Примеры решения дифференциальных уравнений первого порядка

Пример 1.

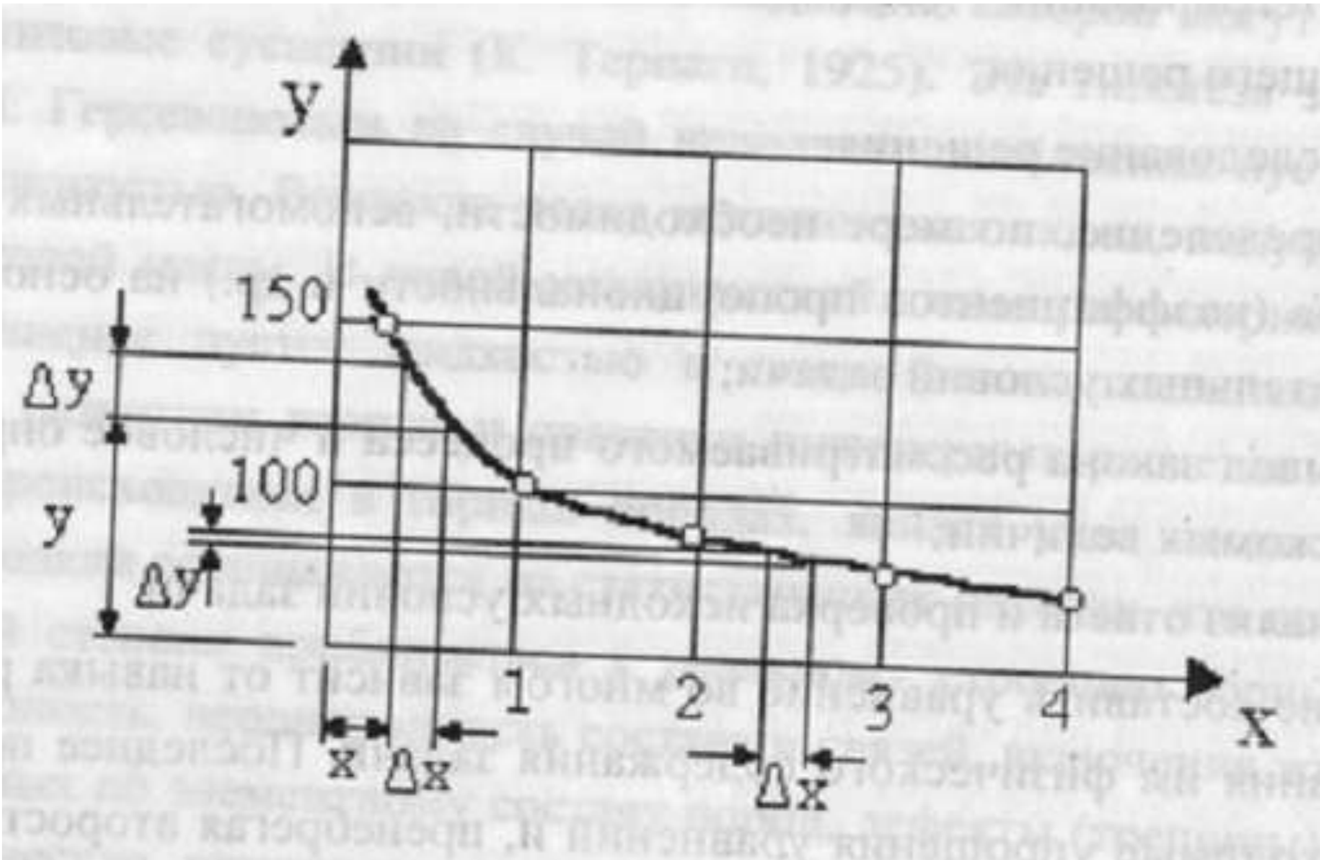
Результаты испытаний на разрушение образцов представлены ниже.

$\frac{\sigma}{\sigma_0}100$	150	100	87	80	76
$\frac{h}{d}$	0,36	1	2	3	4

σ— предел прочности на сжатие;

h, d —высота и диаметр испытуемого образца соответственно
Требуется выразить зависимость в математической форме

Решение.
Построим график зависимости y(x)



Где $y = \dfrac{\sigma}{\sigma_0}, \quad x = \dfrac{h}{d}.$

Выделим элементарный шаг ∆x зависимости y(x). Протяженность шага определяется допустимостью линейной связи y(x) в пределах ∆x.

Замечаем, что при одном и том же ∆x величина ∆y зависит от y. Это дает основание написать соотношение

$$\Delta y = -ky\Delta x.$$

Знак «-» взят из-за уменьшения y с ростом x ,
k— коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств и вида испытуемого образца.

Рассматривая предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = dy \; (\Delta x = dx),$, можем вышеуказанное соотношение записать в виде уравнения в дифференциалах

$$dy = -ky\,dx,$$

решением которого является

$$y = Ce^{-kx}.$$

Это общая закономерность, и для получения ее частного вида следует воспользоваться экспериментальными данными (краевыми, двумя условиями): y(x = 0,35) = 150, y(x = 4) = 75.

Поставим дополнительные условия в логарифмическую формулу $y = Ce^{kx}$:

$$\begin{aligned} y(x=0,35)=150 &: \begin{cases} \ln 150 = \ln C + k \cdot 0,35; \end{cases} \\ y(x=4)=75 &: \begin{cases} \ln 75 = \ln C + k \cdot 4. \end{cases} \end{aligned}$$

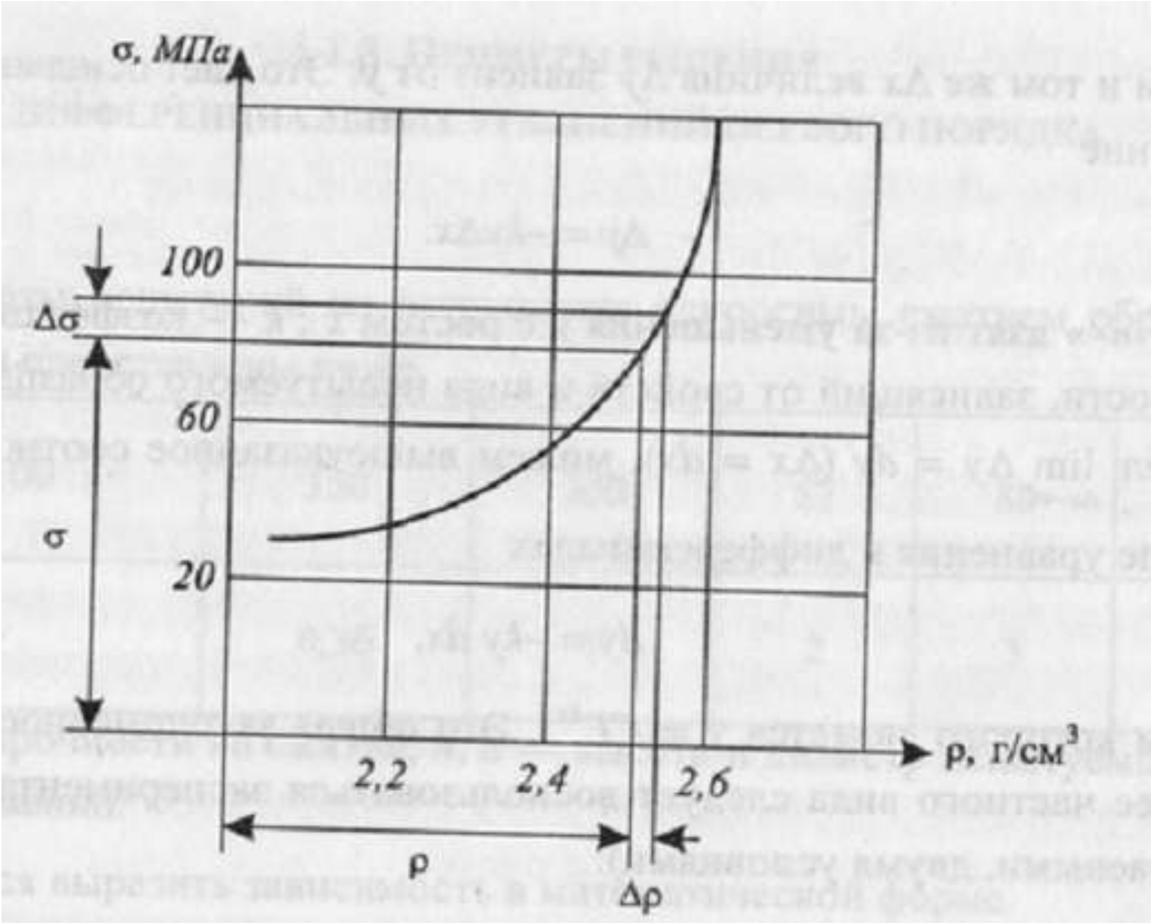
Решением системы уравнений служит k = -0,19; C = 160,3.

Таким образом, искомая зависимость

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 160,3\exp\left(-0,19\frac{h}{d}\right).$$

Пример 2.

Определить математическую модель зависимости предела прочности на сжатие от плотности известняка. Экспериментальная зависимость задана графиком $\sigma(\rho)$



.

Выделим элементарный участок допустить линейную зависимость

Рассуждая так же, как в предыдущем примере, допускаем справедливость соотношения $\Delta\sigma = k\sigma\Delta\rho$

Так как $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \Delta\sigma = d\sigma,$

то соотношение можно записать в дифференциалах $d\sigma = k\sigma d\rho.$

Делим переменные и интегрируем

$$\int\frac{d\sigma}{\sigma} = k\int d\sigma \Rightarrow \ln\sigma = k\rho + \ln C.$$

Потенцируя получим общее решение $\sigma = C\ell^{k\rho}$

Для определения постоянной C и коэффициента пропорциональности k воспользуемся дополнительными условиями
$\sigma(\rho = 2{,}2) = 30$; $\sigma(= 2{,}6) = 120$.

Решением системы уравнений

$$\begin{cases} \ln 30 = 2{,}2k + \ln C \\ \ln 120 = 2{,}6k + \ln C \end{cases}$$

является k = 3,46, C = 0,015.

Искомая модель зависимости σ (ρ)

$$\sigma = 0{,}015\exp(3{,}46\rho).$$

Определим искомую закономерность, следует проверить её экспериментальным данным.

Пример 3.

Определить зависимость скорости пневмотранспорта и измельченного материала в трубе (сушка, система пылеудаления, транспорт угля и др.) от длины пути. При движении в трубе поток испытывает сопротивление из-за трения о стенки и вследствие этого теряет скорость. При определенных скоростях (ниже скорости витания) частицы могут выпадать из потока. Знание закона изменения скорости потока по длине трубы позволит обеспечить надежный транспорт материала.

Нахождение закономерности изменения скорости потока в трубе через дифференциальное уравнение позволяет ограничиться всего двумя точками экспериментального замера скорости потока (например, в начале трубы $v(x=0)=v_0$ и на некотором расстоянии $v(x=x_1)=v_1$.

Другие методы получения зависимости v(x) требуют большого количества экспериментальных точек (не менее семи), что, конечно, связано с ростом стоимости и трудоемкости эксперимента.

Решение.

Исходим из очевидного факта, что по длине трубы скорость пневмопотока падает, причем это уменьшение зависит от текущей скорости.

Следовательно, $\Delta v = -kv\Delta x$.

Учитывая, что, $\lim \Delta v = dv$

имеем $dv = -kvdx$.

Разделим переменные и проинтегрируем $\ln v = -kx + \ln C.$

Постоянные k, C находим исходя из экспериментальных данных:

$$v\ (x=0) = v_0 : C = v_0;$$

$$v(x=x_1) = v_1 :\ k = -\frac{1}{x_1}\ln\frac{v_1}{v_0}.$$

Например, для $v\ (x=0) = 25$ м/с, $v(x=1) = 24{,}6$ м

определяем C = 25, k = 0,0149;

Зависимость между скоростью пневмотранспорта измельченного материала и длиной пути приобретает следующий вид:

$$v = 25\exp(-0{,}0149x).$$

Пользуясь найденной закономерностью, можно определить скорость потока в любой точке (например, при x = 20 v = 18,7 м/с) или рассчитать длину трубы при условии обеспечения надежного транспорта измельченного материала.

