УДК 511.512

Об одном обобщении бинарной аддитивной задачи с квадратичными формами

Куртова Л.Н.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
(НИУ «БелГУ»)
kurtova@bsu.edu.ru

Куртова Л.Н. «Об одном обобщении бинарной аддитивной задачи с квадратичными формами». *В теории чисел важную роль играют аддитивные задачи. Одной из них является проблема делителей Ингама. Рассматривается бинарная аддитивная задача с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей. Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения, содержащего линейную комбинацию бинарных положительно определенных примитивных квадратичных форм. Причем такие решения ищутся с некоторыми «весами», отвечающими за ограниченность числа решений. Данная задача является обобщением изученной ранее проблемы, где уравнение содержало сумму квадратичных форм. Доказательство основано на круговом методе, когда сумма, являющаяся числом решений изучаемого уравнения, представляется в виде интеграла; на разбиении отрезка интегрирования числами ряда Фарея, при этом выбранные «веса» позволяют использовать функциональное уравнение для двумерного тета-ряда. Используя точные формулы для двойных сумм Гаусса, с применением оценки А. Вейля для суммы Клоостермана проводится оценка одной суммы, содержащей суммы Гаусса.*

Ключевые слова: аддитивные задачи, число решений, асимптотическая формула, сумма Клоостермана, квадратичная форма.

Введение

В 1927 году А.Е. Ингам [1] поставил и решил элементарными методами задачу получения асимптотической формулы для числа решений $J(n)$ уравнения:

$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1,\ x_1x_2 \le n,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – натуральные числа.

Эта задача получила название бинарной аддитивной проблемы делителей.

Уточнением остаточного члена в асимптотической формуле для $J(n)$ занимались многие математики. Стоит отметить работы Т. Эстермана [2], Д.И. Исмоилова [3], Г.И. Архипова и В.Н. Чубарикова [4].

Рассмотрим бинарную аддитивную задачу с квадратичными формами, которая является аналогом классической проблемы делителей Ингама.

Будем использовать следующие обозначения. Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F; $Q_i(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}^t A_i \overline{m}$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_i, $\det A_i = -\delta_F$, $i = 1,2$.

Для суммы

$$I(n) = \sum_{Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1} \exp\left(-\left(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})\right)/n\right),$$

представляющей число решений уравнения $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = 1$ с «весом» $\exp\left(-\left(Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})\right)/n\right)$, в [5] была получена асимптотическая формула с остатком $O(n^{3/4+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число. В [6] изучается число решений уравнения $Q_1(\overline{m}) - Q_2(\overline{k}) = h$, $h << n^{\varepsilon}$.

В данной работе будет рассмотрено одно обобщение изучаемой проблемы.

Пусть

$$I(n,a,b,h) = \sum_{aQ_1(\overline{m}) - bQ_2(\overline{k}) = h} \exp\left(-\frac{Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})}{n}\right).$$

Ставится вопрос о получении асимптотической формулы для $I(n,a,b,h)$.

Круговым методом с использованием оценки А. Вейля для суммы Клоостермана доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– произвольное малое число,* δ_F *– дискриминант поля* F; a, b, h *– натуральные числа,* $a << n^{\varepsilon}$, $b << n^{\varepsilon}$, $h << n^{\varepsilon}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула:*

©Куртова Л.Н.
©Донецкий национальный технический университет

$$I(n,a,b,h)=\frac{4\pi^2 n}{|\delta_F|(a+b)}e^{-\frac{h}{an}}\sum_{q=1}^{+\infty}q^{-4}\times$$

$$\times\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi ihl/q}G_1(q,a\cdot l,\bar{0})G_2(q,-b\cdot l,\bar{0})+O(n^{3/4+\varepsilon}),$$

где $G_i(q,l,\bar{0})=\sum_{\bar{m}(\mathrm{mod}\,q)}\exp\left(2\pi ilQ_i(\bar{m})/q\right)$, $i=1,2$ *– двойные суммы Гаусса, константа в знаке* O *зависит от* a, b, h. *Сумма особого ряда асимптотической формулы положительна.*

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *(Функциональное уравнение для двумерного тета-ряда). Пусть* $Im\ \tau>0$, $\bar{x}\in R^2$, $\theta(\tau,\bar{x})=\sum_{\bar{n}\in Z^2}\exp\left(2\pi iQ(\bar{n}+\bar{x})\right)$. *Тогда*

$$\theta(\tau,\bar{x})=\frac{i}{\tau\sqrt{|\delta_F|}}\sum_{\bar{n}\in Z^2}\exp\left(-\frac{\pi i}{\tau}\bar{n}^tA^{-1}\bar{n}+2\pi i\bar{n}^t\bar{x}\right).$$

Доказательство см. в [7, глава VI].

