УДК 517.9

О разрешимости системы Ламе теории упругости в изотропной среде

Тарасова О.А., Чернова О.В.
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
tarasova_o@bsu.edu.ru, chernova_olga@bsu.edu.ru

Тарасова О.А., Чернова О.В. «О разрешимости системы Ламе теории упругости в изотропной среде». *Рассмотрена смешанная задача плоской изотропной теории упругости в полуплоскости, когда на отрезках вещественной оси попеременно задаются либо вектор смещения, либо нормальная компонента тензора напряжений. Для изотропных сред граничные задачи математической теории упругости в областях с гладкой границей хорошо изучены классическим методом сведения к системам сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Формула представления решения задачи через пару J–аналитических функций традиционно используется в этих методах, а сами решения эллиптических систем связаны с аналитическими функциями и их производными до некоторого порядка. Такое представление можно значительно упростить, заменив аналитические функции решениями каконических эллиптических систем первого порядка. В данной работе найдено явное представление ядра обобщенного потенциала двойного слоя системы Ламе и исследованы вопросы, связанные с представлением общего решения этой системы через пару J- аналитических функций.*

Ключевые слова: система Ламе, изотропная среда, тензоры напряжения и деформации, J-аналитические функции, краевая задача, эллиптическая система, фредгольмов оператор.

Введение

Упругость является основным свойством всех тел природы [1]. Практическое использование человеком свойства упругости тел продолжается века. В 1852 г. Ламе издал первое руководство по теории упругости под заглавием «Lecons sur la theorie mathematique de l'elasticite des corps solides», ставшее классическим и не утратившее своего значения и поныне.

Основные граничные задачи математической теории упругости для изотропных сред в областях с гладкой границей изучены достаточно хорошо классическим методом сведения к системам сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [2]. В областях с кусочно-гладкой границей в классической постановке пространств Гельдера с весом эти вопросы исследовались в канонических областях типа клина, полукруга, конуса [3] и др. с помощью различных интегральных преобразований. При эквивалентной редукции краевой задачи для эллиптических систем с постоянными коэффициентами в областях с кусочно-гладкой границей к системе граничных интегральных уравнений наряду с сингулярными интегралами Коши возникают интегралы с ядрами, приближенного-однородными степени -1. Теория сингулярных интегральных уравнений такого типа была независимо развита в работах [4], [5].

В классических методах используется формула представления решения через *J*–аналитические функции. Как показано в [6], решения эллиптических систем связаны с аналитическими функциями, а также их производными до некоторого порядка.

В данной работе рассматривается представление решений системы Ламе с помощью *J*–аналитических функций в явном виде.

Основные формулы упругости

Согласно [7] состояние среды плоской анизотропной теории упругости характеризунтся тензорами напряжения σ и деформации ε, которые представляют собой симметричные $2\times 2-$ матрицы–функции вида:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix},\quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где ε_j выражаются через вектор смещения $u = (u_1, u_2)$ по формулам:

ISSN 2411-720X (Print)
ISSN 2413-0834 (Online)

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad (2)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right).$$

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0, \qquad (3)$$

где $\sigma_{(j)}$ означает j-ый столбец матрицы σ.

В линейной теории упругости тензоры σ и ε связаны между собой законом Гука

$$\sigma = \alpha\varepsilon, \qquad (4)$$

где тензор модулей упругости $\alpha -$ матрица линейного преобразования, которая симметрична и положительно определена.

В покомпонентной записи соотношения (4) принимают вид:

$$\sigma_1 = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_4\varepsilon_2,$$
$$\sigma_2 = \alpha_4\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2,$$
$$\sigma_3 = 2\alpha_3\varepsilon_3, \qquad (5)$$
$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

На основании критерия Сильвестра элементы матрицы α должны подчиняться неравенствам $\alpha_j > 0, \quad j = 1,2,3,$ и $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_4^2$ $\alpha_1\alpha_3 > 0$, $\alpha_2\alpha_3 > 0$.