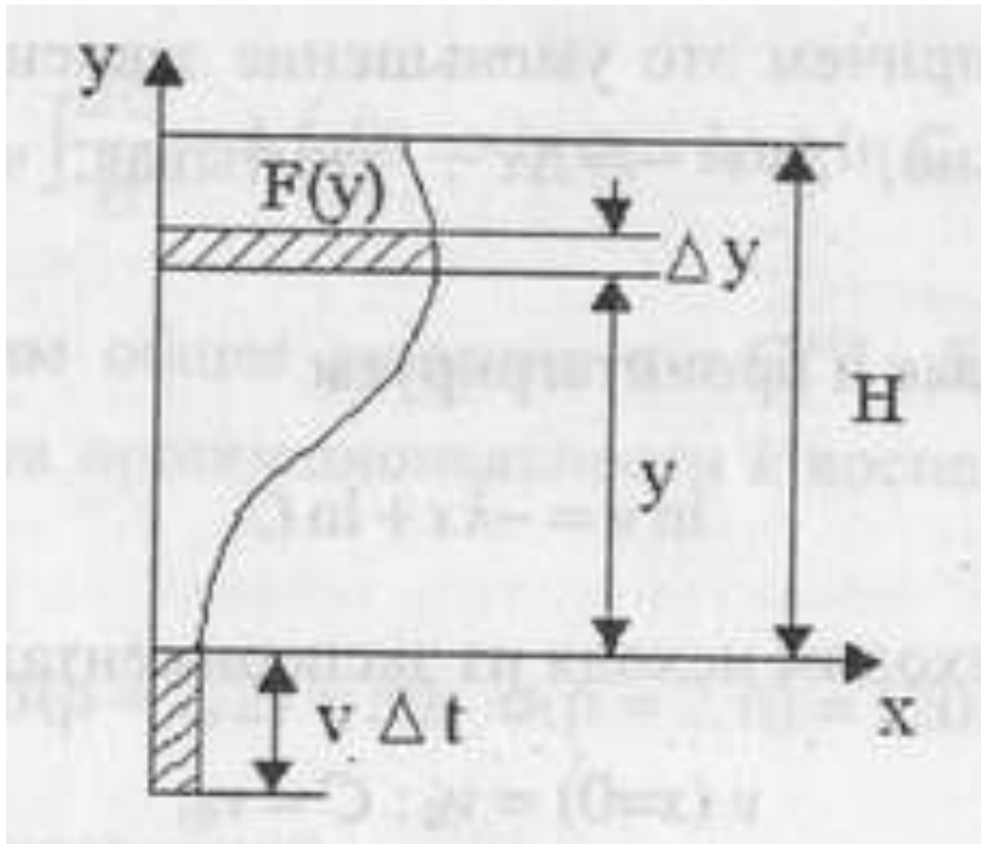
Рассмотренный подход позволяет избежать многочисленных экспериментов.

Пример 4.

Определить формулу для определения продолжительности истечения не связного сыпучего измельченного материала из бункера.

Подобные формулы необходимы для выбора объема бункера, обеспечивающего аварийную работ оборудования в течение заданного времени, или для расчета продолжительности истечения из имеющегося бункера (область использования — брикетные заводы, обогатительные фабрики).

Решение. Изобразим профиль некоторого бункера и выделим элементарный слой Δy такой, что кривизной поверхности можно пренебречь и элементарный объем $V = F(y)\,\Delta y$ ($F(y)$ — площадь поперечного сечения, функция от y.



Это же количество материала, выходящего через выпускное отверстие площадью ω со скоростью v за время Δt, можно выразить иначе:

$$\Delta V = v\omega\Delta t.$$

Приравняв два выражения одного и того же элементарного объема, получим

$$\Delta V = v\omega\Delta t = -F(y)\Delta y.$$

Знак минус в правой части выражения из-за $\Delta y < 0$.

После рассмотрения предельного перехода $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta y = dy$

запишем соотношение в виде $v\omega dt = -F(y)dy.$

Решаем уравнение с дополнительными условиями

$$0 \le t \le T,\ H \ge y \ge 0.$$

В общем случае скорость истечения v является функцией количества материала в бункере, т.е. v(y).

Однако для несвязных сыпучих измельченных материалов этой зависимостью можно пренебречь.

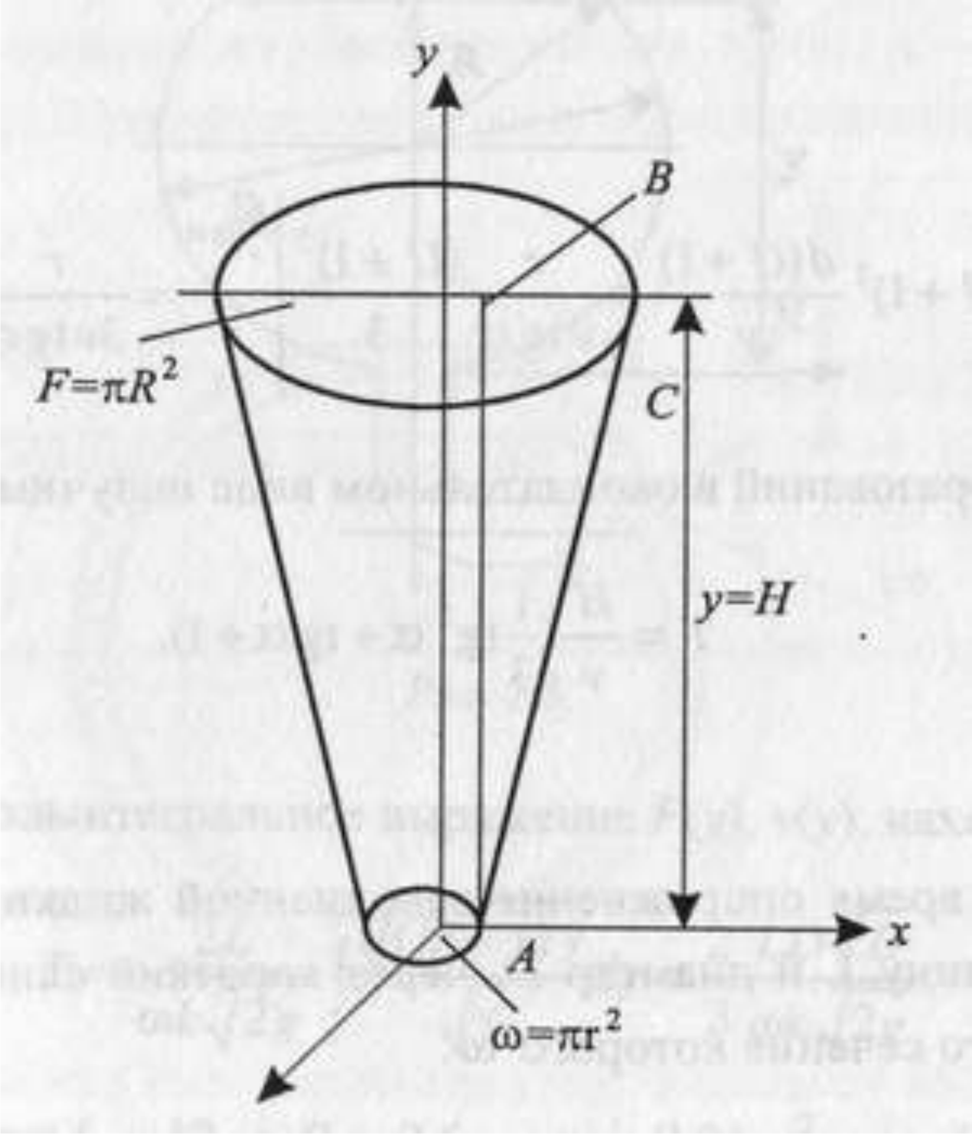
Интегрируя

$$\int_0^T dt = -\int_H^0 \frac{F(y)}{v\omega} dy = \int_0^H \frac{F(y)}{v\omega} dy,$$

получим формулу для расчета времени истечения материала из бункера

$$T = \int_0^H \frac{F(y)}{v\omega} dy = \frac{1}{v\omega} \int_0^H F(y) dy \ (v\omega = \text{const}).$$

В качестве примера рассмотрим конусный бункер



Из ΔABC

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R-r}{y}, \text{ а } \frac{F(y)}{\omega} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Заменив R^2 из предыдущего выражения

$$\frac{F(y)}{\omega} = \left(\frac{y}{r}\operatorname{tg}\alpha + 1\right)^2.$$

Допустим скорость истечения постоянной (v = const).
Следовательно,

$$T = \int_0^H \left(\frac{y}{r}\operatorname{tg}\alpha + 1\right)^2 \frac{dy}{v}.$$

Обозначим

$$U = \frac{y}{r}\operatorname{tg}\alpha \qquad U_1 = 0 \text{ при } y_1 = 0$$

$$dU = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{r}dy \qquad U_2 = \frac{H}{r}\operatorname{tg}\alpha \text{ при } y_2 = H.$$

Имеем

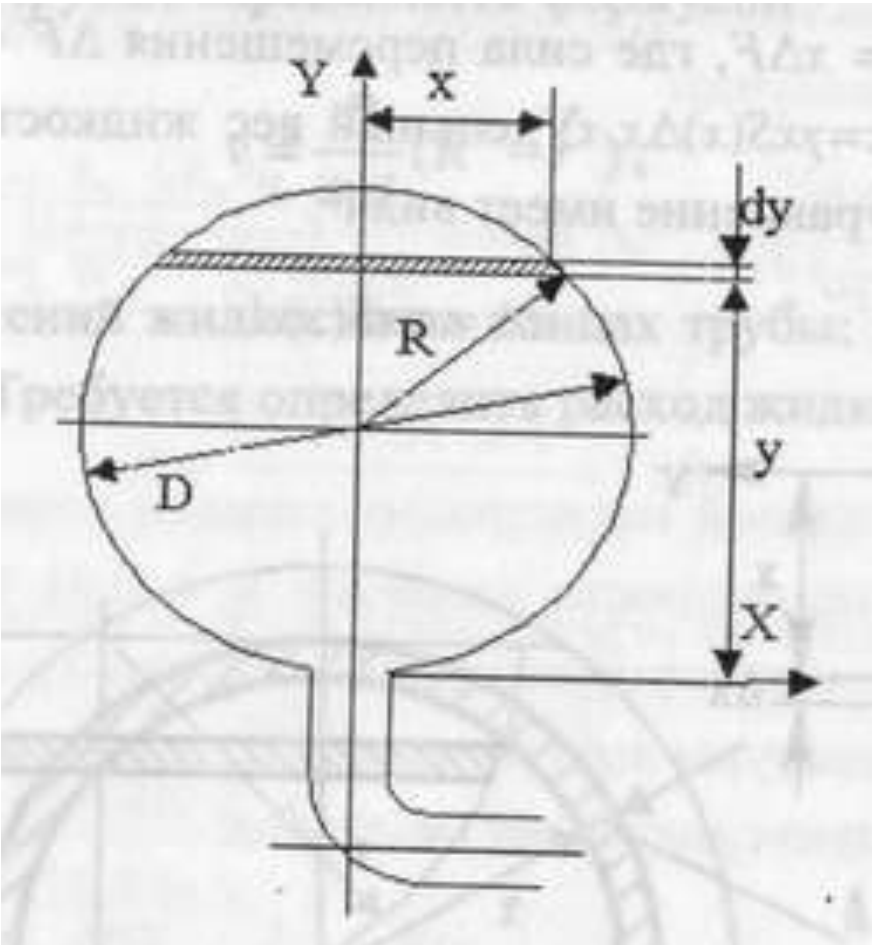
$$T = \int_0^{\frac{H}{r}\operatorname{tg}\alpha} \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}(U+1)^2 \frac{d(U+1)}{v} = \frac{r}{v\operatorname{tg}\alpha}\frac{(U+1)^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{H}{r}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{r}{3v\operatorname{tg}\alpha}\left[\left(\frac{H}{r}\operatorname{tg}\alpha+1\right)^3-1\right].$$

После преобразований

$$T = \frac{H}{v}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha + 1\right).$$

Пример 5.

Определить время опорожнения заполненной жидким топливом цистерны, имеющей длину L и диаметр D, через короткий сливной патрубок, площадь поперечного сечения которого ω.



Решение.

Воспользуемся формулой, найденной в предыдущем примере: $$T = \frac{1}{\omega}\int_0^D \frac{F(y)}{v(y)}dy.$$

Площадь поперечного сечения цистерны

$$F(y) = 2xL = 2L\sqrt{R^2-(y-R)^2} = 2L\sqrt{(D-y)y}.$$

Скорость истечение через малое отверстие определяется законом Торичелли

$$v(y) = k\sqrt{2gy}\ ,$$

g — ускорение силы тяжести; k — коэффициент расхода.