Лемма 2. *Пусть* $N=[\sqrt{n}]$, q, q', $q''\le N$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}}\frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(n^{-1}-2\pi iax\right)\left(n^{-1}+2\pi ibx\right)}dx=$$

$$==\frac{n}{(a+b)}e^{-\frac{h}{an}}+O\left(\frac{qN}{ab}\right).$$

Доказательство. Равенство после некоторых преобразований подынтегральной функции следует из формулы $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-a}$ [8, глава V] и оценки

$$\int_{[q(q+q')]^{-1}}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi ihx}}{\left(n^{-1}-2\pi iax\right)\left(n^{-1}+2\pi ibx\right)}dx=O\left(\frac{qN}{ab}\right).$$

Лемма 3. *(Равенства для произведений двойных сумм Гаусса).* d *– отрицательное бесквадратное число,* $F=Q(\sqrt{d})$ *– мнимое квадратичное поле,* δ_F *– дискриминант поля* F, $D=-\delta_F$. *Пусть* $Q_1(\bar{m})$, $Q_2(\bar{k})$ *– бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы;* $(l,q)=1$. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть $(q,D)=1$, $(q,a)=1$, $(q,b)=1$, $l\cdot l^*\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$, $D\cdot D^*\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$, $a\cdot a^*\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$, $b\cdot b^*\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$. *Тогда*

$$G_1(q,a\cdot l,\bar{m})G_2(q,-b\cdot l,\bar{k})=$$

$$=q^2\exp\left(-2\pi il^*D^*\left(a^*Q_1'(\bar{m})-b^*Q_2'(\bar{k})\right)/q\right),$$

где $Q_1'(\bar{m})=\bar{m}^tDA_1^{-1}\bar{m}/2$, $Q_2'(\bar{k})=\bar{k}^tDA_2^{-1}\bar{k}/2$.

2. При любых q, D, a, b *справедливо неравенство:*

$$\left|G_1(q,a\cdot l,\bar{m})G_2(q,-b\cdot l,\bar{k})\right|\le cD(q,a)(q,b)q^2,$$

где c *– постоянная.*

Доказательство. Первое утверждение леммы не отличается от случая $a=b=1$ и приводится в [6].

Докажем второе утверждение. Если $(q,D)=1$, $(q,a)=1$, $(q,b)=1$, то неравенство следует из первого утверждения леммы.

Пусть $(q,D)=1$, $(q,a)>1$, $(q,b)>1$. Заметим, что

$$G_1(q,a\cdot l,\bar{m})=(q,a)^2G_1\left(\frac{q}{(q,a)},\frac{al}{(q,a)},\frac{\bar{m}}{(q,a)}\right),$$

если $\bar{m}$ делится на (q,a), и 0 в противном случае. Аналогичное равенство справедливо и для $G_2(q,-b\cdot l,\bar{k})$. Тогда с учетом первого утверждения леммы, можем считать, что

$$\left|G_1(q,a\cdot l,\bar{m})G_2(q,-b\cdot l,\bar{k})\right|\le(q,a)(q,b)q^2.$$

В случае, когда $(q,D)>1$ требуемая оценка следует из точных формул для сумм Гаусса от степени простого числа, в случае, когда данное простое число является делителем дискриминанта поля $D=-\delta_F$ [9]. В данном случае, помимо множителя $(q,a)(q,b)$ в правой части неравенства появится множитель $\sqrt{\left(D,q/(q,a)\right)\left(D,q/(q,b)\right)}\le D$.

Лемма 4. *(Оценка суммы Клоостермана). Пусть* $K(q,u,v)=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{2\pi i(u\cdot l+v\cdot l^*)/q}$ *– сумма Клоостермана. Справедлива оценка*

$$K(q,u,v)<<\tau(q)q^{1/2}(u,v,q)^{1/2}.$$

Доказательство см., например, в [10].

