Уравнения математической
в
ОПИСАНИИ ПРОЦЕССОВ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Решение вопросов организации эффективной добычи полезных ископаемых требует изучения закономерностей движения воды, тепла, распределен напряжений в массиве, в процессах переработки пород.

Указанные задачи могут быть решены с помощью уравнений математической физики.

Общее уравнение переноса субстанции (массы, энергии, импульса и т.д.)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div(c\,\vec{v}) + div\,\vec{j} - J_v = 0,$$

C - концентрация субстанции как функция времени t и координат x,y,z.

J_v количество субстанции, выделяемой или поглощаемой в единице объема

$\vec{j}$ плотность молекулярного потока;

$\vec{v}$ — скорость переноса переносимого конвективным путем

Уравнение движение вязкой жидкости — уравнение Навье-Стокса

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3}\mu \nabla\, div\, \vec{v} + \sum_k \rho_k F_k,$$

$\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$ полное ускорение;

∇P — градиент давления;

$\sum_k \rho_k F_k$ — сумма действия внешних сил;

μ - динамическая вязкость

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ —Лапласиан,

∇ — обозначение градиента

Для несжимаемой жидкости

$$div\,\vec{v} = 0,$$

и случае, если внешнее поле обусловлено лишь гравитацией

уравнение Навье-Стокса примет следующий вид: $(\sum_k \rho_k F_k = \rho \vec{q}),$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 v + \rho \vec{q}.$$

Приведены два наиболее важных уравнения математической физики.

В наиболее общем виде уравнение второго порядка математической физики

$$Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} + Du'_{x} + Eu'_{y} + Fu + G = 0,.$$

где A, B, C, D, E,F,G — постоянные коэффициенты.

В зависимости от соотношения коэффициентов A, B. C различают три типа уравнений второго порядка с частными производными:

гиперболическое — при AC-B2 < O

параболическое — при AC-B2 = O

эллиптическое — при AC-B2 > 0.

Уравнения второго порядка с частными производными широко применяют в задачах переноса массы, энергии, импульса.

Например, к уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний струны, мембран, газа, электромагнитных волн. В простейшем случае уравнение свободных колебаний однородной струны

$$\partial^2 u / \partial t^2 = \alpha \cdot \partial^2 u / \partial x^2.$$

К уравнениям параболического типа приводят задачи связанные с процессами теплопроводности и диффузии, с распространением электромагнитных полей в проводящих средах, с движением вязкой нестационарном случае и другие.

Простейшим представителем параболического уравнения является уравнение теплопроводности

$$\partial u / \partial t = \alpha(\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2).$$

К уравнениям эллиптического типа относятся прежде всего уравнение Лапласа

$$\nabla^2 u = 0$$

и Пуассона

$$\nabla^2 u = f$$

где а — заданная функция координат. К уравнениям Лапласа и Пуассона приводят многочисленные задачи теплопроводности, электростатики, гидродинамики в стационарных, установивши процессах и другие.

Задача математической физики называется поставленной корректно, ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от дополнительных условий.

Таким образом, задачей математической физики служит нахождение функции, которая во всех точках заданной области удовлетворяет уравнению и некоторым начальным и граничным условиям. В совокупности начальные и граничные условия называют краевыми.

В характера граничных условий различают три вида задач:

-Первая задача, задача Дирихле;

$$u(x) = \psi(x), \quad x \in L$$

Вторая граничная задача Неймана;

$$\partial u / \partial n = \psi(x), \quad x \in d$$

Третья смешанная задача математической физики

$$\partial u / \partial n + \beta u(x) = \psi(x), \quad x \in L$$

Следует отметить, что в уравнении. с частными производными необходимо указывать по два граничных условия на каждую производную второго порядка.

Рассматривая методы решения уравнений математической физики, следует сразу же отметить , что далеко не каждая задача решается в конечном виде.

Одной из причин этого служит то, что до настоящего времени разработка теории уравнений в частных производных не завершена.
Наиболее распространенными аналитическими методами решения уравнений математической физики являются метод разделения переменных (метод Фурье), применяемый ко всем трем типам уравнений, методы интегральных преобразований и метод характеристических функций, получивший распространение в задачах теории упругости.

Сущность метода разделения переменных заключается в том выбирается в виде произведения функций, каждая из которых зависит от определенной переменной. Это позволяет разбить уравнение с частными производными на систему обыкновенных уравнений.

Например, в случае уравнения Лапласа $\nabla^2 u = 0$

решение выбирается в виде $u(x, y) = v(x)\, z(y).$

Подставив в уравнение произведение vz, получим

$$z\frac{d^2 v}{dx^2} = -v\frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Разделив переменные, получим в левой части комбинацию функций от x, в правой — функций от y :

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Указанное соотношение справедливо лишь в том случае, если слева и справа постоянная величина k^2

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v}\dfrac{d^2v}{dx^2}=k^2 \\ -\dfrac{1}{z}\dfrac{d^2z}{dy^2}=k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2z}{dx^2}-k^2v=0; \\ \dfrac{d^2z}{dy^2}+k^2z=0. \end{cases}$$

Итак, имеем систему двух уравнений решив которые совместно с краевыми условиями находим искомое решение u(x,y).