Подставив в подынтегральное выражение F(y), v(y), находим

$$T = \frac{2L}{\omega k\sqrt{2g}} \int_0^D \frac{\sqrt{(D-y)y}}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{3} \frac{LD\sqrt{D}}{\omega k\sqrt{2g}}.$$

В частности, при L = 12 м, D = 2,6 м, ω= 0,01 м2 и коэффициенте расхода k= 0.6 имеем

$$T = \frac{2 \cdot 12 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}6}{3 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{19{,}62}} = 2520\text{с} = 42 \text{ мин.}$$

Таким образом, время опорожнения цистерны равно 42 мин

Пример 6.
Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость из емкости, сечение которой является функцией глубины.

Решение.
Пусть площадь поперечного сечения емкости S(x). На глубине выдели элементарный слой толщиной Δx. Масса этого слоя $\Delta m = S\Delta x\rho$,
где ρ - плотность жидкости.

Необходимая работа для перемещения элементарного слоя на высоту x равна

$$\Delta A = x\Delta F,$$

где сила перемещения. $\Delta F = g\Delta m.$

Таким образом

$$\Delta A = xg\Delta m = xg\rho S(x)\Delta x = \gamma x S(x)\Delta x.$$

.

Удельный вес жидкости

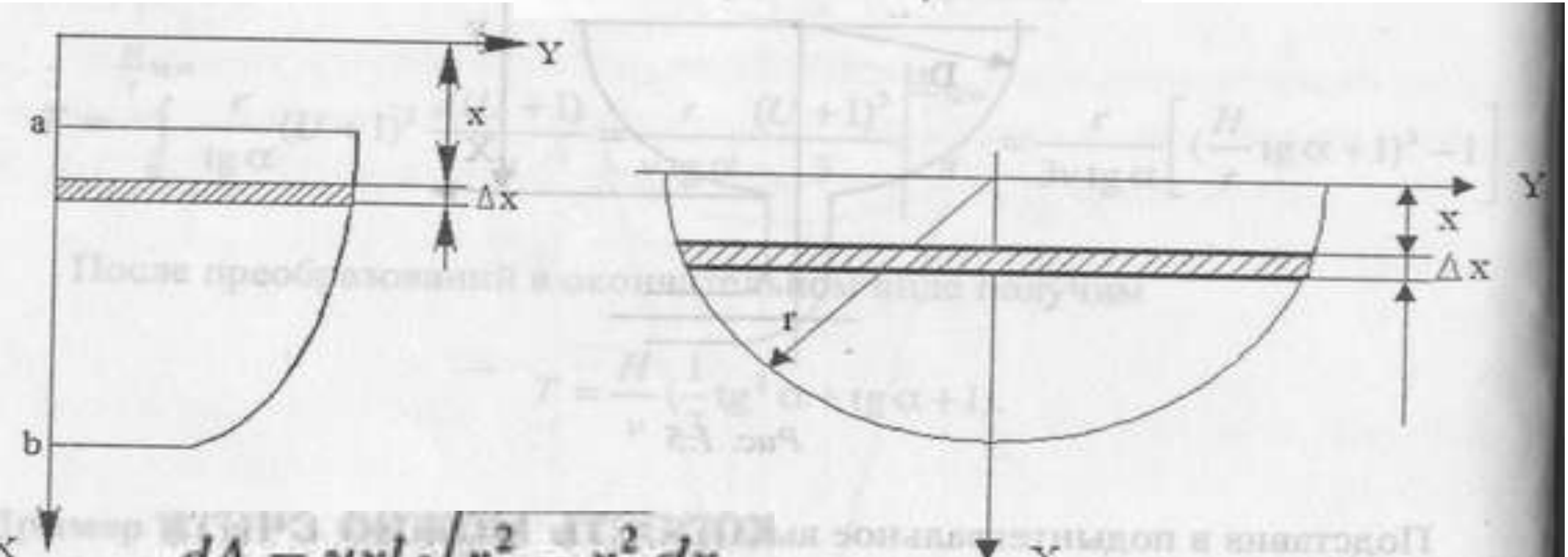
$$\gamma = \rho g.$$

При Δx = dx дифференциальное уравнение имеет вид $dA = \gamma x S(x)dx.$

Интегрируя это уравнение при дополнительных условиях, находим решение задачи.

Например, для определения работы на выкачивание жидкости к емкости, имеющей форму полуцилиндра длиной l радиусом r , подставим в уравнение

$$S(x) = ly(x) = l\sqrt{r^2 - x^2}.$$



Тогда $$dA = \gamma x l\sqrt{r^2 - x^2}\,dx..$$

Интегрируя уравнение в пределах $0 \le x \le r$ и $0 \le a \le A,$

получим

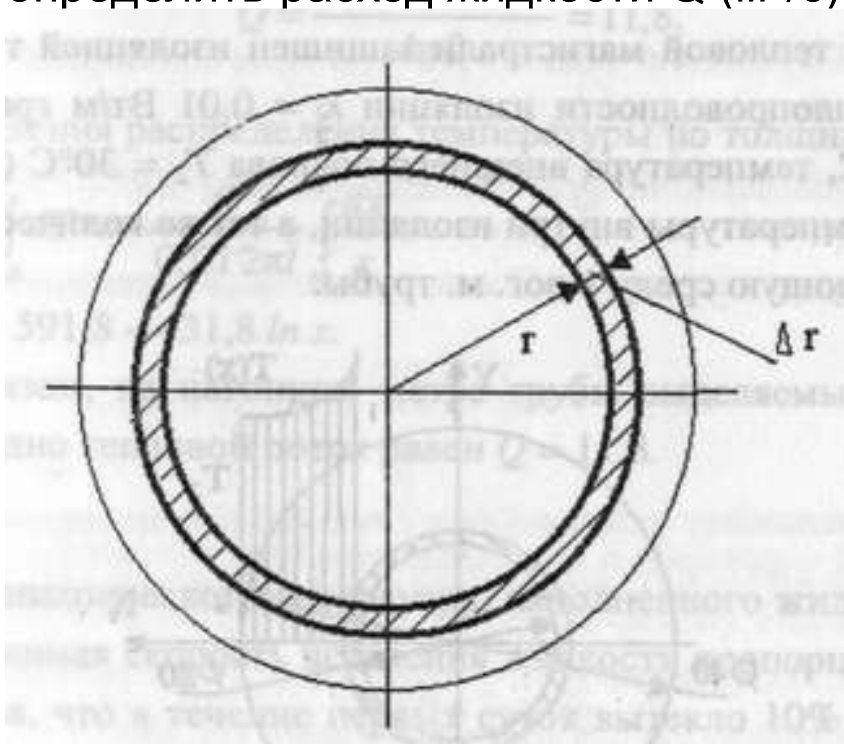
$$A = \int_0^r 2\gamma\ell\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \gamma\ell\left[\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^r = \frac{2}{3}\gamma\ell r^3.$$

Пример 7.

При установившемся ламинарном течении ($Re<210^3$) жидкости через трубу круглого сечения радиусом R скорость течения ν в слое, находящемся на расстоянии r от оси трубы, определяется формулой

$$v = \frac{P}{4\mu l}\left(R^2 - r^2\right),$$

где P — разность давлений жидкости на концах трубы; μ — вязкость жидкости l - длина трубы. Требуется определить расход жидкости Q ($м^3/с$).



Решение.
Выделим в трубе элементарный цилиндрический слой толщиной Δr такой что в пределах этого слоя скорость можно считать постоянной.

Расход жидкости через это сечение равен $\Delta Q = v \Delta F,$

где ΔF — площадь кольца, равная

$$\Delta F = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2.$$

Полагая Δr^2 бесконечно малой величиной, пренебрегаем $\pi(\Delta r)^2$ как бесконечно малой более высокого порядка. Заменив при

$$\Delta r = dr \to 0 \; \Delta F = dF \text{ и } \Delta Q = dQ,$$

Запишем

$$dQ = vdF = v2\pi rdr = \frac{P\pi}{2\mu l}(R^2 - r^2)rdr.$$

Это дифференциальное уравнение задачи интегрируя которое в пределах

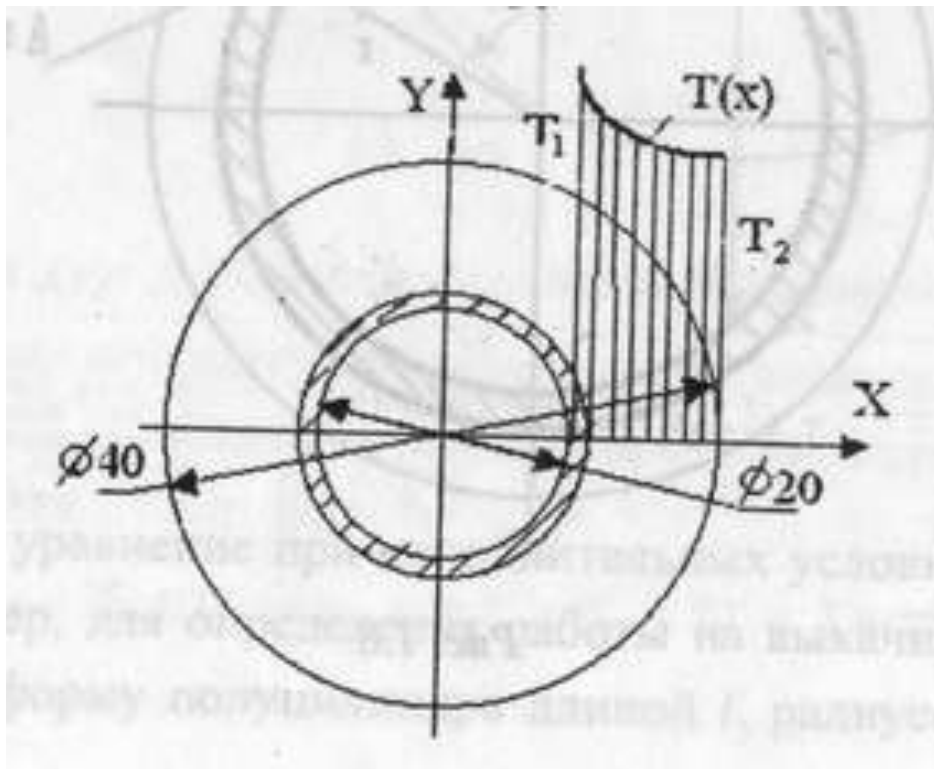
$$0 \le r \le R, 0 \le q \le Q,$$

получим

$$Q = \frac{P\pi}{2\mu l}\int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{P\pi}{2\mu l}\left(\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^R = \frac{P\pi}{8\mu l} R^4 .$$

Пример 8.

Трубопровод тепловой магистрали защищен изоляцией толщиной 10 см. Коэффициент теплопроводности изоляции α = 0,01 Вт/м град. Температур трубы T_1 = 160°C, температура внешнего покрова T_2 = 30°C.
Найти распределение температуры внутри изоляции а также количество тепла отдаваемого в окружающую среду 1 пог. м. трубы.