Согласно формулам (2) соотношения закона Гука (5) запишем в виде:

$$\sigma_{(i)} = a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y}, \; i = 1,2, \qquad (6)$$

с матричными коэффициентами:

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \; a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$a_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \; a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

где α_4 связано с α_1 и α_3 равенством $\alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_3$.

Система Ламе

Подставляя выражение (6) в уравнения равновесия (3), получим для вектора смещения $u = (u_1, u_2)$ эллиптическую систему уравнений второго порядка

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

которую называют системой Ламе.

Столбцы тензора напряжений удобно описывать в форме частных производных так называемой сопряженной функции v. В соответствии с (7) эта функция определяется соотношением:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (8)$$

Согласно (8) равенства (6) запишем в форме

$$\sigma_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{(2)} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (9)$$

В силу эллиптичности системы (7) ее характеристический многочлен имеет вид:

$$\chi(z) = \det P(z),$$
$$P(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2. \qquad (10)$$

Уравнение $\chi(z) = 0$ в верхней полуплоскости может иметь либо два различных корня $\nu_1 \neq \nu_2$, либо один кратный корень ν. Соответственно этим двум случаям примем:

$$1)\; J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \; \nu_1 \neq \nu_2,$$
$$2)\; J = \begin{pmatrix} \nu & i \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

В изотропном случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda + 2\mu, \alpha_3 = \mu, \alpha_4 = \lambda \qquad (12)$$

с некоторыми положительными λ и μ имеем случай 2) одного кратного корня с $\nu = i$.

Постановка задачи

Как известно [1], основные краевые условия для системы Ламе в области D на плоскости состоят в задании либо вектора смещений

$$u|_{\hat{A}} = f \qquad (13)$$

на границе $\Gamma = \partial D$, либо нормальной компоненты $\sigma n = \sigma_{(1)}n_1 + \sigma_{(2)}n_2$ тензора напряжения σ, т.е.

$$(\sigma n)|_{\Gamma} = g, \qquad (14)$$

где $n = (n_1, n_2)$ − единичная внешняя нормаль на Γ. Очевидно, (13) соответствует задаче Дирихле. Согласно (6) можем записать

$$\sigma n = \sum_{i,j=1,2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_j,$$

Тарасова О.А., Чернова О.В.
Донецкий национальный технический университет

где $x_1 = x, x_2 = y$.Таким образом (14) есть задача Неймана для системы Ламе. Эти задачи носят также название первой и второй краевых задач.

Отметим, что вторая краевая задача (14) может записываться в форме первой по отношению к сопряженной функции v, определённой формулами (8).
Тогда из (6) и (8) получим, что $\sigma n = [v[x(s), y(s)]]'$, где $x(s) + iy(s)$ есть естественная параметризация Г параметром длины дуги s. Следовательно, после интегрирования краевое условие (14) примет вид:

$$v|_{\Gamma} = f_1, \qquad (15)$$

где f_1 – первообразная функции g, рассматриваемой как функция длины дуги s на v.

Матрицы B и C

В явном виде матрицы B и C могут быть описаны [8] через корни характеристического многочлена χ .
Запишем равенство (10) в виде: $\chi(z) = g_1(z)g_2(z) - g_3^2(z) = h_1(z) - zh_2(z) + z^2 h_3(z)$,
где $g_i(z)$ и $h_i(z)$, $i = 1,2,3$ квадратные трехчлены:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \alpha_1 + \alpha_3 z^2, \\ g_2(z) &= \alpha_3 + \alpha_2 z^2, \\ g_3(z) &= (\alpha_3 + \alpha_4)z, \\ h_1(z) &= \beta_2 + \beta_4 z^2, \\ h_2(z) &= -\beta_3 z, \\ h_3(z) &= \beta_4 + \beta_1 z^2. \end{aligned} \qquad (16)$$

Здесь

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_4 & 0 \\ \beta_4 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} = (\det \alpha)\alpha^{-1}$$

означает присоединенную матрицу к матрице α , фигурирующей в законе Гука, которая также положительно определена.
В явном виде

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \alpha_1\alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_2\alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2, \\ &\beta_4 = -\alpha_4\alpha_3, \quad \beta_5 = 0, \quad \beta_6 = 0. \end{aligned} \qquad (17)$$

В этих обозначениях, согласно случаю 2) из (11) имеем равенства

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_1 & 2\alpha_1 i \\ (\alpha_3 - \alpha_4)i & \alpha_3 - \alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$(18)$$

$$C = \alpha_3 \begin{pmatrix} (\alpha_1 - \alpha_2)2i & 2(2\alpha_1 - \alpha_3) \\ 2(\alpha_3 - \alpha_1) & 2\alpha_1 i \end{pmatrix}.$$

Как показано в [9], матрицы B и C обратимы.

