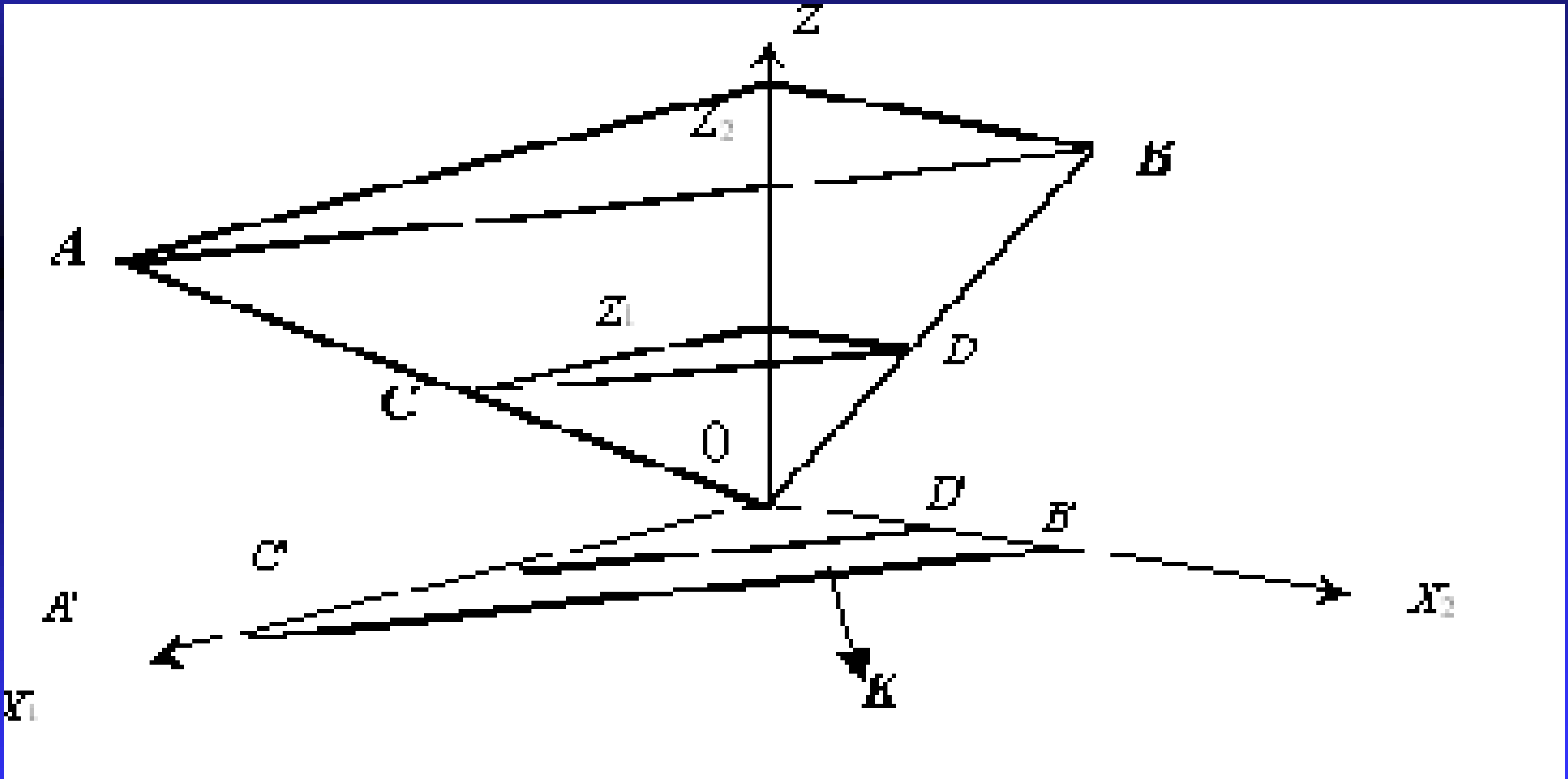
Лекция 10
Анализ линейных экономических моделей