Решение

По закону теплопроводности Фурье количество теплоты, испускаемое в секунду:

$$Q = -\lambda F(x)\frac{dT}{dx},$$

где $F(x)=2\pi xl$ — площадь сечения тела на расстоянии x от оси трубы; λ — коэффициент теплопроводности; l — длина трубы, м; x — радиус трубопровода, м. После разделения переменных дифференциальное уравнение примет вид

$$dT = -\frac{Q\,dx}{\lambda 2\pi \ell x}.$$

Интегрируя уравнение в указанных пределах

$$\int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{0,01\cdot 2\pi l}\int_{0,1}^{0,2}\frac{dx}{x}, \qquad T\Big|_{30}^{160} = \frac{Q}{0,01\cdot 2\cdot \pi l}\ln x\Big|_{0,1}^{0,2}.$$

Откуда $$Q=\frac{130\cdot 0,01\cdot 2\cdot 1}{\ln 2}=11,8.$$

Для определения распределения температуры по толщине решаем интегралы

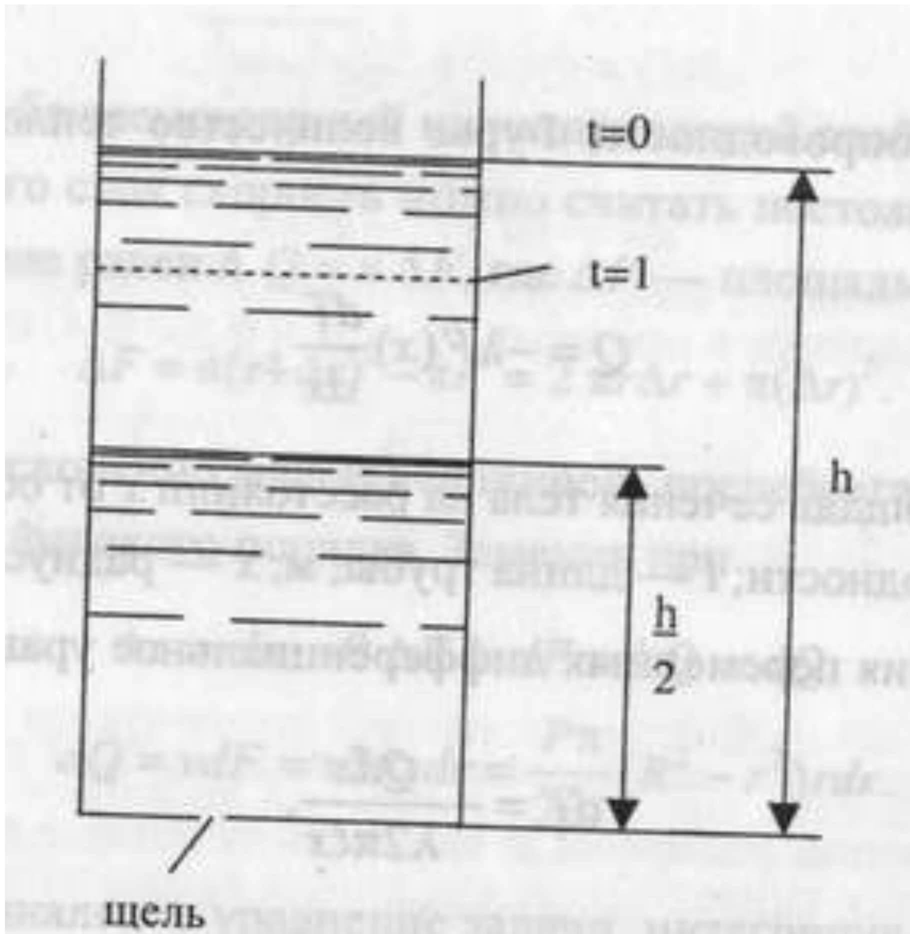
$$\int_{160}^{T} dT=-\frac{Q}{0,01\cdot 2\pi l}\int_{10}^{x}\frac{dx}{x}.$$

Откуда. $$T=591,8-431,8\ \ln x.$$

Таким образом, на погонном метре трубы выделяемый в окружающую среду ежесекундно тепловой поток равен Q=11.8.

Пример 9.

На дне цилиндрического резервуара, наполненного жидкостью, образовалась щель. Принимая скорость истечения жидкости пропорциональной высоте ее уровня и зная, что в течение первых суток вытекло 10% содержимого, определить, сколько времени потребуется, чтобы из резервуара вытекла половина жидкости.



Решение.

Объем жидкости в момент t равен $\pi R^2 x$

(R — радиус резервуара, x резервуаре через t дней), а скорость изменения объёма

$$\pi R^2 \frac{dx}{dt}$$

По условию задачи, эта величина пропорциональна x.
Следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$\pi R^2 \frac{dx}{dt} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

После разделения переменных интегрируем

$$\pi R^2 \frac{dx}{x} = kdt \Rightarrow \pi R^2 \ln x = kt + \ln C.$$

Согласно начальному условию при t = 0 резервуар наполнен x=h ;
Следовательно.

$$\ln C = \pi R^2 \ln h.$$

С учетом последнего выражения

$$kt = \pi R^2 \ln \frac{x}{h}.$$

По второму условию, при t= 1 $x = \frac{9}{10}h$

следовательно.

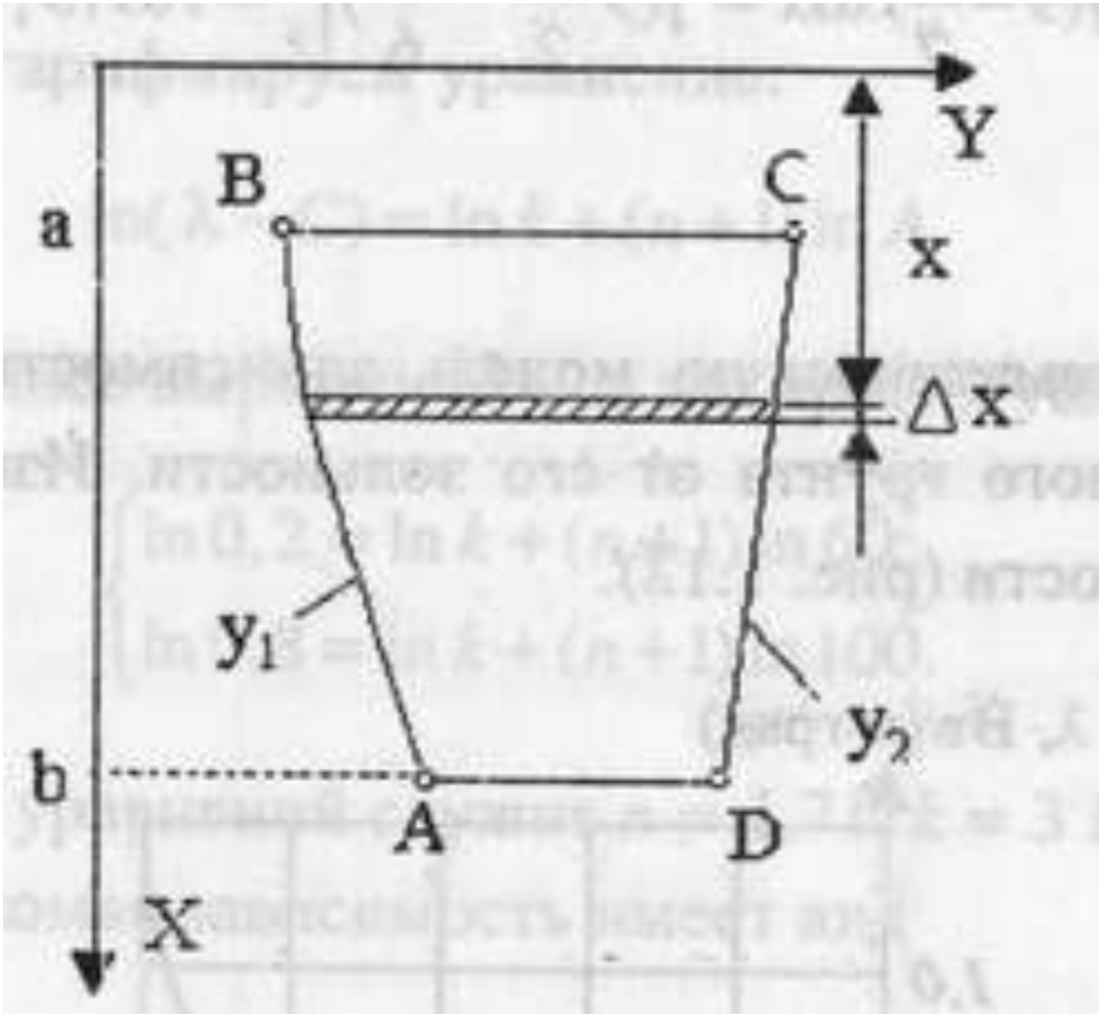
$$k = \pi R^2 \ln \frac{9}{10} = -0,1\pi R^2.$$

Для решения вопроса поставленного в задаче $(x = \frac{h}{2})$

находим искомое время

$$t = \frac{\pi R^2 \ln \frac{x}{h}}{k} = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{0,1} = \frac{0,69}{0,1} = 6,9 \text{ (суток).}$$

Пример 10.
Определить давление жидкости на плотину, ширина которой является функцией глубины погружения



Решение.
Выделим элементарную полоску пластины с площадью $[y_2(x)-y_1(x)]\Delta x$,

погруженную в жидкость на глубину x. Согласно закону Паскаля, на площадку ΔS действует давление $\Delta p = =\gamma x \Delta S$,

где γ — удельный вес жидкости ($\gamma=\rho g$), x — глубина погружения. На выделенную площадку действует

$$\Delta p = \gamma x(y_2 - y_1)$$

или, при $\Delta x \to 0,\ dp = \gamma x(y_2 - y_1)dx.$

Решением указанного дифференциального уравнения будет

$$P = \int_a^b \gamma(y_2(x) - y_1(x))dx.$$

Например, координаты вершин плотины $A(6;0)$, $B(2;0)$, $C(2;8)$, $D(6;6)$.

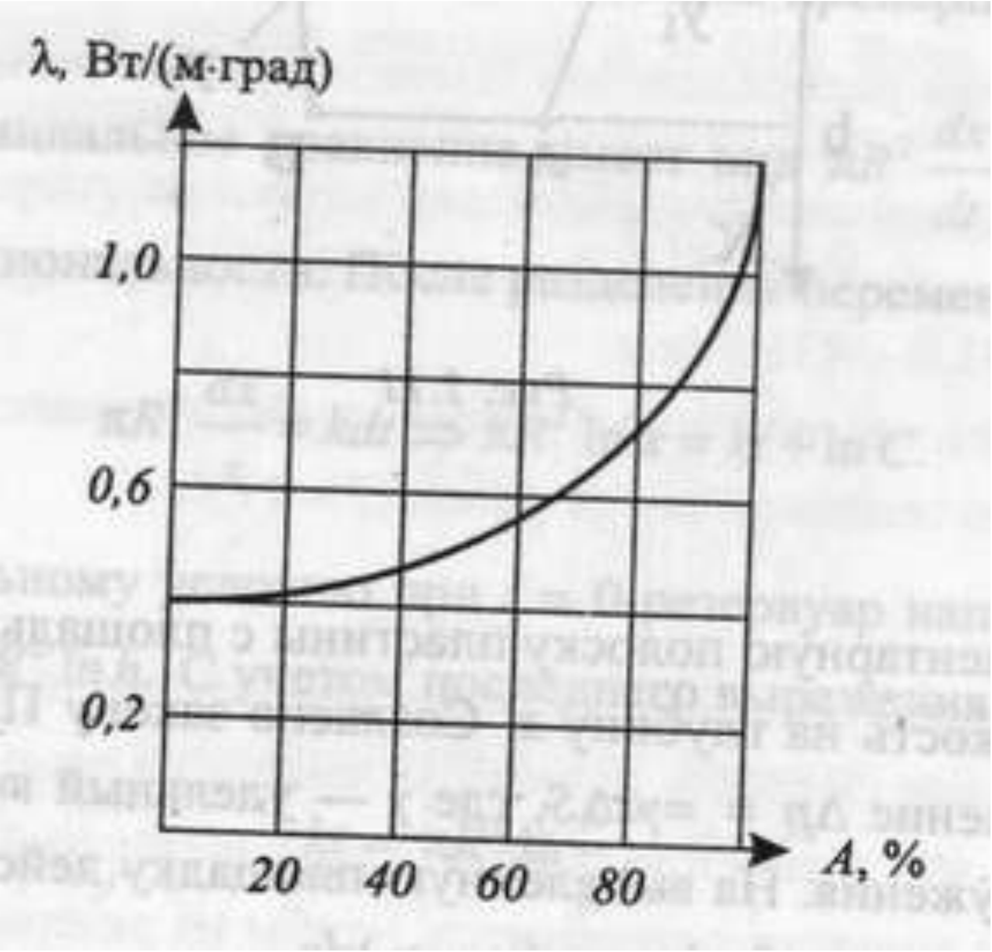
Уравнения AB и CD, по условию, прямые: $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Таким образом $$AB: y=0;\ CD:\ y=-\frac{x}{2}+9.$$

Воспользуемся общим решением для определения давления

$$P=\int_2^6\gamma\left(9-\frac{x}{2}\right)x\,dx=\gamma\left(9\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_2^6=109{,}3\gamma\approx 1{,}1\ \text{Мпа}.$$

Пример 11.
Определить математическую модель зависимости коэффициента теплопроводности торфяного грунта от его зольности. Известен график экспериментальной зависимости



Решение.

Характер зависимости позволяет предположить, что скорость изменения λ

с ростом зольности грунта пропорциональна A^n, т.е. $\frac{d\lambda}{dA} = kA^n$.