Лемма 5. *Пусть* $q=q_1q_2$, (q_1,q_2), $(q_1,D)=1$, $(q_1,a)=1$, $(q_1,b)=1$; q_2 *– либо 1, либо натуральное число, все простые делители которого делят хотя бы одно из чисел* D, a, b. *Пусть*

$$V(q,\bar{m},\bar{k})=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi ihl/q}G_1(q,a\cdot l,\bar{m})G_2(q,-b\cdot l,\bar{k}).$$

Справедливы следующие оценки:

$$V(q_1q_2,\bar{0},\bar{0})<<D(q,a)(q,b)q_1^2\sum_{s\backslash(q_1,h)}s\mu(\frac{q_1}{s})q_2^3,$$

$$V(q_1q_2,\bar{m},\bar{k})<<D(q,a)(q,b)q_1^{5/2+\varepsilon}(h,q_1)^{1/2}q_2^3.$$

Доказательство. Функция $V(q,\bar{m},\bar{k})$ является вполне мультипликативной, поэтому ее можно представить в виде произведения двух функций $V(q_1q_2,\bar{m},\bar{k})=V_1(q_1,\bar{m},\bar{k})V_2(q_2,\bar{m},\bar{k})$, одна из которых зависит от q_1, а вторая от q_2, и оценить каждую из них.

Для оценки функции $V_1(q_1,\overline{m},\overline{k})$ используем точную формулу для произведений сумм Гаусса из леммы 3 и оценку А. Вейля для суммы Клоостермана из леммы 4. Тогда

$$V_1(q_1,\overline{m},\overline{k}) << q_1^2 \left| K\left(q_1,h,D^*\left(a^*Q_1'(\overline{m}) - b^*Q_2'(\overline{k})\right)\right)\right| <<$$

$$<< q_1^{5/2+\varepsilon}(h,q_1)^{1/2}.$$

В случае, когда $\overline{m}=\overline{0}$, $\overline{k}=\overline{0}$, можем улучшить данную оценку. Имеем:

$$V_1(q_1,\overline{0},\overline{0}) << q_1^2 \left| \sum_{\substack{l_1=1\\(l,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i h l_1/q_1} \right| << q_1^2 \sum_{s\backslash(q_1,h)} s\mu(\frac{q_1}{s}).$$

Функцию $V_2(q_2,\overline{m},\overline{k})$ оценим тривиально. С учетом неравенства, доказанного в лемме 3, получаем

$$V_2(q_2,\overline{m},\overline{k}) << D(q_2,a)(q_2,b)q_2^2 \left| \sum_{\substack{l_2=1\\(l,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i h l_2/q_2} \right| <<$$

$<< D(q,a)(q,b)q_2^3$. Доказательство завершено.

Схема доказательства теоремы

1. Запишем $I(n,a,b,h)$ в виде интеграла

$$I(n,a,b,h) = \int_0^1 S_1(a,\alpha)S_2(b,\alpha)e^{-2\pi i\alpha h}d\alpha,$$

где $S_1(a,\alpha) = \sum_{\overline{m}\in Z^2} \exp\left((-n^{-1}+2\pi i a\alpha)Q_1(\overline{m})\right)$,

$S_2(b,\alpha) = \sum_{\overline{k}\in Z^2} \exp\left((-n^{-1}-2\pi i b\alpha)Q_2(\overline{k})\right)$. Пусть $N=[\sqrt{n}]$. $\xi_{0,1} = \left[-1/N;1/N\right)$. Разобьем промежуток $\left[1/N;1-1/N\right)$ числами ряда Фарея, отвечающего параметру N. Пусть $l''/q'' < l/q < l'/q'$ – соседние дроби Фарея, $1\le l,q\le N$, $q'\le N$, $q''\le N$. Определим промежутки $\xi_{l,q} = \left[\frac{l}{q} - \frac{1}{q(q+q'')};\frac{l}{q}+\frac{1}{q(q+q')}\right)$.