Анализ целевой функции рассмотрим на примере. Пусть

$$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

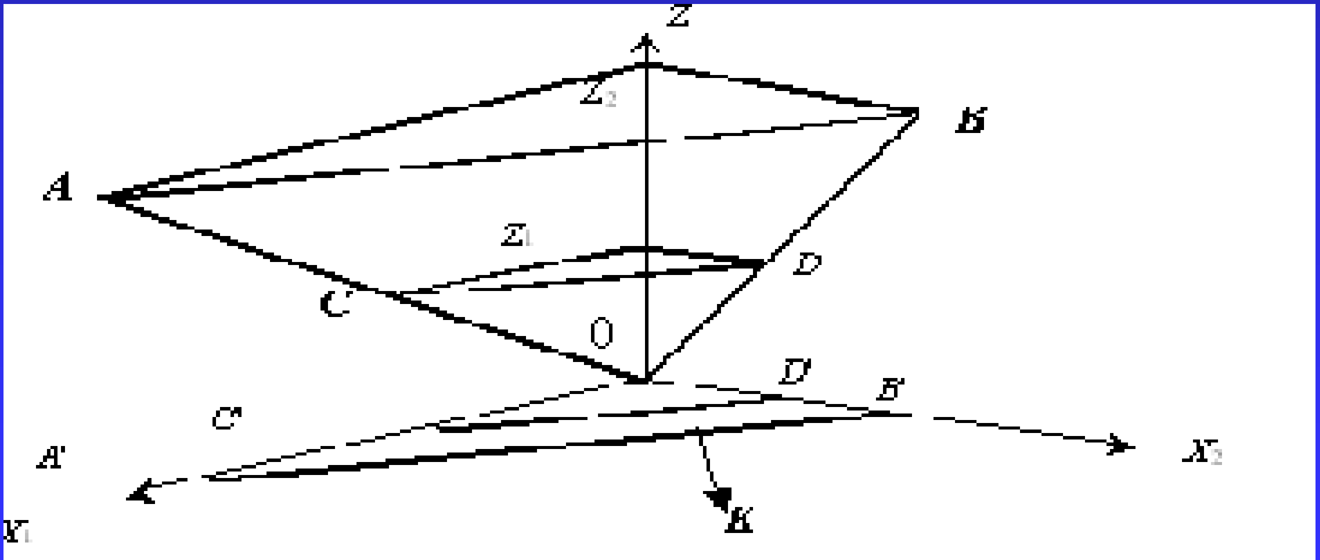
Геометрически целевая функция представляет собой плоскость *AOB* в пространстве с координатными осями x_1, x_2 и Z



— Геометрический смысл линейной целевой функции

Если значение целевой функции равно величине Z_1, то значение переменной x_1 численно равно длине отрезка cZ_1, а x_2 — длине отрезка Z_1D. Горизонтальная плоскость $Z=Z_1$ (плоскость cZ_1D) с плоскостью AOB пересекаются по лини CD. Проекция этой линии на плоскость x_1Ox_2 — $C'D'$ представляет собой линию уровня функции Z при $Z=Z_1$. Аналогично при $Z=Z_2$ линией уровня функции Z является прямая $A'B'$. Как видно из рисунка, при увеличении значения целевой функции линии уровня функции Z перемещаются в плоскости x_1Ox_2 в направлении стрелки K. Уравнение линии уровня в точке $Z=0$ определяется из выражения