Отметим, что близкий подход к представлению решений в анизотропном случае рассматривался в [10].

Согласно (16) характеристический многочлен (10) дается равенством

$$\chi(z) = \alpha_3(\alpha_1 + 2kz^2 + \alpha_2 z^4), \qquad (19)$$

где $k = \dfrac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4{}^2 - 2\alpha_3\alpha_4}{2\alpha_3}$.

Легко проверить, что $k + \sqrt{\alpha_1\alpha_2} > 0$. В самом деле, это неравенство равносильно $\left(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_3\right)^2 > (\alpha_3 + \alpha_4)^2$, которое в силу условия $\sqrt{\alpha_1\alpha_2} > |\alpha_4|$ очевидно. Таким образом, для корней биквадратного многочлена (19) в верхней полуплоскости согласно (12) получим следующее выражение:

$$\nu = i\sqrt[4]{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad k = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}. \qquad (20)$$

В силу условий (12) случай изотропной среды соответствует формулам (18) и (20) с кратным корнем $\nu = i$, поэтому в явном виде

$$B = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu & 2(\lambda + 2\mu)i \\ -(\lambda + \mu)i & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda + \mu)\begin{pmatrix} -1 & (\tau + 1) \\ -i & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \mu\begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu)i & 4\lambda + 6\mu \\ -2(\lambda + \mu) & 2(\lambda + 2\mu)i \end{pmatrix} =$$

$$= \mu(\lambda + \mu)\begin{pmatrix} 2i & \tau + 3 \\ -2 & (\tau + 1)i \end{pmatrix},$$

где положено $\tau = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$.

Представление решений

В основе исследования краевых задач для эллиптической системы в области D лежит представление общего решения этой системы через J –аналитические функции.

Будем рассматривать систему Ламе (7) в изотропной среде в верхней полуплоскости области

$$D = \{y > 0\}, \qquad (21)$$

которая ограничена гладким контуром Γ.

Введем матрицу $J \in \mathbf{C}^{2\times 2}$, которая обратима и все ее собственные значения ν имеют положительную мнимую часть, т.е. лежат в верхней полуплоскости. Пусть J имеет вид: $J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

С матрицей J свяжем эллиптическую систему первого порядка специального вида:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \qquad (22)$$

где непрерывно дифференцируемая вектор – функция $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ принадлежит области (21).

Очевидно, при условии $J = i$ соотношение (22) есть условие Коши–Римана, которое определяет аналитические функции.

По этой причине решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ системы (22) называем J–аналитическими функциями.

Согласно [8, 11] общее решение u системы Ламе и сопряженная к ней функция v описываются через J– аналитические функции.

Теорема. *Существуют такие обратимые матрицы $B, C \in \mathbf{C}^{2\times 2}$, что любое решение u системы Ламе (7) и сопряженная к нему вектор–функция v в области D представима в виде*

$$u = \mathrm{Re}B\phi, \quad v = \mathrm{Re}C\phi + \xi, \qquad (23)$$

с некоторой J-аналитической функцией ϕ и $\xi \in \mathsf{R}^2$, причем ϕ определена однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Общее решение ϕ системы (22) соответственно двум случаям (11) для матрицы J выражается формулами:

$$1)\ \phi_k(x, y) = \psi_k(x + \nu_k y), k = 1,2,$$
$$2)\ \phi_1(x, y) = \psi_1(x + \nu y) + y\psi_2'(x + \nu y), \qquad (24)$$
$$\phi_2(x, y) = \psi_2(x + \nu y),$$

где функции ψ_k аналитичны в области $D(\nu_k) = \{x + \nu_k y, (x, y) \in D\}$ в случае 1) и в области $D(\nu)$ в случае 2).