Разделив переменные, проинтегрируем уравнение

$$\int d\lambda = k\int A^n dA \Rightarrow \lambda = k_1 A^{n+1} + C.$$

Общее решение $\lambda = kA^{n+1} + C$

содержит три параметра, для определения которых необходимы три условия. Например,

$$\lambda(A=0) = 0,4;\ \ \lambda(A=60) = 0,6;\ \ \lambda(A=100) = 1,2.$$

Воспользуемся условием $\lambda(A=0) = 0,4$

для определения С: С=0,4. Для определения k,n

прологарифмируем уравнение: $\ln(\lambda - C) = \ln k + (n+1)\ln A.$

Подставим в последнее выражение С и два других условия:

$$\begin{cases} \ln 0,2 = \ln k + (n+1)\ln 60; \\ \ln 0,8 = \ln k + (n+1)\ln 100. \end{cases}$$

Решением системы уравнений служит $n = 1,71,\ k = 3 \cdot 10^{-6}.$

Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$\lambda = 3 \cdot 10^{-6} \cdot A^{2,71} + 0,4.$$

Пример 12.

Найти уравнение образующей y(x), у которой абсцисса центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат, искомой кривой y(x) и ординатой любой ее точки, равна 3/4 абсциссы этой точки.

Решение.

Абсцисса центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной сверху $y(x), OX,$

слева x = a, справа x = в, определяется интегралом

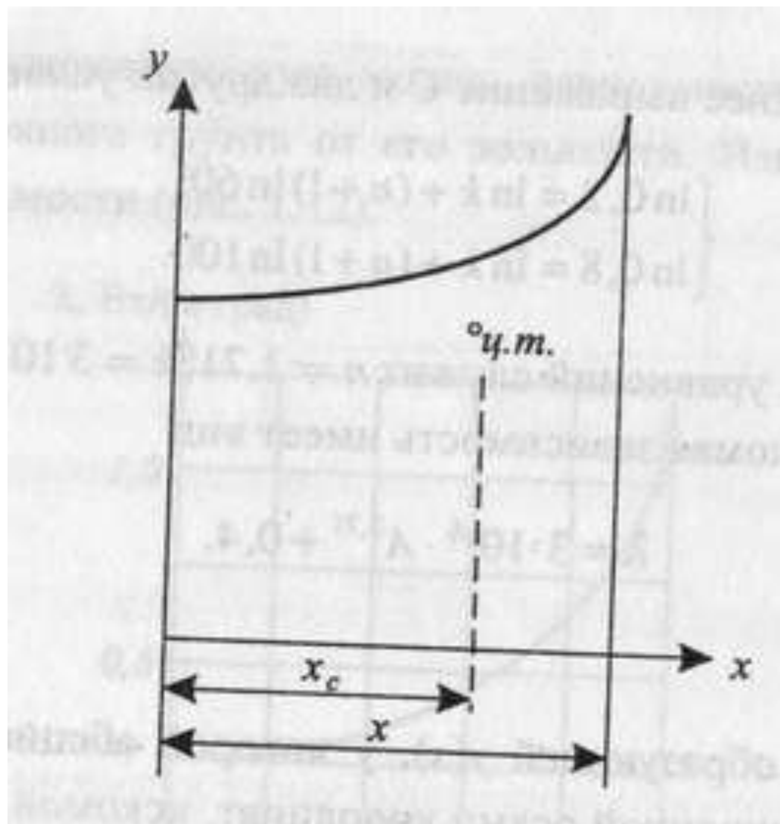
$$x_c = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}.$$

Применительно к условиям данной перепишем в виде

$$\frac{3}{4}x\int_0^x y\,dx = \int_0^x xy\,dx .$$

Оттуда

$$x_c = \frac{3}{4}x = \frac{\int_0^x xy\,dx}{\int_0^x y\,dx},$$



Продифференцировав последнее уравнение, получим

$$\frac{3}{4}\int_0^x y\,dx + \frac{3}{4}xy = xy.$$

После вторичного дифференцирования

$$\frac{3}{4}y = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}xy',$$

откуда

$$xy' = 2y.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. После разделения переменных и интегрирования получим

$$\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = 2\ln x + \ln C.$$

Следовательно, $y = cx^2.$

Указанным свойством обладает семейство парабол

Заметим, если $x_c = \frac{1}{2}x,$ то

$$\frac{1}{2}x = \frac{\int\limits_0^x xydx}{\int\limits_0^x ydx}.$$

Повторяя в той же последовательности преобразования, получим

$$\frac{1}{2}x\int\limits_0^x ydx = \int\limits_0^x xydx,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^x ydx + \frac{1}{2}xy = xy,$$

$$\int\limits_0^x ydx = xy.$$

$$y = y + xy',$$

$$xy' = 0,$$

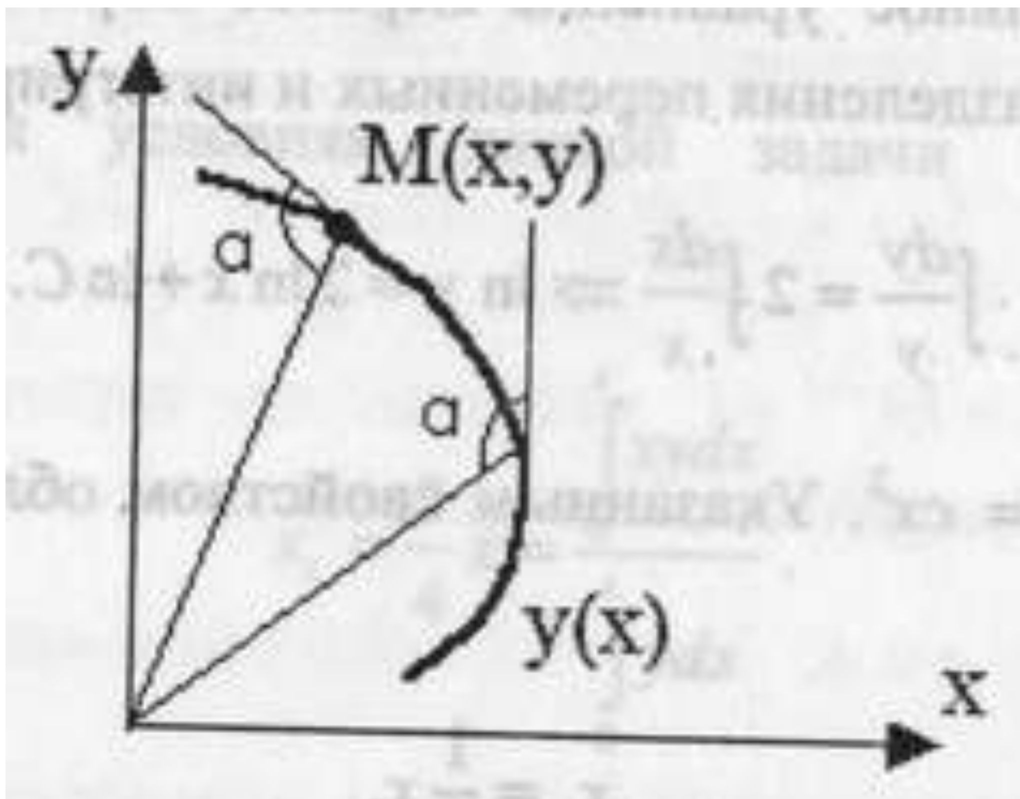
$$y=c\ ,$$

то есть семейство параллельных оси x прямых.

Пример 13.

Определить кривую улитки насоса вентилятора при условии образования изогональных траекторий пучком прямых воздушных струй с центром в начале координат. Изогональными траекториями будут служить кривые, образующие в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку прямой пучка

Именно это условие обеспечит минимум энергетических затрат на создание напора в вентиляторе.



Решение.

Пусть уравнение пучка y = ax. Положим $tg\,\alpha = k$.

Обозначим текущие ординаты точки M траектории через (x, y), угловой коэффициент касательных к траектории в точки M (x. y) равен $k_2 = \frac{dy}{dx}$.

По условию, для пересекающихся прямых имеем

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - a}{1 + a\frac{dy}{dx}}$$

Полученное дифференциальное уравнение является однородным уравнением

Для его решения применим подстановку $y = ux$ и $dy = udx + xdu$.

Заменив y и dy в уравнении на новую переменную, получим

$$xdu - ku^2dx - kxudu - kdx = 0$$

Или после группировки членом получим

$$x(1-ku)du-k(1+u^2)dx=0.$$

Разделим переменные

$$\frac{1}{k}\frac{(1-ku)}{(1+u^2)}du-\frac{dx}{x}=0$$

и проинтегрируем

$$\frac{1}{k}\left[\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{k}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}\right]-\int\frac{dx}{x}=0.$$

Откуда

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}u+\ln c=\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln\left|x\sqrt{1+u^2}\right|.$$

Учитывая, что $u=\dfrac{y}{x}$ приводим последнее выражение к виду

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\ln C.$$

Используя полярные координаты $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$,

можно представить искомое уравнение в виде $\rho = Cl^{\frac{1}{k}\varphi}$.

Это спираль Архимеда

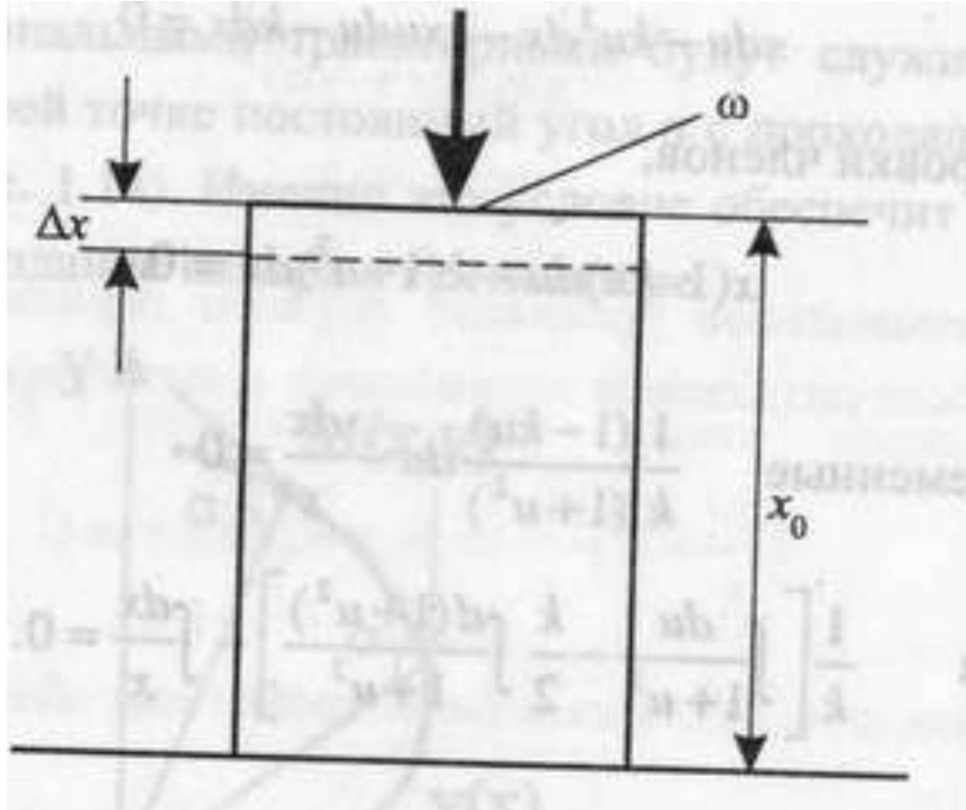
Пример 14.

Определить работу упругого сжатия образца горной породы высотой x_o и поперечным сечением ω_o. Сжимающая сила возрастает от 0 до Р.

Решение.
Рассматривая достаточно малые деформации испытуемого образца, воспользуемся законом Гука, согласно которому деформации пропорциональны напряжениям, т.е.

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\Delta P}{\omega},$$

где Е— модуль упругости горной породы.



При $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \Delta x = dx \quad (\Delta\rho = d\rho)$

Соотношение в приращениях записываем в дифференциалах

$$dx = \frac{x_0}{E\omega} dP \, .$$

Работа сжатия А на элементарном пути dx равна dA=Pdx.