$$x_2 = -0{,}5x_1$$



— Геометрический смысл линейной целевой функции

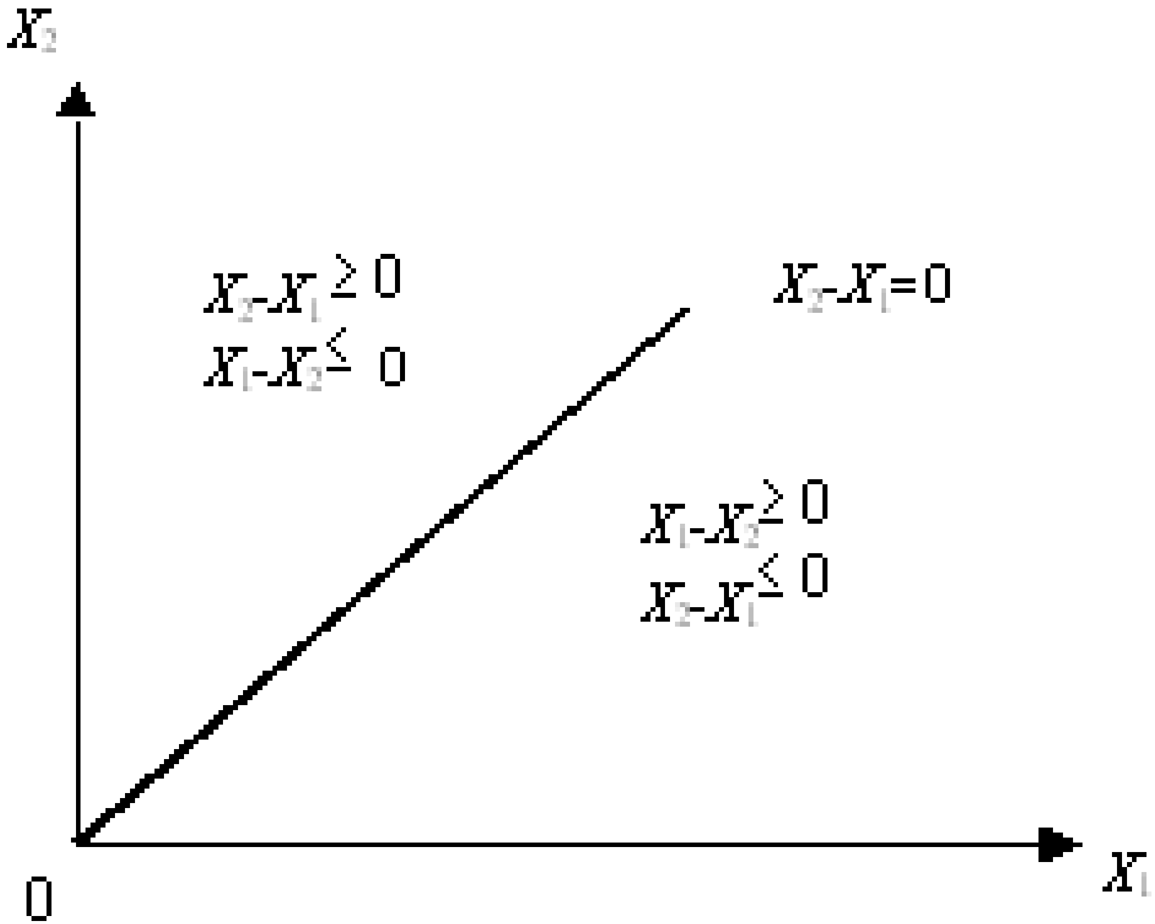
Уравнение линии уровня $C'D'$ определяется аналогично:

$$x_1 + 2x_2 = Z_1$$

$$x_2 = 0{,}5Z_1 - 0{,}5x_1$$

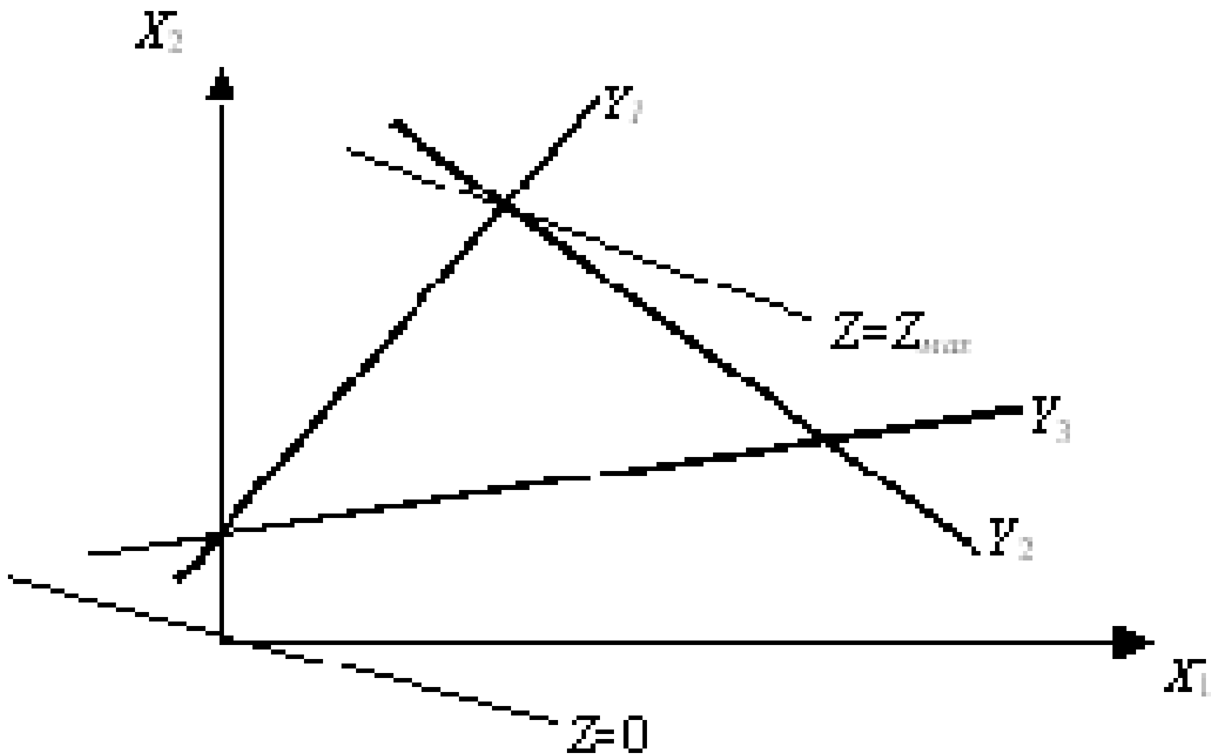
Если в качестве критерия оптимальности принят стоимостный показатель, то линия CD будет являться изокостой; если целевая функция выражает производительность (объем выпуска), то линии AB и CD будут являться изоквантами.

Анализ ограничений. В оптимизационных задачах



— Геометрический смысл линейных ограничений

Система ограничений выделяет область возможных значений оптимизируемых переменных. Для решения задач максимизации целевой функции область возможных значений должна быть ограничена сверху. Область возможных значений представляет собой выпуклый многоугольник



— Геометрический смысл системы линейных ограничений

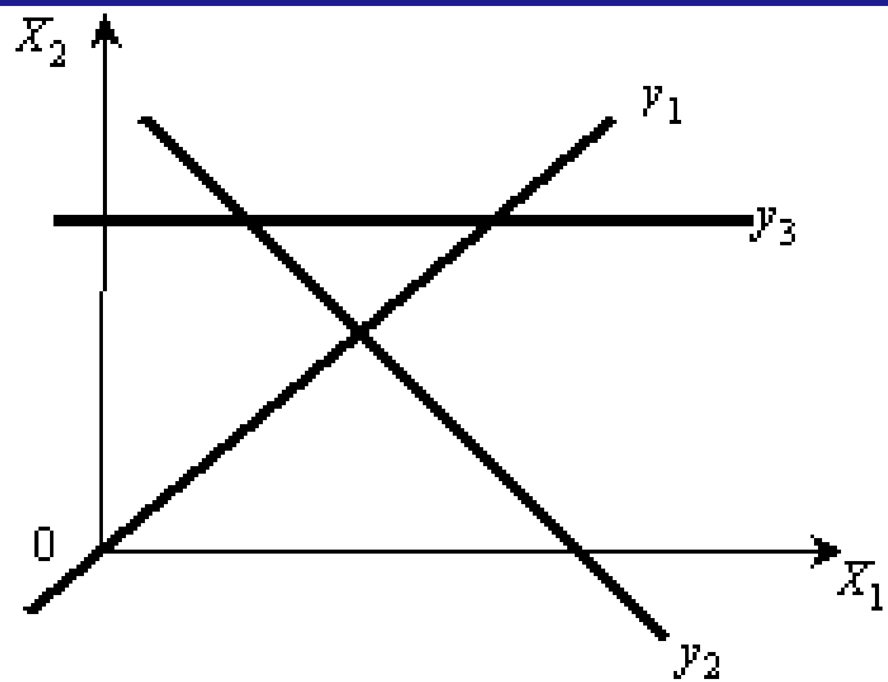
Максимальное значение целевой функции достигается в одной из вершин многоугольника решений. Поэтому система ограничений может быть представлена в виде равенств

