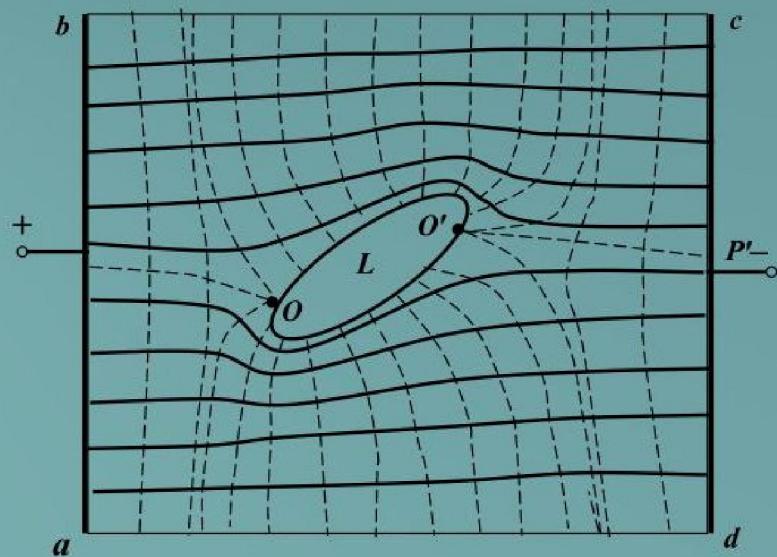


В.Г. Самойлик, А.Н. Корчевский

ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА  
ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА  
ПРИ ОБОГАЩЕНИИ ПОЛЕЗНЫХ  
ИСКОПАЕМЫХ



2016

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В.Г. Самойлик, А.Н. Корчевский**

**ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА ФИЗИЧЕСКОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ОБОГАЩЕНИИ  
ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ**

*Издание приурочено к 95-летию*

*Донецкого национального технического университета*

Донецк

ООО «Технопарк ДонГТУ «УНИТЕХ»

2016

УДК 622.7.001.5 (075.8)

ББК 33.4 (я7)

С 17

*Рекомендовано Учёным советом  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет» (г. Донецк)  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
протокол № 3 от 25.03.2016 г.*

*Рецензенты:*

*Малеев В. Б. – доктор технических наук, профессор кафедры  
«Теоретическая механика» ГОУВПО «Донецкий национальный технический  
университет» (г. Донецк).*

*Вархалёв Ю. П. – кандидат физико-математических наук, директор  
ДонНИПИЦМ.*

**С 17 Теория и техника физического эксперимента при обогащении полезных ископаемых:** учебное пособие / В.Г. Самойлик, А.Н. Корчевский.– Донецк: ООО «Технопарк ДонГТУ «УНИТЕХ», 2016. – 205 с.: ил., табл.

Учебное пособие «Теория и техника физического эксперимента при обогащении полезных ископаемых» разработано в соответствии с рабочим и учебным планами подготовки специалистов по специальности «Горное дело» специализации «Обогащение полезных ископаемых».

Изложены основные понятия об измерениях физических величин. Приведены теоретические основы физического моделирования технологических процессов, результаты исследований, связанных с моделированием и расчётом схем обогащения. Изложены статистические методы планирования, проведения эксперимента и обработки результатов исследований.

Учебное пособие будет полезно для работы студентам и аспирантам технических и горных специальностей, работникам промышленных предприятий, инженерно-техническим работникам.

УДК 622.7.001.5 (075.8)

ISBN 978-966-8248-74-0

© В. Г. Самойлик, А. Н. Корчевский, 2016

©ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет», 2016

## Содержание

Введение.....	6
1 Физические величины.....	7
1.1 Единицы измерений.....	7
1.2 Уравнение связи между физическими величинами .....	10
1.3 Системы единиц .....	12
2 Измерение физических величи .....	14
2.1 Понятие об измерении .....	13
2.1.1 Методы измерения .....	13
2.1.2 Погрешности измерений .....	14
2.1.3 Классификация погрешностей измерения.....	15
2.2. Меры и измерительные приборы .....	20
2.2.1 Классификация мер и измерительных приборов.....	20
2.2.2 Основные свойства мер и измерительных приборов. Классы точности .....	22
2.3. Методы исследования мер и измерительных приборов .....	23
2.3.1 Частные характеристики процессов измерения.....	23
2.3.2 Дискретное измерение технологических параметров.....	25
3. Физическое моделирование процессов.....	29
3.1 Теория подобия .....	29
3.1.1 Движение вязкой жидкости .....	29
3.1.2 Условия применения теории подобия .....	37
3.1.3 Дифференциальные уравнения теплообмена для модели .....	39
3.1.4 Гидродинамическое подобие .....	42
3.1.5 Тепловое подобие .....	45
3.1.6 Диффузионное подобие .....	47
3.1.7 Подобие некоторых частных случаев переноса .....	49
3.1.8 Обобщение.....	51
3.2 Метод анализа размерностей .....	57
3.3 Моделирование на основе метода аналогий .....	65
3.3.1 Методы аналогий .....	65

3.3.2 Моделирование плоских потоков на основе электрогидродинамической аналогии (ЭГДА).....	68
<b>4 Исследование вещественного состава полезных ископаемых .....</b>	<b>73</b>
4.1 Предварительные исследования полезных ископаемых.....	73
4.2 Минералогический состав полезных ископаемых .....	75
4.3 Исследование физических свойств минералов.....	77
4.4 Физико-химические методы анализа вещественного состава .....	83
<b>5 Исследование полезных ископаемых на обогатимость....</b>	<b>87</b>
5.1 Основные задачи исследований полезных ископаемых на обогатимость.....	87
5.2 Поиск априорной информации .....	88
5.3 Стадии технологических исследований на обогатимость .....	91
<b>6 Процесс обогащения как объект исследований .....</b>	<b>93</b>
6.1 Взаимосвязь технологических факторов .....	93
6.2 Модели технологических процессов .....	94
6.2.1 Методы математической статистики .....	94
6.2.2 Применение теории графов.....	97
6.2.3 Понятие математической модели.....	98
6.2.4 Математическое моделирование технологических процессов .....	99
6.3 Исследование технологических схем .....	111
<b>7 Статистические методы оценки экспериментальных данн .....</b>	<b>114</b>
7.1 Постановка задачи.....	114
7.2 Статистическая оценка вероятности исследований .....	115
7.2.1 Оценка ошибок измерений .....	115
7.2.2 Статистические критерии различия.....	118
7.2.3 Критерий Стьюдента ( <i>t</i> -критерий) .....	120
7.2.4 Последовательный анализ Вальда.....	123
7.2.5 Критерий Фишера (F-критерий).....	125
7.2.6 Критерий Кохрена (G-критерий).....	126
7.2.7 Критерий Пирсона ( $\chi^2$ -критерий) .....	128
7.2.8 Дисперсионный анализ.....	129

7.2.9 Корреляционный и регрессионный анализы .....	136
<b>8 Статистические методы планирования эксперимента .....</b>	<b>147</b>
8.1 Традиционный и статистический методы планирования экспериментов.....	148
8.2 Техника постановки активного эксперимента .....	151
8.2.1 Терминология и основные понятия .....	151
8.2.2 Этапы планирования эксперимента.....	152
8.3 Определение критерия процесса и независимых факторов .....	153
8.3.1 Выбор критерия эффективности процесса.....	153
8.3.2 Определение независимых факторов.....	154
8.4 Выбор структуры модели и плана эксперимента .....	156
8.5 Факторное планирования экспериментов .....	159
8.5.1 Полный факторный эксперимент .....	159
8.5.2 Дробный факторный эксперимент .....	166
8.6 Метод крутого восхождения.....	168
8.7 Симплексный метод планирования экспериментов .....	170
8.8 Ротатабельное центрально-композиционное планирование экспериментов.....	174
8.9 Применение компьютерных технологий обработки данных при исследованиях.....	177
<b>Список рекомендуемой литературы.....</b>	<b>181</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....</b>	<b>182</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....</b>	<b>183</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....</b>	<b>184</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 4.....</b>	<b>186</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 5.....</b>	<b>187</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебное пособие «Теория и техника физического эксперимента при обогащении полезных ископаемых» разработано в соответствии с рабочим и учебным планами подготовки специалистов по специальности «Горное дело» специализации «Обогащение полезных ископаемых».

Основная задача данного учебного пособия – дать студентам теоретические представления о моделировании технологических процессов обогащения, основах планирования исследования полезных ископаемых на обогатимость, ознакомить студентов с основными приёмами подготовки и проведения физических экспериментов, методами обработки полученных результатов.

В учебном пособии изложены основные понятия о физических величинах и методах их измерений. Данна подробная характеристика погрешностей измерения, возникающих в процессе физического эксперимента. Приведена классификация мер и измерительных приборов.

Большое внимание уделено методам исследования вещественного состава и физических свойств полезных ископаемых. Изложены основные этапы исследования полезных ископаемых на обогатимость.

Приведены теоретические основы физического моделирования технологических процессов. Показана взаимосвязь технологических факторов. Дан анализ сепарационным характеристикам различных процессов обогащения.

В учебном пособии подробно рассмотрены вопросы техники постановки физического эксперимента, определения критерия процесса и независимых факторов, выбора структуры модели процесса и плана проведения эксперимента. Большое внимание уделено изучению статистических методов оценки полученных экспериментальных данных. Приведена информация о применении компьютерных технологий обработки данных проведенных исследований.

# 1 ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

## 1.1 Единицы измерений

Изучение физических явлений и закономерностей, а также использование этих закономерностей в практике связано с измерением физических величин [1].

*Физическая величина* - это количественная характеристика свойств физического тела или системы тел, процессов и явлений. Длина, масса, время, скорость, сила, температура, напряжённость электрического поля, период колебаний - все это физические величины, которые проявляются в виде их конкретных реализаций.

Отдельные реализации одной и той же величины называются *однородными величинами*. Однородные величины отличаются друг от друга размером, то есть количественно. Сравнение размеров двух однородных величин осуществляется в процессе измерения.

*Измерением физической величины* называется экспериментальное (с помощью меры) сравнение данной величины с другой, принятой за единицу измерения. *Единица измерения* - это конкретное значение физической величины, принятое за основу сравнения для количественной оценки величины того же рода.

Результат измерений некоторой отдельной реализации физической величины  $X$  может быть представлен в виде произведения двух множителей:

$$X = \{X\}[X], \quad (1.1)$$

где  $[X]$  – единица измерений величины  $X$ ;  $\{X\}$  – числовое значение измеряемой величины, если она измеряется в единицах  $[X]$ .

*Числовое значение* является абстрактным числом, равным отношению измеряемой величины к единице её измерения.

Единица измерения  $[X]$ , как отдельная реализация величины  $X$ , также может быть выражена в виде множителей  $\{X\}$  и  $[X]$ . При этом числовое значение единицы измерений равно единице.

Единицы измерений  $[X_1], [X_2], \dots, [X_n]$  одной и той же величины  $X$ , то есть однородные единицы, отличаются друг от друга размером (например, размер килограмма в тысячу раз больше грамма, а размер секунды в шестьдесят раз меньше минуты).

*Размером единицы измерений* называется количество физической величины, содержащейся в единице измерений.

При измерении одной и той же величины единицами разных размеров получают различные числовые значения величины. Например, если длина тела при измерении его в метрах выражается числом 3 м, то при измерении в сантиметрах она выразится числом 300 см. Размер метра в 100 раз больше

размера сантиметра, а численное значение результата измерений в метрах будет в 100 раз меньше, чем при измерении в сантиметрах.

Вообще, если при измерении величины  $X$  единицей  $[X_1]$  получено численное значение  $\{X_1\}$ , а при измерении единицей  $[X_2]$  получено численное значение  $\{X_2\}$ , всегда будет:

$$\frac{\{X_1\}}{\{X_2\}} = \frac{[X_2]}{[X_1]}, \quad (1.2)$$

то есть численные значения величины обратно пропорциональны размерам единиц измерений.

Откуда следует, что:

$$\{X_1\}[X_1] = \{X_2\}[X_2] = X, \quad (1.3)$$

то есть при измерении конкретной реализации величины произведение  $\{X\}[X]$  постоянно и не зависит от выбора единицы измерений.

Единицу измерений физической величины можно получить тремя различными способами.

Во-первых, единицу можно выбрать произвольно, независимо как от других единиц, однородных с ней, так и от единиц измерений других физических величин. Избранные таким образом единицы называются независимыми. Независимыми единицами являются, например, единица длины - метр, единица температуры - градус Кельвина и др.

Во-вторых, единицу измерений можно получить с помощью формул, отражающих количественную зависимость между физическими величинами. В этом случае единица измерений будет выражаться через другие единицы измерений. Такие единицы называются производными. К ним относятся единица скорости - метр в секунду, единица давления - ньютон на квадратный метр и др.

В-третьих, единицу измерения можно получить делением и умножением независимой или производной единицы на целое число, обычно на 10, или на число, которое является степенью при основании 10, например, 1 километр =  $10^3$  метра; 1 мегом =  $10^6$  ома; 1 миллиметр =  $10^{-3}$  метра; 1 микрофарад =  $10^{-6}$  фарады и др.

Единицы, полученные при умножении независимой или производной единицы на абстрактное целое число, называются кратными, например, единица частоты 1 МГц = 1 000 000 Гц. Единицы, полученные при делении независимой или производной единицы на абстрактное целое число, называются дольными, например, 1 мкс = 0,000 001 с.

Таким образом, все единицы измерений по способу их выбора подразделяются на четыре группы: независимые, производные, кратные и дольные.

Единицы измерений по определённому принципу объединяются в системы единиц. Единицы, которые образуют какую-либо систему, называются системными, а единицы, которые не входят ни в одну из систем, называются

внесистемными. Внесистемными единицами являются, например, единицы длины - километр и ангстрем, единицы давления - техническая атмосфера и миллиметр ртутного столба и др.

Системные единицы в свою очередь подразделяются на три группы: основные, производные и дополнительные.

## 1.2 Уравнение связи между физическими величинами

Между физическими величинами существуют качественные и количественные зависимости, закономерная связь, которые могут быть выражены в виде математических формул. Создание формул связано с математическими действиями над физическими величинами.

Однородные величины допускают над собой все виды алгебраических действий. Например, можно складывать длины двух тел; отнимать длину одного тела от длины второго; делить длину одного тела на длину второго; возводить длину в степень. Результат каждого из этих действий имеет определённый физический смысл. Например, разность длин двух тел показывает на сколько длина одного тела больше другой; произведение основания прямоугольника на высоту определяет площадь прямоугольника; третья степень длины ребра куба является его объёмом и т.д.

Но не всегда можно складывать две одноименные величины, например, сумма плотностей двух тел или сумма температур двух тел лишены физического смысла.

Разнородные величины можно умножать и делить друг на друга. Результаты этих действий над разнородными величинами также имеют физический смысл. Например, произведение массы  $m$  тела на его ускорение  $a$  выражает силу  $F$ , под действием которой получено это ускорение, то есть:

$$F = ma; \quad (1.4)$$

частное от деления силы  $F$  на площадь  $S$ , на которую равномерно действует сила, выражает давление  $p$ , то есть:

$$p = F/S. \quad (1.5)$$

Вообще физическая величина  $X$  с помощью математических действий может быть выражена через другие физические величины  $A, B, C, \dots$  уравнением вида:

$$X = kA^\alpha B^\beta C^\gamma \dots, \quad (1.6)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

Показатели степени  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  могут быть как целым, так и дробными, а также могут принимать значение, равное нулю.

Формулы вида (1.6), которые выражают одни физические величины через другие, называются *уравнениями между физическими величинами*.

Коэффициент пропорциональности в уравнениях между физическими величинами за редким исключением равен единице. Например, уравнением, в котором коэффициент  $k$  отличается от единицы, является уравнение кинетической энергии тела при поступательном движении:

$$E = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.7)$$

Значение коэффициента пропорциональности как в данной формуле  $\left(k = \frac{1}{2}\right)$  так и вообще в уравнениях между физическими величинами не зависит от выбора единиц измерения, а определяется исключительно характером связи величин, входящих в данное уравнение.

Независимость коэффициента пропорциональности от выбора единиц измерения является характерной особенностью уравнений между величинами. То есть каждый из символов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... в этом уравнении представляет собой одну из конкретных реализаций соответствующей величины, которая не зависит от выбора единицы измерений.

Но если все величины, входящие в уравнение (1.6) разделить на соответствующие единицы измерений, получаем уравнение нового типа. Для простоты рассмотрения напишем следующее уравнение:

$$X = AB. \quad (1.8)$$

После деления величин  $X$ ,  $A$  и  $B$  на единицы их измерений получаем:

$$\frac{X}{[X]} = k \frac{A}{[A]} \cdot \frac{B}{[B]}, \quad (1.9)$$

или

$$\{X\} = k \{A\} \cdot \{B\}. \quad (1.10)$$

Уравнения вида (1.9) или (1.10) связывает между собой уже не величины как собирательные понятия, а их численные значения, полученные в результате выражение величин в определённых единицах измерения.

Уравнение, связывающее численные значения величин, называется *уравнением между численными значениями*.

Например, численное значение теплоты  $Q$ , которая выделяется в проводнике при прохождении тока:

$$Q = 0,24I^2Rt, \quad (1.11)$$

где  $Q$  – численное значение теплоты, которая выделяется на проводнике, ккал; численное значение силы тока, А;  $R$  – численное значение сопротивления, Ом;  $t$  – численное значение времени, с.

Только при этих условиях численный коэффициент  $k$  принимает значение 0,24.

Но при расчётах в технике такими уравнениями пользуются очень широко. Величины выражают в разных системах и внесистемных единицах с получением при этом уравнений со сложными коэффициентами  $k$ .

Вообще коэффициент пропорциональности в уравнениях между численными значениями зависит только от единиц измерений. Замена единицы измерений одной или нескольких величин, входящих в уравнение (1.9), влечёт за собой изменение численного значения коэффициента.

Зависимость коэффициента пропорциональности от выбора единиц измерения является отличительной особенностью уравнений между численными значениями. Эта характерная особенность между численными значениями используется для определения производных единиц измерений и для построения систем единиц.

### 1.3 Системы единиц

Необходимость измерять была характерна для человеческого общества на всех стадиях его развития. Эта необходимость росла с развитием и усложнением производственной деятельности человека. Каждое государство имело собственные меры и единицы измерений. На определённой стадии развития общества многообразие единиц измерения становится тормозом при установлении и расширении экономических, торговых и научных связей. Поэтому наряду с тенденцией роста числа единиц возникает тенденция их унификации. Необходимость унификации мер и единиц измерений привела в конце XVIII в. к установлению Метрической системы мер. Метрическая система мер, разработанная французскими учёными (Лагранж, Лаплас, Монж и др.) и введённая изначально во Франции, во второй половине XIX в. получила международное признание.

В метрическую систему мер входили единицы измерений ограниченного числа величин - длины, площади, объёма, ёмкости, массы [1]. Поэтому с расширением круга величин, подпадающих под измерения, возникла необходимость в системах единиц, которые охватывали бы целые разделы физики. Идея создания таких систем принадлежит немецкому математику Гауссу, который показал, что если выбрать независимо друг от друга единицы измерений нескольких величин, то на основе этих единиц с помощью физических законов можно установить единицы измерений всех величин, входящих в определённый раздел физики.

Совокупность единиц, созданная по принципу, предложенному Гауссом, получила название «системы единиц».

Единицы, которые выбраны произвольно и служат для выражения других единиц, называются *основными единицами* системы. Единицы, полученные на основе основных с помощью физических формул, называются *производными единицами* системы.

Зависимость между единицами измерений, на которую указал Гаусс, вытекает из того, что сами физические величины не являются независимыми друг от друга. Они связаны между собой, и эта связь проявляется в физических

законах. Характер этой связи позволяет выразить через несколько произвольно выбранных величин, которые являются основными, остальные производные величины. При построении системы единиц произвольно выбирают единицы основных величин и с помощью физических формул или по размерностям величин определяют единицы производных величин. Размерность производной величины есть произведение размерностей основных величин, возведённая в соответствующую степень.

Многообразие систем единиц (МКГСС, МТС, МКС, СГС), а также многообразие отдельных единиц измерения образует, как указывалось ранее, определённые трудности в различных сферах деятельности. Поэтому ещё в XIX в. возникла необходимость создания единой международной системы, которая включала бы в себя единицы измерений всех разделов физики. Однако соглашение о введении такой системы было принято только в 1961г.

Международная система единиц (СИ) основана на семи основных единицах:

- метр (м) - единица длины;
- килограмм (кг) - единица массы;
- секунда (с) - единица времени;
- градус Кельвина ( $^{\circ}\text{K}$ ) - единица термодинамической температуры;
- моль (моль) - количество вещества;
- ампер (А) - единица силы тока;
- кандела (кд) - единица силы света.

Кроме того, в систему СИ включены две дополнительные единицы:

- радиан (рад) - единица плоского угла;
- стерадиан (ср) - единица телесного угла.

Система СИ имеет ряд преимуществ перед другими системами. Она является универсальной, то есть охватывает все области измерений. С переходом на систему СИ можно отказаться от использования всех систем единиц, а также от внесистемных единиц. Ни одна из других систем таким достоинством не обладает. Например, система МКГСС охватывает только отрасль механики, система СГСЭ - только раздел электростатики и т.п.

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Что обозначает термин «физическая величина»?
2. Какими способами можно получить единицу измерений физической величины?
3. В чем заключается отличие уравнений между физическими величинами и численными значениями?
4. Охарактеризуйте метрическую систему мер. Для каких целей она была создана?
5. Перечислите основные единицы Международной системы единиц (СИ).

## 2 ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

### 2.1 Понятие об измерении

#### 2.1.1 Методы измерения

Вопросами установки и воспроизведения единиц измерения, передачи размера единицы измерения от эталона к измеряемому объекту, а также разработкой методов и средств измерения занимается метрология.

Метрология определяет измерения как познавательный процесс, который заключается в сравнении измеряемой величины с другой, условно принятой за единицу измерения.

По методу проведения измерений их разделяют на прямые, косвенные, совокупные и совместные измерения [1-5].

*Прямое измерение* – измерение, проводимое прямым методом, при котором искомое значение физической величины получают непосредственно из опытных данных.

Значение величины  $Q$  равно значению  $X$ , полученному из опытных данных:

$$Q = qU = X. \quad (2.1)$$

В качестве примера прямых измерений можно назвать измерения уровня с помощью мерной линейки, измерение массы на весах, измерение длины детали штангенциркулем, измерение силы тока амперметром.

*Косвенным* называется измерение, при котором искомое значение физической величины определяют на основании результатов прямых измерений других физических величин (аргументы), функционально связанных с искомой величиной (известная функциональная зависимость).

Искомое значение измеряемой величины определяется по формуле:

$$Q = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n), \quad (2.2)$$

где  $Q$  – значение измеряемой величины;  $f$  – символ определённой функциональной зависимости.

Косвенные измерения используются в том случае, когда прямые измерения затруднены или невозможны. Например, для определения плотности вещества осуществляют прямые измерения массы и объёма тела, а результаты этих измерений используют для вычисления плотности с помощью известного соотношения между массой тела, его объёмом и плотностью вещества, из которого состоит тело. Выполненное таким способом измерение плотности является косвенным.

*Совокупными* называются проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяют путём решения системы уравнений, получаемых при измерениях различных сочетаний этих величин:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X'_1, X'_2, \dots, X'_n) = 0 \\ f_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X''_1, X''_2, \dots, X''_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X^n_1, X^n_2, \dots, X^n_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

где  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  – значения искомых величин;  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - значения величин, которые измеряются прямым способом.

Совокупные измерения характерны для выполнения исследовательских работ. В качестве примера можно привести определение поправочного коэффициента на изменение показателей манометрической пружины вследствие воздействия температуры окружающей среды.

*Совместными* называются проводимые одновременно измерения двух или нескольких не одноименных величин для определения зависимости между ними.

### 2.1.2 Погрешности измерений

При проведении измерений необходимо оценить действительные значения измеряемых величин. Однако, вследствие ограниченной точности любых средств и методов измерений, нельзя сделать это абсолютно точно. Возможно только асимптотическое приближение к истинному значению тот или иной величины.

В таком случае, что следует принимать за действительное измеряемое значение тот или иной величины? Согласно стандарту за *действительное значение* величины следует принимать такое её значение, которое получено с максимальной практически достижимой точностью. В общем случае результат любого измерения величины представляет собой сумму:

$$X = Q + \Delta x, \quad (2.4)$$

где  $X$  – результат измерения;  $Q$  – действительное значение величины;  $\Delta x$  – погрешность.

Таким образом, *погрешность* определяется как разница между результатом измерения и истинным значением величины. Например, если измеренное значение температуры газа на выходе из барабанной сушилки  $81,5^{\circ}\text{C}$ , а истинное значение  $81^{\circ}\text{C}$ , то погрешность измерения составляет:

$$\Delta x = 81,5 - 81 = 0,5^{\circ}\text{C}.$$

Для определения действительного значения измеряемой величины в результат измерения вводится поправка, равная погрешности измерения с обратным знаком. В приведённом примере  $\Delta x = -0,5$ , поэтому истинное значение определяется как:

$$Q = 81,5 - 0,5 = 81^{\circ}\text{C}.$$

Причины возникновения погрешностей бывают методические, инструментальные и субъективные.

*Методические погрешности* являются следствием неточности метода измерения или расчётной формулы, положенной в основу создания прибора. Методические погрешности могут быть также обусловлены тем, что принципиальная схема прибора не обеспечивает точного воспроизведения функциональной зависимости, связывающей измеряемую величину с той, на которую действительно реагирует чувствительный элемент прибора.