Здесь полагаем, что на каждом элементарном отрезке dx работа совершается постоянной силой.
После подстановки полу … авнение

$$dA = \frac{x_0}{E\omega} P dP.$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием A(P=0)=0, находим

$$A = \frac{x_0}{2E\omega} P^2.$$

Пример 15.
Определить длину охлаждающего лотка ленточного брикетного пресса.
Известно, что длину лотков определяет продолжительность охлаждения брикетов в зависимости от внешних условий.
Процессами упрочнения брикетов при охлаждении и их одновременным разупрочнением при циклических нагрузок пренебрегаем.
Решение
В основу решения задачи положим известный закон теплоотдачи

$$dQ = \alpha (T - T_c) dF,$$

согласно которому скорость охлаждения (нагрева) пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_c),$$

где k— коэффициент пропорциональности;
T— температура брикета в характерной точке в момент времени t;
Tc — температура окружающей среды,
Уравнение с разделяющимися переменными интегрируем с начальными условиями

$$T(t=0) = T_0$$

(To — температура брикета на выходе из устья пресса):

$$\int \frac{dT}{T - T_c} = \int k dt + \ln C,$$

где C — постоянная интегрирования

Потенцируя, находим общее выражение закона охлаждения

$$T = Cl^{kt} + T_c.$$

Удовлетворяя начальному условию $T(t=0)=T_0,$

находим $C=(T_0-T_c).$

Следовательно, частное решение $T=(T_0-T_c)\,l^{kt}+T_c,\ k<0.$

Для нахождения коэффициента пропорциональности k необходимо иметь одно экспериментальное значение $T(t=t_1)=T_1$:

$$k=\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1-T_c}{T_0-T_c}.$$

Скорость движения брикетов по охладительному лотку ленточных прессов известна.

$$V = \frac{L}{t_2},$$

где L — искомая длина охладительного лотка;
t_2 - время нахождения брикетов в лотке

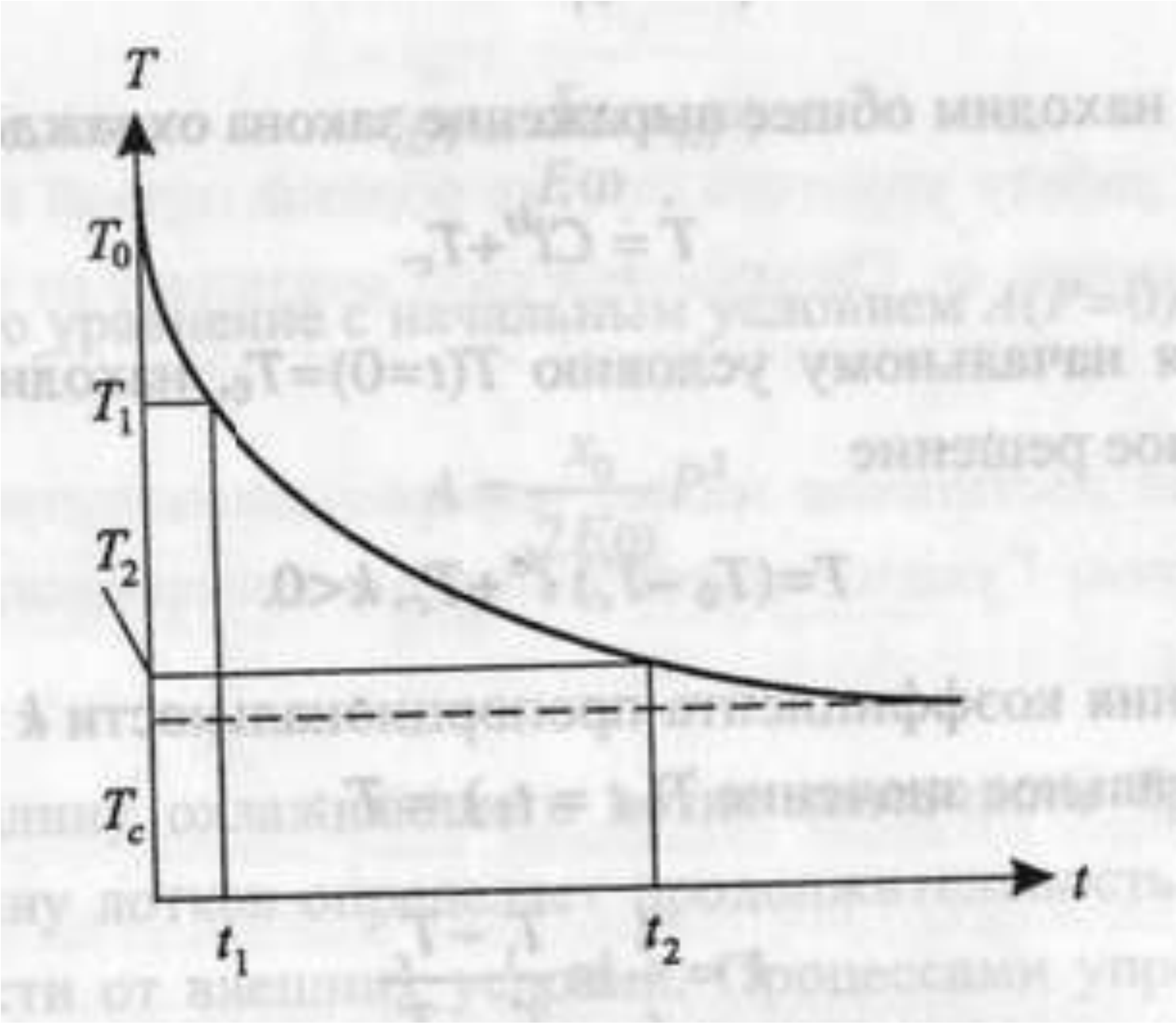
Значение t_2 находится по заданной конечной температуре охлажденного брикета T_2:

$$t_2 = \frac{1}{k} \ln \frac{T_2 - T_c}{T_0 - T_c}.$$

Из этого следует, что длина охладительного лотка может определена для каждого завода с учетом времени года при выполнении ограниченного (всего два без учета повторности) эксперимента. Для этой цели используется модель,

$$\begin{cases} T(t=0)=T_0, T(t=t_1)=T_1, T_c \le T_2(t=t_2); \\ k=\dfrac{1}{t_1}\ln\left|\dfrac{T_1-T_c}{T_0-T_c}\right|; \\ t_2=\dfrac{1}{k}\ln\left|\dfrac{T_2-T_c}{T_0-T_c}\right|; \\ L=vt_2. \end{cases}$$

График изменения температуры брикетной ленты во времени показан на рисунке



В качестве примера рассмотрим $T_0(t_0 = 0) = 100°C,\ T_c=20°C,$

$T_1(t_1 = 10\ \text{мин}) = 35°C,\ v = 3\ \text{м/мин}.$

В конце лотка температура брикета должна быть $T_2 = 25°C.$

Прежде всего вычисляем значение

$$k = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{35-20}{100-20}\right| = -0{,}17,$$

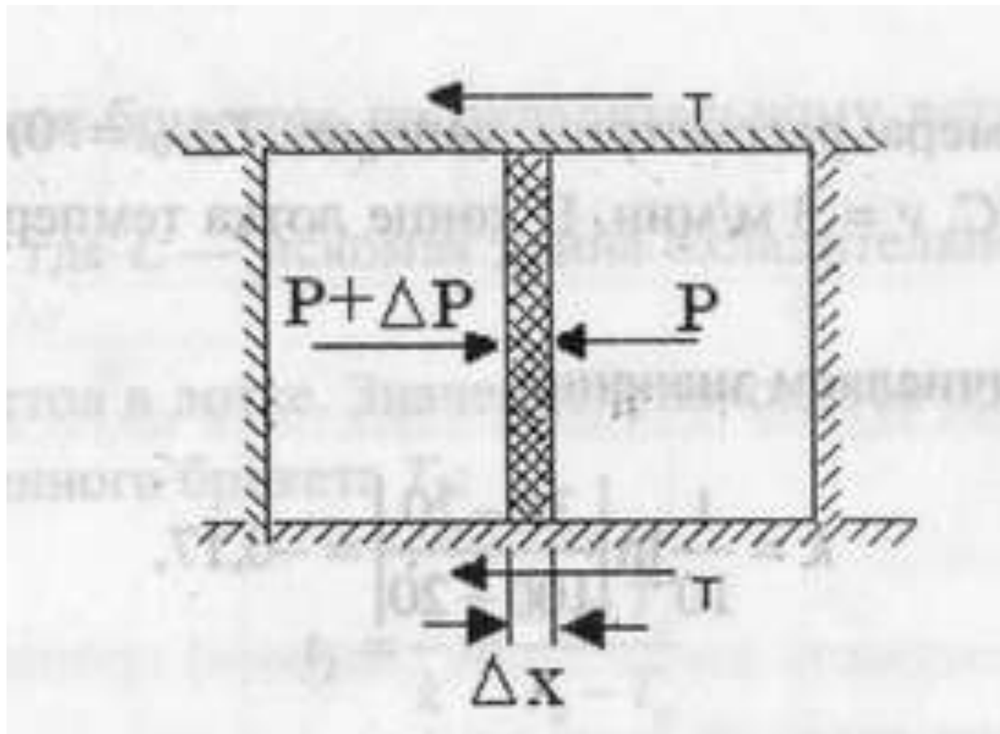
А затем находим $$L = \frac{v}{k}\ln\left|\frac{T_2 - T_c}{T_0 - T_c}\right| = -\frac{3}{0{,}17}\ln\left|\frac{25-20}{100-20}\right| = 48{,}9.$$

Для практических целей округляем результат до L=50 м.

Пример 16.

Определить длину прессового канал.

Принимаем во внимание что сопротивление перемещению брикетной ленты создается трением поверхности брикетов о стенки матрицы.



Приступая к составлению математической модели, выделим элементарный слой брикета — Δx

Сила, перемещающая брикет в матрице, равна

$$[(P+ Y = aX + B, P)-P]\,\omega$$

(ω — площадь торца брикета).

Сопротивление перемещению слоя Δx брикета в канале определяется удельной касательной τ на боковой поверхности брикета $U\,\Delta x$

(U — периметр канала).
Сила сопротивления стенок равна $\tau U\,\Delta x$.

На основании третьего закона Ньютона приравниваем действующие и противодействующие силы

$$\omega\Delta P = \tau\cdot U\cdot\Delta x\,.$$

При $\Delta x \to 0$ имеем $\Delta P = dP$ и следовательно,

$$\omega dP = \tau\cdot U\cdot dx\,,$$

Где $\tau = kP$ — согласно известному соотношению о пропорциональности касательных и нормальных напряжений.

Для статических условий обычно принимают $k = -\mu \cdot \xi$

(μ— коэффициент внешнего трения, ζ — коэффициент бокового давления).
Разделив переменные и проинтегрировав уравнение, получим

$$P = C \cdot \exp\left(k \frac{U}{\omega} x\right).$$

Постоянная интегрирования С определяется дополнительным условия

$$P(x=0)=P_0 : C = P_0.$$

Формула $P = P_0 \exp\left(k \frac{Y}{\omega} x\right)$

широко распространена в расчетах прессования, деформирования различных пород в стесненных условиях. Эта формула часто используется для определения коэффициента сопротивления перемещения сжатого материала в матрице:

$$k = \frac{1}{L_n} \cdot \frac{\omega}{U} \cdot \ln\left|\frac{P_u}{P_0}\right|, \ k < 0.$$

Для этого необходимо знать давление на торце штемпеля $P_0(x=0)$

и упоре $P_y(x = L)$.

