

Вывод
УРАВНЕНИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Строгое решение многих задач математической физики, связанных с течением жидкостей, распределением напряжений в массиве, переносом тепла, массы или импульса невыполнимо.

В связи с этим перед исследователем неизбежно возникает вопрос (проблема) упрощения, сокращения уравнений, чревато грубыми ошибками, если не знать истоков (основ) получения описания.

Ведь каждый член уравнения — это вполне определенный процесс или свойство объекта исследования. Поэтому целесообразно каждый раз при использовании дифференциального уравнения проанализировать прежде всего как оно было получено, и на основании этого можно правильно подойти к упрощению и пренебрежению какими-то факторами, несущественными в данной постановке задачи.

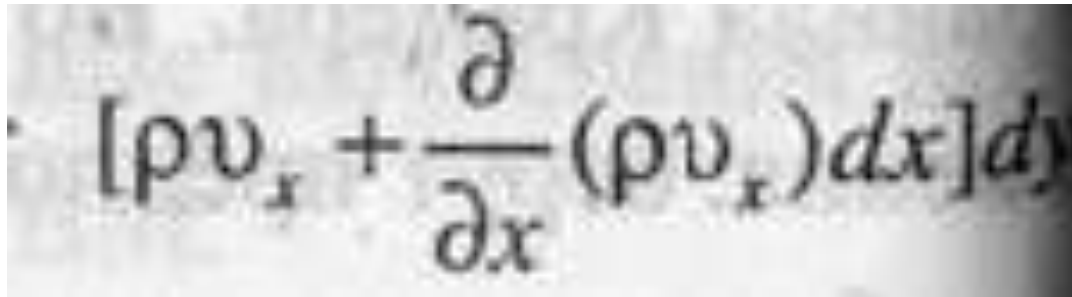
Основным принципом составления балансовых уравнений в частных производных служит соотношение:

скорость изменения = прибыль - убыль в единицу времени.

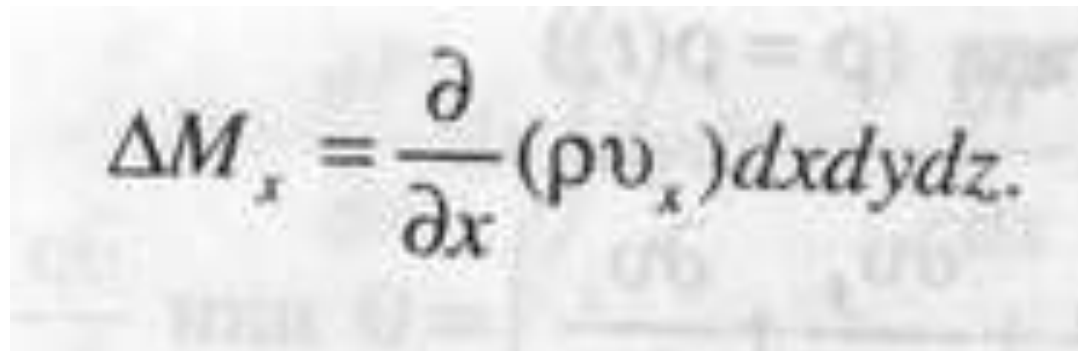
Уравнение неразрывности (сплошности)

Выделим в потоке движущейся жидкости элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz . Вследствие неразрывности потока весь объем выделенного параллелепипеда постоянно заполнен движущейся жидкостью. При этом масса поступающей и выходящей жидкости в общем случае различна, что обусловлено непостоянством величин скорости v и плотности ρ .

Через площадку $dydz$ левой грани за единицу времени втекает количество жидкости равное $\rho v_x dydz$, а через противоположную грань вытекает


$$\left[\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx \right] dydz$$

Таким образом, приращение массы жидкости в объеме dV , вызванная различием ρ и v_x на левой и правой гранях параллелепипеда, равно:


$$\Delta M_x = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx dy dz.$$

Точно так же устанавливаем для направлений, перпендикулярных OY, OZ:

$$\Delta M_y = \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dx dy dz;$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) dx dy dz.$$

Полное приращение массы жидкости в параллелепипеде dV за единицу времени равно

$$\Delta M = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz.$$

При неразрывности потока изменение массы в объеме dV вызвано изменением плотности жидкости. Следовательно,

$$\Delta M = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Приравнявая друг другу два полученных выражения для ΔM

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

оттуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0.$$

Полученное уравнение носит название общего уравнения неразрывности сплошности

В частных случаях уравнение неразрывности принимает следующий вид

Для капельной (несжимаемой) жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ или } \text{div } \vec{v} = 0;$$

Для однородного газа ($\rho = \rho(t)$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \text{ или } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div } \vec{v} = 0;$$

Для установившегося движения

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0.$$

Уравнение движения

Вывод уравнения движения основан на известном законе механики: сила равна массе, умноженной на ускорение.