Система равенств определяет границы области возможных значений переменных

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 = 0;$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 = 0;$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_3 = 0.$$

Вырождения в задачах линейного программирования

Вырождением называется случай пересечения в одной точке более n плоскостей (n – число оптимизируемых переменных в задаче линейного программирования)



— Геометрический смысл вырождения в задачах линейного программирования (в точке O пересекаются три прямые: $x_1=0$; $x_2=0$; $y_1=0$)

Приведение математической модели линейного программирования к стандартному виду:

Существует два вида моделей линейного программирования:

1) модели, в которых система ограничений представлена в виде неравенств

$$Z = \sum P_j x_j \to max;$$
$$\sum a_{ij} x_{ij} + a_i \geq 0;$$
$$x_j \geq 0.$$

модели, в которых система ограничений представлена в виде равенств:

$$Z = \sum P_j x_j \to max$$
$$\sum a_{ij} x_j + a_i = 0; \; x_j \geq 0.$$

В экономических задачах математические модели, как правило, имеют нестандартный вид. Например:

$$Z = \sum c_j x_j \to min; \quad \sum x_j = A;$$
$$x_{j_{min}} \leq x_j \leq x_{j_{max}}.$$

Ниже рассматриваются некоторые случаи приведения модели линейного программирования к стандартному виду.

Случай минимизации целевой функции

$$Z = c_1x_1 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to min$$

Для решения задачи максимизации целевая функция записывается следующим образом

$$-Z = -c_1x_1 - \ldots - c_jx_j - \ldots - c_nx_n \to \max$$

Прямые ограничения, накладываемые на переменные x_j, являются двусторонними

$$Z = \sum c_j x_j \to max; \quad \sum a_{ij} x_j + a_i \geq 0; \quad x_{j_{min}} \leq x_j \leq x_{j_{max}}.$$

Задача решается путем замены переменных $t_j = x_j - x_{j_{min}}.$

Модель приводится к следующему виду:

$$Z = \sum c_j \left(t_j + x_{j_{min}}\right) \to max;$$

$$\sum a_{ij} \left(t_j + x_{j_{min}}\right) + a_i \geq 0;$$

$$t_j \leq x_{j_{max}} - x_{j_{min}}.$$

По найденным оптимальным значениям определяются искомые переменные $x_j^* = t_j^* + x_{j_{min}}.$

В системе ограничений имеются равенства
В этом случае данное ограничение заменяются
двумя ограничениями в виде неравенств

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kj}x_j + \ldots + a_{kn}x_n + a_k \le 0 \quad a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kj}x_j + \ldots + a_{kn}x_n + a_k = 0$$

$$a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kj}x_j + \ldots + a_{kn}x_n + a_k \ge 0$$

В системе ограничений имеются неравенства типа ≤ 0
После приведения к стандартному виду

$$-\sum a_{ij} - a_i \ge 0 \qquad \sum a_{ij}x_j + a_i \le 0$$

Преобразования
двусторонних неравенств
Ограничение заменяется
двумя неравенствами

$$q_i \le a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le h_i$$

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \ge q_i \quad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le h_i$$