Для изотропной среды, когда выполняются равенства (12) с некоторыми положительными λ, μ имеем случай 2) одного кратного корня с $\nu = i$ и подстановка (16 – 18) и (24) в (23) приводит к известным формулам Колосова–Мусхелишвили [1].

Очевидно, матрицы вида

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbf{C}$$

коммутируют с клеткой Жордана J в (11), поэтому замена $\phi = M\tilde{\phi}$ не выводит из класса решений системы Дуглиса. Следовательно, полагая $\tilde{B} = BM$, $\tilde{C} = CM$, соотношения (23) можем переписать по отношению к $\tilde{\phi}$ и $\tilde{B}, \tilde{C}$.

Другими словами, матрицы B и C определены с точностью до умножения справа на матрицу M. Полагая

$$M = \frac{1}{\lambda + \mu}\begin{pmatrix} -1 & -(æ + 1)i \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в этом случае предыдущие выражения для матриц B и C можем заменить на

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -æ \end{pmatrix},$$

$$C = \mu\begin{pmatrix} -2i & æ - 1 \\ 2 & -(æ + 1)i \end{pmatrix}.$$

В случае 2) из (11) область определения $D(\nu)$ функций ϕ_k одна и та же, однако согласно (24) в этом случае u и v линейно зависят от ψ и производной ψ', что вносит также дополнительное осложнение.

Данное препятствие в изотропном случае преодолевалось путем специальных интегральных представлений аналитических функций, предложенных Д.И. Шерманом, Н.И. Мусхелишвили и др. [1] . По этой причине [12] удобнее развивать прямой подход к исследованию задач (13), (15), основанный на применении аппарата аналитических функций непосредственно для решений системы Дуглиса (22).

Пусть область D конечна и ограничена простым ляпуновским контуром *Г*. Удобно считать, что точка $z = 0$ принадлежит D. Очевидно, задачу (13) можно записать в эквивалентной форме

$$u + \xi_1 = f, u(0) = 0,$$

где $\xi_1 \in R^l$ подлежит определению относительно пары $(u, \xi), \xi \in R^2$.

Аналогичным образом можно поступить и по отношению к задаче (15). В соответствии с теоремой эти задачи можем переписать для решений системы (22) в виде

$$\begin{aligned} &ReG\phi^+ + \xi = f, \\ &\phi(0) = 0 \end{aligned} \qquad (25)$$

относительно пары (ϕ, ξ), где $G = B$ или $G = C$ в соответствии со второй задачей и ϕ^+ означает граничное значение ϕ. Решение поставленной задачи будем искать в классе вектор – функций ϕ, непрерывных по Гельдеру в замкнутой области D.

Исходя из матричного обозначения $(x + iy)_J = x \cdot 1 + y \cdot J$, для $z = x + iy \in \mathbf{C}$ где 1 означает единичную 2×2 – матрицу, и аналогичный смысл имеет обозначение $(dx + idy)_J$ для матричного дифференциала, согласно [12] функцию ϕ можно единственным образом представить в виде

$$\begin{aligned} &\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t - z)_J^{-1} dt_J \varphi(t) + i\xi_0, \\ &\xi_0 \in \mathsf{R}^2, \end{aligned} \qquad (26)$$

где вектор – функция $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ вещественная и непрерывна по Гельдеру на *Г*. При этом имеет смысл аналог формулы Сохоцкого – Племеля:

$$2\phi^+(t_0) = \varphi(t_0) + \\ + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t) + i\xi_0. \tag{27}$$

Удобно сингулярный интеграл с матричным ядром здесь обозначать $(S_J\varphi)(t_0)$. При $J = i$ он переходит в классический интеграл Коши $(S\varphi)(t_0)$. Подстановка (27) приводит (25) к эквивалентной системе сингулярных уравнений

$$\mathrm{Re}G(\varphi + S_J\varphi) - (\mathrm{Im}G)\xi_0 + \xi = f,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma t_J^{-1} dt_J \varphi(t) + i\xi_0 = 0.$$