В любой точке движущегося потока должно иметь место равенство сил обуславливающих движение.

Таковыми силами являются сила тяжести сила давления (перепад давления) и сила трения.

Выделим в жидкости, находящейся в движении, элементарный параллелепипед с объемом dV и ребрами $dx dy dz$. Найдем проекции на ось Ox силы тяжести действующих на этот элементарный объем.

Сила тяжести, приложенная в центре тяжести элемента dV выражением

$$q_x \rho dV = q_x \rho dx dy dz,$$

где q_x — проекция ускорения силы тяжести (m^2/c) на Ox по длине ребра dx .

Эта сила действует против действующей силы давления.

Проекция действующей силы давления

$$Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dydz = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz.$$

Действие силы трения рассматривают вначале на примере движения плоского ламинарного потока, в котором проекция скорости v_x зависит только от y . В этом случае сила трения возникает лишь на боковых гранях элемента.

На расстоянии y от поверхности грани сила трения равна $-Sdx dz$ и направлена против движения, так как скорость движения здесь меньше, чем в самом элементе. В сечении $y + dy$ сила трения равна

$$\left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx dz$$

и направлена в сторону движения, поскольку в том случае скорость движения жидкости больше, чем в самом элементе.

Проекция равнодействующих сил равна

$$\left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx dz - S dx dz = \frac{\partial S}{\partial y} dx dy dz,$$

где S — сила трения на единицу поверхности

По закону Ньютона

$$S = \mu \frac{dv_x}{dy},$$

где μ — вязкость среды

Подставив значение S в выражение для проекции, получим

$$\frac{\partial S}{\partial y} dV = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dV.$$

В общем случае, когда скорость v_x по всем трем направлениям

проекция силы трения на ОХ будет равна

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dV = \mu \nabla^2 v_x dV,$$

$\nabla^2 v_x$ - символ, называемый оператором Лапласа.

Складывая проекции всех сил на ОХ, приложенных к dV , получим

$$\left[\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right] = 0.$$

Эта равнодействующая всех сил равна произведению массы элемента ΔV

на его ускорение

$$\frac{dv_x}{dt}$$

$$\rho \frac{dv_x}{dt} dV = \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] dV,$$

$$\frac{dv_x}{dt}$$

полная производная скорости по времени, равная

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, уравнение движения жидкости в проекции на ось OX имеет вид:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho q_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right).$$

Аналогично получаются уравнения в проекциях на OY и OZ

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho q_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right);$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho q_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

Все три уравнения образуют систему дифференциальных уравнения Навье-Стокса, справедливых как для ламинарного, так и для турбулентного течения.

Если μ постоянно, то систему уравнений в проекциях на Ox , Oy , Oz можно заменить одним векторным:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}, \text{grad } \vec{v}) = \vec{q} \rho - \text{grad} P + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

или

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad } \vec{v}) = \vec{q} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

— коэффициент кинематической вязкости ($\text{м}^2/\text{с}$).

Уравнения Навье-Стокса могут быть выведены для сжимаемой жидкостей.

Первое из уравнений, относящееся к ОХ, имеет вид

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho q_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right].$$

Подобные же уравнения имеют место для ОУ и ОZ.

Уравнение движения для несжимаемой жидкости получается из последнего уравнения, если положить

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

т.е. допустить справедливой гипотезу неразрывности потока.

Уравнение теплового баланса

Поступающее в рассматриваемый единичный объем dV тепло при установившемся состоянии равно такому же количеству отходящего тепла. К данному, так же как и при выводе в предыдущем случае, тепло подводится за счет теплопроводности и с помощью материальных частиц, протекающих через единичный объем при одновременном его охлаждении. Если температура этого объема не изменяется во времени, то общее количество подведенного тепла должно равняться нулю, и если учесть наличие источников тепла q_i то будем иметь уравнение

$$c\gamma \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_i.$$

где c — теплоемкость среды; γ — удельный вес; λ — теплопроводность.

В левой части уравнения представлено тепло в единичном объеме dV которое используется для нагревания на dT частиц, протекающих через параллелепипед со сторонами dx, dy, dz . Это тепло покрывается за счет подвода из окружающей среды (первый член правой части уравнения) и за счет источника тепла q_i .

Разделив обе части уравнения на $c\gamma$ получим

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_i}{c\gamma},$$

или, в векторной форме:

$$(\vec{v}, \text{grad}T) = a \nabla^2 T + \frac{q_i}{c\gamma},$$

где $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$

коэффициент температуропроводности среды.

Подобное уравнение используется при анализе распределения тепла влаги и других субстанций в массиве.

Обычно система состоит из уравнений неразрывности, движения, теплопроводности (диффузии) и начальных и граничных условий.

С помощью этих уравнений могут быть решены многие задачи обогащения и обезвоживания и т.д. и т.п.