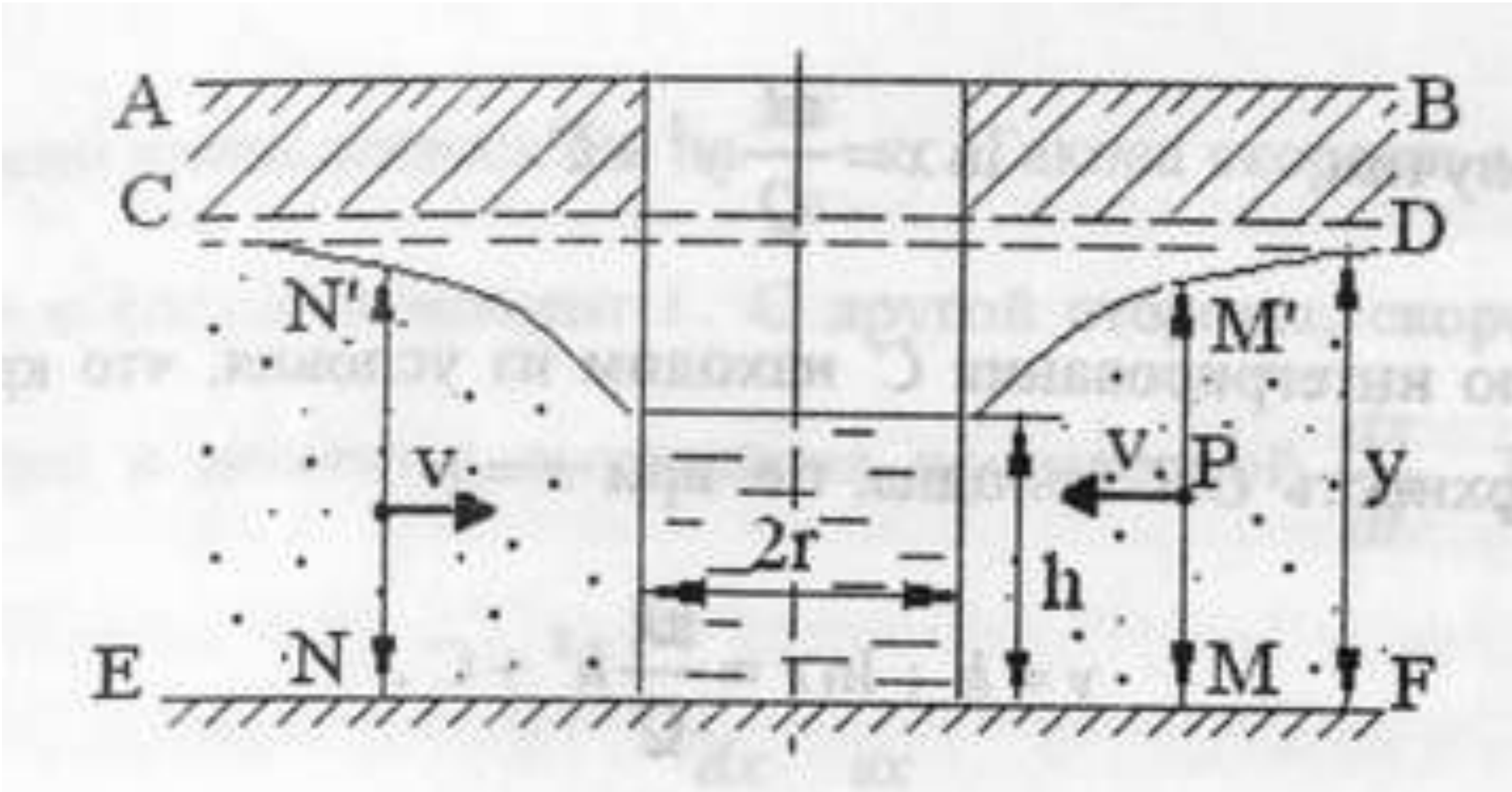
По известным значениям k, P_0, P_y

для данного поперечно сечения канала можно рассчитать его длину:

$$L_n = \frac{\omega}{kU} \ln \left| \frac{P_y}{P_0} \right|.$$

Пример 17.

Определить уравнение кривой, по которой располагается уровень грунтовых вод вблизи круглого колодца, простирающегося до водонепроницаемого слоя



Решение.

Пусть AB — поверхность залежи, CD — поверхность грунтовых вод до устройства колодца, EF — водонепроницаемый слой, ограничивающий снизу грунтовых вод. Если высота воды поддерживается в колодце вычерпыванием на постоянном уровне, то поверхность грунтовых вод вблизи от колодца понижается определенным образом.

Кривая поверхности грунтовых вод устанавливается на основании опытного правила, по которому скорость v воды в точке P пропускающего (дренирующего) грунта пропорциональна наклону кривой в точке M′ лежащей на вертикали точки P.

Обозначив коэффициент пропорциональности через k, получим выражение скорости

$$v = k\frac{dy}{dx}.$$

Через боковую поверхность цилиндра протекает количество води

$$Q = 2\pi xyv = 2\pi xyk\frac{dy}{dx},$$

которое для всего цилиндра радиуса x равно расходу воды в колодце

Равенство дает дифференциальное уравнение задачи, которое после разделения переменных приводится к виду

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q}ydy.$$

Интегрируя, получим
$$\ln x = \frac{\pi k}{Q} y^2 + C.$$

Постоянную интегрирования C находим из условия, что кривая ДН переходит в поверхность GH колодца, т.е. при x = r

$$y = h\ :\ \ln r = \frac{\pi k}{Q} h^2 + C\,,$$

откуда
$$C = \ln r - \frac{\pi k}{Q} h^2\,.$$

В окончательном виде уравнение кривой поверхности грунтовых вод

$$\ln \frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q} (y^2 - h^2)$$

или
$$y^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{x}{r} + h^2\,.$$

Пример 18.

Через сосуд емкостью а литров, наполненный водным раствором некоторой соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени втекает в литров чистой воды и вытекает такое же количество раствора.

Найти закон по которому изменяется содержание соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд.

Эта задача представляет интерес для процессов обогащения, обезвоживания и пр.

Решение.

В момент времени t в сосуде содержится некоторое неизвестное нам количество соли x кг.

Следовательно, в каждом литре раствора содержится x/a кг. соли, а в литрах

$\frac{вx}{a}$ — кг.

Если бы в течение единицы времени, начиная с момента t , концентрация соли оставалась неизменной, то количество соли единицу времени уменьшилось бы на $\frac{вx}{a}$ кг. Такова скорость уменьшения количества соли в момент времени t

С другой стороны, скорость изменения количества соли в момент t выражается производной $\frac{dx}{dt}$. Таким образом, имеем

$$-\frac{dx}{dt} = \frac{вx}{a}.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{в}{a}dt .$$

Интегрируем указанное дифференциальное уравнение: $\ln x = -\frac{в}{a}t + \ln C_1 .$

После потенцирования $x = C_1 l^{-\frac{в}{a}t}$,

где постоянная С, находится обычно из начальных условий $C_1(t = 0) = C_0 .$

Окончательно математическую модель можно записать в виде

$$x = C_0 \exp(-\frac{в}{a}t) ,$$

Т. е. количество соли убывает в сосуде по экспоненциальному закону.

Пример 19.

В помещении цеха вместимостью 10800 м^3 воздух содержит 0,12% углекислоты.

Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0.04% углекислоты в количестве а м^3 в минуту.

Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент времени одна и та же (смешение чистого и грязного воздуха происходит немедленно), рассчитаем каков должен быть расход вентилятора, чтобы по истечении 10 минут содержание углекислоты не превышало 0,06 %.

Решение.

Пусть концентрация углекислоты в воздухе в момент t равна $x\%$. Составим за промежуток времени Δt , протекший от момента t баланс углекислоты, находящейся в помещении.

За это время вентиляторы доставляет $0{,}0004adt$ м^3 углекислоты, а ушло из помещения $0{,}01adt$ м^3 углекислоты Следовательно, за dt минут количество углекислоты в воздухе уменьшилось на

$$dq = (0{,}01x - 0{,}0004)adt\ ,\ \text{м}^3.$$

Обозначим через dx процентное содержание углекислоты в воздухе. По-другому количество углекислоты dq посчитать по формуле

$$dq = -10800 \cdot 0{,}01dx\ ,\ \text{м}^3$$

(знак минус взят из-за $dx < 0$.

Приравниваем друг другу оба выражения для dq, получим дифференциальное уравнение

$$(0{,}01x - 0{,}0004)adt = -10800 \cdot 0{,}01dx\ .$$

Разделив переменные, получим

$$-\frac{adt}{10800} = \frac{dx}{x - 0{,}04}.$$

Интегрируя, находим решение $$x - 0,04 = C \exp\left(-\frac{at}{10800}\right).$$

Так как x=0.2 при t=0, то C = 0,08 и частная закономерность имеет вид

$$x - 0,04 = 0,08 \exp\left(-\frac{at}{10800}\right).$$

Для определения расхода а вентилятора положим в формуле x = 0,06 t=10 тогда

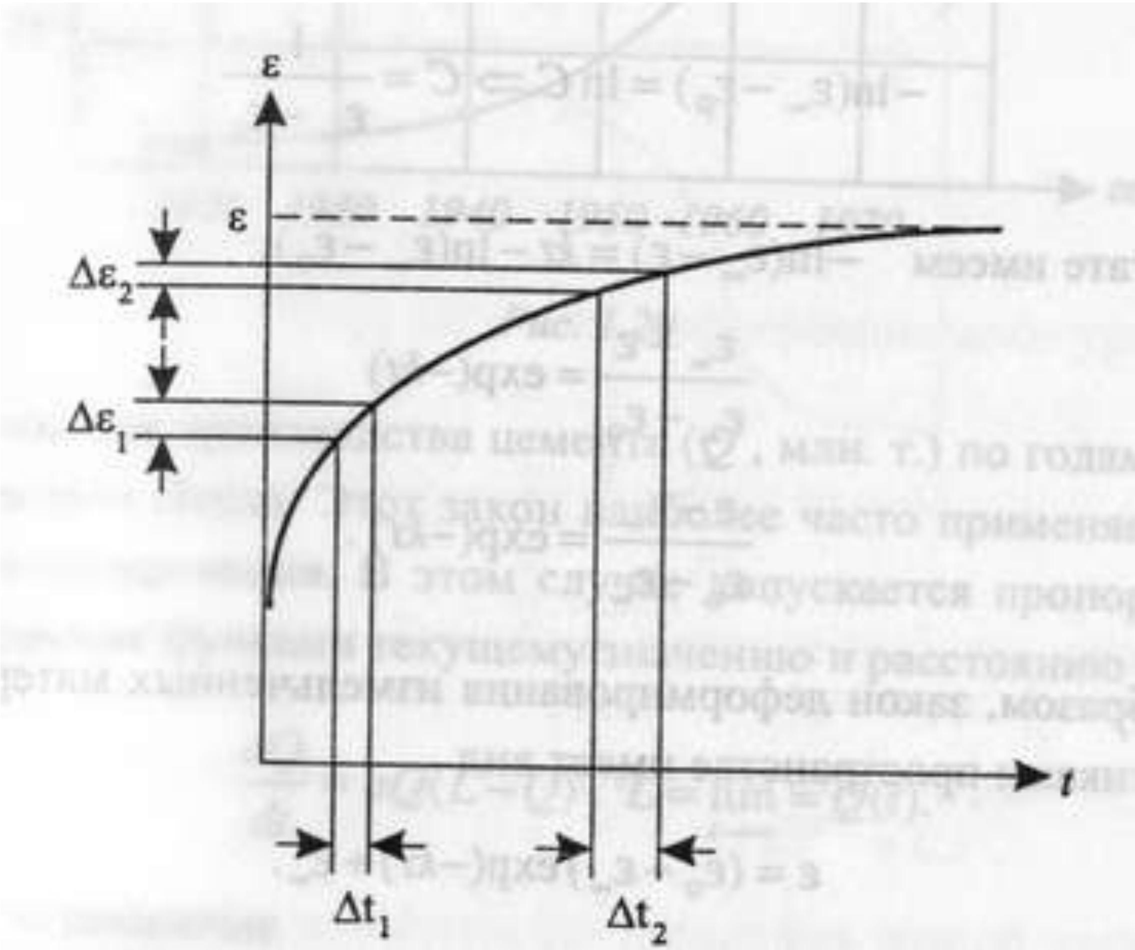
$$0,02 = 0,08 \exp\left(-\frac{a}{10800}\right).$$

Откуда $a = 10800 \ln 4 \approx 1500$ м^3/мин.

Ответ: $a = 1500$ м^3/мин.

Пример 20.

Требуется определить математическую модель зависимости деформации є грунта (торф, измельченный уголь и др.) от времени t их нахождения под давлением в ограниченном стенками пространстве.



Известно, что в начальный момент времени деформация равна $\varepsilon(t=0)=\varepsilon_0$.

Затем деформация грунта под действием давления монотонно возрастает, причем сопротивление грунта возрастает и, следовательно, за один же промежуток времени Δt грунт в ограниченном пространстве получает все меньшую деформацию.

Таким образом, при бесконечно большом времени t значение деформации стремится к некоторому предельному значению $\varepsilon \to \varepsilon_\infty$.

Указанное позволяет сформулировать аналитические условия, вторым подчиняется зависимость

$$\varepsilon(0)=\varepsilon_0;\ \ \varepsilon'_t>0;\ \ \varepsilon''_t<0;\ \ \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\varepsilon_\infty.$$

На основании указанных условий можно принять $mvk^2 \frac{P(x)}{P_0}$ $k > 0$.

Интегрируя уравнение, получим $-\ln(\varepsilon_\infty - \varepsilon) = kt + \ln C$.