Запишем

$$\frac{1}{\pi i} t_J^{-1} dt_J = b(t) ds_t, \tag{28}$$

с 2×2 – матрицей-функцией $b(t)$, непрерывной по Гельдеру на Γ. Тогда предыдущую систему можем переписать по отношению к паре (ϕ, ξ):

$$\mathrm{Re}G(\varphi + S_J\varphi) - (\mathrm{Im}G)(\mathrm{Re}\, b, \varphi) + \xi = f, \\ (\mathrm{Im}\, b, \varphi) = 0 \tag{29}$$

Здесь (c, φ) означает интеграл от $c\varphi$ на Γ по длине дуги, в случае вещественной матрицы – функции $c(t)$ этот интеграл принадлежит R^2.

Очевидно, $2\,\mathrm{Re}\, S_J\varphi = S_J\varphi - S_{\bar{J}}\varphi$,

где учтено, что вектор – функция φ вещественна. Поэтому (29) эквивалентна системе

$$N\varphi + \xi = f,\ (\varphi, g_i) = 0,\ \ j = 1,2 \tag{30}$$

относительно пары (φ, ξ), где

$$2N\varphi = G(\varphi + S_J\varphi) + \overline{G}(\varphi - S_{\bar{J}}\varphi) - 2(\mathrm{Im}G)(\mathrm{Re}b, \varphi),$$

а функции g_1 и g_2 представляют собой строки матрицы b.

Условимся писать $N_1 \sim N_2$, если разность представляет собой интегральный оператор вида

$$[(N_1 - N_2)\varphi](t_0) = \int_\Gamma \frac{k(t_0, t)}{t - t_0} ds_t\ ,$$

где вектор–функция $k(t_0, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\Gamma \times \Gamma$ и обращается в ноль при $t=t_0$.

По предположению контур Γ ляпуновский. Как показано в [13] $S_J \sim S$ и, аналогично $S_{\bar{J}} \sim S$. Следовательно,

$$N \sim GP_+ + \overline{G}P_-,\ \ 2P_\pm = 1 \pm S.$$

Поскольку матрица G постоянна и обратима, сингулярный оператор $GP_+ + \overline{G}P_-$ обратим и обратный к нему выписывается по явной формуле [2] с помощью канонической функции. В результате (30) сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма с оператором $M = \left(GP_+ + \overline{G}P\right)^{-1} N \sim 1$ в главной части, к численному решению которой можно применить известные приближенные методы [14].

Аналогичный подход можно реализовать и в случае областей с кусочно-гладкой границей, как показано в [15] по отношению к задаче Дирихле для общих слабо связанных эллиптических систем, однако он уже опирается на аппарат неклассических сингулярных уравнений [16]. Этот подход может охватывать и случай многосвязных областей, как конечных, так и бесконечных. В частности, когда область D является верхней полуплоскостью, решение задачи $(13)-(15)$ может быть записано в явном виде [12].

Именно, пусть функция f удовлетворяет условию Гельдера на расширенной прямой $\overline{R} = R \cup \infty$ (т.е. $f(t)$ и $f(1/t)$ обладают этим свойством на любом конечном отрезке прямой) и обращается в нуль на ∞. Решение u, v задач $(13)-(15)$ ищется в аналогичном классе для замкнутой полуплоскости $\overline{D}$. Тогда согласно [12]

$$u(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\int_R B(t-z)_J^{-1} B^{-1} f(t) dt,$$

$$v(z) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\int_R C(t-z)_J^{-1} C^{-1} f(t) dt\ .$$

В случае ортотропной среды подстановка в это равенство формул (18) позволяет получить окончательные решения.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. – 709 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. – 513 с.
3. Шерман Д.И. Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями // Труды Сейсмологического института, 1938, 88. – С. 51 – 77.
4. Солдатов А.П. К теории сингулярных интегральных операторов классического типа // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, №3. – С. 529 – 544.
5. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Труды Тбил. мат. ин-та МН ГССР. 1979.Т. 60. – С. 2 – 136.
6. Бизадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. – 202 с.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 299 с.