В качестве примера методических погрешностей можно привести ошибки, возникающие при определении гидравлического сопротивления трубопровода с помощью расчётных формул при подстановке в них измеренных значений расходов и давлений по длине трубопровода. В зависимости от выбора той или иной расчётной формулы будут получены различные методические погрешности.

*Инструментальные погрешности* является следствием недостатков конструкции прибора, несоблюдением технологии его изготовления и неточности изготовления деталей прибора, неточности сборки и регулирования прибора, а также вследствие его износа и старения.

Инструментальные погрешности подразделяются на такие основные группы: погрешности шкалы, погрешности трения, погрешности из-за наличия зазоров, погрешности остаточной деформации (гистерезиса).

*Погрешности шкалы* возникают вследствие неточного регулирования механизма, из-за неточной градуировки шкалы или из-за неточной установки шкалы и стрелки при сборке прибора.

*Погрешности трения* обусловлены силами трения, возникающими в опорах и подвижных соединениях.

*Погрешности из-за наличия зазоров* возникают в тех случаях, когда зазоры в опорах и подвижных соединениях не выбираются пружинами. Эти погрешности при статических измерениях могут проявляться в виде изменчивости показаний прибора. Для устранения этих погрешностей зазоры по возможности уменьшают и применяют пружины, которые выбирают зазоры.

*Погрешности остаточной деформации (гистерезиса)* проявляются в том, что подвижная система не возвращается в исходное положение после прекращения действия измеряемой величины, или значение измеряемой величины не совпадают при отсчётах на одних и тех же отметках шкалы при росте и убывании показаний прибора. Полностью устраниТЬ погрешности гистерезиса невозможно, поэтому их относят к допустимым погрешностям, величина которых устанавливается нормами. Устанавливают нормы на допустимое расхождение показаний прибора, а также на невозврат стрелки к нулю после снятия нагрузки.

Инструментальные погрешности определяются экспериментально и заносятся в паспорт прибора. Определённые однажды они остаются неизменными в течение всего срока эксплуатации прибора. Поэтому, чтобы быть уверенным, что инструментальные погрешности находятся в допустимых пределах, необходимо осуществлять периодическую проверку приборов, то есть сравнивать показания рабочих приборов с образцовыми. Такую проверку

следует выполнять даже в тех случаях, если прибор долгое время не эксплуатировался.

*Субъективные погрешности* - это те погрешности, которые зависят от индивидуальных особенностей исследователя. Эти погрешности зависят от индивидуальной оценки показаний прибора тем или иным наблюдателем, от его опытности, от положения наблюдателя относительно прибора.

### 2.1.3 Классификация погрешностей измерения

Согласно формуле (2.11) погрешность измерения определяется как:

$$\Delta x = Q - X, \quad (2.5)$$

где  $Q$  – истинное значение величины;  $X$  – измеренное значение величины.

Эта погрешность называется *абсолютной*. Однако абсолютная погрешность является недостаточной характеристикой измерения. Для характеристики качества измерения вводится относительная погрешность.

*Относительная погрешность* выражается отношением абсолютной погрешности к действительному значению измеряемой величины:

$$\delta x = \Delta x / Q. \quad (2.6)$$

Абсолютная погрешность очень мала по сравнению с действительным значением  $Q$  и измеренным значениям  $X$  величины, поэтому приблизительно относительную погрешность можно определять как:

$$\delta x = \Delta x / X. \quad (2.7)$$

По своей природе погрешности делятся на случайные, динамические, систематические и промахи.

*Случайными погрешностями* называются погрешности, переменные по величине и знаку. Источниками их является влияние различных неконтролируемых внешних условий, при которых происходит каждое измерение, несовершенство органов чувств исследователя. Случайные погрешности подчиняются законам теории вероятности и математической статистики. Они определяются анализом и сравнением равноточных измерений.

*Динамическими погрешностями* называются погрешности, которые проявляются при измерениях переменных значений величины и обусловлены инерционностью измерительных приборов. Инерционность проявляется в запаздывании показаний приборов (изменение показаний приборов отстаёт от изменения измеряемой величины).

*Систематические погрешности* - это погрешности, которые при повторных измерениях величины не изменяются или изменяются по определённому закону. К систематическим погрешностям относятся инструментальные, погрешности установки приборов, методические погрешности.

По характеру появления систематические ошибки разделяются на постоянные, прогрессивные, периодические и изменяющиеся по сложным законам.

*Постоянными* называют ошибки, величина и знак которых не зависят от измеряемой величины. Такие ошибки можно найти при изменении условий измерения.

*Прогрессивными* называют ошибки, величина которых возрастает пропорционально значению измеряемой величины. При измерении эти ошибки становятся тем больше, чем больше отклоняется измеряемый объект от установленной меры.

*Периодическими* называют ошибки, которые при изменении измеряемой величины периодически меняют свою величину и знак.

*Ошибки, изменяющиеся по сложному закону* - это такие ошибки, закон изменения которых выражается более или менее сложной формулой или кривой.

Систематические погрешности могут быть учтены, их влияние на результат измерений устраняется введением соответствующих поправок. Существуют следующие способы исключения систематических ошибок из результатов измерений:

~ способ введения поправок - к результату измерения алгебраически добавляют поправку, величина которой определяется при проверке прибора и вносится в его паспорт;

~ способ сравнения с образцом, который обладает теми же геометрическими и физическими качествами, что и объект измерения, но проверенный с помощью точных измерений и в одинаковых условиях;

~ метод замещения, при котором измеряемая величина заменяется в измерительном устройстве равновеликой ей известной величиной;

~ компенсации погрешности по знаку; в этом случае измерения проводят таким образом, что один раз погрешность входит в результат измерения со знаком плюс, в другом со знаком минус;

~ дифференциальный метод заключается в том, что измерения проводятся дважды при разных значениях параметров аппаратуры. Результат рассчитывается по значению разницы параметров, при этом равные по величине и знаку погрешности, которые искажают смысл параметров, исключают.

Систематические погрешности могут быть учтены, их влияние на результат измерений устраняется введением соответствующих поправок.

*Промахом* называется погрешность, которая явно искажает результат измерения. Причиной промаха может быть неправильный отсчёт по шкале, неправильная запись и др. Наблюдения, содержащие промахи, должны быть исключены из дальнейшего анализа.

Для определения промаха и исключения его из совокупности результатов измерения существуют способы: способ  $3\sigma$ , способ Шовина, способ Романовского.

*Критерий 3σ* позволяет исключать все результаты, отклонения которых превышает  $3\sigma$ , причём о дисперсии генеральной совокупности судят по результатам измерений, которые остались.

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  - ряд результатов измерений, в которых  $x_{n+1}$  - является значением, которое выпадает из этого ряда. Дисперсия генеральной совокупности будет:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2. \quad (2.8)$$

В этом случае  $x_{n+1}$  должно быть исключено, если его отклонение от  $\bar{X}$  превышает  $3\sigma$ , то есть:

$$|x_{n+1} - \bar{X}| > 3\sigma. \quad (2.9)$$

Вероятность появления значения, которое отклоняется от среднего арифметического  $\bar{X}$  более чем на  $3\sigma$ , равна 0,003. По принципу практической невозможности маловероятных событий отклонение от среднего арифметического на  $3\sigma$  и больше будет промахом и должно быть исключено.

Критерий Шовина предусматривает критерием оценки  $Z\sigma$ . Измерение  $x_{n+1}$  будет промахом и должно быть исключено, если:

$$|x_{n+1} - \bar{X}| > Z\sigma. \quad (2.10)$$

Функция  $\Phi(Z)$  определяется равенством:

$$\Phi(Z) = (2n-1)/4n, \quad (2.11)$$

где  $n$  - число измерений.

В обоих рассмотренных критериях требуется знание дисперсии генеральной совокупности, поэтому они применяются при  $n > 20$ , то есть когда эмпирическая дисперсия близка к действительной.

Для малого числа измерений пользуются критерием Романовского.

Если в ряду  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  результат измерений  $x_{n+1}$  является промахом, следует найти среднее значение  $\bar{X}$  для группы  $n$  измерений:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

среднеквадратическое для той же группы:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2},$$

а затем рассмотреть величину:

$$t = \frac{x_{n+1} - \bar{X}}{\sigma_{\Delta x}}$$

где

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{n}\sigma^2} = \sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \quad (2.12)$$

которая будет подчинена распределению Стьюдента с числом степеней свободы  $f = n - 1$ , что позволяет определить является ли различие  $(X_{n+1} - \bar{X}) = \varepsilon$  случайнм. С использованием таблиц, где даны значения величин:

$$t'_\beta = t_\beta \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad (2.13)$$

для вероятностей  $\beta = 0,05; 0,02; 0,01; 0,001$  и различных  $n$  можно найти такие значение  $\varepsilon = t_\beta \sigma_{\Delta x} = t'_\beta \sigma$ , для которых:

$$P(|X_{n+1} - \bar{X}|) > \varepsilon = \beta. \quad (2.14)$$

То есть, если задаться вероятностью  $\beta$ , которая обеспечивает практическую невозможность события, можно найти величину интервала  $\varepsilon$ , которая является критерием грубой ошибки.

## 2.2. Меры и измерительные приборы

### 2.2.1 Классификация мер и измерительных приборов

Все измерения осуществляются с помощью мер и измерительных приборов. Их совокупность можно классифицировать по различным признакам: степени точности, назначению, принципу действия, способа применения, конструктивному оформлению и др. [2].

*Мерами* называются тела, вещества и приборы, предназначенные для конкретного воспроизведения единиц измерения, а также величин кратных им.

Меры бывают с постоянным и переменным значением, а также условные.

*Меры с постоянным значением* воспроизводят единицу измерения и её кратное значение (например, гиря).

*Меры с переменным значением* воспроизводят любое кратное значение единицы в определённых пределах (например, миллиметровая линейка, микрометр).

*Условными мерами* называют такие, которые в применении с другими приборами, принимают другое значение. Например, груз, уложенный на тарелку поршневого (грузового) манометра, служит не мерой массы, а мерой давления.

Измерительными приборами называются устройства, предназначенные для сравнения измеряемой величины с мерами или для косвенного определения значения измеряемой величины. Измерительные приборы можно разделить на такие группы:

- *компарирующие приборы*, предназначенные для сравнения мер или измеряемых величин друг с другом и для сравнения измеряемой величины с мерами и образцами (например, рычажные весы, электрические мосты);
- *показывающие приборы*, которые значения измеряемой величины показывают на своих отсчитывающих приспособлениях (шкале, цифровом указателе, диаграмме пишущего прибора). Показывающие приборы в свою очередь подразделяются на приборы с визуальным отсчетом и самопищащие;
- *интегрирующие приборы* дают интегральное значение измеряемого параметра за некоторый промежуток времени (газовые, нефтяные и водяные счётчики, секундомеры);
- *регулирующие приборы*, предназначенные для автоматического измерения и поддержания измеряемого параметра на заданном уровне.

На практике встречаются ещё и измерительные устройства, включающие измерительные приборы и измерительные устройства, которые объединены общей схемой или методом и предназначены для измерения одной или нескольких величин (например, хроматограф, в комплект которого входят пробоотборные устройства, распределительная колонка, детектор, блок управления и регистрирующий прибор).

С точки зрения метрологии все измерительные приборы и меры делятся на образцовые и рабочие.

*Образцовые меры* и измерительные приборы предназначены для сохранения и воспроизведения единиц измерения и поверки и градуировки всякого рода мер и измерительных приборов.

Образцовые меры и измерительные приборы подразделяются на эталонные (первичные, вторичные и третичные) и ограниченной точности (первого, второго и третьего разрядов).

*Эталонами* являются образцовые меры и измерительные приборы, которые служат для сохранения и воспроизведения единиц с наивысшей при данном состоянии техники точностью.

*Образцовыми мерами и измерительными приборами* с ограниченной точностью являются меры и приборы с установленной меньшей, чем метрологическая точностью, которые служат для практических работ поверки и градуировки мер и измерительных приборов.

*К рабочим мерам и измерительным приборам* относятся все меры и приборы, кроме образцовых, предназначенные для измерения. Они разделяются на лабораторные и технические.

*Лабораторные меры и измерительные приборы* при применении требуют учёта влияния внешних факторов (температуры, внешнего давления и др.). Лабораторные меры и измерительные приборы всегда оборудованы соответствующими графиками и таблицами.

*Технические меры* и приборы имеют точность, установленную техническими условиями на изготовление. Полученный результат принимается как окончательный без внесения поправок.

Для получения отсчёта показателей в приборах применяют отсчётные приспособления, среди которых наибольшее распространение получили шкалы и указатели.

*Шкала* - это совокупность отметок, расположенных вдоль какой-либо линии, изображающие ряд последовательных чисел, соответствующих значениям измеряемой величины. Шкалы бывают равномерными и неравномерными. Равномерные шкалы имеют постоянные интервалы разделения по длине. Линейный промежуток между осями или центрами двух смежных отметок называется делением шкалы.

Значение величины, соответствующей одной делению, называется ценой деления шкалы. Отметка, соответствует нулевому значению чисел, называется нулюм шкалы.

## 2.2.2 Основные свойства мер и измерительных приборов. Классы точности

Погрешность значения меры  $\gamma_m$  представляет собой разницу между действительным значением меры  $Q_m$  и её номинальным значением  $Q_n$ :

$$\gamma_m = Q_m - Q_n, \quad (2.15)$$

*Действительное значение меры* - это значение данной меры, определённое образцовыми мерами или образцовыми измерительными приборами. Степень приближения действительного значения меры к номинальному называется точностью меры.

*Номинальное значение меры* - это число воспроизведённых единиц измерения, указанное на мере, или представленное на основании технических данных изготовления меры.

*Погрешность показаний прибора*  $\gamma_n$  называется разность между показанием прибора и действительным значением измеряемой величины:

$$\gamma_n = Q_n - Q. \quad (2.16)$$

Причиной погрешности прибора могут быть недостатки качества изготовления, сборки и градуировки приборов, а также влияние различных факторов (температуры, влажности, давления и др.).

Значительное влияние на точность показаний прибора оказывает его чувствительность. Под чувствительностью понимают отношение линейного или углового перемещения указателя к изменению значения измеряемой величины, которое повлекло это перемещение:

$$S = \Delta\alpha / \Delta Q, \quad (2.17)$$

где  $\Delta\alpha$  – линейное или угловое перемещение указателя;  $\Delta Q$  – изменение значения измеряемой величины.

Наименьшее значение измеряемой величины, которое ещё может привести к изменению показаний прибора, называется *порогом чувствительности* измерительного прибора.

Наибольшая (полученная экспериментально) разница между повторными показаниями измерительного прибора при одном и том же действительном значении измеряемой величины и неизменных внешних условиях называется *вариацией*.

В образцовых приборах соотношение между вариацией и ценой деления должно быть таким, чтобы вариация не превышала 0,2 деления шкалы, а в технических приборах - 0,5. Градуировка приборов осуществляется при нормальной температуре 20°C. Если погрешность результата измерений не превышает допустимой нормали, она называется допустимой погрешностью.

В зависимости от точности все приборы разделяются на классы. Класс точности прибора – это выраженное в процентах отношение максимальной абсолютной погрешности прибора к его лимиту измерения:

$$K = (\gamma_{n \max} / N) \cdot 100, \% , \quad (2.18)$$

где  $\gamma_{n \max}$  – максимальная абсолютная погрешность;  $N$  – лимит измерения прибора.

Классы точности приборов регламентированы. Так для приборов, измеряющих давление и разряжение, этот ряд будет 0,005; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0; 6,0. В промышленности для измерения в основном применяются приборы классов 1,5 и 2,5.

## 2.3. Методы исследования мер и измерительных приборов

### 2.3.1 Частные характеристики процессов измерения

При динамических условиях, то есть при переменном значении измеряемой величины, возникают динамические ошибки, обусловленные инерционностью измерительного прибора [2].

Инерционность измерительного прибора выражается в том, что показания прибора отстают от измерения измеряемой величины. Для характеристики инерционности вводят понятие динамических характеристик измерительных приборов.

*Динамической характеристикой* измерительного прибора называется зависимость изменения во времени выходной величины  $x_{\text{вых}}$  от входной  $x_{\text{вх}}$  в переходном режиме при том или ином законе изменения входной величины. Очевидно, входной величиной является измеряемая величина, выходной – показатели измерительного устройства.

Для определения динамической характеристики измерительного устройства в качестве измеряемой величины подают скачкообразное возмущение и записывают постепенное изменение показаний прибора до окончания переходного режима. В качестве примера на рис. 2.1 показана динамическая характеристика термоприёмника при скачкообразной смене температуры (при быстром погружении термоприёмника в горячую среду).

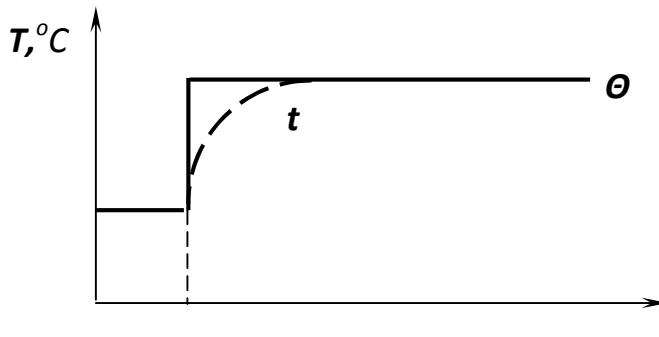


Рис. 2.1 – Динамическая характеристика термоприёмника.

Для практики, однако, удобнее бывает оперировать не с временными (динамическими) характеристиками, а с так называемыми передаточными функциями измерительных приборов. Передаточные функции определяются с помощью преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа для функции  $f(t)$  можно записать в таком виде:

$$F(P) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.19)$$

При этом  $f(t)$  называется оригиналом, а  $F(P)$  – изображением функции.

*Передаточной функцией* измерительного прибора называется отношение выходной величины к входной:

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p). \quad (2.20)$$

Для многих приборов получены динамические характеристики и передаточные функции. В качестве примера приведены динамические характеристики и передаточные функции двух дифманометров:

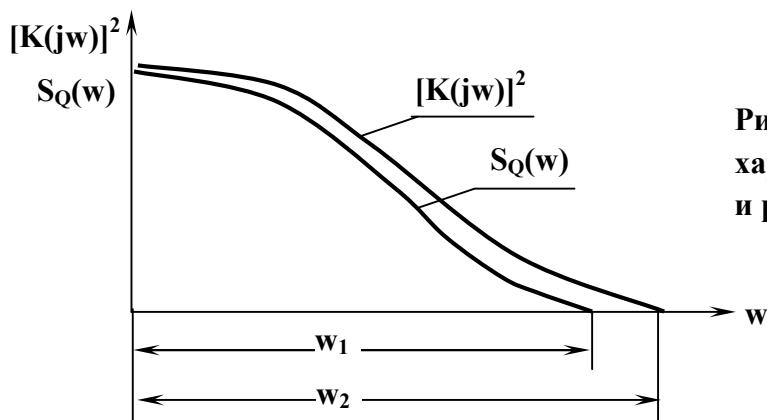
$$\left. \begin{aligned} e(t) &= e^{-4t} - 0,16e^{-20t}, \\ K(p) &= \frac{1}{1 + 0,29p + 0,1p^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= e^{-8t} - 0,26e^{-19t}, \\ K(p) &= \frac{1 + 0,27p}{1 + 1,8p + 0,07p^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

При практических расчётах измерительных приборов удобно рассматривать частный случай передаточных функций при  $p = jw$ . В этом случае преобразование Лапласа превращается в преобразование Фурье и передаточная функция  $K(p)$  выражается в амплитудно-фазовую характеристику  $K(jw)$ , которая даёт представление о частотных свойствах измерительного прибора. В практике можно ограничиться модулем комплексного числа  $[K(jw)]$ , получившим название *частотной характеристики* измерительного прибора.

Частотная характеристика прибора характеризует спектр частот, пропускаемых данным прибором. Если прибор обладает большой инерционностью, то есть имеет длительное запаздывание, спектр частот будет лежать в зоне низких частот, и поэтому он не будет измерять быстро меняющиеся процессы, которые содержат высокочастотные составляющие.

Для характеристики случайных процессов вводится понятие *спектральной плотности*, которая определяет частотные свойства случайного процесса (измеряемого параметра). На рис. 2.2 приведены спектры дифманометра и измеряемого параметра - расходы.



**Рис. 2.2 – Спектральные характеристики дифманометра и расхода вещества.**

Из рис. 2.2 видно, что спектр измеряемого параметра – расхода  $Q$  покрывается спектром измерительного устройства, при этом ширина спектра прибора  $W_2 > W_1$  – ширины спектра измеряемого параметра. Итак, прибор будет хорошо реагировать на изменение измеряемого параметра и будет осуществлять качественное измерение.

### 2.3.2 Дискретное измерение технологических параметров

В практике технологических измерений очень редко осуществляют непрерывную запись параметра, особенно когда становится вопрос о передаче показаний на расстояние. Чаще всего делают замеры параметров с некоторым определённым периодом регистрации (например, давление на компрессорных станциях регистрируют с периодичностью в 2 часа). При этом руководствуются следующими соображениями: если технологический параметр не содержит в своём спектре высоких частот, его регистрация осуществляется реже; для

процессов, которые протекают быстро (имеют высокочастотный спектр), необходимо осуществлять частую регистрацию. Таким образом, периодичность измерения находится в прямой связи с характером протекания технологического процесса, то есть с его спектральными свойствами.

В.А. Котельников сформулировал теорему, которая устанавливает количественную связь между спектром процесса и периодичностью его измерения.

*Теорема Котельникова:* Если случайный процесс  $x(t)$  имеет ограниченный спектр с частотой  $W$ , то он полностью определяется дискретными значениями с принятым шагом  $\Delta t = 1/2W$ . Общая формула теоремы Котельникова имеет вид:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi}. \quad (2.23)$$

Периодичность измерения действительно определяется соотношением,  $\Delta t = 1/2W$ . При этом  $X(t)$  определяется абсолютно точно во всех точках отсчёта.

Значительный интерес представляет выражение вида:

$$\varphi(t) = \frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}. \quad (2.24)$$

График функции  $\varphi(t)$  показан на рис.2.3.

Эта функция, как видно из графика, обладает рядом свойств. Она равна единице при  $t = 0$  и равна нулю при  $t = n/2W$ , то есть во всех точках отсчёта, за исключением точки  $t = 0$ . Если рассчитать спектр этой функции, то он будет постоянным в пределах полосы от 0 до  $W_{uzm}$ , то есть имеет вид рис. 2.4.

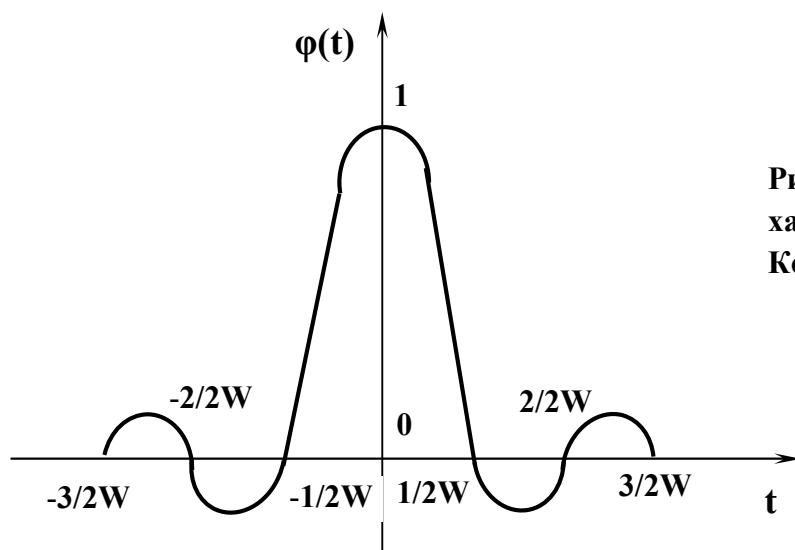
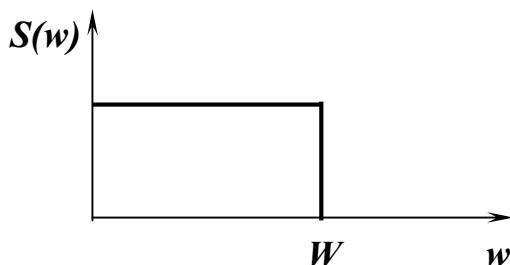


Рис. 2.3 – Функция, характеризующая ряд Котельникова.

Такие системы, которые пропускают только нижние частоты  $W$  до определённой частоты и не пропускают никаких других частот, называются фильтрами нижних частот. Откуда вытекает физическая реализация теоремы Котельникова: для того чтобы воссоздать непрерывный процесс по дискретным значениям, принятым через интервал времени, необходимо эти дискретные значения пропустить через фильтр нижних частот.



**Рис. 2.4 – Спектр функций ряда Котельникова.**

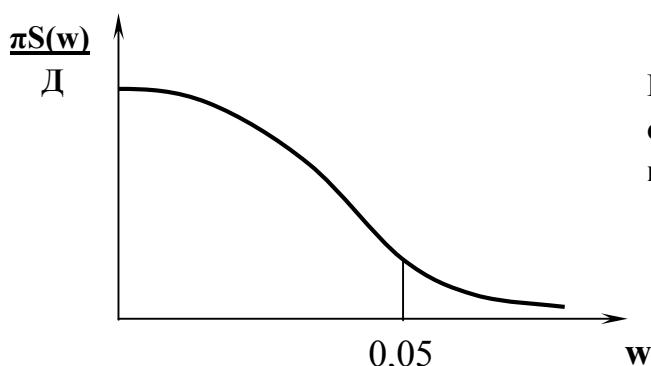
Приведём пример использования теоремы Котельникова. Пусть случайный процесс расхода жидкости имеет автокорреляционную функцию следующего вида:

$$R(\tau) = D e^{-\alpha(\tau)},$$

тогда спектральная плотность будет иметь вид:

$$S(w) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + w^2}$$

Графически нормированная спектральная плотность имеет вид рис. 2.5.