Воспользовавшись начальным условием $\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0$, находим

$$-\ln(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0) = \ln C \Rightarrow C = \frac{1}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0}.$$

В результате имеем

$$-\ln(\varepsilon_\infty - \varepsilon) = kt - \ln(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0);$$

$$\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = \exp(-kt)$$

Или

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty} = \exp(-kt).$$

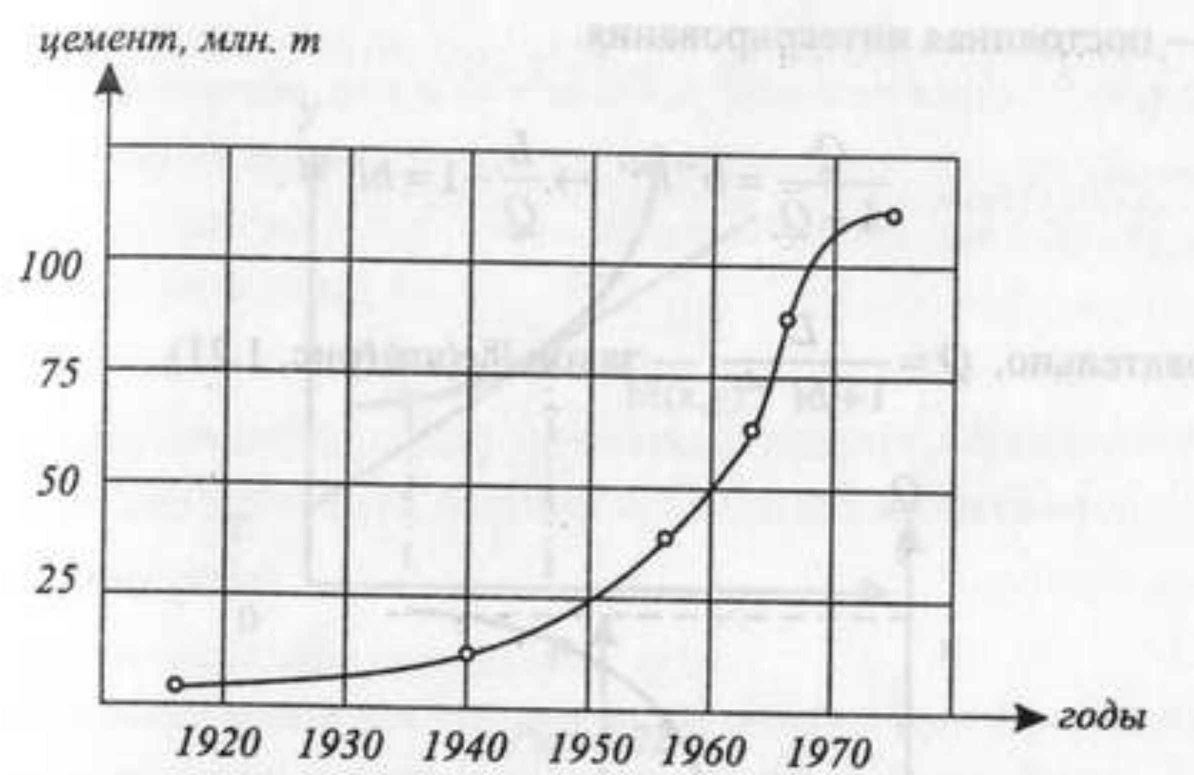
Таким образом, закон деформирования измельченных материалов в ограниченном стенками пространстве имеет вид

$$\varepsilon = (\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)\exp(-kt) + \varepsilon_\infty.$$

Подобный подход имеет место при рассмотрении кинетики флотации.

Пример 21.

Представить в математической форме изменение объемов произволе цемента в СССР за период 1913-1975 гг. Статистические данные представлены на рис.



Решение.
Зависимости подобного рода в математической форме нужны для прогнозирования развития добычи (производства) полезного ископаемого (продукции) Одним из условий служит необходимость установления предела развития то или иного производства.

Если есть расчеты, обоснование другого рода о придельном значении объемов производства цемента, то для математического описания изменения производства цемента (Q , млн. т.) по годам (t) можно использовать кривую Перла.

Этот закон наиболее часто применяется для решения задач прогнозирования. В этом случае допускается пропорциональность скорости изменения функции текущему значению и расстоянию от асимптоты

$$\frac{dQ}{dt} = aQ(L-Q)\,,\quad L = \lim_{t\to\infty} = Q(t).$$

Разделим переменные

$$\int \frac{dQ}{Q(L-Q)} = \int a\,dt.$$

Откуда $$\frac{1}{L}\left(\int\frac{dQ}{Q}+\int\frac{dQ}{(L-Q)}\right)=\int a\,dt,$$

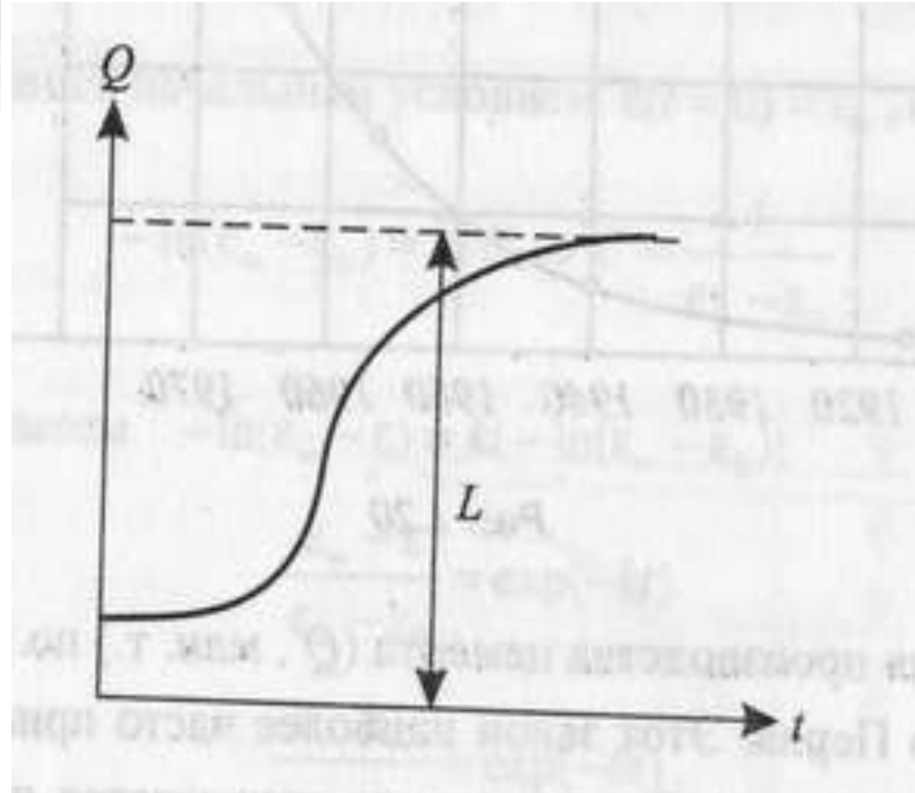
так как $$\frac{1}{Q(L-Q)}=\frac{1}{L}\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{L-Q}\right).$$

Интегрируя, получим $$\ln\left|\frac{Q}{L-Q}\right|=aLt+\ln b^{-1},$$

Где $ln\, b^{-1}$ — постоянная интегрирования.

$$\frac{Q}{L-Q}=b^{-1}l^{aLt}\rightarrow\frac{L}{Q}-1=bl^{-aLt}.$$

Следовательно $$Q=\frac{L}{1+bl^{-aLt}}$$ — закон Перла

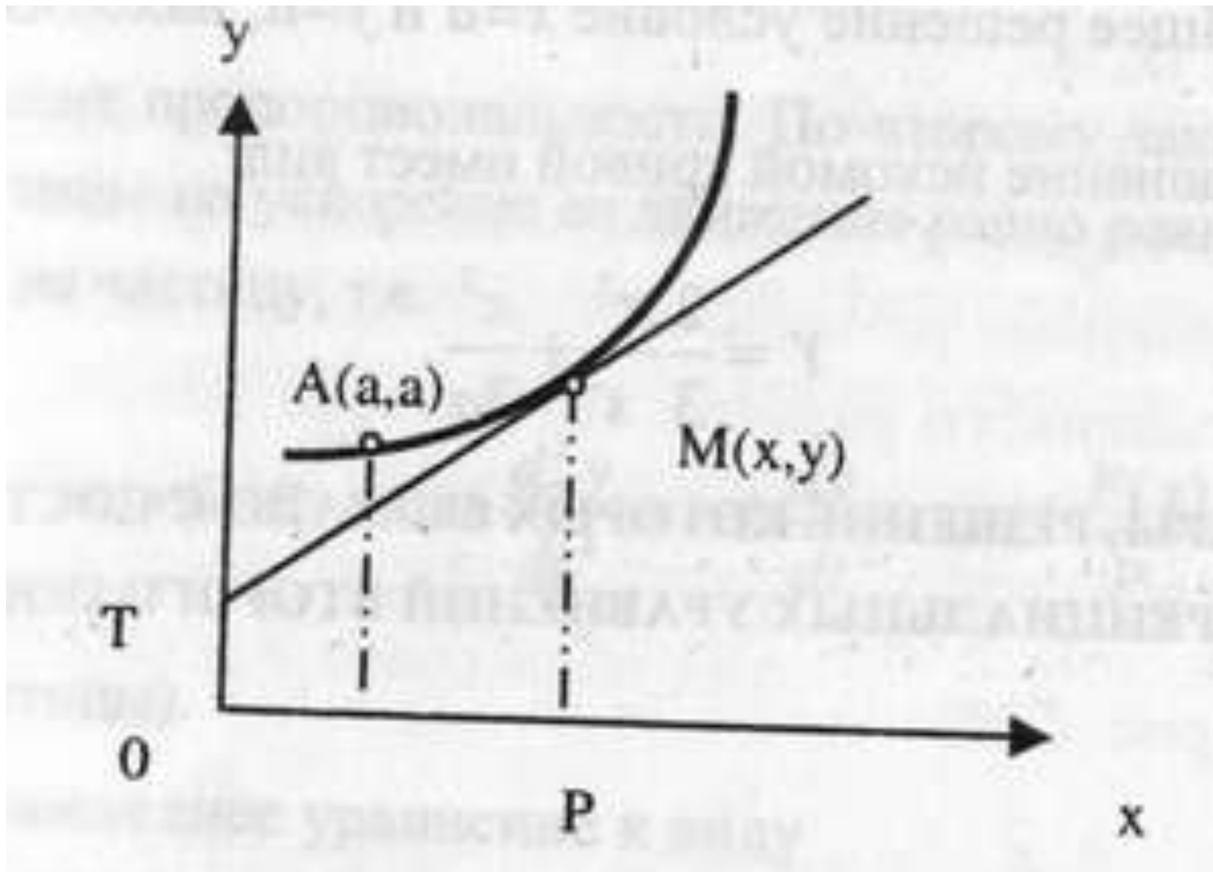


Параметры a,b зависимости находятся методом средних или наименьших квадратов из зависимости по экспериментальным данным: $$Y=aX+B,$$

$$Y=\ln\left|\frac{Q}{L-Q}\right|, X=Lt, B=\ln\cdot b^{-1}.$$

Пример 22.

Определить уравнение траектории y(x), проходящей через точку А (а, а) обладающей следующим свойством: если в любой точке М(х,у) кривой у(х) ординатой РМ провести касательную до пересечения с осью ОУ в точке Т, то площадь трапеции ОТМР есть величина постоянная, равная a^2



Решение.

Площадь трапеции определяется по формуле $$S=\frac{OT+PM}{2}OP.$$

Так как $OT=y-xy',\ PM=y,\ OP=x,$

то дифференциальное уравнение имеет вид $$(2y-xy')x=2a^2$$

или $$y'-\frac{2}{x}y=-\frac{2a^2}{x^2}.$$

Это линейное уравнение. Его общее решение находим методом вариации произвольной постоянной

$$y_{олн} = Ce^{-\int P(x)dx} = Ce^{\int \frac{2dx}{x}} = Ce^{2\ln x} = Cx^2.$$

Зная общее решение линейного уравнения без правой части, определяем общее решение уравнения с правой частью в виде

$$y_{олн} = C(x)x^2.$$

Подставив $y_{олн}$ в уравнение, находим

$$C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2}{x}C(x)x^2 = -\frac{2a^2}{x^2},$$

откуда $$C(x) = -2a^2 \int \frac{dx}{x^4} = \frac{2}{3}\frac{a^2}{x^3} + C_1.$$

С учетом последнего выражения общее решение примет вид

$$y = -\frac{2}{3}\frac{a^2}{x} + C_1 x^2.$$

Подставляя в общее решение условие x=a и y=a, находим, что $C_1 = \frac{1}{3a}$

и, следовательно, уравнение искомой кривой имеет вид:

$$Y = \frac{2}{3}\frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{3a}.$$