8. Солдатов А.П., Тарасова О.А. Смешанная задача плоской теории упругости в полуплоскости // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015. № 23 (220), Выпуск 41. – С. 5 – 8.
9. Солдатов А.П. Система Ламе плоской анизотропной теории упругости // Доклады РАН, 2002, Т.385, №2. – С. 163 – 167.
10. Митин С.П. О представлении решений анизотропной теории упругости // Дифференциальные уравнения, 1998. Т. 34, №1. – С. 94 – 100.
11. Солдатов А.П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения, 2003. Т. 39. № 5. С. 674 – 676.
12. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка на полуплоскости // Известия РАН (сер. математика), 2006, Т. 70, № 6, С. 1233 – 1264.
13. Солдатов А.П., Чернова О.В. Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера // Научные ведомости Белгородского государственного университета. 2009. Т. 13. №17–2. – С. 115.
14. Партон В.З. Интегральные уравнения теории упругости. / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
15. Солдатов А.П. Об индексе задачи Дирихле для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. – №8. – С. 1156 – 1169.
16. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Вс. шк., 1991. – 266 с.

References (transliteration)

1. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. M.: Nauka, 1966. – 709 p.
2. Muskhelishvili N.I. Singuljarnye integral'nye uravnenija [Singular integral equations]. M .: Nauka, 1968. – 513 p.
3. Sherman D.I. Ploskaja zadacha teorii uprugosti so smeshannymi predel'nymi uslovijami [Plane problem of elasticity theory with mixed extreme conditions] // Trudy Sejsmologicheskogo instituta, 1938, 88, pp. 51 – 77.
4. Soldatov A.P. K teorii singuljarnyh integral'nyh operatorov klassicheskogo tipa [To the theory of singular integral operators of classical type] // Differencial'nye uravnenija. 1979. V. 15, no 3. pp. 529 – 544.
5. Duduchava R.V. Integral'nye uravnenija s razryvnymi predsimvolami, singuljarnye integral'nye uravnenija s nepodvizhnymi osobennostjami i ih prilozhenija k zadacham mehaniki [Integral equations with discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities and their applications to problems of mechanics] // Trudy Tbil. mat. in-ta MN GSSR. 1979. T. 60. 1979. T.60. pp. 2 – 136.
6. Bitsadze A.V. Kraevye zadachi dlja jellipticheskih uravnenij vtorogo porjadka [Boundary value problems for second order elliptic equations]. M.: Nauka, 1966. – 202 p.
7. Lehnitsky G.G. Teorija uprugosti anizotropnogo tela [The theory of an anisotropic elastic body]. Moscow-Leningrad: Gostehizdat, 1950. – 299 p.
8. Soldatov A.P. Tarasova O.A. Smeshannaja zadacha ploskoj teorii uprugosti v poluploskosti [Mixed problem of the plane theory of elasticity in a half] // Scientific statements Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. 2015. no 23 (220), Issue 41. pp. 5 – 8.
9. Soldatov A.P. Sistema Lame ploskoj anizotropnoj teorii uprugosti [Lame engine plane anisotropic elasticity theory] // Reports of the Russian Academy of Sciencesl, 2002, V. 385, no 2, pp. 163 – 167.
10. Mishin S.P. O predstavlenii reshenij anizotropnoj teorii uprugosti [On the representation of anisotropic elasticity theory] Differencial'nye uravnenija, 1998. V. 34, no 1. pp. 94 – 100.
11. Soldatov A.P. O pervoj i vtoroj kraevyh zadachah dlja jellipticheskih sistem na ploskosti [On the first and second boundary value problems for elliptic systems on the plane] // Differencial'nye uravnenija, 2003. V. 39. no 5. pp. 674 – 676.
12. Soldatov A.P. Jellipticheskie sistemy vtorogo porjadka na poluploskosti [Second-oder elliptic systems in the half-plane] //. Izvestija RAN (ser. matematika), 2006, V. 70, no 6, pp. 1233 – 1264.
13. Soldatov A.P., Chernova O.V. Zadacadacha Rimana-Gil'berta dlja jellipticheskoj sistemy pervogo porjadka v klassah Gel'dera [Riemann Hilbert problem for the elliptic system of first order in the Holder classes]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. 2009. V. 13. no 17–2. pp. 115.
14. Parton V.Z. Integral'nye uravnenija teorii uprugosti [Integral equations of elastic]. / V.Z. Parton, P.I. Perlin. − M.: Nauka, 1977. – 312 p.
15. Soldatov A.P. Ob indekse zadachi Dirihle dlja jellipticheskih sistem na ploskosti [On the index of the Dirichlet problem for elliptic systems on the plane] // Differencial'nye uravnenija. 2006. V. 42. – no 8. pp. 1156 – 1169.
16. Soldatov A.P. Odnomernye singuljarnye operatory i kraevye zadachi teorii funkcij [Multi-dimensional singular operators and boundary-value problems of function theory]. /A.P. Soldatov // M.: Vs. shk., 1991. – 266p.