**Рис. 2.5 – Кривая типовой спектральной плотности процесса.**

Как видно из рис. 2.5, теоретически спектр расхода жидкости бесконечный, но практически его ограничивают уровнем 0,05. В этом случае легко подсчитать, что  $w_{np} = 4,32\alpha$ , откуда:

$$\Delta t = \frac{1}{2W} = \frac{1}{w_{np}} = \frac{\pi}{w_{np}} = \frac{\pi}{4,32\alpha}$$

Если принять  $\alpha = 0,5 \text{ с}^{-1}$ , получаем  $\Delta t \approx 1,5$  с. Таким образом, чтобы точно воспроизвести расхода жидкости по дискретным отсчётом, необходимо шаг временного квантования принять равным 1,5 с.

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Чем отличаются прямые измерения от косвенных?
2. Приведите классификацию погрешностей измерения.
3. Перечислите способы исключения систематических ошибок из результатов измерений.
4. Что такое «мера»? Классификация мер.
5. Охарактеризуйте группы измерительных приборов.
6. Каким выражением определяется класс точности прибора?
7. Дайте определение динамической характеристике измерительного прибора.
8. Раскройте суть теоремы Котельникова.

### 3. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ

#### 3.1 Теория подобия

Теория подобия даёт возможность изучать сложные процессы и теоретически и экспериментально. Только чистое экспериментирование, без теоретических обобщений, не позволяет распространить выводы, полученные таким путём, на другие неисследованные случаи. Только теоретический метод не может охватить всего многообразия условий физического процесса и, кроме того, очень часто приводит к математическим уравнениям, которые можно решить.

Основные технологические процессы протекают, главным образом, вследствие движения вязких (сжимаемых и несжимаемых) жидкостей, а также в результате теплообмена и диффузии. В результате этого, при их моделировании особое значение приобретают гидродинамическая, тепловая и диффузная подобность. Поэтому раньше, чем перейти к рассмотрению теории подобия и метода анализа размерностей, необходимо рассмотреть уравнения гидродинамики, теплообмена и диффузии.

##### 3.1.1 Движение вязкой жидкости

Рассмотрим неустойчивое движение жидкости, при котором скорости и давления в каждой точке потока меняются с течением времени [3, 6, 7].

Выделим в потоке движущейся жидкости элементарный параллелепипед с рёбрами  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  (рис. 3.1).

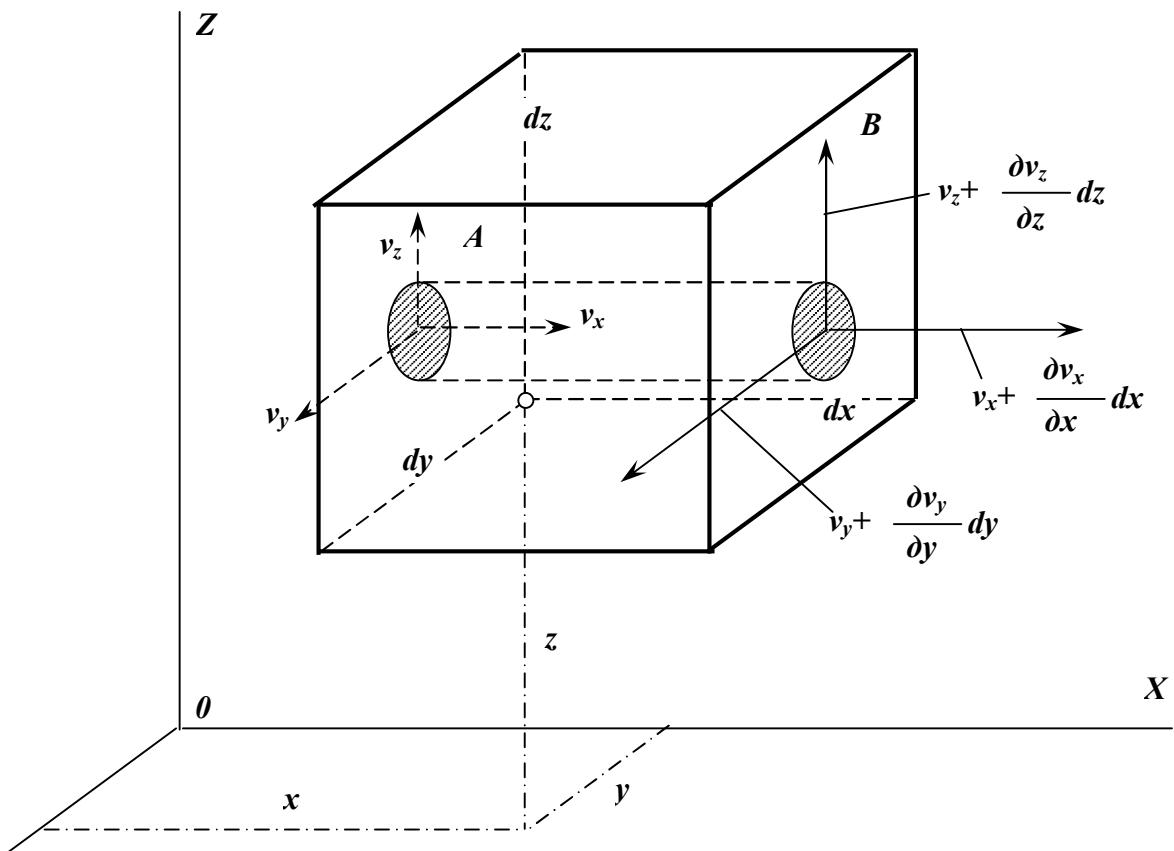


Рис. 3.1 – Элемент движущейся жидкости

Вследствие неразрывности потока, весь объем выделенного параллелепипеда будет постоянно заполнен подвижной жидкостью. При этом масса сжимаемой жидкости, которая поступает и выходит из параллелепипеда, в общем случае будет разная, что обусловлено непостоянством величин скорости  $w$  и плотности  $\rho$ .

Через левую грань  $A$ , параллельную плоскости  $YOZ$ , жидкость движется под влиянием составляющей скорости  $v_x$ , параллельной оси  $OX$ . Будем считать эту составляющую, а также плотность  $\rho$  постоянными во всех точках этой грани и равными их значениям в точке  $A$ :

$$v_x = f_1(x, y, z, t), \\ \rho = f_2(x, y, z, t),$$

где  $t$  – время.

В тот же момент времени для противоположного правой грани  $B$  эти величины будут:

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx; \quad \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx.$$

Через площадку  $dydz$  левой грани в единицу времени вытекает количество жидкости (в единицах массы):

$$dM_{x_1} = \rho v_x dy dz$$

Масса жидкости, вытекающей через противоположную грань за это время, будет:

$$dM_{x_2} = \left[ \rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx \right] dy dz$$

Таким образом, прирост массы жидкости за единицу времени в параллелепипеде является причиной разности значений  $v_x$  и  $\rho$  на левой и правой его гранях и равен:

$$\Delta M_x = \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) dx dy dz$$

Аналогично получаем для направлений, перпендикулярных осям  $OY$  и  $OZ$ :

$$\Delta M_y = \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) dx dy dz;$$

$$\Delta M_z = \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) dx dy dz.$$

Полный прирост массы жидкости в параллелепипеде за единицу времени будет:

$$\Delta M = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] dx dy dz. \quad (3.1)$$

При неразрывности потока изменение массы в объёме  $dxdydz$  вызывается изменением плотности жидкости в этом объёме, то есть:

$$\Delta M = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz. \quad (3.2)$$

После приравнивания уравнений (3.1) и (3.2) и деления на  $dxdydz$  получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (3.3)$$

Полученное уравнение называется уравнением неразрывности или сплошности.

В частных случаях уравнения сплошности принимает следующий вид:

- Для капельной жидкости ( $\rho = const$ ):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Откуда следует, что при неразрывном движении жидкости объём её, который втекает в некоторую ограниченную часть пространства, равен объёму, который вытекает из него за то же время;

- для однородного газа [ $\rho = f_2(t)$ ]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0;$$

- для устойчивого движения:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0.$$

Из уравнения (3.3) при условии  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$  находим, что для данного пространства при устойчивом движении жидкость не изменяет своей массы, то есть массы жидкости, которая втекает и вытекает, равны между собой.

В любой точке движущегося потока должна иметь место равновесие сил, обуславливающих движение. Такими силами являются сила тяжести, силы давления (перепад давления) и силы трения. Для вывода уравнения движения выделим в жидкости, которая находится в движении, элементарный параллелепипед объёмом  $dW$  и с рёбрами  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ .

Находим проекции на ось  $OX$  (рис. 3.2) силы тяжести, силы давления и силы трения, действующие на этот элементарный объем.

Для силы тяжести, которая приложена в центре тяжести элемента  $dW$ , имеем:

$$g_x \rho dW = g_x \rho dx dy dz, \quad (3.4)$$

где -  $g_x$  проекция ускорения силы тяжести ( $\text{м/с}^2$ ) на  $OX$ .

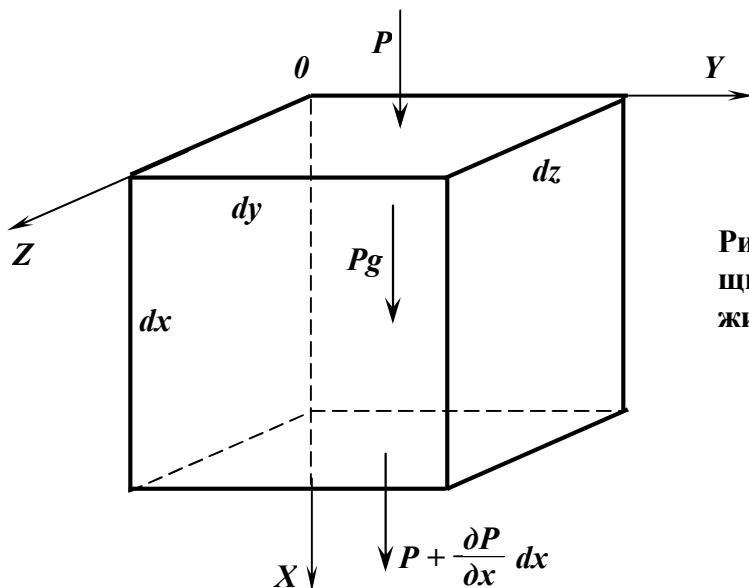


Рис. 3.2 – Силы, действующие на элементарный объём жидкости.

Обозначим удельное давление жидкости  $p$   $\text{кг/м}^2$ , тогда сила давления жидкости на верхнюю грань элемента будет равняться  $p dy dz$ , а на нижнюю:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz$$

где -  $\frac{\partial p}{\partial x} dx$  изменение гидростатического давления в направлении оси  $OX$  по всей длине ребра  $dx$ ; эта сила действует против направления движения жидкости.

Проекция равнодействующей сил давления будет:

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (3.5)$$

Действие силы трения рассмотрим сначала на примере движения плоского ламинарного потока, в котором проекция скорости  $v_x$  зависит только от  $y$ . В этом случае сила трения возникает только на боковых гранях элемента.

Направления и величина сил трения показаны на рис. 3.3.

В пересечении  $y$  сила трения равна  $-Sdxdz$  и направлена против движения, так как скорость жидкости здесь меньше, чем в самом элементе. В пересечении  $y + dy$  сила трения равна

$$\left( S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dxdz$$

и направлена в сторону движения, поскольку в этом случае скорость жидкость больше, чем в самом элементе.

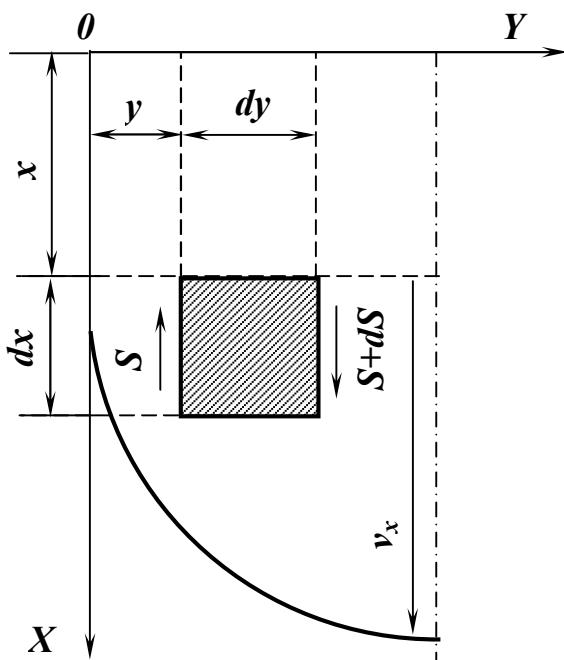


Рис. 3.3 – Направление и величина сил трения.

Проекция равнодействующая этих сил будет:

$$\left( S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dxdz - Sdxdz = \frac{dS}{dy} dxdydz, \quad (3.6)$$

где  $S$  - сила трения на единицу поверхности.

Но по закону Стокса

$$S = \mu \frac{dw_x}{dy}, \quad (3.7)$$

где  $\mu$  - вязкость среды.

После совместного решения уравнений (3.6) и (3.7) имеем:

$$\frac{dS}{dy} dW = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} dW.$$

В общем случае, когда скорость  $v_x$  изменяется во всех трёх направлениях, проекция силы трения на ось  $OX$  будет:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dW = \mu \nabla^2 v_x dW, \quad (3.8)$$

где символ  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа, который обозначает сумму вторых частных производных от проекции скорости на ось  $OX$ .

Суммируя проекции (3.4), (3.5) и (3.8), получаем проекцию равнодействующей всех сил, приложенных к объёму  $dW$ , на ось  $OX$ :

$$\left[ \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right] dW. \quad (3.9)$$

Эта равнодействующая равна произведению массы элемента  $dW$  на его ускорение  $\frac{Dv_x}{dt}$ :

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} dW = \rho \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] dW. \quad (3.10)$$

Символ  $\frac{Dv_x}{dt}$  называется полной или субстанциональной производной  $v_x$  по  $t$ . Эту производную следует понимать следующим образом: скорость изменения  $v_x$  в данной точке характеризуется частичной (или локальной) производной  $v_x$  по  $t$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(M, t + \Delta t) - v_x(M, t)}{\Delta t}, \quad (3.11)$$

где  $M$  обозначает любую постоянную геометрическую точку в пространстве.

Чтобы охарактеризовать изменение  $v_x$  для данной частицы жидкости за промежуток времени  $\Delta t$ , следует за прирост  $v_x$  принять разность между значениями функции  $v_x$  в момент  $t + \Delta t$  в том положении частиц  $M'$ , в котором она находится в тот момент, и значением функции  $v_x$  в момент  $t$  в исходном положении  $M$  частицы. Граница отношения этого приращения к  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  называется субстанциональной производной.

Связь между частичной и полной производными заключается в том, что, когда складывается полная производная от функции  $v(x, Y, Z, t)$  считают  $x, y, z$

функциями от  $t$ , так как частица, которая имела в момент  $\Delta t$  координаты  $x, y, z$ , за время  $\Delta t$  переместится по некоторой кривой.

С использованием уравнений (3.9) и (3.10) получаем:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (3.12)$$

Аналогично получаем уравнение для равнодействующая проекций сил на оси  $OY$  и  $OZ$ .

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right). \quad (3.13)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (3.14)$$

Уравнение (3.12), (3.13) и (3.14) образуют систему дифференциальных уравнений движения несжимаемой жидкости Навье-Стокса. Эта система справедлива как для ламинарного, так и турбулентного движения.

Если  $\mu$  постоянное, уравнение (3.12), (3.13) и (3.14) можно представить одним векторным:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathcal{G} \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.15)$$

где  $\mathcal{G} = \frac{\mu}{\rho}$  - кинематический коэффициент вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Уравнения Навье-Стокса могут быть получены и для сжимаемых жидкостей. Уравнение относительно оси  $OX$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p'}{\partial x} + \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Такие же уравнения имеют место в направлениях  $OY$  и  $OZ$ .

К этим уравнениям добавляем ещё и уравнение теплового баланса. Термо, которое поступает в единичный объем при постоянном состоянии, равно таковой же количеству тепла, удаляемого из этого же объема. К данному объему, также как и в уравнении (3.12), тепло подводится вследствие теплопроводности и с помощью материальных частиц, которые протекают через единичный объем при одновременном его охлаждении. Если температура  $\tau$  этого объема не меняется со временем, то общее количество подведенного тепла должна быть равна нулю, и

если учесть наличие источника тепла с интенсивностью  $q_i$  (ккал/м<sup>3</sup>), то получаем следующее уравнение:

$$c\rho \left( v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right) + q_i , \quad (3.17)$$

где  $c$  - теплоёмкость,  $\rho$  - плотность,  $\lambda$  - теплопроводность.

В левой части уравнения (3.17) представлено количество тепла в единичном объёме, которое используется для нагрева на  $d\tau$  частиц, протекающих через параллелепипед с рёбрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Это тепло покрывается за счёт подвода тепла из окружающей среды (первый член правой части уравнения) и за счёт источника тепла  $q_i$ . После деления обеих частей уравнения на  $c\rho$  получаем:

$$v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + v_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + v_z \frac{\partial \tau}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \right) + \frac{q_i}{c\rho} \quad (3.18)$$

или в векторной форме

$$(\vec{v}, \operatorname{grad} \tau) = a \nabla^2 \tau + \frac{q_i}{c\rho} . \quad (3.19)$$

Система из пяти дифференциальных уравнений (3.3), (3.12), (3.13), (3.14) и (3.18) с частными производными совместно с граничными и начальными условиями полностью описывают процесс движения вязкой жидкости.

Вблизи стенок поток является ламинарным, соответственно, передача тепла происходит в результате теплопроводности:

$$dq = -\lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F dF , \quad (3.20)$$

где  $dF$  - поверхность теплообмена;  $n$  - нормаль к  $dF$ ;  $\left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F$  - температурный градиент жидкости непосредственно у стенки.

Количество передаваемого тепла обычно выражают с помощью коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  (ккал/м<sup>2</sup>·ч·град), с использованием формулы Ньютона:

$$Q = \alpha(\tau_F - \tau_0)F\tau , \text{ ккал} \quad (3.21)$$

или

$$\frac{Q}{t} = q = \alpha(\tau_F - \tau_0)F , \text{ ккал/ч.} \quad (3.22)$$

Несмотря на то, что коэффициент теплоотдачи не входит в уравнения (3.3) - (3.20), он часто применяется в тепловых расчётах. После дифференцирования уравнения (3.22) получаем:

$$dq = \alpha(\tau_F - \tau_0)dF = -\lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F dF , \quad (3.23)$$

где  $\tau_F$  – температура стенки;  $\tau_0$  - температура жидкости.

Таким образом, имеем:

$$\alpha = - \frac{\lambda \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F}{\tau_F - \tau_0}. \quad (3.24)$$

Эта зависимость позволяет коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  ввести в систему дифференциальных уравнений для конвективной теплопередачи. Поскольку температурный градиент  $\left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F$  в формуле (3.24) зависит от температур стенки и жидкости и от толщины пограничного слоя, то есть от характера (режима) движения, то, соответственно, и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  зависит от всех величин, которые содержатся в уравнениях (3.3) - (3.20).

### 3.1.2 Условия применения теории подобия

Трудности, встречающиеся при решении многих задач с помощью дифференциальных уравнений с частными производными, заставили искать необходимые решения экспериментальным путём [7, 8].

По опытным данным, которые получены на одном аппарате, делались приблизительные выводы о возможной работе другого, такого же, но более крупного аппарата, что и привело к идею моделирования процессов и аппаратов, и получила своё отражение в теории подобия.

Теория подобия - наука о сходстве явлений.

В случае геометрического подобия двух фигур отношение всех соответствующих размеров этих фигур постоянно. Геометрические фигуры похожи между собой, если их соответствующие углы равны, а сходные стороны пропорциональны, то есть:

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \frac{l'_3}{l_3} = A, \quad (3.25)$$

где  $A$  - коэффициент пропорциональности, или константа подобия.

Таким образом, условие (3.25) является математической формулировкой геометрического подобия двух фигур (модели и производственного аппарата).

В двух кинематических схемах будет иметь место кинематическая подобность, если их схожие частицы перемещаются по геометрически подобным путям в промежутки времени, отличающиеся постоянным множителем, то есть в данном случае можно говорить о сходстве движения, например двух потоков жидкости. При динамической подобности многоугольники сил, построенные для пары похожих частиц, расположенных подобным образом в пространстве и времени, должны быть подобны, то есть различаться только масштабом.

Понятие подобия можно распространить на тепловые и физико-химические процессы.

С использованием этого понятия можно решить много практически важных задач. Но для использования понятий о подобии необходимо найти условия подобия явлений, которые рассматриваются. При этом возникают такие вопросы:

- возможно ли экспериментальные данные, например, такие, которые связаны с температурным полем, полученные путём измерения на одном аппарате (на модели), перенести в точности на другой аппарат (производственный);
- какие должны быть условия, допускающие такой перенос или перерасчёт;
- как следует сделать, чтобы полученные в ходе эксперимента на модели данные были правильно применены для производственного аппарата.

Перенос экспериментальных данных с модели на производственный аппарат возможно в таких случаях, когда существует подобие обоих процессов. Это подобие не должно ограничиваться только геометрическими формами; все другие величины, которые оказывают влияние на процесс, должны в модели и в производственном аппарате находиться в определённых отношениях.

Поиск условий подобия осуществляется следующим образом: сравниваются такие два случая, при которых потоки для всех величин, встречающихся в уравнениях (3.3) - (3.24), подобны.

1. Такими являются координаты  $x, y, z$  производственного аппарата, которые относительно  $x', y', z'$  модели могут быть равномерно увеличены. Так сопоставляются потоки, которые проходят через геометрически подобные тела или вокруг них. Тогда все отрезки границ потока  $l_1, l_2, l_3\dots$  производственного аппарата, которые отвечают  $l'_1, l'_2, l'_3\dots$  модели, будут увеличены в определённой пропорции:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \dots = \frac{l'}{l} = A_l. \quad (3.26)$$

Углы между соответствующими отрезками остаются неизменными.

2. Поле скоростей в производственном аппарате и модели должно быть подобным. В соответствующих точках с координатами  $x', y', z'$  и  $x, y, z$  отношение

$$\frac{v'}{v} = A_v \quad (3.27)$$

должно быть одинаковым, и кроме того, направление соответствующих скоростей производственного аппарата и модели должно быть одним и тем же (равенство углов). Так что нельзя пытаться найти подобность между ламинарным и турбулентным потоками, так как распределение скоростей в обоих потоках разное. Можно сравнивать только ламинарные потоки между собой и турбулентные потоки между собой.

3. Следующей важной величиной является температурный градиент  $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \frac{\partial \tau}{\partial y}, \frac{\partial \tau}{\partial z}$ . Распределение градиентов должно быть подобным, т.е.

$$\frac{\partial \tau'/\partial x'}{\partial \tau/\partial x} = \frac{\partial \tau'/\partial y'}{\partial \tau/\partial y} = \frac{\partial \tau'/\partial z'}{\partial \tau/\partial z} = A_{grad\tau}. \quad (3.28)$$

Из уравнения (3.26) и (3.28) имеем:

$$d\tau' = A_{grad\tau} \cdot A_l d\tau = A_\tau d\tau \quad (3.29)$$

где

$$A_{grad\tau} \cdot A_l = A_\tau. \quad (3.30)$$

После интегрирования уравнения (3.29) получаем:

$$\tau' - \tau'_0 = A_\tau (\tau - \tau_0) \quad (3.31)$$

или

$$\frac{\tau' - \tau'_0}{\tau - \tau_0} = A_\tau, \quad (3.32)$$

где температуры  $\tau'_0$  и  $\tau_0$  представляют произвольные постоянные интегрирования для соответствующих, но произвольно выбранных точек  $x'_0, y'_0, z'_0$  и  $x_0, y_0, z_0$ . В модели и производственном аппарате температуры  $\tau'_0$  и  $\tau_0$  могут быть выбраны, например, у входа в трубопровод или на большом расстоянии от стенки в зависимости от целесообразности. В уравнение подобия температурных полей входят, таким образом, не собственно температуры, а их различия по отношению к температуре выбранной точки.

Из уравнений (3.26), (3.28) и (3.29) следует:

$$\frac{\partial \tau'/\partial x'}{\partial \tau/\partial x} = \frac{A_\tau}{A_l}; \quad \frac{\partial^2 \tau'/\partial x'^2}{\partial^2 \tau/\partial x^2} = \frac{A_\tau}{A_l^2}. \quad (3.33)$$

Во многих случаях имеет значение соблюдения сходства градиентов концентраций в материальных потоках, проходящих через аппараты. Условия сходства концентрационных и температурных градиентов аналогичные.

