{\pi D h}{2} \lambda_3 = 0;$$

$$\Phi'_h = -\pi D \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{\pi D^2}{4} \kappa_3 = 0;$$

$$\Phi'_{\lambda_1} = F - \pi D h - \frac{2\pi D^2}{4} = 0;$$

$$\Phi'_{\lambda_2} = \ell - 2\pi D - h = 0;$$

$$\Phi'_{\lambda_3} = V - \frac{\pi D^2 h}{4} = 0.$$

Из уравнений указанной системы находим

$$\lambda_1 = -C_м\delta, \qquad \lambda_2 = -C_n, \qquad \lambda_3 = \frac{2(h+D)C_м\delta + 4C_n}{Dh}.$$

Подставив $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в условие $\Phi'_h = 0$, находим

$$DC_м\delta + 2C_n = \frac{2h}{\pi D}\left(\frac{\pi}{2}C_м\delta D + C_n\right).$$

Откуда можно определить h и, следовательно.

$$V = \frac{\pi D^2}{4}\left[\frac{D^2 C_м\delta + 2C_n D}{C_м\delta D + \frac{2C_n}{\pi}}\right].$$

Последнее выражение представляем в виде

$$(\pi C_м \delta) D^4 + (2\pi C_п) D^3 - (4VC_м \delta) D - \frac{8VC_п}{\pi} = 0.$$

Решая последнее уравнение одним из приближенных численных методов графически определим D.

Затем из функции $\varphi_3(D, h)$ находим h и, наконец, из $\varphi_2(D, h, \ell)$

вычисляем l и из $\varphi_1(F, D, h)$ — значение F.

Таким образом, дача решена.

В заключение следует отметить, что, если m — число уравнений связей (дополнительных условий на экстремум исследуемой функции), а n — число переменных, то число «степеней свободы» равно n — m.

Если m = n то свобода отсутствует, все переменные определены, и поэтому бессмысленно говорить о максимизации функции F. При m = n функция F имеет лишь одно значение.

При m < n отсутствует свобода выбора некоторых переменных с целью максимизации или минимизации F.

Вышеуказанный метод применим при определении оптимальных размеров бункеров, циклонов и т.д.

Многие задачи технологии горных работ связаны с определением оптимальных емкостей машин (бункерные уборочные и кузовные машины, скреперы, экскаваторы и др.) при ограничениях на мощность установленных двигателей.

Это типичные задачи для приложения методов неопределенных множителя Лагранжа.