Тарасова О.А., Чернова О.В. «Про можливості розв'язання системи Ламі теорії пружності в ізотропному середовищі». *Розглянута змішана задача плоскої ізотропної теорії пружності в півплоскості, коли на відрізках речовій осі поперемінно задаються або вектор зміщення, або нормальна компонента тензора напружень. Для ізотропних середовищ граничні задачі математичної теорії пружності, в областях з гладкою межею добре вивчені класичним методом зведення до систем сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші. Формула подання рішення задачі через пару J–аналітичних функцій традиційно використовується в цих методах, а самі рішення еліптичних систем пов'язані з аналітичними функціями та їхніми похідними до деякого порядку. Зазначимо, що таке уявлення можна значно спростити, замінивши аналітичні функції рішеннями каконічних еліптичних систем першого порядку. В даній роботі знайдено явне подання ядра узагальненого потенціалу подвійного шару системи Ламі та досліджені питання, пов'язані з поданням спільного рішення цієї системи через пару J–аналітичних функцій.*

Ключові слова: система Ламі, ізотропне середовище, тензори напруги і деформації, J-аналітичні функції, крайова задача, еліптична система, Фредгольмов оператор.

Tarasova O.A, Chernova O.V. "On the solvability of the system of Lame elasticity in isotropic medium". *Considered combined task flat isotropic theory of elasticity in a half-plane, when the segments of the real axis are set alternately to either vector displacement or the normal component of the stress tensor. For isotropic media, boundary problems of mathematical theory of elasticity in domains with smooth boundary are well studied by the classical method of reduction to systems of singular integral equations with Cauchy kernel. Note that if partial derivatives are continuously differentiable vector functions* φ *satisfy the condition* $\partial\varphi/\partial y - J\,\partial\varphi/\partial x = 0$*, where J is a constant* $l \times l$ *- matrix in which the eigenvalues* ν *located in the upper half-plane, i.e. Im* $\nu > 0$*, it is called a function, analytic on Duglis or to emphasize its dependence on J, J-analytic function. The formula representation of the solution of the problem in a couple J–analytic functions traditionally used in these methods, and the solutions of the elliptic system associated with analytic functions and their derivatives up to a certain order. With the help of various integral transformations for regions with piecewise-smooth boundary, in the classical setting of holder spaces with weight, boundary value problems of mathematical elasticity theory was studied in the canonical regions of the type of wedge, semi-circle, cone etc. With equivalent reduction of the boundary value problem for elliptic systems with constant coefficients in the areas to the system of boundary integral equations in addition to singular integrals arise Cauchy integrals with kernels of degree -1. Note that such a representation can be greatly simplified by replacing analytic functions by the solutions of the canonical elliptic systems of first order species* $\partial\varphi/\partial y - J\,\partial\varphi/\partial x = 0$*. In this paper we found explicit representation of the kernel of the generalized potential of double layer system Lama and studied the issues related to the representation of the General solution of this system using a pair of J - analytic functions.*

Keywords: Lame system, isotropic medium, the stress and strain tensors, J-analytic functions, boundary value problem, elliptic system, Fredholm operator.

Статья поступила в редакцию 10.06.2015
Рекомендована к публикации д-ром техн. наук Г.В. Авериным