4. Статическое давление входит в дифференциальные уравнения в виде градиентов  $\frac{\partial p}{\partial x}$  и др. По аналогии с температурным полем можно написать условия подобия для поля давления:

$$\frac{p' - p'_0}{p - p_0} = A_p. \quad (3.34)$$

5. Подобность полей физических свойств среды обусловливает такие постоянные соотношения для всех соответствующих точек производственного аппарата и модели:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha'}{\alpha} = A_\alpha; \quad \frac{\rho'}{\rho} = A_\rho; \quad \frac{g'}{g} = A_g \\ \frac{c'}{c} = A_c; \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = A_\lambda; \quad \frac{\mu'}{\mu} = A_\mu \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

Следует отметить, что при выполнении условий подобия не все масштабные множители (числа) (3.28) - (3.35) могут быть произвольно выбраны. Другие определяются после выбора некоторых немногих основных величин. То есть число независимых масштабных множителей в уравнениях (3.26) - (3.35) может существенно сократиться вследствие дополнительных условий.

Если две системы подобны, то в пределах каждой системы отношение любых похожих величин, характеризующих то или иное состояние, является безразмерным и постоянным для обеих систем. Так, например, физическое состояние одной из систем характеризуется некоторыми величинами  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , а другой подобной системы - величинами  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Тогда условие сходства требует равенства:

$$R_1/R_2 = r_1/r_2 = i. \quad (3.36)$$

То есть отношение похожих величин в одной системе равно их отношению в подобной системе. Эти постоянные безразмерные отношения называются *инвариантами подобия* и обозначаются символом  $i$ .

Инварианты подобия, которые являются отношением простых однородных величин, например, линейных размеров  $l/d$ , давлений  $p_1/p_2$ , вязкостей  $\mu_1/\mu_2$  и т. п., называются *симплексами подобия*.

В основе теории подобия лежат три теоремы, которые формулируются следующим образом:

*I теорема.* Если физические процессы подобны друг другу, одноименные критерии подобия этих процессов имеют одинаковую величину.

*II теорема.* Уравнения, описывающие физические процессы, могут быть представлены в виде функциональной связи между критериями подобия.

*III теорема.* Для того чтобы физические процессы были подобны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы эти процессы были качественно одинаковы, а их одноименные определяющие критерии - численно одинаковы.

### 3.1.3 Дифференциальные уравнения теплообмена для модели

Дифференциальные уравнения теплообмена для модели напишем в соответствии с уравнениями п. 3.1.2, но в данном случае все входящие величины

обозначим штрихами, в отличие от величин для производственного аппарата [3, 5, 6].

Считая, что  $q_i = q'_i = 0$ , получаем (для оси  $OX'$ ):

$$\frac{\partial(\rho'v'_x)}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho'v'_y)}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho'v'_z)}{\partial z'} = 0; \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \rho' \left( v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) &= \rho' g'_x - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \\ &+ \mu' \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подобные уравнения можно составить и для проекций на оси  $OY'$  и  $OZ'$ . Аналогично уравнению (3.18) имеем:

$$v'_x \frac{\partial \tau'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \tau'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial \tau'}{\partial z'} = a' \left( \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial z'^2} \right); \quad (3.39)$$

$$\alpha' = - \frac{\lambda' \left( \frac{\partial \tau'}{\partial n'} \right)_F}{\tau'_F - \tau'_0}. \quad (3.40)$$

В эти уравнения, согласно соотношений (3.28) - (3.35), можно подставить  $x' = A_i x$ ,  $v' = A_v v$ ,  $\rho' = A_\rho \rho$ , где величины без штриха относятся к производственному аппарату. Таким образом, из уравнения (3.37) получаем:

$$\frac{A_\rho A_v}{A_l} \rho \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = 0, \quad (3.41)$$

а из уравнения (3.38) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{A_\rho A_v^2}{A_l} \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) &= A_\rho A_g \rho g_x - \frac{A_p}{A_l} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{A_\mu A_v}{A_l^2} \mu \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Аналогичные уравнения получают и для направлений  $OY$  и  $OZ$ . Из уравнения (3.39) имеем:

$$A_v \frac{A_\tau}{A_l} \left( v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + \dots \right) = \frac{A_\lambda A_\tau}{A_c A_\rho A_g A_l^2} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \dots \right), \quad (3.43)$$

а из уравнения (3.40) получим:

$$A_\alpha \alpha = - \frac{A_\lambda}{A_l} \cdot \lambda \frac{\left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)_F}{\tau_F - \tau_0}. \quad (3.44)$$

Подобными будем считать только такие процессы, для которых масштабные значение  $A_b$ ,  $A_v$ ,  $A_\tau$  и др. таковы, что множители, стоящие перед скобками в уравнениях (3.41) - (3.44) одинаковы, то есть:

$$\frac{A_\rho A_v^2}{A_l} = A_\rho A_g = \frac{A_p}{A_l} = \frac{A_\mu A_v}{A_l^2}; \quad (3.45)$$

$$A_v \frac{A_\tau}{A_l} = \frac{A_\lambda A_\tau}{A_c A_\rho A_g A_l^2}; \quad (3.46)$$

$$A_\alpha = \frac{A_\lambda}{A_l}. \quad (3.47)$$

Итак, если численные значения удовлетворяют уравнениям (3.45) - (3.47), то в уравнениях (3.41) - (3.44) масштабные множители могут быть сокращены и для модели остаётся система дифференциальных уравнений, которые полностью идентичны уравнениям для производственного аппарата, а именно - уравнением (3.3), (3.12), (3.13), (3.16), и (3.18).

Также интегралы дифференциальных уравнений для аппарата и модели также будут идентичны. Это означает, что только в этом случае распространение потоков со скоростными и температурными полями в модели и производственном аппарате осуществляется одинаково.

Отсюда вытекает следующее положение: подобными процессами теплообмена в устойчивом состоянии при отсутствии источников тепла являются только такие, в которых масштабные множители удовлетворяют уравнениям (3.45) - (3.47). Таким образом, из числа масштабных множителей пять выражаются через другие с помощью уравнений (3.45) - (3.47).

Далее представим уравнения (3.45) - (3.47) в более удобной форме - в виде уравнений в критериях подобия.

### 3.1.4 Гидродинамическое подобие

Для выяснения условий, при соблюдении которых уравнения движения будут подобны, или движения подобны, рассмотрим уравнения Навье-Стокса (3.12) - (3.14) для случая плоского потока в безразмерном виде. За масштаб

длины выбираем любой характерный размер тела (например, диаметр или радиус трубы), а за масштабы скоростей, давлений, плотностей, температур и др. - их характерные значения [6].

Обозначим безразмерные величины теми же буквами, что и размерные, но с чертой и сделаем такую замену:

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad \rho = \rho_0 \bar{\rho}, \quad v_x = V_0 \bar{v}_x, \quad v_y = V_0 \bar{v}_y,$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \bar{\vartheta}, \quad t = t_0 \bar{t}, \quad X = g \bar{X}, \quad Y = g \bar{Y}, \quad p = p_0 \bar{p}.$$

За масштаб времени принято время, характерное для данного движения, а за масштаб массовых сил, отнесённых к единице массы, - ускорение силы тяжести.

После подстановки указанных величин в уравнения (3.12) - (3.14) получим уравнения плоского движения и уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости в безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{l} \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) &= g \bar{X} - \frac{p_0}{\rho_0 l} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\vartheta_0 V_0}{l^2} \bar{g} \nabla^2 \bar{v}_x; \\ \frac{V_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{l} \left( \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) &= g \bar{Y} - \frac{p_0}{\rho_0 l} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\vartheta_0 V_0}{l^2} \bar{g} \nabla^2 \bar{v}_y; \\ \frac{V_0}{l} \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Разделим первые два уравнения на  $\frac{V_0^2}{l}$ , а третье на  $\frac{V_0}{l}$  и опустим для простоты чёрточки над безразмерными величинами, после чего получаем:

$$\frac{l}{V_0 t_0} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \frac{gl}{V_0^2} X - \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\vartheta_0}{V_0 l} g \nabla^2 v_x;$$

$$\frac{l}{V_0 t_0} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \frac{gl}{V_0^2} Y - \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\vartheta_0}{V_0 l} g \nabla^2 v_y;$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Из этой системы уравнений следует, что если два потока подобны, то есть, они описываются одинаковыми уравнениями с одинаковыми граничными и начальными условиями, представленными в безразмерном виде, то для них должны быть одинаковыми по величине такие безразмерные величины, которые имеют свои собственные названия:

$$\frac{l}{V_0 t_0} = Sh$$

- число Струхала характеризует зависимость составляющих инерционных сил от времени;

$$\frac{V_0}{\sqrt{gl}} = Fr$$

- число Фруда отражает отношение сил инерции к силам гравитации;

$$\frac{\frac{P_0}{2}}{\rho V_0^2} = Eu$$

- число Эйлера характеризует отношение сил давления к силам инерции;

$$\frac{V_0 l}{\vartheta} = Re$$

- число Рейнольдса отражает отношение сил инерции к вязкости.

Для полного моделирования необходимо полное подобие процессов, то есть равенство чисел сходства. При использовании данных, полученных на модели, должны быть удовлетворены для всех соответствующих точек на модели и в производственном аппарате три условия:

$$Re = \text{idem}; \quad Eu = \text{idem}; \quad Sh = \text{idem}. \quad (3.49)$$

Однако теория и практика показывают, что при однородных потоках в модели и производственном аппарате устанавливаются такие профили скоростей, которые подобны между собой. Поэтому, для того чтобы удостовериться в подобии процессов, нет необходимости проверять наличие условий (3.49) для всех подобных точек. Если, например, в трубопроводе вдоль его оси найдено, что  $Re = \text{idem}$  для производственного аппарата и модели, то соответственно этому  $Re = \text{idem}$  также для других точек пересечения потока. Однородными потоками называют такие, которые имеют подобные режимы движения (турбулентный, ламинарный), начальные условия (профиль скоростей на входе в аппарат), краевые условия. Последнее условие в отношении скоростей всегда выполняется по той причине, что скорости у стенок как в модели, так и в производственном аппарате всегда равны нулю.

Другие условия подобия - геометрическое подобие (в том числе и шероховатость поверхности) и другие должны быть также выполнены. Но возникает вопрос: можно ли вообще соблюденя всех условий сходства и если да, то при каких обстоятельствах.

Если, например, при протекании жидкости в трубопроводе (твёрдые границы) появляются свободные поверхности жидкости, то для их учёта было бы необходимо ввести дополнительные условия подобия, которые определяются физическими законами их образования. То есть при свободных поверхностях невозможно одновременно выполнить все условия подобия. То же самое произойдёт, если свойства вещества (вязкость, плотность и др.) не являются постоянными и изменяются с температурой вдоль потока.

Для потоков, где нет таких трудностей, число условий подобия можно сократить, исходя из следующих соображений. Для стационарных процессов числа  $Sh$  не имеют значения. Перепад давления в потоке будет зависеть от скоростных характеристик потока, т.е.  $Eu = f(Re)$ . Таким образом, при изучении движения жидкости наиболее существенным будет число  $Re$ . Число  $Re$  приобретает решающее значение при определении структуры потоков (ламинарных и турбулентных). Структура потока определяет процесс переноса массы, количества движения, тепла.

То есть, обычно пользуются приближительным моделированием, при котором подобие сохраняется по числам, наиболее характерным для данного процесса.

### 3.1.5 Термическое подобие

Аналогично гидродинамическому подобию рассмотрим условия термического подобия. Во-первых, рассмотрим случай чистой теплопроводности, то есть переноса тепла молекулярным способом без конвекции [8]. В этом случае уравнение переноса тепла имеет вид:

$$c_p \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \tau, \quad (3.50)$$

где  $c_p$  - удельная теплоёмкость жидкости.

Приведём это уравнение к безразмерному виду, для чего введём такие безразмерные величины:

$$c_p = \bar{c}_p c_{p0}; \quad \rho = \bar{\rho} \rho_0; \quad \tau = \bar{\tau} \tau_0; \quad \lambda = \bar{\lambda} \lambda_0; \quad x = \bar{x} l; \quad t = \bar{t} t_0,$$

где  $\bar{c}_p$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{t}$  – безразмерные величины;  $c_{p0}$ ,  $\rho_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $l$ ,  $t_0$  – характерные размерные величины (масштабы).

Рассмотрим одномерное движение, то есть  $\tau = \tau(t, x)$ , тогда

$$c_p \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

После подстановки принятых соотношений в уравнение переноса тепла получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{p0} \rho_0 \tau_0}{t_0} \bar{c}_p \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2} &= \frac{\lambda_0 \tau_0}{l^2} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}, \\ \text{или} \\ \bar{c}_p \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\lambda_0}{c_{p0} \rho_0} \cdot \frac{t_0}{l^2} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

где  $\alpha_\tau = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  - коэффициент температуропроводности, а  $\frac{\alpha_\tau t}{l^2} = Fu$  - число Фурье, которое характеризует нестационарность процесса молекулярного переноса тепла.

Далее рассмотрим случай конвективного переноса тепла. Для случая одномерного устойчивого движения соответствующее уравнение будет:

$$v_x \frac{\partial \tau}{\partial x} = \alpha_\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

После введения безразмерных величин получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_0 \tau_0}{l} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\alpha_0 \tau_0}{l^2} \bar{\alpha}_\tau \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2} \\ \text{или} \quad \bar{v}_x \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\alpha_0 \tau_0}{V_0 l} \bar{\alpha}_\tau \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \bar{x}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

То есть, для сходства процессов необходимо соблюдать равенство величины  $\frac{\alpha_0}{V_0 l}$ , а обратная ей величина называется числом Пекле.

$\frac{V_0 l}{\alpha_\tau} = Pe$  – число Пекле характеризует конвективный перенос тепла.

Очевидно, что малые значения числа  $Pe$  отвечают очень малом конвективном переносе в общем переносе тепла. Итак, при значениях чисел  $Pe < 1$  наблюдается только молекулярный перенос, то есть теплопроводность, тогда как при больших значениях числа  $Pe$  роль молекулярного переноса будет незначительна.

Перенос тепла с поверхности  $F$  при разнице температур в потоке и на стенке  $\tau_1 - \tau_w$  можно представить в виде:

$$Q = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial n} F t = \alpha (\tau_1 - \tau_w) F t, \quad (3.53)$$

где  $\tau_1$  – температура окружающей среды;  $\tau_w$  - температура стенки;  $\alpha$  – коэффициент теплопереноса.

Для плотности теплового потока имеем:

$$q = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial n} = \alpha (\tau_1 - \tau_w). \quad (3.54)$$

Запишем уравнение (3.54) в безразмерном виде:

$$-\frac{\lambda_0 \tau_0}{l} \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{n}} = \alpha_0 \tau \bar{\alpha} (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w)$$

и после деления на  $\frac{\lambda_0 \tau_0}{l}$  получим:

$$-\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{n}} = \frac{\alpha_0 l}{\lambda_0} \bar{\alpha} (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_w)$$

откуда получаем число Нуссельта:

$$\frac{\alpha_0 l}{\lambda_0} = Nu \quad - \text{число Нуссельта, можно рассматривать как отношение}$$

действительного теплового потока, который определяется величиной коэффициента теплопереноса  $\alpha$ , к удельному тепловому потоку, который должен иметь место в условиях чистой теплопроводности в слое толщиной  $l$ , то есть:

$$Nu = \frac{\alpha}{\lambda/l} .$$

Если разделить число  $Pe$  на число  $Re$ , получим *число Прандтля*:

$$\frac{Pe}{Re} = \frac{\vartheta_0}{\alpha_\tau} = \frac{\vartheta_0 \rho_0 c_p}{\lambda_0} = \frac{c_p \mu_0}{\lambda_0} = Pr . \quad (3.55)$$

Число  $Pr$  характеризует отношение двух характеристик молекулярного переноса: кинематической вязкости  $\vartheta$  и коэффициента температуропроводности  $\alpha_\tau$ . Перенос импульса, связанный с величиной  $\vartheta$ , определяется разницей скоростей, а перенос тепла, связанный с величиной  $\alpha_\tau$ , определяется разницей температур. Итак, число  $Pr$  явно содержит только величины, которые определяют физические свойства среды, и в действительности характеризует отношение между полями скоростей и температур. Тогда зависимость  $Nu = f(Re, Pr)$  можно трактовать следующим образом: количество тепла, которое переносится ( $Nu$ ) зависит от вида скоростного поля ( $Re$ ) и его связи с полем температур ( $Pr$ ).

Приведённые выше уравнения действительны только в том случае, если величины  $\lambda, c, \rho, \mu, g$  и др. по длине потока остаются постоянными, так как только при этом обеспечивается постоянство масштабных множителей. Вследствие того, что температура оказывает влияние на  $\lambda, \rho, \mu$ , точное выполнение условий подобия бывает очень редко.

### 3.1.6 Диффузионное подобие

Числа подобия для диффузных процессов можно получить из уравнения диффузии вещества [6, 8].

Для одномерного движения уравнение молекулярной диффузии имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (3.56)$$

После замены в этом уравнении всех величин безразмерными и характерными значениями (масштабами) получаем:

$$c = c_0 \bar{c}, \quad t = t_0 \bar{t}, \quad x = \bar{x}l;$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_0}{t_0} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \frac{Dc_0}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \frac{Dt_0}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

или

Безразмерное число  $\frac{Dt_0}{l^2}$  называется диффузным числом Фурье.

$\frac{Dt_0}{l^2} = Fu$  – число Фурье аналогично тепловому числу Фурье, но характеризует нестационарность процесса молекулярного переноса вещества.

При конвективном переносе вещества для одномерного движения воспользуемся уравнением:

$$v_x \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (3.58)$$

После выполнения аналогичных операций получим:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}} = \frac{D}{V_0 l} \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2}.$$

$\frac{V_0 l}{D} = Pe_\partial$  – диффузное число Пекле, которое подобно числу  $Re$  определяет структуру потока.

В зависимости от величины числа  $Pe_\partial$  по сравнению с единицей можно судить о характере переноса вещества. Если  $Pe_\partial > 1$  молекулярной диффузии можно пренебречь по сравнению с конвективным переносом вещества. Если  $Pe_\partial < 1$ , напротив молекулярная диффузия является определяющей.

Деления числа  $Pe_\partial$  на число  $Re$  позволяет получить диффузное число Прандтля  $Pr_\partial$ :

$$\frac{Pe_\partial}{Re} = \frac{\vartheta_0}{D} = Pr_\partial. \quad (3.59)$$

Диффузное число Прандтля характеризует отношение двух характеристик переноса: кинематической вязкости  $\vartheta$  и коэффициента диффузии  $D$ .

Коэффициент кинематической вязкости в подвижных жидкостях типа воды составляет около  $10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, а коэффициент диффузии молекул и ионов в водных растворах имеет порядок  $D = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с, макромолекул -  $D = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с. Поэтому в воде и подобных ей жидкостях  $Pr_\partial \approx 10^3$ . При росте вязкости коэффициент диффузии уменьшается по закону:

$$D = \frac{const}{\vartheta},$$

поэтому число  $Pr_\partial$  с увеличением вязкости растёт пропорционально её квадрату. В вязких жидкостях число  $Pr_\partial$  достигает значения  $10^6$  и более.

Запишем уравнение переноса вещества применительно к разности концентраций на стенке и в окружающей среде:

$$W = -D \frac{\partial c}{\partial n} = \alpha_\partial (c_1 - c_w), \quad (3.60)$$

где  $\alpha_\partial$  – коэффициент переноса массы;  $c_1$  – концентрация вещества в окружающей среде;  $c_w$  – концентрация вещества на стенке.

После замены в этом уравнении всех величин безразмерными и характерными значениями (масштабами) получаем:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{Dc_0}{l} \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{n}} = \alpha_\partial c_0 (\bar{c}_1 - \bar{c}_w) \\ \text{или} \quad & \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{n}} = \frac{\alpha_\partial l}{D} (\bar{c}_1 - \bar{c}_w) \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Из последнего уравнения получаем *локальное число Нуссельта*:

$$\frac{\alpha_\partial l}{D} = Nu_\partial \quad (3.62)$$

Аналогично тепловому числу  $Nu$  можно с использованием среднего коэффициента переноса вещества  $\alpha_{cp,\partial}$  получить среднее диффузное число Нуссельта.

### 3.1.7 Подобие некоторых частных случаев переноса

Известно, что на тело, погруженное в жидкость, действует гидростатическая или архимедова сила [6]. Её величина равна массе вытесненной телом жидкости и направлена в сторону, противоположную направлению сил тяжести. Архимедова сила имеет важное значение в тех

случаях, когда в жидкостях есть частицы с плотностью, которая отличается от плотности среды. В этом случае критерием сходства будет число Архимеда:

$$Ar = \frac{l^3}{g^2} g \frac{\rho - \rho_1}{\rho} = \frac{l^3}{g^2} g \frac{\Delta\rho}{\rho}, \quad (3.63)$$

где  $\rho$  и  $\rho_1$  - плотности частиц и жидкости.

Соотношение между гравитационными силами и вязкостью характеризует *число Галилея*:

$$Ga = \frac{gl^3}{g^2}. \quad (3.64)$$

Если изменение плотности жидкости вызвано изменением температуры, то в этом случае критерием сходства будет *число Грасгофа*:

$$Gr = \frac{l^3}{g^2} g \beta \Delta\tau, \quad (3.65)$$

где  $\beta$  - коэффициент объемного расширения, который определяется из соотношения:

$$\beta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta\rho}{\Delta\tau}.$$

Для общности наименований целесообразно число Грасгофа называть тепловым числом Архимеда.

Гидростатическая сила может появиться и при разнице концентрации примеси в среде. В этом случае критерием сходства будет *диффузное число Архимеда*:

$$Ar_\partial = \frac{l^3}{g^2} g \xi \Delta c, \quad (3.66)$$

где  $\Delta c$  – разница концентраций вещества в среде и на стенке; коэффициент (аналогичный  $\beta$ ), который характеризует относительное изменение плотности в зависимости от концентрации:

$$\xi = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta\rho}{\Delta c}.$$

Динамическое, тепловое и диффузное числа Архимеда могут быть получены из соответствующего анализа уравнения движения в таком виде:

$$\rho \frac{dV}{dt} = g\Delta\rho - \rho g \beta \Delta\tau - \rho g \xi \Delta c + \mu \nabla^2 V. \quad (3.67)$$

После выполнения соответствующих операций с уравнением (3.67) получим *динамическое число Нуссельта*:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\mu}. \quad (3.68)$$

В тех случаях, когда в жидкости большие силы поверхностного натяжения, основным критерием подобия будет число Вебера:

$$We = \frac{\rho V^2 l}{\sigma}, \quad (3.69)$$

где  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения.

Число  $We$  выражает собой отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения. Число  $We$  имеет существенное значение при изучении процессов перемешивания взаимно нерастворимых жидкостей. Вероятность дробления капель в мешалках определяется в зависимости от числа  $We$ , представленного в виде:

$$We = \frac{\rho n^2 d^3}{\sigma}, \quad (3.70)$$

где  $n$  и  $d$  - число оборотов и диаметр мешалки;  $\sigma$  - межфазное натяжение.

С увеличением числа  $We$  диаметр капель уменьшается и межфазная поверхность растёт.

### 3.1.8 Обобщение

Легко видеть, что тепловое и динамическое числа Пекле по физическому смыслу и форме аналогичны числам Рейнольдса. Итак, можно ввести три числа Рейнольдса: динамическое, тепловое и диффузное:

$$\left. \begin{array}{l} Re = \frac{V_0 l}{\vartheta_0}; \\ Re_\tau = Pe = \frac{V_0 l}{\alpha_\tau}; \\ Re_\partial = Pe_\partial = \frac{V_0 l}{D}. \end{array} \right\} \quad (3.71)$$

В знаменателе этих формул находятся соответственно кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициент диффузии, то есть величины, которые зависят от вязкости. Поэтому при уменьшении вязкости все числа Рейнольдса будут расти, а при приближении величины вязкости к нулю динамическое, тепловое и диффузное числа Рейнольдса будут приближаться к бесконечности.

Аналогично можно получить динамическое, тепловое и диффузное числа Фурье.

При изучении тепловых и диффузионных процессов существенное значение имеют числа Прандтля, которые можно получить, как отношение соответствующих чисел Рейнольдса:

$$\left. \begin{aligned} \text{Pr}_\tau &= \frac{\text{Re}_\tau}{\text{Re}} = \frac{\vartheta}{\alpha_\tau}; \\ \text{Pr}_\partial &= \frac{\text{Re}_\partial}{\text{Re}} = \frac{\vartheta}{D}; \\ \text{Pr}_{3M} &= \frac{\text{Re}_\partial}{\text{Re}_\tau} = \frac{\alpha_\tau}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Первое число Прандтля называется тепловым, второе - диффузным, третье - смешанным.

Первое число Прандтля представляет собой отношение кинематической вязкости (перенос импульса) и коэффициента температуропроводности (перенос тепла). Поэтому, тепловое число Прандтля явно содержит только величины, определяющие физические свойства среды, то есть характеризуют соотношение поля скоростей и поля температур. Это значит, такие поля будут подобные только при числе  $Pr = 1$ .

Аналогичные соображения можно полностью перенести на диффузное число Прандтля. Оно характеризует соотношение между полем скоростей и полем концентраций. А смешанное число Прандтля - отношение температурного поля к полю концентраций.

В завершение приведём сводную таблицу цифр подобия процессов переноса количества движения, тепла и вещества в жидкостях и газах [6].

Таблица 3.1 - Числа подобия процессов переноса.