Тогда

$$I(n,a,b,h) = \sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i h l/q} \times$$

$$\times \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} S_1(a,l/q+x)S_2(b,l/q+x)e^{-2\pi i h x}dx.$$

2. Каждую из сумм $S_1(a,l/q+x)$ и $S_2(b,l/q+x)$ можем представить как сумму двумерных тета-рядов. Например,

$$S_1(a,l/q+x) = \sum_{\overline{s}(\bmod q)} \exp\left(2\pi i a l Q_1(\overline{s})/q\right)\times$$

$$\times\theta\left(\left(ax+\frac{i}{2\pi n}\right)q^2,\frac{\overline{s}}{q}\right).$$

Используем функциональное уравнение из леммы 1. Затем выделим слагаемое, которое отвечает вектору $\overline{m}=\overline{0}$. Тогда

$$S_1(a,l/q+x) = \varphi_1 + \Phi_1,$$

где $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{q^2\sqrt{D}\left(n^{-1}-2\pi i a x\right)}G_1(q,a\cdot l,\overline{0})$,

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}\left(n^{-1}-2\pi i a x\right)}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\overline{m}\in Z^2\\ \overline{m}\ne 0}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 Q_1'(\overline{m})}{Dq^2\left(n^{-1}-2\pi i a x\right)}\right)G_1(q,a\cdot l,\overline{m}).$$

Аналогично получаем равенство для $S_2(b,l/q+x)$: $S_2(b,l/q+x) = \varphi_2+\Phi_2$, где

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}\left(n^{-1}+2\pi i b x\right)}G_2(q,-b\cdot l,\overline{0}),$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{q^2\sqrt{D}\left(n^{-1}+2\pi i b x\right)}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\overline{k}\in Z^2\\ \overline{k}\ne 0}} \exp\left(-\frac{4\pi^2 Q_2'(\overline{k})}{Dq^2\left(n^{-1}+2\pi i b x\right)}\right)G_2(q,-b\cdot l,\overline{k}).$$

3. Подставляем полученные для сумм равенства под знак интеграла. Тогда $I(n,a,b,h) = I_1+I_2+I_3+I_4$, где интеграл I_1 отвечает за главный член асимптотической формулы, а остальные слагаемые являются остаточными членами.

Вычислим

$$I_1 = \sum_{q\le N}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i h l/q}G_1(q,a\cdot l,\overline{0})G_2(q,-b\cdot l,\overline{0})\times$$

$$\times\int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \frac{e^{-2\pi i h x}}{\left(n^{-1}-2\pi i a x\right)\left(n^{-1}+2\pi i b x\right)}dx.$$

С учетом равенства из леммы 2 получаем

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{|\,\delta_F\,|(a+b)}e^{-\frac{h}{an}}\sum_{q=1}^{N} q^{-4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q}\times$$

$$\times G_1(q,a\cdot l,\overline{0})G_2(q,-b\cdot l,\overline{0}) + O(I_{1,1}),$$

где $I_{1,1} = \dfrac{N}{abD}\sum_{q\le N} q^{-3}V(q,\overline{0},\overline{0})$. Используя оценку, полученную в лемме 5, можем считать, что $I_{1,1} << n^{1/2+\varepsilon}$. При оценивании учитываем, что a, b, h и дискриминант мнимого квадратичного поля δ_F – фиксированные числа.

Кроме того, остаток $R = \dfrac{4\pi^2 n}{|\,\delta_F\,|(a+b)}e^{-\frac{h}{an}}\sum_{q>N} q^{-4}V(q,\overline{0},\overline{0})$ так же оценивается, как $O(n^{1/2+\varepsilon})$. Тогда

ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

$$I_1 = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F|(a+b)} e^{-\frac{h}{an}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i h l/q} \times$$

$$\times G_1(q, a\cdot l, \overline{0}) G_2(q, -b\cdot l, \overline{0}) + O(n^{1/2+\varepsilon}).$$

4. Осталось провести оценку остаточных членов. Рассуждения для каждого из интегралов I_2, I_3, I_4 не сильно отличаются друг от друга. Рассмотрим интеграл I_4

$$I_4 = \sum_{q\le N} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{2\pi i h l/q} \times \int_{-[q(q+q'')]^{-1}}^{[q(q+q')]^{-1}} \Phi_1 \Phi_2 e^{-2\pi i h x} dx$$

и поменяем в нем порядок суммирования и интегрирования. Переходя к неравенствам, будем использовать лемму 5 для оценки функции $V(q, \overline{m}, \overline{k})$.