Операционный метод сводит, по существу, решение уравнения производных (или обыкновенного) к решению алгебраических уравнений относительно изображения функции, а затем по изображению находится оригинал функции по специальным таблицам.

Широко распространено в технических приложениях изображение функций с помощью преобразований Лапласа.

Зависимость между искомой функцией f(x) и изображением F(P) и следующий вид:

$$F(P) = P\int_{0}^{\infty} f(t)\,e^{-Pt}\,dt,$$

где P — в общем случае комплексная переменная, f(x) — функция, которая при $x< 0$ равна нулю.

Преобразование по вышеуказанной формуле дается формулой F(P)=Lf(t),
f(t) — оригинал; F(P) — изображение; L — оператор преобразования.

Переход от изображения к оригиналу записывают так: $f(t)=L^{-1}F(P),$
где – L^{-1} оператор обратного преобразования.

Если $F(P) = Lx(t),$ то $L(dx/dt)=PF-Px_0,$

где $x_0=x(0);$ $L(d^2x/dt^2)=P^2F-P^2x_0-Px_1,$

где $x_1=dx/dt(0);$ $L(d^3x/dt^3)=P^3F-P^3x_0-P^2x_1-Px_2,$

где $x_2=d^2x/dt^2(0);$ $L\left(\frac{d^nx}{dt^n}\right)=p^nF-(p^nx_0+p^{n-1}x_1+p^{n-2}x_2+\ldots+Px_{n-1}).$

Таким образом, с помощью операционного исчисления дифференцирования заменяют алгебраическими действиями над изображением функции, благодаря этому решение дифференциального уравнения сводится к решению алгебраического уравнения.

При построении изображений функций с помощью преобразования Лапласа могут быть использованы следующие основные свойства операционного исчисления:

1) однородность: если $L[x(t)] = F(P)$, то $L[\lambda x(t)] = \lambda F(P)$;

2) линейность: если $L[x(t)] = F(P)$, $L[y(t)] = \Phi(P)$,

то $L[x(t)+y(t)] = F(P)+\Phi(P)$;

3) подобие: если $L[x(t)] = F(P)$, то $L[x(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{P}{a}\right)$, $a > 0$;

запаздывание; если $L[x(t)]=F(P)$, то $L[x(t)-\tau]=l^{-p\tau}F(P)$, при $\tau > 0$;

смещение; если $L[x(t)]=F(P)$,

то $L[l^{\lambda t}x(t)]=F(P-\lambda)$.

Метод характеристических функции при решении уравнений математической физики заключается в том, что решение выбирается в виде полинома

$$\lambda(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

коэффициенты которого находят из условия удовлетворения заданному уравнению и всем дополнительным условиям.

Порядок полинома определяется содержанием конкретной задачи.

Конечно-разностный метод состоит в замене частных производных разностными соотношениями.
При этом в пространстве независимых переменных выбирают фиксированную точечную (узловую) сетку. От между узлами сетки зависит с одной стороны, точность приближенного решения, а с другой — громоздкость вычислений.

В узлах этой сетки вычисляют значения искомой функции, уравнениями в частных разностях, полученными в результате и и граничными условиями.

Отыскание и решение совместных алгебраических трансцендентных уравнений со многими неизвестными. Хотя, в принципе, значительно проще, чем решать само уравнение, реальные вычисления чаются очень громоздкими, требующими применения ЭВМ.

В некоторых случаях вид окончательной системы позволяет решать ее особого труда. Такая система получается, например, для уравнения если выбрать сетку с шагом h.

Частные производные заменяем частными разностями по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u}{dx^2}(x, y) \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x-h, y)}{h} \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y) - 2u(x, y)}{h^2}$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \approx \frac{u(x, y+h) + u(x, y-h) - 2u(x, y)}{h^2}.$$

Тогда уравнение Лапласа

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$$

заменится разностным уравнением

$$u(x+h,y)+u(x-h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)=4u(x,y).$$

Уравнение показывает, что значение величины и в точке (x, y) сетки то среднему арифметическому ее значений в четырех соседних точках

Для гармонического уравнения обычно решается краевая задача, в которой требуется по заданным значениям функции и на границе найти ее значения внутри области. Соответствующую конечно-разностную задачу можно решать следующим образом. Пусть дана связная область, покрытая сеткой. Узел сетки называется внутренней точкой, если все четыре соседние точки принадлежат области, в противном случае точка называется граничной. В граничных точках задаются значения функции и. Задача состоит в отыскании u во всех внутренних точках.

Это можно сделать разными методами. Первый из них основан на что система является системой, в которой число линейных уравнений равно числу неизвестных, и ее можно решать при помощи детерминантов и правила Крамера.

Во второ методе применяются последовательных приближения берут предположительные значения решения, а затем значения этого приближенного решения последовательно подправляют в каждой узловой точке, пользуясь уравнением, причем на каждом шаге берут те значения в четырех соседних точках, которые были получены в предыдущем приближении.

Существуют и применяются другие методы приближенных решений, которые с использованием ЭВМ обеспечивают заданную точность расчета.