Число подобия	Прандтля	Архимеда	Нуссельта	Фурье	Рейнольдса
Динамическое	–	$Ar = gl^3 \Delta \rho / v^2 \rho$	–	$Fu = vt/l^2$	$Re = Vl/v$
Тепловое	$Pr_\tau = v/\alpha_\tau$	$Ar_\tau = gl^3 \beta \Delta \tau / v^2$	$Nu_\tau = al/\lambda$	$Fu_\tau = \alpha_\tau / l^2$	$Re_\tau = Vl/\alpha_\tau$
Диффузионное	$Pr_\partial = v/D$	$Ar_\partial = gl^3 \xi \Delta c / v^2$	$Nu_\partial = \alpha_\partial l / D$	$Fu_\partial = Dt/l^2$	$Re_\partial = Vl/D$

**Пример 3.1.** Для проведения исследований рассчитать модель тракта супензии, текущей по трубопроводу в бак кондиционной супензии.

Поведение потока в данном случае может быть описано уравнением Навье-Стокса и уравнением неразрывности. Рассмотрим случай одномерного движения:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \bar{X} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}; \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0.$$

Первый член уравнения Навье-Стокса при постоянном движении равен нулю  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ , уравнение неразрывности  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$  также дополнительных условий не вносит. После учёта сказанного перепишем первое уравнение в безразмерной форме:

$$\frac{V_0^2}{l_0} \cdot \bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}'} = g_0 \bar{X}' - \frac{p_0}{\rho_0 l_0} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}'} \cdot \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}'} + \frac{\vartheta_0 u_0}{l_0^2} \cdot \bar{g}' \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}'^2}.$$

После преобразования имеем:

$$\bar{u}' \frac{\partial \bar{u}'}{\partial \bar{x}'} = \frac{Ga}{Re^2} \cdot \bar{X}' - Eu \cdot \frac{1}{\bar{\rho}'} \cdot \frac{\partial \bar{p}'}{\partial \bar{x}'} + \frac{1}{Re} \cdot \bar{g}' \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial \bar{x}'^2}.$$

Таким образом, имеем три критерии подобия: Галилея  $Ga = \frac{gl^3}{g^2}$ , Эйлера

$Eu = \frac{p}{\rho V^2}$  и Рейнольдса  $Re = \frac{Vl}{g}$ . Итак скорость потока является функцией пяти

параметров:

$$u = f(\rho, \vartheta, p, V, l)$$

Проверяем, достаточно ли количество критериев подобия, для чего записываем размерности всех величин, входящих в три полученных критерия:  $[\rho] = [\text{кг}/\text{м}^3]$ ;  $[\vartheta] = [\text{м}^2/\text{с}]$ ;  $[p] = [\text{Па}] = [\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2]$ ;  $[V] = [\text{м}/\text{с}]$ ;  $[l] = [\text{м}]$ .

Основных размерных величин  $m = 3$  ( $\text{кг}, \text{м}, \text{с}$ ); число критериев подобия должно быть:

$$n = k + 1 - m,$$

где  $k$  – число параметров, от которых зависит скорость потока  $u$ , в этом примере  $k = 5$ , это  $\rho, \vartheta, p, V, l$ , тогда  $n = 5 + 1 - 3 = 3$ . То есть решение верно и количество критериев подобия достаточно для расчёта модели.

Величины показателей тракта супензии (натуры) приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2 - Величины показателей тракта супензии (натуры)

Показатель	Обозначение	Единица измерения	Величина
Плотность супензии	$\rho_h$	$\text{кг}/\text{м}^3$	1800

<b>Кинематический коэффициент вязкости супензии</b>	$\vartheta_h$	$\text{м}^2/\text{s}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$
<b>Линейный размер (диаметр трубопровода)</b>	$l_h$	$\text{м}$	<b>0,15</b>
<b>Скорость течения супензии в трубопроводе</b>	$V_h$	$\text{м}/\text{s}$	<b>3,0</b>
<b>Давление в трубопроводе</b>	$p_h$	$\text{МПа}$	<b>0,2</b>

Расчёт модели выполняется на основе равенства критериев подобия натуры и модели. В качестве моделирующей жидкости выбираем керосин с плотностью  $\rho_m = 800 \text{ кг}/\text{м}^3$  и кинематической вязкостью  $\vartheta_m = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{s}$ . Результаты расчёта масштабных коэффициентов для построения модели приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3 - Результаты расчёта масштабных коэффициентов

Параметры, которые моделируются	Обозна-чение	Источник получения	Масштабный коэффициент	
			Формула	величина
<b>Физические свойства</b>	$\rho$	<b>Физические свойства натуры и модели</b>	$m_\rho = \frac{\rho_h}{\rho_m}$	<b>0,44</b>
	$\vartheta$		$m_\vartheta = \frac{\vartheta_h}{\vartheta_m}$	<b>0,69</b>
<b>Линейный размер (диаметр трубопровода)</b>	$l$	$Ga: \left( \frac{gl^3}{\vartheta^2} \right)_h = \left( \frac{gl^3}{\vartheta^2} \right)_m$	$m_l = m_\vartheta^{2/3}$	<b>0,78</b>
<b>Скорость течения супензии в трубопроводе</b>	$V$	$Re: \left( \frac{Vl}{\vartheta} \right)_h = \left( \frac{Vl}{\vartheta} \right)_m$	$m_V = m_\vartheta \cdot m_l^{-1}$	<b>0,88</b>
<b>Давление в трубопроводе</b>	$p$	$Eu: \left( \frac{p}{\rho V^2} \right)_h = \left( \frac{p}{\rho V^2} \right)_m$	$m_p = m_\rho \cdot m_V^2$	<b>0,62</b>

С учётом масштабных коэффициентов выполняется расчёт параметров модели (табл. 3.4), её построение и проведение на ней необходимого комплекса исследований.

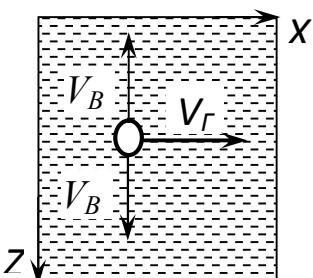
Таблица 3.4 - Величины показателей модели

Показатель	Обозначение	Единица измерения	Величина
<b>Плотность супензии</b>	$\rho_m$	$\text{кг}/\text{м}^3$	<b>800</b>

<b>Кинематический коэффициент вязкости супензии</b>	$\vartheta_M$	$\text{м}^2/\text{с}$	$0,8 \cdot 10^{-6}$
<b>Линейный размер (диаметр трубопровода)</b>	$l_M$	м	<b>0,12</b>
<b>Скорость течения супензии в трубопроводе</b>	$V_M$	м/с	<b>2,64</b>
<b>Давление в трубопроводе</b>	$p_M$	МПа	<b>0,12</b>

**Пример 3.2.** Рассчитать модель движения частицы различной плотности в супензии заданной плотности в тяжелосредном сепараторе.

В сепараторе на частицу действуют инерционные силы, под действием которых она движется в горизонтальном направлении, и гравитационные силы, под действием которых частица в зависимости от плотности движется в вертикальном направлении. Итак, частица перемещается в плоскости XZ (рис. 3.4) в горизонтальном направлении со скоростью  $V_T$  потока супензии и в вертикальном направлении со скоростью  $V_B$ , которая зависит от разницы в плотности частицы и взвеси.



**Рис. 3.4 - Распределение скоростей движения частицы в рабочей зоне сепаратора.**

Таким образом, поскольку на частицу действуют инерционные и гравитационные силы, подобность может быть сохранена при равенстве критериев Рейнольдса и Архимеда:

$$Re = \frac{V_0 l}{\vartheta} \text{ - число Рейнольдса отражает отношение сил инерции к вязкости.}$$

$$Ar = \frac{l^3}{\vartheta^2} g \frac{\Delta \rho}{\rho} \text{ - Число Архимеда отражает отношение сил гравитации к вязкости.}$$

И так скорость движения является функцией четырёх параметров:

$$u = f(\rho, \vartheta, V, l)$$

Проверяем, достаточное количество критериев подобия, для чего записываем размерности всех величин, входящих в три полученных критерия:  $[\rho] = [\text{кг}/\text{м}^3]$ ;  $[\vartheta] = [\text{м}^2/\text{с}]$ ;  $[V] = [\text{м}/\text{с}]$ ;  $[l] = [\text{м}]$ .

Основных размерных величин  $m = 3$  (кг, м, с); число критериев подобия должно быть:

$$n = k + 1 - m$$

где  $k$  – число параметров, от которых зависит скорость потока  $u$ , в этом примере  $k = 4$ , это  $\rho, g, V, l$ , тогда  $n = 4 + 1 - 3 = 2$ . То есть решение верно и количество критериев подобия достаточно для расчёта модели.

В моделирующем аппарате с длиной рабочей зоны  $l = 2$  м течёт моделирующая жидкость (вода с плотностью  $\rho_m = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и кинематической вязкостью  $\vartheta = 1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с) со скоростью  $V = 0,40$  м/с. На модели исследовалось разделение смеси сферических эбонитовых ( $\rho_e = 1150$  кг/м<sup>3</sup>) и дубовых ( $\rho_d = 900$  кг/м<sup>3</sup>) частиц диаметром  $d = 10$  мм. При движении в горизонтальном направлении эбонитовые (тяжёлые) частицы опускаются в жидкости со скоростью  $V_B = 0,20$  м/с, а дубовые (лёгкие) всплывают со скоростью  $V_L = 0,16$  м/с.

Необходимо рассчитать аналогичные параметры для натуры, то есть производственного аппарата с суспензией плотностью  $\rho_n = 1600$  кг/м<sup>3</sup> и кинематической вязкостью  $\vartheta = 2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

Расчёт натуры выполняется на основе равенства критериев подобия натуры и модели. Результаты расчёта масштабных коэффициентов для построения модели приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5 - Результаты расчёта масштабных коэффициентов

Параметры, которые моделируются	Обозна-чение	Источник получения	Масштабный коэффициент	
			Формула	величина
<b>Физические свойства</b>	$\rho$	<b>Физические свойства натуры и модели</b>	$m_\rho = \frac{\rho_m}{\rho_n}$	1,6
	$\vartheta$		$m_\vartheta = \frac{\vartheta}{\vartheta_n}$	2,0
<b>Линейный размер (длина рабочей зоны)</b>	$l$	$Ar : \left( \frac{gl\Delta\rho}{\vartheta^2 \rho} \right)_m = \left( \frac{gl\Delta\rho}{\vartheta^2 \rho} \right)_n$	$m_l = m_\vartheta^{2/3}$	1,6
<b>Скорость движения</b>	$V$	$Re : \left( \frac{Vl}{\vartheta} \right)_m = \left( \frac{Vl}{\vartheta} \right)_n$	$m_V = m_\vartheta \cdot m_l^{-1}$	3,1

С учётом масштабных коэффициентов выполняется расчёт параметров натуры (табл. 3.6).

Таблица 3.6 - Величины показателей натуры

Показатель	Обозначение	Ед. измер.	Величина

<b>Плотность суспензии</b>	$\rho_M$	<b>кг/м<sup>3</sup></b>	<b>1600</b>
<b>Кинематический коэффициент вязкости суспензии</b>	$\vartheta_M$	<b>м<sup>2</sup>/с</b>	<b><math>2 \cdot 10^{-6}</math></b>
<b>Линейный размер (длина рабочей зоны)</b>	$l_M$	<b>м</b>	<b>3,2</b>
<b>Скорость течения суспензии в сепараторе</b>	$V_M$	<b>м/с</b>	<b>1,24</b>
<b>Плотность лёгкой частицы</b>	$\rho_L$	<b>кг/м<sup>3</sup></b>	<b>1440</b>
<b>Скорость движения лёгкой частицы в вертикальном направлении (вверх)</b>	$V_L$	<b>м/с</b>	<b>0,50</b>
<b>Плотность тяжёлой частички</b>	$\rho_B$	<b>кг/м<sup>3</sup></b>	<b>1740</b>
<b>Скорость движения тяжёлой частицы в вертикальном направлении (вниз)</b>	$V_B$	<b>м/с</b>	<b>0,62</b>

### 3.2 Метод анализа размерностей

Многие процессы, которые встречаются в практике, бывают настолько сложными, что не могут быть непосредственно описаны дифференциальными уравнениями [3, 5, 8]. В таких случаях очень ценным приёмом для выявления соотношения между переменными величинами служит анализ размерностей. Этот метод не даёт полных сведений о соотношении между переменными, которое, в конечном счёте, должно быть выявлено экспериментально. Тем не менее, этот метод позволяет значительно сократить объём экспериментальных работ.

Таким образом, эффективное применение метода размерности возможно только при комбинировании его с экспериментом; при этом должны быть известны все факторы или переменные величины, которые оказывают влияние на исследуемый процесс.

Анализ размерности даёт логичное распределение величин по безразмерным группам. В общем виде функциональная зависимость  $N$  может быть представлена в виде формулы, которая называется формулой размерности:

$$\left. \begin{aligned} N &= f(w, L, \rho, \mu, g, p, \dots) \\ \text{или} \quad N &= f(n_1, n_2, n_3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

Сюда входит  $(k + 1)$  величин с включением и величины  $N$ . Они могут быть переменными, постоянными, размерными и безразмерными. Однако в данном случае необходимо, чтобы для числовых величин, входящих в уравнение, которое характеризует физическое явление, была бы принята одна и та же система основных единиц измерения. При соблюдении этого условия уравнение остаётся справедливым при произвольно выбранной системе единиц измерения. Далее, эти основные единицы должны быть независимыми по своим размерностям, а число их таким, чтобы была возможность представить через них размерности всех величин, входящих в функциональную зависимость (3.73).

Такими единицами измерения могут быть любые три величины, входящие в уравнение (3.73) и являющиеся независимыми друг от друга в отношении размерности. Если принять, например, за единицы измерения длину  $L$  и скорость  $V$ , тем самым имеем заданными единицу длины  $L$  и единицу времени  $T = L/V$ . Таким образом, для третьей единицы измерения нельзя принимать любую величину, размерность которой содержит только длину и время, такую как, например, ускорение, так как единица этой величины уже есть заданной в результате выбора единиц длины и скорости. Поэтому, дополнительно должна быть выбрана любая величина, в размерность которой входит масса, например, плотность, вязкость, сила и т.п.

На практике, например, при гидравлических исследованиях, оказывается целесообразным принять следующие три единицы измерения: скорость  $V_0$  любой частицы потока, любую длину (диаметр трубопровода  $D$  или его длину  $L$ ), плотность  $\rho$  выбранной частицы.

Размерность этих единиц измерения:

$$[V_0] = \text{м/с}; \quad [L] = \text{м}; \quad [\rho] = \text{кг/м}^3.$$

Таким образом, уравнение для размерностей в соответствии с функциональной зависимостью (3.73) может быть представлено в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} [N] = [V_0]^x \cdot [L_0]^y \cdot [\rho_0]^z \\ [n_i] = [V_0]^{x_i} \cdot [L_0]^{y_i} \cdot [\rho_0]^{z_i} \end{array} \right\} \quad (3.74)$$

или

Значения  $N_i$  и  $n_i$ , взятые в системе основных единиц (метр, секунда, килограмм), можно выразить безразмерными числами:

$$\pi = \frac{N}{V_0^x \cdot L_0^y \cdot \rho_0^z}; \quad \pi_i = \frac{n_i}{V_0^{x_i} \cdot L_0^{y_i} \cdot \rho_0^{z_i}}.$$

Поэтому, вместо уравнения (3.73) можно написать уравнение, в котором все величины выражены в относительных единицах (по отношению к  $V_0, L_0, \rho_0$ ):

$$\frac{N}{V_0^x \cdot L_0^y \cdot \rho_0^z} = f \left( \frac{n_1}{V_0^{x_1} \cdot L_0^{y_1} \cdot \rho_0^{z_1}}, \frac{n_2}{V_0^{x_2} \cdot L_0^{y_2} \cdot \rho_0^{z_2}}, \frac{n_3}{V_0^{x_3} \cdot L_0^{y_3} \cdot \rho_0^{z_3}} \right). \quad (3.75)$$

Поскольку  $n_1, n_2, n_3$  представляют собой, соответственно,  $V_0, L_0, \rho_0$ , то первые три члена уравнения превращаются в три единицы и функциональная зависимость принимает вид:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \dots, \pi_k). \quad (3.76)$$

В соответствии с  $\pi$ -теоремой любое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. При исследованиях эта теорема позволяет определить связь не между самими переменными, а между некоторыми безразмерными их соотношениями, составленными по определённым законам.

Таким образом, функциональная зависимость между  $k + 1$  размерными величинами  $N$  и  $n_i$  ( $w, L, \rho, \mu, g, \dots$ ) в общем случае выражается как соотношение между  $(k + 1 - 3)$  величинами  $\pi$  и  $\pi_i$  ( $i = 4, 5, \dots, k$ ), каждая из которых является безразмерной степенной комбинацией величин, входящих в функциональную зависимость. Безразмерные числа  $\pi$  носят характер критериев подобия, как это видно из следующего примера.

**Пример 3.3.** Определить функциональную зависимость для силы сопротивления  $F$  ( $H = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ ), которую испытывает пластина при обтекании жидкостью в направлении её длины.

Функциональную зависимость силы сопротивления можно представить в виде функции от ряда независимых переменных и определить её в условиях сходства:

$$F = f(V, S, \rho, \mu, g, p, \frac{a}{L}, \beta),$$

где  $V$  – скорость обтекания, м/с;  $S$  – площадь пластины,  $\text{м}^2$ ;  $\rho$  – плотность жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $\text{Па}\cdot\text{с}$  ( $[\text{Па}\cdot\text{с}] = \text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}$ );  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;  $p$  – давление,  $\text{Па}$  ( $\text{Па} = \text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}$ );  $\frac{a}{L}$  – отношение высоты пластины к ее длине;  $\beta$  – угол наклона пластины к направлению потока.

Таким образом, величины  $\frac{a}{L}$  и  $\beta$  – безразмерные, остальные шесть – размерные. Три из них:  $V$ ,  $S$  и  $\rho$  приняты за основные. В соответствии с  $\pi$ -теоремой здесь возможны только три безразмерных соотношения. Следовательно:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \frac{a}{L}, \beta)$$

или

$$\frac{F}{V^x S^y \rho^z} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{V^{x_1} S^{y_1} \rho^{z_1}}, \frac{g}{V^{x_2} S^{y_2} \rho^{z_2}}, \frac{p}{V^{x_3} S^{y_3} \rho^{z_3}}, \frac{a}{L}, \beta\right).$$

Учитывая равенство размерностей для числителя и знаменателя, найдём показатели степеней:

для силы сопротивления:

$$[F] = [V^x S^y \rho^z]$$

или

$$\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2 = (\text{м}/\text{с})^x (\text{м}^2)^y (\text{кг}/\text{м}^3)^z,$$

Откуда

$$1 = z \quad (\text{показатели слева и справа при кг});$$

- $2 = -x$  (показатели слева и справа при  $c$ );
- $1 = x + 2y - 3z$  (показатели слева и справа при  $m$ ).

Решение этих уравнений даёт:  $x = 2$ ;  $y = 1$ ;  $z = 1$ .

Функциональная зависимость:

$$\pi = \frac{F}{V^2 S \rho} .$$

Аналогично получим:

- для вязкости:

$$[\mu] = [V^{x_1} S^{y_1} \rho^{z_1}]$$

имеем  $x_1 = 1$ ;  $y_1 = 0,5$ ;  $z_1 = 1$ .

Функциональная зависимость:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{V \rho \sqrt{S}} ;$$

- для ускорения свободного падения:

$$[g] = [V^{x_2} S^{y_2} \rho^{z_2}]$$

имеем  $x_2 = 2$ ;  $y_2 = -0,5$ ;  $z_2 = 0$ .

Функциональная зависимость:

$$\pi_5 = \frac{g \sqrt{S}}{V^2} ;$$

- для давления:

$$[p] = [V^{x_3} S^{y_3} \rho^{z_3}]$$

имеем  $x_3 = 2$ ;  $y_3 = 0$ ;  $z_3 = 1$ .

Функциональная зависимость:

$$\pi_6 = \frac{p}{V^2 \rho} .$$

Очевидно, что  $\pi_4 = Re$ ,  $\pi_5 = Fr$ ,  $\pi_6 = Eu$ . Тогда искомая функциональная зависимость имеет вид:

$$\frac{F}{V^2 S \rho} = f(Re, Fr, Eu, \frac{a}{L}, \beta).$$

Отсюда можно сделать вывод, что после исследования данного процесса при некоторых размерах, скоростях и т.п., можно установить как он будет протекать при других размерах и скоростях в том случае, если безразмерные отношения, составленные из этих переменных, для обоих случаев будут одинаковые. Итак, выводы, полученные при экспериментах с телами данных размеров, движущихся с данной скоростью и т.д., будут, очевидно, справедливы и для любых других размеров тела, скорости и т.д. при условии равенства безразмерных отношений  $\pi$  с теми, что наблюдались при экспериментах.

**Пример 3.4.** На основе предыдущих исследований на лабораторном устройстве определить функциональную зависимость мощности  $N$  ( $Bm = kg \cdot m^2 / c^3$ ) электродвигателя мешалки, которая необходима для перемешивания пульпы с реагентами в контактном чане.

Для подобия двух смесительных систем требуется:

- геометрическое подобие, при котором отношение величин для рассматриваемых систем должны быть равны между собой;
- кинематическое подобие, когда скорости в соответствующих точках должны быть в таком же отношении, как и скорости в других соответствующих точках, то есть пути движения пульпы должны быть подобными;
- динамическое подобие, которое требует, чтобы отношение сил в соответствующих точках было бы равным отношению сил в других соответствующих точках.

Если граничные условия фиксированные, можно одну переменную величину выразить через другие переменные, то есть функциональную зависимость мощности электродвигателя мешалки можно представить в виде функции от ряда независимых переменных величин и определить её по критериям подобия:

$$N = f(D, \rho, \omega, \mu, g),$$

где  $D$  – диаметр мешалки, м;  $\rho$  – плотность пульпы,  $kg/m^3$ ;  $\omega$  – скорость вращения мешалки,  $s^{-1}$ ;  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $Pa \cdot s$  ( $Pa \cdot s = kg \cdot m \cdot s$ );  $g$  – ускорение свободного падения,  $m/s^2$  – угол наклона пластины к направлению потока.

Таким образом, имеем пять размерных величин, три из них:  $D$ ,  $\rho$  и  $\omega$  приняты за основные. В соответствии с  $\pi$ -теоремой здесь возможны только два безразмерных соотношения. Следовательно:

$$\pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5)$$

или

$$\frac{N}{D^x \rho^y \omega^z} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{D^{x_1} \rho^{y_1} \omega^{z_1}}, \frac{g}{D^{x_2} \rho^{y_2} \omega^{z_2}}\right).$$

Учитывая равенство размерностей для числителя и знаменателя, найдём показатели степеней:

для мощности электродвигателя мешалки:

$$[N] = [D^x \rho^y \omega^z]$$

или

$$kg \cdot m^2 / c^3 = (m)^x (kg / m^3)^y (1/c)^z,$$

откуда

- 3 = z (показатели слева и справа при с);
- 1 = в (показатели слева и справа при кг);
- 2 = x - 3y (показатели слева и справа при м).

Решение этих уравнений даёт: x = 5; y = 1; z = 3.

Функциональная зависимость:

$$\pi = \frac{N}{D^5 \rho \omega^3} .$$

Аналогично получим:

- для вязкости:

$$[\mu] = [D^{x_1} \rho^{y_1} \omega^{z_1}]$$

имеем  $x_1 = 2$ ;  $y_1 = 1$ ;  $z_1 = 1$ .

Функциональная зависимость:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{D^2 \rho \omega} ;$$

- для ускорения свободного падения:

$$[g] = [D^{x_2} \rho^{y_2} \omega^{z_2}]$$

имеем  $x_2 = 1$ ;  $y_2 = 0$ ;  $z_2 = 1$ .

Функциональная зависимость:

$$\pi_5 = \frac{g}{D \omega^2} ;$$

Очевидно, что  $\pi_4 = D^2 \cdot \text{Re}$ ,  $\pi_5 = Fr$ . Тогда искомая функциональная зависимость имеет вид:

$$\frac{N}{D^5 \rho \omega} = f(D^2 \text{Re}, Fr).$$

Отсюда можно сделать вывод, что после нахождения функциональной зависимости мощности электродвигателя мешалки при некоторых её параметрах, можно установить какой она будет и при других размерах и скоростях и т.п. в том случае, если безразмерные отношения для обоих случаев будут одинаковы. Итак, выводы, полученные на экспериментальном устройстве, будут справедливы и для любых других при условии равенства безразмерных отношений с теми, что наблюдались при экспериментах.

**Пример 3.5.** Исследуется процесс обогащения в тяжелосредном сепараторе. На параметрической схеме процесса тяжелосредной сепарации (рис. 3.5) указаны входящие, исходящие и контролируемые параметры, а также возможные препятствия:

- входные и контролируемые параметры:  $Q_{ex}$  - производительность сепаратора по исходному материалу;  $Q_{cusp}$  - расход суспензии;  $V$  - объём ковша;  $\Delta\rho$  - разница в плотностях суспензии и разделяемой фракции;  $\omega$  - скорость вращения элеваторного колеса;  $n$  - число ковшей элеваторного колеса;

- выходные и контролируемые параметры:  $Q_{k-t}$  - производительность сепаратора по концентрату;  $Q_{otx}$  - производительность сепаратора по отходам;

- препятствия (неучтённые параметры, оказывающие влияние на процесс): влажность, гранулометрический и фракционный состав.