При $q \le n^{1/2-\theta}$ и $|x| \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, где θ – сколь угодно малое положительное число, действительные части показателей экспоненциальной функции в Φ_1 и Φ_2 не превосходят $-cn^{2\theta}$, а суммы по $\overline{m} \ne \overline{0}$ и $\overline{k} \ne \overline{0}$ оцениваются как $O(\exp(-cn^{2\theta}))$. Интеграл $\int_{-[qn^{1/2+\theta}]^{-1}}^{[qn^{1/2+\theta}]^{-1}} \frac{dx}{n^{-2} + 4\pi^2 abx^2} << q^{-1} n^{3/2-\theta}$. Тогда одна из сумм, входящих в остаток I_4 имеет оценку:

$$\sum << n^{3/2-\theta+\varepsilon} e^{-cn^{2\theta}} \sum_{q_1 q_2 \le n^{1/2-\theta}} q_1^{-5/2+\varepsilon} q_2^{-2} << n^{3/4+\varepsilon}.$$

При $n^{1/2-\theta} < q \le N$ и $|x| \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$; $q \le N$ и $-[q(q+q'')]^{-1} \le x \le -[qn^{1/2+\theta}]^{-1}$, $[qn^{1/2+\theta}]^{-1} \le x \le [q(q+q')]^{-1}$ действительные части показателей экспоненциальной функции в Φ_1 и Φ_2 не превосходят $-cQ_1'(\overline{m})$ и $-cQ_2'(\overline{k})$, а суммы по $\overline{m} \ne \overline{0}$ и $\overline{k} \ne \overline{0}$ оцениваются как $O(1)$. Интеграл при $|x| \le [qn^{1/2+\theta}]^{-1}$ есть функция $O(n)$, при других значениях x: $O(qn^{1/2+\varepsilon})$. Тогда окончательно получаем оценку $I_4 = O(n^{3/4+\varepsilon})$.

5. Главный член асимптотической формулы представляет собой сумму особой функции, которая является вполне мультипликативной и может быть разложена в произведение по простым числам. Можно показать, что каждый из множителей, входящих в данное произведение будет положителен и зависит от параметров a, b, h, δ_F.

Заключение

Круговым методом с использованием оценки А. Вейля для суммы Клоостермана получена асимптотическая формула с остаточным членом порядка $n^{3/4+\varepsilon}$ для суммы

$$\sum_{aQ_1(\overline{m}) - bQ_2(\overline{k}) = h} \exp\left(-\frac{Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})}{n}\right),$$

где a, b, h, n – натуральные, причем a, b, h и дискриминант мнимого квадратичного поля δ_F – фиксированные числа.

Список литературы

1. Ingham A.E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc, 1927, V. 2(7). – pp. 202 – 208.
2. Estermann T. Uber die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math, 1931 V. 164. – pp. 173 – 182.
3. Исмоилов Д.И. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН Тадж. ССР, 1979, Т. 22, №2. – С. 75 – 79.
4. Архипов Г.И., Чубариков В.Н. Об аддитивной проблеме делителей // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика, 2006, №5. – С. 32 – 35.
5. Куртова Л.Н. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика, 2007, №7 (57). – С. 107 – 121.
6. Куртова Л.Н. Об одном аналоге аддитивной проблемы делителей с квадратичными формами // Чебышевский сборник, 2014, т. 15, Вып. 2. – С. 33 – 49.
7. Ogg A.P. Modular Forms and Dirichlet Series. – N.-Y.: W.A. Benjamin Inc., 1969. – 211 p.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учебное пособие для студентов механических специальностей механикоматематических факультетов государственных университетов. – М.: Физматлит, 1958. – 678 с.
9. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник, 2003, Т. 4, Вып. 2. – С. 53 – 67.
10. Estermann T. On Klostermann's sum // Mathematika, 1961, 8. – pp. 83 – 86.