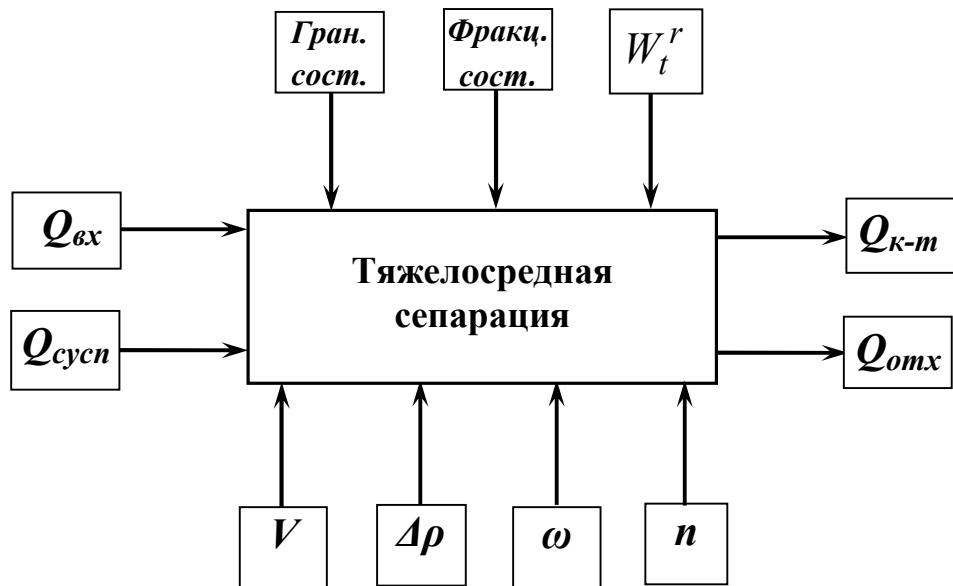


Рис. 3.5 – Параметрическая модель тяжелосредней сепарации.

Проверяем, достаточно ли для расчёта модели количество параметров, для чего записываем размерности всех величин  $[Q_{ex}] = \text{кг}/\text{с}$ ;  $[Q_{susp}] = \text{м}^3/\text{с}$ ;  $[\Delta \rho] = \text{кг}/\text{м}^3$ ;  $[V] = \text{м}^3$ ;  $[\omega] = \text{с}^{-1}$ ;  $[Q_{omx}] = \text{кг}/\text{с}$ ;  $[n] = 8$ .

Основных размерных величин  $m = 3$  (кг, м, с), поэтому в расчётах может быть использовано:

$$n = m + 1 = 4 \text{ параметра, то есть } Q_{отх}, V, \Delta \rho, \omega.$$

Поскольку учтены не все параметры, в функциональную зависимость между выбранными параметрами добавляется коэффициент  $k$ :

$$Q_{отх} = k(V, \omega, \Delta \rho, n)$$

или с использованием основных единиц измерения  $M, L, T$ :

$$\frac{M}{T} = k \left( (L^3)^x \left( \frac{1}{T} \right)^y \left( \frac{M}{L^3} \right)^z \right)$$

откуда:

- $0 = 3x - 3z$  (показатели слева и справа при  $L$ );
- $-1 = -y - 3z$  (показатели слева и справа при  $T$ );
- $1 = z$  (показатели слева и справа при  $M$ ).

Таким образом,  $x = 1$ ;  $y = -2$ ;  $z = 1$ , то есть функциональная зависимость производительности сепаратора по отходам от объёма ковша, скорости вращения элеваторного колеса и разницы в плотности супензии и разделяемой фракции имеет вид:

$$Q_{отх} = k \frac{V \cdot \Delta \rho \cdot n}{\omega^2}.$$

Величина коэффициента  $k$  определяется на основе предыдущих исследований при фиксированных параметрах:  $V = 0,25 \text{ м}^3$ ;  $\Delta \rho = 100 \text{ кг/м}^3$ ;  $\omega = 0,035 \text{ с}^{-1}$ ;  $n = 8$ , в результате которых установлено, что  $Q_{\text{отх}} = 42 \text{ кг/с}$ :

$$k = \frac{Q_{\text{отх}}}{V \cdot \Delta \rho \cdot \omega^{-2} \cdot n} = \frac{42}{0,25 \cdot 100 \cdot 0,035^{-2} \cdot 8} = 1,9 \cdot 10^{-4}.$$

Формула  $Q_{\text{отх}} = 1,9 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{V \cdot \Delta \rho \cdot n}{\omega^2}$  является математической моделью исследуемого процесса.

Следует иметь в виду, что чем меньше значение коэффициента  $k$ , тем больше значение рассматриваемых параметров.

**Пример 3.6.** Исследуется процесс транспортировки концентрата крупностью 0,5 - 13 мм обезвоживающим элеватором багер-зумпфа:

- входные и контролируемые параметры:  $\omega$  - вместимость ковша элеватора по твёрдому;  $\rho$  - плотность питания;  $V$  - скорость движения цепи элеватора;
- выходной и контролируемый параметр:  $Q$  - производительность обезвоживающего элеватора багер-зумпфа по классу 0,5 - 13 мм;
- постоянные параметры: коэффициент заполнения ковшей  $\varphi = 0,5$ ; влажность, гранулометрический и фракционный состав.

В рассматриваемом примере:

Проверяем, достаточно ли для расчёта модели количество параметров, для чего записываем размерности всех величин:  $[\omega] = \text{м}^3$ ;  $[\rho] = \text{кг/м}^3$ ;  $[V] = \text{м/с}$ .

Основных размерных величин  $m = 3$  (кг, м, с), поэтому в расчётах может быть использовано:

$$n = m + 1 = 4 \text{ параметра, то есть } Q, V, \rho, \omega.$$

Поскольку учтены не все параметры, в функциональную зависимость между выбранными параметрами добавляется коэффициент  $k$ :

$$Q = k(V, \omega, \rho),$$

или с использованием основных единиц измерения  $M, L, T$ :

$$\frac{M}{T} = k \left( (L^3)^x \left( \frac{L}{T} \right)^y \left( \frac{M}{L^3} \right)^z \right)$$

откуда

$$\begin{aligned} 0 &= 3x + y - 3z \text{ (показатели слева и справа при } L); \\ -1 &= -y \text{ (показатели слева и справа при } T); \\ 1 &= z \text{ (показатели слева и справа при } M). \end{aligned}$$

Таким образом,  $x = 2/3$ ;  $y = 1$ ;  $z = 1$ , то есть функциональная зависимость производительности обезвоживающего элеватора багер-зумпфа по классу 0,5-13 мм от объёма ковша, скорости движения цепи элеватора и плотности питания имеет вид:

$$Q = kV\omega \sqrt[3]{\delta^2}.$$

Величина коэффициента  $k$  определяется на основе предыдущих исследований при фиксированных параметрах:  $V = 0,25 \text{ м/с}$ ;  $\rho = 1400 \text{ кг/м}^3$ ;  $\omega = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  в результате которых установлено, что  $Q = 1,5 \text{ кг/с}$ , кроме того, следует учесть коэффициент заполнения ковшей  $\varphi = 0,5$  и тогда:

$$k = \frac{Q}{\varphi \cdot V \cdot \omega \cdot \rho^{2/3}} = \frac{1,5}{0,5 \cdot 0,25 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1400^{2/3}} = 8,32.$$

Формула  $Q = 8,32 \cdot V\omega \sqrt[3]{\delta^2}$  является математической моделью процесса транспортировки концентрата крупностью 0,5-13 мм исследуемым обезвоживающим элеватором багер-зумпфа.

Следует иметь в виду, что чем меньше значение коэффициента  $k$ , тем больше значение рассматриваемых параметров.

### 3.3 Моделирование на основе метода аналогий

#### 3.3.1 Методы аналогий

Если два или несколько явлений, различных по своей физической природе, могут быть описаны одним и тем же дифференциальным уравнением с сохранением граничных условий, то эти явления называют аналогичными. Метод аналогий расширяет возможности изучения явлений и уже давно получил широкое распространение [3, 6-9].

В настоящее время во многих отраслях технической механики вообще и в механике жидкостей и газов отдельно успешно используются электрические, газогидравлические, акустические, магнитные, тепловые и другие аналогии. В гидродинамике применяют такие аналогии: электрогидродинамическая (ЭГДА), газогидравлическая (ГАГА), гидромагнитная (МАГА), мембранные, ламинарные, тепловая и диффузная.

Первые пять аналогий относятся к аналогиям безвихревого движения идеальной несжимаемой жидкости, потенциал скорости и функция течения которого удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

Границные условия для тела обтекаемого потенциальным потоком идеальной жидкости будут:

- на поверхности тела в результате непроницаемости твёрдой стенки нормальная составляющая скорости равна нулю, то есть:

$$V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0; \quad (3.78)$$

- на бесконечности при плоскопараллельном потоке, направленном вдоль оси  $x$ :

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_1 \quad \text{и} \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (3.79)$$

*Электрогидродинамическая аналогия* (ЭГДА) базируется на том, что электрический потенциал  $\varphi_e$  и функция течения  $\psi_e$  удовлетворяют уравнению Лапласа (3.77).

Предельные условия в электрическом поле зависят от того, является ли тело проводником или диэлектриком. Если тело, которое находится в электрическом поле, диэлектрик, то граничные условия будут:

- на поверхности тела:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial s} = 0; \quad (3.80)$$

- на бесконечности:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = q_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_e}{\partial x} = 0, \quad (3.81)$$

где  $q_1$  – напряжённость электрического поля на бесконечности.

Если модель изготовлена из электропроводящего материала, то граничные условия будут:

- на поверхности тела:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial s} = 0; \quad (3.82)$$

-на бесконечности:

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_e}{\partial x} = q_1. \quad (3.83)$$

Сравнивая приведенные граничные условия, можно легко видеть, что для осуществления аналогии должны соблюдаться такие соответствия:

- если в электрическом поле поместить тело из непроводящего материала, то гидродинамическим величинам - потенциальну скорости, функции течения и скорости на бесконечности - соответствуют электрический потенциал, функция течения и напряжённость электрического поля на бесконечности. Будем называть эту аналогию аналогией  $A$ . Очевидно, что при аналогии  $A$  линии течения электрического и гидродинамического полей совпадают, а векторы электрического тока имеют то же направление, что и векторы скорости;

- если тело проводник, то потенциальну скоростей в гидродинамическом поле будет соответствовать функция течения в электрическом поле, а функция течения соответствует электрическому потенциальну. Соответствие скорости и напряжённости электрического поля на бесконечности остаётся прежним. Будем

называть эту аналогию аналогией *Б*. При соблюдении её векторы электрического тока и скорости во всём поле ортогональны.

Однородное электрическое поле, в котором изучается обтекание профиля, может быть создано в жидким электролите, налитом в ванну, с помощью электропроводящей бумаги, фольги, тонкого слоя электропроводящей краски и др. В практике чаще всего используются ванны, заполненные чистой водопроводной водой, растворами медного купороса, серной и соляной кислоты. Концентрация растворов должна быть очень малой (0,002 - 0,005%), так как в противном случае происходят электрохимические процессы, и состав электролита меняется.

На рис. 3.6 приведены схемы электролитических ванн для моделей, изготовленных из проводящих (рис. 3.6 а) и непроводящих (рис. 3.6 б) материалов.

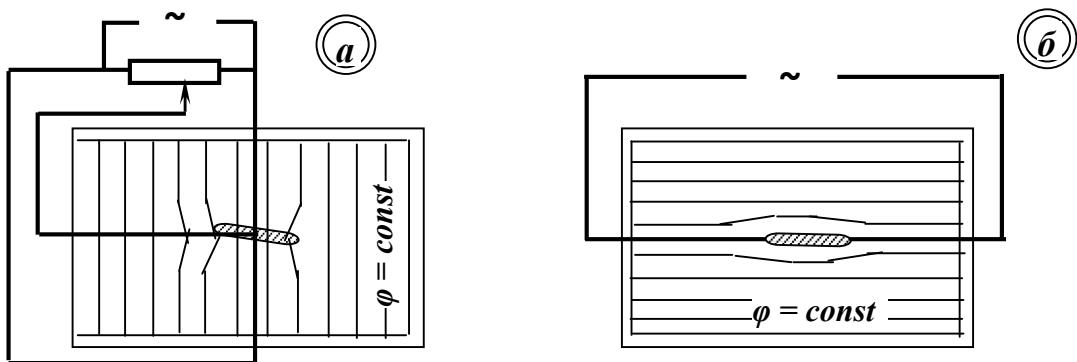


Рис. 3.6 - Схемы электролитических ванн для моделей из проводящих (а) и непроводящих (б) материалов.

При изучении потоков в патрубках, коленах, диффузорах и других элементах машин форма ванны определяется формой исследуемого элемента.

*Гидромагнитная аналогия* (МАГА) основана на том, что скалярный потенциал магнитного поля  $\varphi_m$  удовлетворяет при постоянном значении магнитной проницаемости уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0. \quad (3.84)$$

Поскольку компоненты напряжённости магнитного поля равны:

$$H_x = -\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2}; \quad H_y = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2}, \quad (3.85)$$

то, соответственно, при выполнении одинаковых граничных условий магнитному потенциалу будет соответствовать гидродинамический потенциал, а проекциям скорости в потоке будут соответствовать проекции вектора напряжённости магнитного поля.

Эта аналогия из-за сложности измерений магнитного поля пока не получила широкого распространения.

*Мембранный аналогия* основана на том, что прогиб ненагруженной мембранны  $z$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (3.86)$$

то есть прогиб соответствует гидродинамической функции  $\psi$ . Тогда скорость плоского потока несжимаемой жидкости можно определить через прогиб в виде:

$$v_x = -\frac{\partial z}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (3.87)$$

и

$$V = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \quad (3.88)$$

Уравнение нагруженной мембранны является уравнением Пуассона и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p}{\tau}, \quad (3.89)$$

где  $p$  – остаточное давление на мембранны;  $\tau$  – натяжение мембранны.

Последнее уравнение имеет в гидродинамике своим аналогом уравнение функции течения плоского вихревого потока идеальной несжимаемой жидкости во вращающейся системе координат:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\varpi, \quad (3.90)$$

где  $\varpi$  – угловая скорость вращения системы координат.

При использовании мембранный аналогии чаще всего применяют мыльные, белковые и резиновые плёнки. Аппаратура и методика мембранный аналогии хорошо разработаны.

*Ламинарная аналогия* основана на том, что для ламинарного движения вязкой жидкости между двумя близко расположеными пластинками существует потенциал средних скоростей. Соответственно, если между пластинами поместить любое тело, то спектр обтекания его будет отвечать обтеканию этого тела идеальной жидкостью.

Ламинарная аналогия, по сравнению с рассмотренными, имеет то преимущество, что она даёт визуализацию линий течения, в том числе и для неустойчивых процессов. Её недостаток - меньшая точность измерений и некоторое отклонение за счёт прилипания жидкости к обтекаемым телам.

### 3.3.2 Моделирование плоских потоков на основе электрогидродинамической аналогии (ЭГДА)

Математическим аналогом поля скорости в потоке идеальной жидкости может служить как стационарное электрическое поле в обтекаемой током однородной проводящей среде (аналогия  $v, E$ ), так и органически связанное с ним поле плотности тока (аналогия  $v, j$ ). Поскольку обычно на электрических моделях непосредственно измеряют величины  $E$  и  $\varphi$  (а не величины  $j$  и  $\varphi_j$ ), то следует воспользоваться аналогией  $v, E$ , однако аналогия  $v, j$  является более полной. Действительно, на поверхности токоведущего проводника касательная составляющая вектора  $E$  остаётся непрерывной и здесь распределены только источники электрического поля, в то время как на границе подвижной жидкости непрерывная распределены вихри вектора. Таким образом, реальным поверхностным вихрям вектора  $v$  на грани потока соответствуют лишь фиктивные вихри вектора  $E$  второго рода на поверхности обтекаемого током проводника. Между тем, поле плотности тока полностью локализовано в середине проводника, на поверхности которого существуют реальные вихри вектора  $j$ , аналогичные вихрям вектора  $v$ . Величины, которые сопоставляются в аналогии  $v, j$ , приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7 - Величины, которые сопоставляются в аналогии  $v, j$ .

Поле скоростей в идеальной жидкости	Поле плотности потока в однородной проводящей среде
<b>1. Скорость течения жидкости <math>v</math></b>	<b>Плотность потока <math>j</math> или линейная плотность потока <math>i</math></b> $j = \frac{1}{\rho} E; \quad i = \frac{1}{R} E,$ где $\rho$ – исходное сопротивление среды; $R$ – исходное поверхностное сопротивление проводящей поверхности.
<b>2. Потенциал скорости <math>V</math></b>	<b>Потенциал вектора <math>j</math> или потенциал вектора <math>i</math></b> $\varphi_j = \frac{1}{\rho} \varphi; \quad \varphi_i = \frac{1}{R} \varphi.$
<b>3. Соотношение между плотностью и её потенциалом</b> $v = -gradV$	<b>Соотношение между плотностью потока и её потенциалом</b> $j = -grad\varphi_j; \quad i = -grad\varphi_i.$
<b>4. <math>\Delta V = 0</math></b>	$\Delta\varphi_j = 0; \quad \Delta\varphi_i = 0.$

При построении модели (рис. 3.7) используют алюминиевую фольгу или проводящую бумагу в виде прямоугольного листа с рамкой из медной проволоки диаметром:

$$d \approx 1,1 \sqrt{\rho a / R}, \quad (3.91)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление проволоки;  $R$  – удельное поверхностное сопротивление проводящего листа;  $a$  – диаметр рабочей зоны в средней части листа.

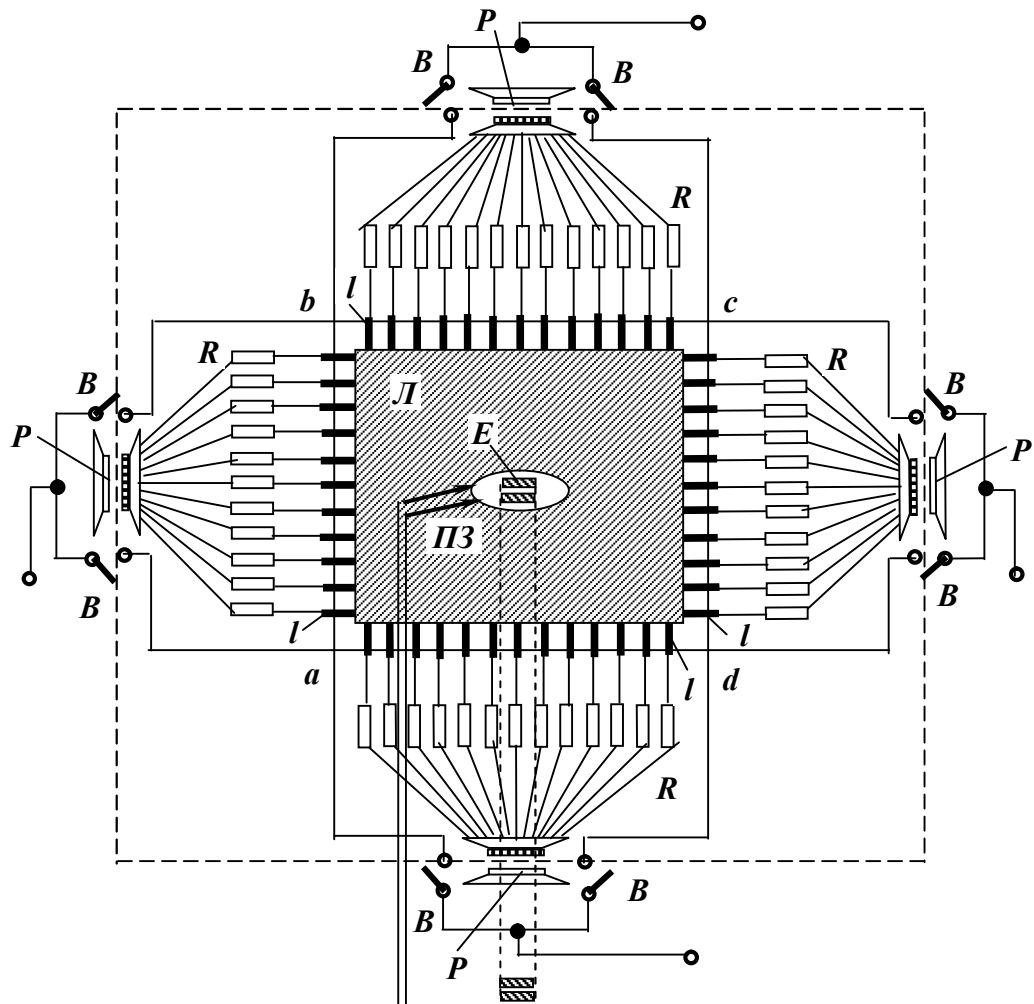


Рис. 3.7 - Принципиальная схема устройства для наложения внешнего однородного электрического поля и вихревого электрического поля торOIDальных электромагнитов с применением листа фольги (Л) размером 200x50 см и толщиной 12 мкм;  $abcd$  – рамка, спаянная из медной проволоки диаметром 2,25 мм;  $l$  – латунные электроды, установленные с шагом 2 см;  $R$  – сопротивление каналов;  $B$  – выключатели;  $P$  – переключатели режима работы;  $ПЗ$  – двойной зонд;  $E$  – торOIDальный электромагнит.

Рамка крепко прижимается к листу болтами, при этом её присутствие не будет мешать созданию в листе продольного или поперечного внешнего однородного поля. Для этого лишь необходимо включить соответствующие стороны рамки в цепь параллельно проводящему листу и добиться в них такого же распределения потенциала, которое устанавливается в листе без рамки. При этом питание листа осуществляется с помощью равномерно распределённых электродов, включённых через достаточно большое сопротивление.

В продольном режиме работы отношение длины подводящих проводов к длине сторон рамки  $bc$  и  $da$  должно равняться отношению суммарного

сопротивления питающих каналов к сопротивлению проводящего листа. Соответственно, в поперечном режиме отношение длины подводящих проводов к длине сторон рамки  $ab$  и  $cd$  должно равняться отношению суммарного сопротивления «поперечных» каналов к сопротивлению модели при этом способе включения её в цепь.

Рассмотрим область двухмерного электрического поля, ограниченную внешним контуром  $abcda$  и внутренним контуром  $L$  (рис. 3.8), при которых выполняются граничные условия:

$$\varphi_{ab} = \varphi_1; \quad \varphi_{cd} = \varphi_2; \quad (3.92)$$

$$\psi_{da} = \psi_2; \quad \psi_{cd} = \psi_2; \quad (3.93)$$

$$E_n|_L = 0; \quad (3.94)$$

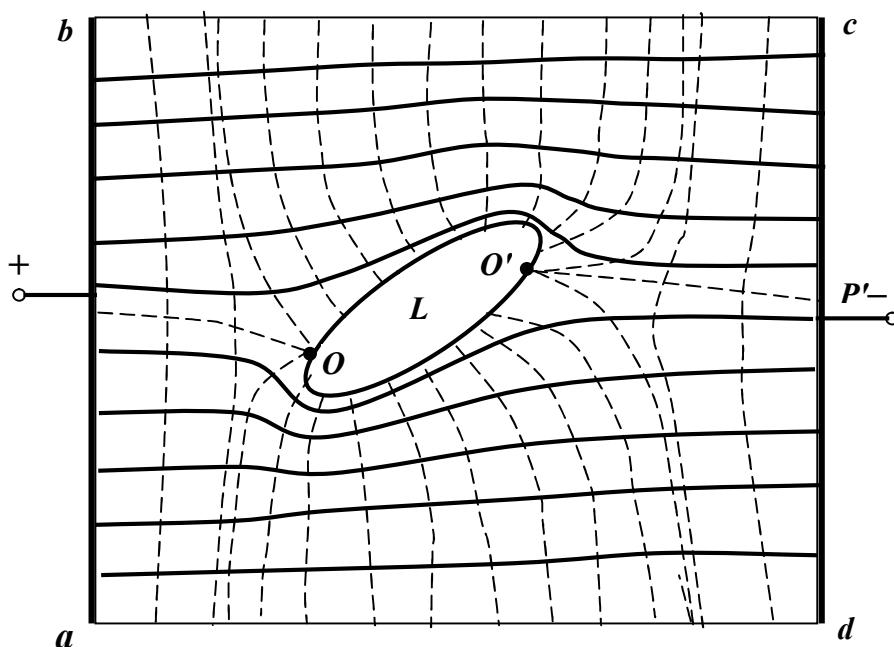
$$\oint_L E_l dl = 0, \quad (3.95)$$

при этом в середине области имеют место равенства:

$$\operatorname{div} E = 0; \quad (3.96)$$

$$\operatorname{rot}_n E = 0, \quad (3.97)$$

где  $n$  - нормаль к плоскости вектора  $E$ .



**Рис. 3.8 - Прямая модель, на внешнем контуре которой ( $abcda$ ) выполняются граничные условия (3.92) и (3.93), на внутреннем ( $L$ ) - условия (3.94) и (3.95).**

Для того чтобы воссоздать это поле на прямой модели, нужно на листе проводящей бумаги заклеить область, ограниченную профилем  $L$ . Подготовленное к работе устройство подключается к вторичной обмотки понижающего трансформатора. Линейная плотность тока должна быть порядка 1 А/см. Накрыв фольгу бумагой на ней проводят с постоянным интервалом

силовые линии карандашом. После построения на прямой модели изопотенциальной линии с потенциалом  $\varphi_L$ , находят особые точки поля  $O$  и  $O'$ , которые разделяют контур на две части; в одну из них ток входит, из другой выходит. Измеряют распределения потенциала вдоль контура  $L$  с учётом соотношения:

$$\psi^* = -\varphi; \quad \varphi^* = \psi. \quad (3.98)$$

На участке  $olo'$  происходит падение функции  $\psi$ , а на участке  $o'lo$  - её увеличение по отношению к предыдущему значению. При этом в точках  $O$  и  $O'$  функция  $\psi$  принимает, соответственно, максимальное и минимальное значения, которые позволяют найти отношение силы тока, проходящего через контур  $L$  на прямой модели  $I_{OO'}$  к общему току в ней  $I$ :

$$\frac{I_{oo'}}{I} = \frac{\varphi_o^* - \varphi_{o'}^*}{\varphi_o^* - \varphi_b^*} = \frac{\varphi_o^* - \varphi_{o'}^*}{U^*}. \quad (3.99)$$

Таким образом, описанное устройство позволяет имитировать поле скорости и обтекания тела любого профиля в неограниченной жидкой среде (например, частицы в рабочем канале обогатительной машины).

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Охарактеризуйте условия применения теории подобия для моделирования процессов и аппаратов.
2. Назовите три теоремы, которые лежат в основе теории подобия.
3. Раскройте суть метода оценки гидродинамического подобия объектов.
4. Опишите условия теплового подобия объектов.
5. Перечислите числа подобия процессов переноса количества движения, тепла и вещества в жидкостях и газах.
6. Рассчитайте модель движения частиц различной плотности в суспензии тяжелосреднего сепаратора.
7. В чём заключается суть метода анализа размерностей?
8. Дайте характеристику аналогиям, которые применяются при исследовании объектов.

## **4 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО СОСТАВА ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ**

Выбор наиболее рациональной схемы обогащения полезных ископаемых сложного вещественного состава возможно только на основе детального исследования их состава и взаимосвязи главных минеральных компонентов.

### **4.1 Предварительные исследования полезных ископаемых**

Для определения параметров исходного сырья как объекта обогащения проводится ряд работ, в состав которых, при необходимости, входят следующие виды исследований: минералогический, гранулометрический и фракционный анализы, определение физических и технологических характеристик минералов и руд [4, 9-12].

*Минералогический анализ* должен выполнять инженер-обогатитель и только в исключительных случаях - специалист-минералог. В процессе исследований на этом этапе диагностируют минералы, составляющие полезное ископаемое, определяют их количество, форму и размер зёрен, характер роста минералов (макро- и микроструктура). Для идентификации минералов применяют ряд инструментальных методов, основными из которых являются:

- микроскопический анализ, который применяется для определениярудных компонентов и их взаимного прорастания;
- люминесцентный анализ, который применяется для качественной и количественной оценки люминесцирующих минералов в исходной руде (напр., апатита, гипса, доломита, кварца и других минералов, а также некоторых реагентных покрытий);
- химический метод диагностики, который применяется только в случаях малого различия минералов в окраске при анализе их в отражённом свете (плёночный, капельный, фазовый анализы);
- специальные виды анализов, которые применяются для минералов со специфическими свойствами (радиографический, фотометрический, рентгеноструктурный, термический фазовый анализы).

*Анализ гранулометрического состава полезного ископаемого* выполняется преимущественно двумя методами:

- методом рассева исходного материала на стандартном наборе сит (ситовый анализ);
- методом седиментации частиц исследуемого материала из разбавленных суспензий.

Последний из этих методов в современной практике обогащения применяется редко, так как он может быть использован для анализа материалов с максимальным размером частиц не более 40 мкм.

На основании результатов ситового анализа строят суммарные характеристики крупности, определяют выходы материала каждого класса

крупности, а при необходимости и содержание соответствующих минералов в каждом классе крупности.

*Фракционный анализ исходного материала* выполняется с целью получения количественной оценки распределения свободных минеральных зёрен и сростков по фракциям различной плотности и крупности, а для магнитных минералов также и по фракциям различной магнитной восприимчивости.

Такое распределение характеризует возможность разделения исходного материала на концентрат и отходы, качество и количество которых определяются взаимным засорением и количеством сростков с различным соотношением в них разделяемых минералов. Поскольку технически и экономически целесообразно выделять, если это возможно, пустую породу из исходного материала на стадиях обогащения, которые не предусматривают мелкого дробления и измельчения, то фракционный анализ полезных ископаемых (в зависимости от результатов минералогического и ситового анализов) необходимо проводить на первых стадий исследования на обогатимость. Предварительное исследование выполняется обычно на крупных классах методом ручной рудоразборки. Этот метод может быть использован только для классов, которые обогащаются гравитационными процессами, то есть в пределах крупности от 100 до 3 мм. При ручной рудоразборке частицы сортируют на три группы: пустую породу, концентратную фракцию и сростки. После сортировки исследуемого материала каждую группу частиц взвешивают, измельчают и подвергают химическому анализу.

Приведенный способ даёт качественное представление об исходном материале, но полученных данных недостаточно для принятия инженерных решений для проектирования технологической схемы обогащения полезных ископаемых. Для получения более полной информации применяют методы разделения материала на фракции в зависимости от плотности среды (гравитационный метод обогащения), напряжённости магнитного поля (магнитный метод обогащения), времени нахождения в разделительном аппарате (флотационный метод обогащения). Полученные в результате разделения фракции, подвергают химическому анализу и на основании этих данных строят кривые обогатимости, которые устанавливают однозначное соответствие между значением параметра разделения и содержанием полезного компонента в концентрате, отходах, промежуточном продукте и элементарных фракциях исследуемого продукта. Для проведения фракционных анализов используют различное оборудование, например, установки с применением тяжёлых жидкостей (раствор хлористого цинка, тетрабромэтан и др.), электромагнитные сепараторы, электрические сепараторы, флотационные машины и др.

Данные фракционных анализов служат исходным материалом при определении теоретических балансов продуктов обогащения, а следовательно, и основным исходным материалом при выборе схемы обогащения полезных ископаемых.

*Исследование физических и технологических характеристик минералов и руд* выполняется с целью определения их параметров, которые оказывают

существенное влияние на процесс разделения (обогащения). К ним в первую очередь необходимо отнести:

*истинную и насыпную плотность*, которые оказывают решающее влияние на все вопросы обогатительной технологии;

*относительную прочность и угол трения*, которые оказывают решающее влияние на процессы дробления и измельчения;

*краевой угол смачивания и сорбционную способность*, которые оказывают определяющее влияние на процессы флотации, фильтрования и флокуляции шламов и т.д.

Исследования по определению физических и технологических характеристик обогащаемого полезного ископаемого выполняются в минимальных, но достаточных объемах, то есть в объемах, обеспечивающих получение достаточной информации об обогатимости сырья.

Прогнозирование показателей исследуемого полезного ископаемого и предварительный выбор технологической схемы обогащения выполняется по результатам анализа данных, которые определены на этапе предварительных исследований. Полученная схема обогащения является объектом для анализа на следующей стадии исследования на обогатимость.

## **4.2 Минералогический состав полезных ископаемых**

Минералогический состав позволяет получить информацию о полезном ископаемом как об объекте обогащения. Он даёт информацию о составе минералов в полезном ископаемом и их количестве; физических и химических свойствах минералов; форме и размере минеральных зёрен; степени и характере срастания минералов друг с другом; размере и характере вкрапления полезных минералов.

Для идентификации минералов применяют ряд методов, позволяющих определить их физические и химические свойства, такие как: отражательная способность, цвет в отражённом свете, явления поляризации, твёрдость, электропроводность, магнитные свойства, растворимость некоторых минералов химическими реактивами.

**Оптический метод** является основным при определении минерального состава полезного ископаемого и продуктов обогащения. Прозрачные шлифы исследуют в проходящем свете, а полированные - в отражённом. Оптический метод очень трудоёмкий и, к сожалению, даёт достаточно большую погрешность. Для увереной диагностики минералов оптический метод дополняют другими - химическим, спектральным, рентгенометрическим, термическим, рентгеноспектральным (электронно-зондовым), электронной микроскопией и др.

**Химический анализ** применяется для количественного определения содержания минералов и предусматривает избирательное растворение исследуемых минералов. Он основан на различии в степени или скорости растворения минералов в определённых растворителях. Химический анализ

имеет значительные преимущества перед оптическим: позволяет обрабатывать большие количества анализируемого материала (до 20 г) при малом содержании определяемого минерала, что способствует высокой точности измерений. Однако, продолжительность химического анализа для большинства руд составляет от одного до трёх дней. Большинство методик химического фазового анализа даёт количественную оценку только одного элемента.

**Люминесцентный анализ** применяется для определения качественного и количественного состава полезных ископаемых. Использование люминесценции в минералогическом анализе основано на способности многих минералов светиться под действием ультрафиолетовых лучей или потока электронов (катодная люминесценция). Люминесценция кристаллов характеризуется положением в спектре полос излучения и полос возбуждения. Идентификация спектров проводится по положению узких полос путём сопоставления их со справочными данными по спектрам люминесценции.

**Спектральный анализ** применяется для определения химического состава веществ. Спектральный анализ основан на использовании спектров электромагнитного излучения, поглощения, отражения или люминесценции. Количественный анализ основан на измерении интенсивности излучения (длине волн поглощения, отражения и т.д.), принадлежащего анализируемым атомам и молекулам, и последующим расчётом концентраций по их значениям. Спектральный анализ применяется на всех стадиях геологоразведочных работ, при исследовании месторождений полезных ископаемых, при минералогических исследованиях для определения более 70 элементов при содержании от  $10^{-6}$  до 10% с возможностью одновременного определения до 40 элементов в каждой пробе.

**Рентгенометрический фазовый анализ** применяется, главным образом, для качественной, а при использовании специальных методик и для количественной характеристики минеральной состава полезного ископаемого и продуктов обогащения. Рентгенометрический анализ основан на исследовании дифракции рентгеновских лучей (с определённой длиной волны  $\lambda$ ) от плоских сеток кристаллических решёток минералов. Каждая кристаллическая структура характеризуется определённым набором дифракционных максимумов, которые получают при различных углах отражения. Ускорению выполнения рентгенометрических анализов с прямым получением сведений о количественном минеральном составе проб способствует применение автоматизированных дифрактометров, соединённых с ЭВМ.

**Термический анализ** обычно применяют при наличии в полезном ископаемом минералов в виде тонкодисперсных или коллоидных образований, плёнок, корочек и т.п., которые трудно диагностируются оптическим методом. Термический анализ необходим при исследовании полезных ископаемых, содержащих глины, водные силикаты, карбонаты, бораты, сульфаты и гидроокислы тяжёлых металлов. Термический анализ основан на физико-химических изменениях, происходящих при нагревании или охлаждении вещества и зависящих от его состава и структуры. Эти изменения

регистрируются графически в виде кривой, которая характеризует тепловые изменения в пробе (эндотермический или экзотермический эффект). Каждое вещество имеет свою индивидуальную термическую характеристику, которая отображается кривой дифференциально-термического анализа. Существуют атласы кривых и сводные таблицы, помогающие идентифицировать кривую термического анализа с эталонной и, таким образом, диагностировать анализируемый минерал.

**Электронно-зондовый рентгеноспектральный микроанализ** позволяет определить состав образца на участках площадью в несколько мкм<sup>2</sup> и глубиной 1 мкм по всем элементам от берилля до урана. Анализ используется на полированных шлифах с кускового или измельчённого материала с помощью специальных приборов - электронно-зондовых микроанализаторов. Электронное зондирование позволяет получить информацию о структуре распределения элементов, их взаимосвязи, размерах вкраплений и т.д. С помощью микрозонда можно проводить качественный и количественный анализ состава минералов. Чувствительность анализа и предел обнаружения элемента по концентрации обычно составляет около 0,01%. Обработка экспериментальных данных для определения состава образца (массовых и атомных концентраций элементов) сложная, поэтому для их обработки используют ЭВМ.

### 4.3 Исследование физических свойств минералов

Полезные ископаемые и продукты обогащения характеризуются плотностью, магнитными и электрическими свойствами, влажностью, прочностью и абразивностью, а также некоторыми технологическими свойствами, которые учитываются в отдельных операциях.

#### Плотность

*Действительная плотность* минерального сырья  $\delta$  - отношение массы твёрдой фазы  $m$  к её объёму  $V$ :

$$\delta = m/V, \text{ кг}/\text{м}^3. \quad (4.1)$$

Действительная плотность - одно из характерных свойств минералов. Она определяется химическим составом и структурой минерала, при этом важную роль играют атомная масса элементов, составляющих минерал, их валентность, координационное число, размер ионных радиусов.

Действительная плотность минералов - диагностическая свойство, которое имеет большое практическое значение при гравитационном обогащении минерального сырья, где разница в плотности используется для разделения минералов. В большинстве случаев действительную плотность используют при определении других параметров (пористость, дробимость, удельная площадь поверхности) и при инженерных расчётах.

Действительную плотность отдельных кусков полезного ископаемого определяют взвешиванием куска сначала на воздухе, а затем погруженного в

воду. Для взвешивания с точностью до 0,01-0,02 г используют аналитические или аптекарские весы. Плотность определяют по формуле:

$$\delta = m_1 \Delta / (m_1 - m_2), \text{ кг/м}^3, \quad (4.2)$$

где  $m_1$  - масса куска на воздухе, кг;  $m_2$  - масса куска в воде, кг;  $\Delta$  - плотность воды,  $\text{кг/м}^3$ .

Для определения действительной плотности полезных ископаемых и продуктов обогащения используют *пикнометрический метод*. Пикнометрический метод основан на измерении массы пустого пикнометра, наполненного жидкостью и при замене части жидкости пробой исследуемого материала:

$$\delta = \frac{m_3 - m_1}{(m_4 - m_3) - (m_2 - m_1)} \cdot \Delta, \text{ кг/м}^3, \quad (4.3)$$

где  $\delta$  - действительная плотность исследуемого материала,  $\text{кг/м}^3$ ;  $\Delta$  - плотность жидкости,  $\text{кг/м}^3$ ;  $m_1$  - масса пустого пикнометра, кг;  $m_2$  - масса пикнометра с жидкостью, кг;  $m_3$  - масса пикнометра с пробой исследуемого материала, кг;  $m_4$  - масса пикнометра с жидкостью и пробой исследуемого материала, кг.

*Насыпная плотность* измельчённого продукта - отношение массы продукта с промежутками между зёренами и порами к его объёму.

Насыпная плотность зависит от действительной плотности, минерального и гранулометрического состава материала, степени его уплотнения, влажности. Насыпную плотность используют при определении объёма, занимаемого сырьём; при расчётах бункеров и ёмкостей для его хранения и транспортировки; для определения давления на стенки сосудов, вагонов и т.п.

Для определения насыпной плотности используют *метод мерного цилиндра*. При этом методе в цилиндр вместимостью 10-15 мл до определённой метки наливают бензол, спирт или керосин, а затем вводят пробу исследуемого материала массой 3-5 г. После отсчёта объёма вытесненной жидкости при известной массе пробы определяют плотность материала по формуле (4.1). В качестве окончательного результата исследований принимают среднее арифметическое двух испытаний, которые отличаются не более чем на 5%.

Насыпная плотность полезных ископаемых в значительной степени зависит от крупности. В инженерных расчётах и практике горного дела зависимость насыпной плотности от крупности оценивается коэффициентом разрыхления.

## Влажность

*Влажность* - отношение массы воды, содержащейся в минеральном сырье, к массе влажного сырья (%).

В зависимости от массовой доли воды тонкоизмельчённое сырье может иметь твёрдую, пластичную и текучую консистенцию. Вода в различных формах всегда присутствует в горных породах и тесно взаимодействует с ними. Воду в горных породах по степени её подвижности, характеру связи и влияния на

состояние и свойства горных пород классифицируют на: связанную воду, воду связанные капиллярными силами и свободную воду.

Все эти категории воды присутствуют в горных породах совместно. Различные формы влаги в измельчённых горных породах переходят друг в друга и изменяют физические свойства пробы: объёмную и насыпную плотность, сыпучесть, адгезию, замерзание.

Массовую долю влаги в минеральном сырье обычно определяют высушиванием пробы в сушильном шкафу, при температуре  $105\pm5^{\circ}\text{C}$ . Проба считается высушенной до постоянной массы, если относительное различие между двумя последовательными взвешиваниями составляет не более 0,05%.

Массовую долю влаги  $W_t^r$  рассчитывают с точностью до второго десятичного знака после запятой:

$$W_t^r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - m} \cdot 100, \%, \quad (4.4)$$

где  $m$  - масса листа, на котором сушилась проба, кг;  $m_1$  - масса листа с навеской до высушивания, кг;  $m_2$  - масса листа с навеской после высушивания, кг.

### **Сыпучесть**

*Сыпучесть* минерального сырья оценивается по массе материала, который высыпался за единицу времени через единицу площади выпускного отверстия. Сыпучесть сырья в этом случае зависит не только от размеров выпускного отверстия, но и от конструкции прибора: угла и формы выпускной воронки, высоты слоя материала над выпускным отверстием.

Сыпучесть - важная технологическая характеристика сырья, которая необходима для расчёта выпускных отверстий силосов, бункеров, питателей и других разгрузочно-перегрузочных устройств. Сыпучесть определяется минеральным и гранулометрическим составом сырья, влажностью и в значительной степени размером и формой самих частиц.

Для определения сыпучести материалов крупностью не более 3 мм отбирают пробу массой 6 - 10 кг из расчёта трёхкратного исследования. Основной прибор для определения сыпучести материалов - воронка Гарри с диаметром выпускного отверстия 30 мм и углом конусности  $35^{\circ}$ .

Степень сыпучести  $\eta_c$  материала определяется по формуле:

$$\eta_c = m / t, \text{ кг/с,} \quad (4.5)$$

где  $m$  - масса высыпавшегося материала, кг;  $t$  - время высыпания материала, с.

Если различие между определениями превышает 10%, исследование повторяют и рассчитывают среднее значение.

### **Магнитная восприимчивость**

*Магнитная восприимчивость* - физическая величина, характеризующая способность тела изменять интенсивность собственной намагниченности.

Объёмная магнитная восприимчивость равна отношению намагниченности тела  $J$  к напряжённости магнитного поля  $H$ , в котором находится тело:

$$\kappa = J/H, \quad (4.6)$$

Основной характеристикой руд, обогащающихся магнитным методом, является удельная магнитная восприимчивость  $\chi$  - объёмная магнитная восприимчивость единицы массы тела:

$$\chi = \kappa/\delta, \text{ м}^3/\text{кг}, \quad (4.7)$$

где  $\delta$  - плотность тела,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Объёмная магнитная восприимчивость при пондеромоторном методе, предложенном Фарадеем, определяется измерением силы притяжения, действующей на образец в неоднородном магнитном поле с известным значением силы магнитного поля.

Методика измерений заключается в последовательном взвешивании стеклянной колбочки с эталоном и образцом при выключенном и включённом электромагните. Удельная магнитная восприимчивость образца  $\chi$  определяется по формуле:

$$\chi = \frac{C \cdot \Delta m}{m}, \text{ м}^3/\text{кг}, \quad (4.8)$$

где  $C$  - постоянная, которая определяется экспериментально для данных полюсных наконечников, положении образца и тока возбуждения электромагнита,  $\text{м}^3/\text{кг}$ ;  $m$  - масса образца,  $\text{кг}$ ;  $\Delta m$  - изменение массы образца в магнитном поле,  $\text{кг}$ .

Измерения производятся 3-4 раза и затем рассчитывается среднее арифметическое значение удельного магнитной восприимчивости образца исследуемого материала.

Этот метод используется главным образом для определения удельного магнитной восприимчивости слабомагнитных материалов.

Некоторым видоизменением рассматриваемого метода является метод Гюи, основанный на измерении силы, действующей на образец. Образец находится в цилиндре, один конец которого помещён в сильное магнитное поле  $H$ , а второй - в слабое  $H_l$ .

Методика измерений заключается в следующем. Образец исследуемого материала, измельчённый до крупности 0,1 мм, засыпают в стеклянную трубку длиной 40 см и уплотняют до метки 35 см. Трубку с материалом подвешивают к одной чашке весов таким образом, чтобы нижний край находился в однородном магнитном поле. При достаточно большой длине цилиндра его верхний конец удалён от полюсов магнита на большое расстояние и  $H_l \approx 0$ . Трубку с материалом взвешивают при отсутствии тока в обмотках электромагнита и при заданной величине тока. Эту операцию выполняют несколько раз и определяют среднеарифметическое значение удельной магнитной восприимчивости по формуле:

$$\chi = \frac{2l \cdot \Delta m}{\mu_0 \cdot m \cdot H^2}, \text{ м}^3/\text{кг}, \quad (4.9)$$

где  $l$  - длина образца в трубке, м;  $\Delta m$  - кажущийся прирост массы образца в магнитном поле, кг;  $m$  - масса образца, кг;  $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$  Гн/м - магнитная проницаемость вакуума;  $H$  - напряжённость сильного однородного магнитного поля, А/м.

Метод Гюи может применяться для определения магнитной восприимчивости как слабомагнитных (в поле  $H = 800-1000$  кА/м), так и сильномагнитных минералов (в поле  $H = 80-100$  кА/м).

### **Электрическая проводимость**

*Электрическая проводимость* состоит из объёмной и поверхностной составляющих. Объёмная проводимость минерала зависит от содержания примесей, а поверхностная - от состояния его поверхности.

Методы измерения объёмной проводимости твёрдых веществ разделяются на две группы: методы, основанные на использовании постоянного тока и методы, основанные на использовании переменного тока. При лабораторных исследованиях электрической сепарации применяют методы первой группы (двухэлектродные и четырёхэлектродные).

*Двухэлектродный метод* основан на изменении тока, проходящего через исследуемый образец, при известной разности потенциалов между электродами. В зависимости от электрической проводимости исследуемого образца для регистрации тока используют амперметр, гальванометр или электрометр.

Для исследования минералов с высокой электрической проводимостью обычно применяют амперметр или различные мостиковые схемы на постоянном токе, минералов с рядом электрической проводимостью - высокочувствительные тераометры, минералов с очень низкой электрической проводимостью - электрометры с непосредственным цифровым отсчётом.

При измерении двумя зондами используют вольфрамовые электроды диаметром 0,1 мм (расстояние между ними  $l = 0,5 \div 1,5$  см), напряжение на образце измеряют компенсационным методом. При этом считают, что сопротивление между зондами изменяется линейно.

Сопротивление образца определяется по формуле:

$$R = R_0 \cdot U / U_0, \text{ Ом} \quad (4.10)$$

где  $R_0$  - сопротивление эталонного образца, Ом;  $U_0$  и  $U$  - напряжение на эталонном и исследуемом образцах, В.

При необходимости получения более точных значений величины электрической проводимости используют четырёхэлектродный метод.

*Четырёхэлектродный метод* основан на измерении разности потенциалов между двумя эквипотенциальными поверхностями образца, находящимися

между электродами. Метод позволяет исключить приэлектродную поляризацию и измерить действительную проводимость образца.

Удельную объёмную электрическую проводимость  $\sigma$  можно определить по разность потенциалов  $\Delta U$  между измерительными электродами:

$$\sigma = I \cdot l / (\Delta U \cdot S), \text{ См/м}, \quad (4.11)$$

где  $I$  - величина тока, подведённого к образцу, А;  $l$  - расстояние между измерительными электродами, м;  $\Delta U$  - разность потенциалов между измерительными электродами В;  $S$  - площадь поперечного сечения образца, м<sup>2</sup>.

Более точные результаты получают при специальной подготовке образца в виде параллелепипеда (обычно размером 25x25x0,5 мм), куба, диска или любой геометрической фигуры, имеющей параллельные поверхности, на которые накладывают электроды. Для обеспечения надёжного контакта при температуре, близкой к комнатной, используют графитовые электроды. При повышенной температуре (более 300-350°C) используют золотые или платиновые электроды, но в данном случае поверхность образца должна быть тщательно отшлифована.

### Прочность

**Прочность** - свойство горных пород сопротивляться разрушению а также необратимому изменению формы под воздействием внешних нагрузок.

Прочность горных пород определяется химическим составом, генезисом, структурой и твёрдостью минералов. В горной промышленности для оценки прочности минерального сырья пользуются коэффициентом и шкалой прочности, предложенными проф. М. М. Протодьяконовым. За единицу прочности принято временное сопротивление одноосному сжатию в 9,8 Н/мм<sup>2</sup>, которое определяется на образцах кубической формы со стороной равной 50 мм.

Основной метод определения коэффициента прочности - *метод раздавливания* образцов правильной формы.

### Абразивность

**Абразивность** - способность горных пород изнашивать твёрдые тела, которые контактируют с ними (детали машин, инструменты и т.п.). Абразивность в основном определяется прочностью, размерами и формой минеральных зёрен, составляющих горную породу.

Абразивность оценивают по степени износа штифтов, стержней, металлических колец, которые трутся о поверхность пород при сверлении или резке, а также по степени стирания пород абразивными материалами. Абразивность горных пород обусловливается в основном двумя их свойствами - пределом прочности на сжатие отдельных минеральных зёрен ( $\sigma_{ct}$ ) и коэффициентом хрупкости ( $k_{kp}$ ). Поэтому коэффициент абразивности определяют по формуле:

$$k_a = \sigma_{ct} \cdot k_{kp}. \quad (4.12)$$

Кроме того, применяют эмпирические методы оценки абразивности. По методике Л. И. Барона и А. В. Кузнецова показатель абразивности горных пород

определяют как суммарную потерю массы (в мг) стандартного стержня, вращающегося с частотой 400 мин<sup>-1</sup>, прижатого к породе, при осевой нагрузке 150 Н за время испытания 10 мин.