References (transliteration)

1. Ingham A.E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc, 1927, V. 2(7). – pp. 202 – 208.
2. Estermann T. Uber die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math, 1931 V. 164. – pp. 173 – 182.
3. Ismoilov D.I. Ob asimptotike predstavlenija chisel kak raznosti dvuh pro-izvedenij [On the

asymptotics of the representation of numbers of the two product] // Dokl. AN Tadzh. SSR, 1979, T. 22, 2. – pp. 75 – 79.
4. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N. On the Ingham additive divisor problem // Moscow Univ. Math. Bull., 2006, 61(5). – pp. 33 – 36.
5. Kurtova L.N. Ob odnoj binarnoj additivnoj zadache s kvadratichnymi formami [On a binary additive problem with quadratic forms] // Vestnik SamSSU. Matematika, 2007, 7 (57). – pp. 107 – 121.
6. Kurtova L.N. Ob odnom analoge additivnoj problemy delitelej s kvadratichnymi formami [About one analog of the additive divisor problem with quadratic forms] // Chebyshevskii Sb., 2014, 15(2). – pp. 33 – 49.
7. Ogg A.P. Modular Forms and Dirichlet Series. – N.-Y.: W.A. Benjamin Inc., 1969. – 211 p.
8. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of complex functions]: Uchebnoe posobie dlja studentov mehanicheskih special'nostej mehaniko-matematicheskih fakul'tetov gosudarstvennyh universitetov. – M.: Fizmatlit, 1958. – 678 p.
9. Gritsenko S.A. O funkcional'nom uravnenii odnogo arifmeticheskogo rjada Dirihle [On the functional equation one of arithmetic Dirichlet series] // Chebyshevskii Sb., 2003, 4(2). – pp. 53 – 67.
10. Estermann T. On Klostermann's sum // Mathematika, 1961, 8. – pp. 83 – 86.

Куртова Л.Н. «Про одне узагальнення бінарної адитивної задачі з квадратичними формами». *У теорії чисел важливу роль відіграють адитивні задачі. Однією з них є проблема дільників Інгама. Розглядається бінарна аддитивна задача з квадратичними формами, яка є аналогом класичної проблеми дільників. Отримана асимптотична формула для числа рішень рівняння, що містить лінійну комбінацію бінарних позитивно певних примітивних квадратичних форм. Причому такі рішення шукаються за деякими «вагами», які відповідають за обмеженість числа рішень. Дана задача є узагальненням вивченої раніше проблеми, де рівняння містило суму квадратичних форм. Доказ засновано на круговому методі, коли сума, яка є числом рішень досліджуваного рівняння, представляється у вигляді інтеграла, а також на розбитті відрізку інтегрування числами ряду Фарея, при цьому обрані «ваги» дозволяють використовувати функціональне рівняння для двовимірного тета-ряду. Використовуючи точні формули для подвійних сум Гаусса, із застосуванням оцінки А Вейля для суми Клоостермана проводиться оцінка однієї суми, що містить суми Гаусса.*

Ключові слова: адитивні задачі, число рішень, асимптотична формула, сума Клоостермана, квадратична форма.

Kurtova L.N. “About one generality of the binary additive problem with quadratic forms”. *In the number theory additive problems is very important. The solution to these problems is concluding to find asymptotic formula for the number of solutions of Diophantine equations. One of them is the Ingam binary additive divisor problem on the representation of natural number as the difference of product of numbers. In present paper one problem with quadratic forms is considered. This problem is analog of the Ingam binary additive divisor problem. The number of solutions of an equation containing a linear combination of binary positive defined primitive quadratic forms is investigated. Moreover, such solutions are sought with some "weights", are responsible for the finite number of solutions. Asymptotic formula of the number of solutions of diophantine equation is received. This problem is a generalization of the problem studied previously, where an equation contained the sum of quadratic forms. Proof based on circular method, when the sum, which is solution of diophantine equation, may be representing as integral. Interval of integration divided by numbers of Farey series. The taking weight coefficient allows using a functional equation of the theta-function. After the transformations sums of the products of Gauss sums is occurred. The exact formula and the estimation for the products of Gauss sums is received. In the process of obtaining estimates it is important to divide the studying sums on a product of two sums, one of which the summation is over the prime to the discriminant of the quadratic field. In this case, the exact formula for the products of Gauss sums is used and the estimation is received by used the estimation by A. Weil of the Kloosterman's sum. The second multiplier, which the summation is not over the prime to the discriminant of the quadratic field, estimated by used the estimation for the products of Gauss sums. The discriminant of the quadratic field is a fixed number. Then this estimation does not grow with the growth of the basic parameter.*

Keywords: additive problems of number theory, asymptotic formula, Kloosterman's sum, quadratic form.

Статья поступила в редакцию 17.05.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук Г.В. Авериным