При работе машины образец исследуемого материала перемещается по окружности со скоростью 0,48 м/с. Продолжительность опыта составляет 8 часов. Через 8 часов образец исследуемого материала снимают и определяют площадь поверхности пирамиды по её геометрическим размерам. Рассчитывают износ 1 м<sup>2</sup> площади поверхности материала образца за 8 часов работы машины. Полученный результат служит оценкой абразивности минерального сырья. Относительная износостойкость образца материала определяется по формуле:

$$Ab = t/m, \text{ час/г}, \quad (4.13)$$

где  $t$  - постоянная времени истирания образца исследуемого материала, час;  $m$  - износ образца исследуемого материала, г.

Определение выполняют на двух образцах и рассчитывают среднее арифметическое, если расхождения результатов двух экзаменов не превышает 1%. При большем расхождении делают третье определение и за окончательный результат принимают среднее арифметическое двух наиболее близких.

#### 4.4 Физико-химические методы анализа вещественного состава

При физико-химических методах анализа (как и при физических) применяется более или менее сложная аппаратура для измерения оптических, электрических и других свойств вещества. Главная особенность заключается в том, что физико-химические методы (в отличие от физических) основаны на химических реакциях. Наиболее широко применяются две группы аппаратурных методов: оптические и электрохимические.

Из оптических методов наиболее распространены спектральный, фотометрический и люминесцентный анализы.

##### Спектральный анализ

Спектральным называют метод, основанный на изучении спектров. Для возбуждения спектров чаще всего применяют электрическую искру или дугу, а также газовое пламя. В дуговом, искровом, а иногда и пламенном спектральном анализе применяют такие типы приборов:

стилоскопы - визуальные приборы для качественного и полуколичественного анализа;

обычные спектрографы, которые фиксируют спектр на фотопластинке; после чего фотопластинки проявляют и с помощью микрофотометра измеряют интенсивность почернения линий;

приборы с фотоэлектрическим устройством (например, квантометром), где интенсивность линий, выпускаемых пламенем при сжигании пробы, измеряются с помощью фотоэлемента или электронного фотоумножителя.

Эмиссионный спектральный анализ применяется, главным образом, для текущего контроля стандартной продукции на металлургических предприятиях,

а также для анализа различных проб при геологических исследованиях. Основная особенность спектрального анализа заключается в том, что можно быстро и без предварительной подготовки получить результаты одновременно нескольких элементов. Обычно этот метод применяется для определения содержания в материале примесей от 0,001 до 1%.

### **Фотометрический анализ**

При фотометрическом анализе исследуемое вещество переводят в окрашенное соединение, после чего измеряют светопоглощение раствора. В зависимости от способа измерения светопоглощения различают несколько методов фотометрического анализа. Визуальное сравнение интенсивности окраски по отношению к известному стандарту называют *калориметрическим анализом*. Если для измерения светопоглощения применяют фотоэлемент со светофильтром, то прибор называют фотометром или электрофотокалориметром, а метод анализа - *фотометрическим*. Наиболее точные результаты, особенно при анализе сложных смесей, получают на спектрофотометрах, когда светопоглощение можно измерять в узкой области спектра. Такой метод называется *спектрофотометрическим*.

Основные области применения фотометрического анализа такие же, что и спектрального: определение содержания в разных и природных материалах примесей от 0,001 до 1%. Однако, фотометрический метод по сравнению со спектральным анализом позволяет определить большее количество элементов при большей точности результатов измерений.

### **Люминесцентный анализ**

Люминесцентный анализ по характеру, а нередко и по ходу химических операций, близок к фотометрическому. Исследуемый компонент с помощью определённой химической реакции переводится в химическое соединение, которое способно к люминесценции. Для определения количества продукта реакции, способного к люминесценции, раствор освещают ультрафиолетовым (или коротковолновым видимым) светом, после чего возникающее длинноволновое свечение измеряется визуально или фотометрически.

Люминесцентный анализ близок к фотометрическому также по отраслям применения и отличается более высокой чувствительностью.

### **Электрохимические методы анализа**

Электрохимические методы основаны на взаимодействии вещества с электрическим током. Различают следующие методы количественного электрохимического анализа.

**Электровесовой анализ.** Исследуемый элемент выделяют электролизом, чаще всего осаждением на катоде, после чего электрод взвешивают. Метод применяют, главным образом, для определения некоторых основных компонентов сплавов, цветных металлов. Метод характеризуется высокой точностью, однако для полного осаждения необходимо длительное время.

**Потенциометрическое титрование.** Метод основан на титровании с применением специально подобранного индикаторного электрода. Этот метод применяется для анализа окрашенных или мутных растворов, для анализа смесей нескольких близких по свойствам компонентов. Методика позволяет автоматизировать титрование.

**Кондуктометрическое титрование.** Метод основан на титровании, окончание которого определяют по перегибам кривой зависимости электропроводности от количества добавленного титрованного рабочего раствора. Значительным препятствием для применения метода является присутствие посторонних электролитов, которые увеличивают фон проводимости, уменьшают чувствительность и точность метода.

**Полярографический анализ.** Для определения металлов в раствор погружают два электрода. Обычно берут анод с постоянным потенциалом и большой поверхностью, а катод с малой поверхностью (чаще всего - капля ртути, вытекающая из капилляра). Постепенно увеличивают напряжение на электродах. При этом сначала ток почти не идёт, потом начинается электровыделение металла и ток с напряжением растёт. Однако, увеличение тока продолжается только до определённого предела и зависит от концентрации определяемых ионов. Итак, предельный ток позволяет рассчитать концентрацию иона металла. Метод применяется, главным образом, для определения микроколичеств цветных металлов при анализе руд и сплавов.

**Амперметрическое титрование.** Индикаторным электродом при данном титровании служит полярографический прибор. Это титрование можно рассматривать так же, как вариант потенциометрического титрования, которое отличается тем, что применяется микроэлектрод с наложенным напряжением. Метод применяется обычно в тех случаях, когда трудно подобрать подходящий индикаторный электрод для потенциометрического титрования.

**Кулонометрическое титрование.** Метод основан на измерении количества электрического тока, который расходуется на реакцию с исследуемым компонентом. При этом методе измеряемое вещество прямо или косвенно участвует в электродной реакции. О количестве вещества судят по количеству затраченного электрического тока. Главная трудность состоит в том, чтобы предотвратить побочных реакций на электродах. Метод применяют для определения микроколичеств компонентов, которые восстанавливаются или окисляются.

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Перечислите ряд инструментальных методов, применяемых для идентификации минералов.
2. Для чего проводят фракционный анализ исходного материала?
3. Перечислите основные физические и технологические характеристики минералов и руд.

4. Какими методами можно определить минералогический состав полезных ископаемых?
5. Как определяется действительная плотность минерального сырья?
6. Опишите методику определения объёмной магнитной восприимчивости.
7. Охарактеризуйте методы измерения объёмной проводимости твёрдых веществ.
8. Какими методами оценивается абразивность горных пород?
9. Перечислите физико-химические методы анализа вещественного состава полезных ископаемых.

## **5 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ НА ОБОГАТИМОСТЬ**

### **5.1 Основные задачи исследований полезных ископаемых на обогатимость**

Под обогатимостью понимают предельно возможную точность разделения полезных ископаемых на соответствующие продукты, которые не зависит от эффективности работы обогатительной установки. Обогатимость является технологической оценкой возможной степени извлечения и концентрации минеральных компонентов при обогащении полезных ископаемых. Обогатимость является обязательной характеристикой месторождения полезного ископаемого и зависит от минерального состава, текстуры и структуры [4, 11,12].

Исследование полезных ископаемых на обогатимость выполняют для оценки и утверждения запасов месторождения, разработки технологии и схем обогащения, получения необходимых данных для проектирования новых обогатительных фабрик и совершенствования технологии обогащения на действующих фабриках, а также при испытании новых машин и реагентов.

Исследование полезных ископаемых на обогатимость представляет собой комплекс различных испытаний: исследование вещественного состава полезного ископаемого, крупности и характера вкрапления полезных минералов, разработку технологии обогащения выбранными методами и определение технологических показателей с учётом комплексного использования сырья и охраны окружающей среды.

Исследование полезных ископаемых для оценки и утверждения запасов месторождения выполняют главным образом в лабораторном масштабе и в сокращённом объёме, так как в этом случае детальная разработка технологии обогащения не нужна. Для проектирования новых обогатительных фабрик или совершенствования технологии на действующих предприятиях исследования во многих случаях проводят в три этапа (лабораторные, полупромышленные, промышленные).

Полупромышленные исследования проводят на опытных установках непрерывного действия или на опытных фабриках небольшой производительности. Исследования проводят для уточнения технологии, разработанной в лабораторном масштабе, и полученных при этом технологических показателей. Кроме того, в полупромышленном масштабе исследуют процессы и аппараты, не поддающиеся моделированию в лабораторных условиях.

Промышленные исследования выполняются на секциях действующих обогатительных фабрик при необходимости сравнения новых схем и режимов обогащения, новых реагентов и оборудования с принятыми на действующем производстве.

Перед началом исследований с учётом вещественного состава и свойств разделяемых минералов составляют программу и намечают перспективные технологические процессы и схемы обогащения, а также выбирают аппаратуру, на которой будут проводить исследования. В процессе исследований может быть разработано несколько вариантов схем. Выбор наиболее эффективной схемы обогащения осуществляется после технико-экономического сравнения разработанных вариантов.

При разработке технологических схем необходимо предусмотреть возможность предварительного отделения отвальных отходов с использованием простых и экономичных методов обогащения; учесть необходимость использования в ряде случаев подготовительных операций; решить вопрос замкнутого водооборота, комплексной переработки сырья, охраны окружающей среды и др.

При наличии в полезном ископаемом значительного количества относительно крупных включений ценных компонентов проверяют возможность их выделения гравитационным или иным экономичным методом. Наиболее простыми и экономичными являются гравитационные и магнитные методы обогащения. Разделение в тяжёлых суспензиях обычно применяют для обогащения материала крупнее 6 - 8 мм, а отсадкой - крупнее 0,5 мм. Материал крупностью до 2 мм обогащают на концентрационных столах, винтовых и конусных сепараторах, струйных желобах, шлюзах и др.

Магнитную сепарацию применяют для обогащения сильно- и слабомагнитных руд. Руды и их продукты обогащения, содержащие магнетит, титаномагнетит или пирротин, исследуют на обогатимость в сепараторах со слабым магнитным полем. При исследовании руд и продуктов, содержащих окислы, гидроокислы и карбонаты железа и марганца, ильменит, вольфрамит и некоторые силикаты железа, используют сепарацию в сильном магнитном поле. Магнитную сепарацию применяют также в сочетании с другими процессами (гравитационными, флотационными).

Если полезные компоненты исследуемого материала тонковкрапленные и легко флотируются, то такой материал исследуют флотацией. Флотационный метод обогащения является основным для сульфидных руд. При наличии в руде минералов, легко и трудно флотируемых применяют комбинированные гравитационно-флотационные схемы.

Электрическое обогащение используют в тех случаях, когда другие более экономичные методы не позволяют получить удовлетворительные результаты разделения минералов, отличающихся по электропроводности. Электрическое обогащение эффективно при доводке редкометаллических концентратов.

При переработке труднообогатимых полезных ископаемых, которые не обогащаются обычными методами, применяют химико-металлургические - выщелачивание, обжиг, гидрометаллургию и др.

Таким образом, прежде чем приступить к проектированию обогатительного производства или рекомендовать технологию переработки нового сырья на действующей фабрике, необходимо провести комплекс

экспериментальных исследований, то есть выполнить комплекс исследований полезных ископаемых на обогатимость.

Исследование полезных ископаемых на обогатимость выполняют в определённой последовательности. Основные этапы исследования полезных ископаемых на обогатимость следующие:

- сбор априорной информации о сырье, поиск аналогов;
- разработка схемы обработки проб и исследования свойств сырья (гранулометрический, фракционный, минералогический и химический состав, зольность, влажность, прочность руды и др.);
- анализ построенных кривых обогатимости (при необходимости);
- поиск возможных методов обогащения и разработка технологической схемы (по данным выполненных анализов и априорной информации);
- выбор критериев эффективности принятых процессов обогащения;
- разработка плана экспериментальных работ;
- выполнение экспериментов, обработка полученных данных и получения моделей процессов;
- разработка рациональных технологических режимов процессов;
- экспериментальная проверка и корректировка разработанной схемы и режимов на действующей фабрике;
- разработка исходных данных для экономического анализа вариантов переработки исследуемого сырья.

## 5.2 Поиск априорной информации

Исследование полезных ископаемых на обогатимость, поиск методов комплексного использования сырья, разработка эффективной и экономичной схемы обогащения, управление процессами на фабрике является сложной задачей со многими неизвестными.

Основные причины этой сложности определяются многофакторностью процессов обогащения, вероятностным характером большинства процессов, постоянным неконтролируемым изменением свойств сырья, наличием в сырье частиц с промежуточными свойствами (ростки), несовершенством разделительных процессов и т.д.

Случайный характер причин, влияющих на процесс, их массовость вызывают необходимость использования для оценки разделения сырья вероятностные характеристики. Все технологические показатели разделительных процессов являются, таким образом, не чем иным, как интегральными или усреднёнными характеристиками. Поэтому процессы обогащения могут адекватно описываться только моделями со статистически распределёнными параметрами.

По этой причине большинство исследований в обогащении проводятся на основе статистического планирования экспериментов. Впервые применил этот метод в обогащении А. Доренфельд, который указывал, что на обогатительной фабрике есть только одна постоянная характеристика - изменчивость факторов -

и только статистические методы позволяют упорядочить результаты этого беспорядка. С помощью статистической обработки можно оценить вероятность определённого значения факторов и результатов обогащения.

Получение новой информации возможно в результате экспериментальных работ. Приступая к эксперименту, исследователь должен обладать некоторым объёмом сведений об объекте исследования, то есть так называемой первичной априорной информации. Поэтому проведение любого исследования обычно начинается с поиска и анализа существующей информации по интересующему исследователя вопросу.

При исследовании на обогатимость к априорной информации относятся, например, сведения о типе, марке сырья, его вещественном составе, существующих способах обогащения подобного сырья, характеристиках машин и др. В априорных сведениях указывается и весь предыдущий опыт и технологические знания, позволяющие до начала эксперимента выбрать подходящие варианты схем и режимов обогащения. Иными словами, априорная информация позволяет выбрать экспериментальную область.

Информацию в области обогащения полезных ископаемых можно разделить на следующие виды:

- первичная, в которую входят оригинальные монографии, журнальные статьи, описания патентов и т.п.;
- вторичная - включает рефераты, обзоры, справочники, библиографические описания, каталоги;
- числовая - технологические и экономические показатели работы фабрик, параметры технологического процесса, числовые характеристики сырья, параметры работы оборудования и др.

Числовая информация может содержаться во всех рассмотренных выше других видах информации и кроме того - в сменных журналах, производственных отчётах, диаграммах записи режимных параметров процесса автоматическими приборами, в качественно-количественных схемах действующих фабрик и т. д.

В обогащении полезных ископаемых можно выделить основные типы числовой информации:

- постоянные характеристики сырья, реагентов и т.п., например, плотность минералов, твёрдость и т.п.;
- характеристики оборудования - удельная производительность, рабочая площадь (объем), установленная мощность электродвигателей и т.п.;
- параметры процесса - плотность и вязкость пульпы, разрыхленность постели, расход реагентов, температура и т.п.;
- содержание компонентов в сырье, промпродукте, концентрате и отходах;
- технологические показатели - выход продуктов, извлечение, качество конечных продуктов, коэффициент обогащения, селективности и др.;
- экономические показатели - себестоимость продукции, рентабельность производства, срок окупаемости, основные расходы, энергоёмкость процесса и др.

Приступая к исследованию, необходимо по возможности более полно осуществить поиск априорной информации. Однако, стоит разумно ограничить этот поиск. Во-первых, получение априорной информации требует времени и затрат. Во-вторых, не следует забывать, что многие исследования выполнены в условиях, далёких от рассмотренных, с несколько иной целью, и, возможно, не лучшим образом. В ряде случаев результаты могут быть и ложными. Поэтому желательно ограничить объем используемой информации только бесспорными данными. Имеющаяся априорная информация не должна сковывать исследователя.

### **5.3 Стадии технологических исследований на обогатимость**

После сбора априорной информации об исследуемом сырье и обосновании аналогов (сырье - технология) проводят предварительные исследования, включающие минералогический, фракционный, гранулометрический анализы, а также некоторые определения физических свойств материалов. Результаты этих исследований позволяют наметить схему исследования на обогатительных аппаратах.

Все исследования на обогатимость можно разбить на ряд последовательных стадий, каждая из которых преследует определённую в какой-то степени самостоятельную цель, хотя и взаимосвязанную с другими стадиями.

Целью первой стадии является выделение максимального количества пустой породы при минимальной степени измельчения каким-либо простым и дешёвым способом. Эта стадия обусловлена содержанием в добытой горной массе значительного количества породы, которая практически не содержит ценных минералов. Особенno большое значение это имеет при использовании высокопроизводительных методов добычи (открытые методы разработки, системы с массовым обрушением), а также разработке россыпей.

Считается, что отвальные хвосты первой стадии обогащения должны содержать полезного компонента не более, чем отвальные хвосты в случае отсутствия такого предварительного обогащения. Однако экономически оправданы и более богатые хвосты первой стадии, так как высокая степень концентрации на этой стадии не только удешевляет всю переработку, но и позволяет в следующих стадиях переработки обогащённого продукта, достигать более высокого извлечения.

На первой стадии чаще всего применяют гравитационные методы обогащения (в тяжёлых суспензиях, отсадку и др.). Иногда - магнитную сепарацию, коллективную флотацию сульфидов, а в последнее время - бактериальное выщелачивание.

Целью второй стадии (иногда бывает первой) является подготовка сырья к последующему обогащения - максимальное раскрытие ценных минералов с учётом возможности применения тех или иных методов обогащения. При этом следует учитывать, с одной стороны, потери с тонкими классами (шламами) при тонком измельчении, с другой - размеры вкрапления драгоценных материалов.

Кроме измельчения подготовительная стадия может включать намагничивающий, сульфатизирующий или другой вид обжига, кондиционирование пульпы перед флотацией (аэрация, обдирки, обработка реагентами). На этой стадии достигается возможность максимальной обогатимости исходного сырья теми методами, которые будут применены в следующей стадии.

Третья стадия исследований включает определение оптимального режима обогащения для получения чернового концентратата. Целью этой стадии является получение максимального извлечения всех ценных компонентов. Согласно этой цели определяются параметры работы обогатительных аппаратов, реагентный режим основной флотации и т.п.

В четвертой стадии выясняется возможность получения конечных продуктов заданного качества (кондиционных концентратов), определяется вид и режим доводочных операций, выясняется необходимость и возможность использования химических и металлургических методов переработки продуктов.

На пятой стадии исследования отрабатывается схема: выбирается количество перечистных и контрольных операций, определяется целесообразность выделения и способы переработки промежуточных продуктов. Эти исследования не всегда можно осуществить в лабораторных условиях. Иногда их проводят на полупромышленных установках или на действующих фабриках.

Последняя (шестая) стадия - технико-экономическое исследование - предполагает сравнение вариантов по технологическим и экономическим показателям.

Необходимо заметить, что чётких правил выбора технологических схем пока не существует. Правильность выбора зависит от опыта исследователя. Поэтому на последней стадии целесообразно привлечение широкого круга специалистов для консультации, изучение опыта переработки руд аналогичного состава и анализ различных методов переработки минерального сырья.

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Цель проведения исследований полезных ископаемых на обогатимость?
2. Для чего проводятся полупромышленные и промышленные исследования?
3. Охарактеризуйте основные этапы исследования полезных ископаемых на обогатимость.
4. Какие операции включает в себя сбор априорной информации об объекте исследований?
5. Раскройте принцип составления схемы проведения исследований на обогатимость.

## **6 ПРОЦЕСС ОБОГАЩЕНИЯ КАК ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ**

### **6.1 Взаимосвязь технологических факторов**

Исследование полезных ископаемых на обогатимость, изыскания методов комплексного использования сырья, разработка эффективной и экономичной схемы обогащения, управление технологическим процессом на фабрике - являются очень сложными задачами со многими неизвестными. Каждый фактор, влияющий на технологический процесс, связан с десятками других, от которых он зависит и которые зависят от него, а также друг от друга.

В таких условиях вряд ли возможен достаточно полный анализ влияния всех факторов на процесс. Дело ещё усугубляется тем, что в большинстве случаев мы имеем только качественные характеристики и зависимости факторов, многие из которых экстремального характера, то есть в одном диапазоне влияют на технологический параметр положительно, а во втором диапазоне - отрицательно.

Вследствие многочисленности факторов и их взаимодействия, влияющих на процесс, возникает типичная для многих сложных производств ситуация: мы можем с привлечением соответствующей группы факторов объяснить любое изменение поведения процесса. Объяснения могут быть разные, но одинаково правдоподобны. Однако, если при тех же условиях произошли противоположное изменение, мы с использованием другой группы факторов можем объяснить и её.

Неопределённость и непредсказуемость поведения рассматриваемой системы (технологических показателей работы обогатительной фабрики) является следствием четырёх причин.

Одной из причин неопределённости является сложность процесса, невозможность учёта всех факторов и их взаимодействия. На основе предварительного опроса можно лишь ожидать тех или иных результатов с некоторой, большей или меньшей, вероятностью.

Второй причиной неопределённости является неконтролируемое изменение параметров. Оценить вероятность определённого значения факторов и результатов обогащения позволяет статистическая обработка.

Третья причина неопределённости связана с массостью процесса обогащения. Число элементарных агрегатов - частиц, подлежащих разделению, огромное. В процессах разделения, которые особенно сложны по своей технологии, всегда существует определённая вероятность того, что даже при чётком различии свойств разделяемых частиц некоторое их количество попадёт не в свой продукт и, следовательно, состоится засорение концентрата чужеродными частицами, с одной стороны, и неполное извлечение полезного вещества в концентрат, с другой.

Четвёртой причиной неопределённости является существование погрешностей, связанных с несовершенством разделительных аппаратов, а также с существованием частиц с промежуточными свойствами.

Таким образом, в результате промышленного разделительного процесса из исходной смеси получают не чистые продукты, а только в той или иной степени обогащённые или обеднённые продукты. Случайный характер причин, влияющих на процесс, и его массовость порождают необходимость использования вероятностных характеристик для оценки разделения. Все технологические показатели процессов разделения, таким образом, являются интегральными или усреднёнными характеристиками.

Стохастичность процессов обогащения, которая связана с их сложностью, вероятностным характером и трудностями моделирования, изучалась и использовалась многими известными учёными - В.И. Мелких, М.М. Виноградовым, Л.А. Барским, А.Н. Тихоновым, В.З. Козиным, А.А. Абрамовым, С.И. Митрофановым, Ю.Б. Рубинштейном, П.И. Пиловым и др.

## 6.2 Модели технологических процессов

### 6.2.1 Методы математической статистики

Применение методов математической статистики для анализа технологических процессов и построения математических моделей связано с постановкой задачи создания систем автоматического управления для выявления количественных характеристик и количественной оценки влияния тех или иных факторов. При этом можно использовать такие методы статистического анализа как дисперсионный, корреляционный, регрессионный [3, 5, 9, 11, 13].

Традиционным в исследованиях по обогатимости полезных ископаемых является применение статистических методов и оценок для характеристики воспроизводимости экспериментов и, в частности, опробования. Так, вывод формул для расчёта минимальной массы пробы в зависимости от крупности основан на статистических критериях, которые связывают распределение минеральных частиц (с учётом содержания ценного компонента) и допустимую ошибку опробования.

Применение математической статистики в лабораторных исследованиях на обогатимость связано в первую очередь с анализом экспериментального материала и компактным представлением полученных результатов. На практике часто возникает необходимость свести первоначальную массу данных к небольшому количеству показателей, которые достаточно полно характеризуют свойства всей совокупности.

Статистические параметры являются наиболее удобными для характеристики крупности вкрапления ценных компонентов, раскрытия минералов, распределения флотационных реагентов по поверхности частиц. Физические свойства одних и тех же минералов могут существенно меняться не только в зависимости от месторождения, но и в пределах одного и того же месторождения. Это в значительной степени затрудняет предварительный выбор схем для исследований обогатимости полезного ископаемого и режимов его обогащения. Значительный объём накопленной информации об обогатимости

различных минеральных комплексов может быть обработан статистическими методами и использован при исследовании новых полезных ископаемых на обогатимость.

Методы математической статистики позволяют определить, в какой степени свойства выборки отражают свойства генеральной совокупности, оценить параметры генеральной совокупности и установить для них доверительные интервалы даже по очень малым выборкам. Методы математической статистики очень разные и могут использоваться при решении широкого круга вопросов.

При получении исследователем математических моделей процессов возможные следующие ситуации.

- При исследовании есть возможность устанавливать входные факторы на всех уровнях, находящихся в области экспериментирования. То есть исследователь играет активную роль. Такой эксперимент называют активным. Это основной вид исследований в лабораторных условиях.

- Исследователь не имеет возможности по своему плану устанавливать значения входных параметров, он играет пассивную роль - фиксирует только величины всех факторов, которые его интересуют. Это - пассивный эксперимент или наблюдение. Такая ситуация возникает при исследованиях на действующем производстве.

- Исследователь имеет возможность получить информацию об исследуемом процессе только путём опроса специалистов, которые хорошо знают данный процесс. Такой подход называют эвристическим.

Наиболее информативный и целесообразный первый - активный эксперимент, когда исследователь имеет возможность применить современные методы планирования экспериментов. Он не только более экономичный по числу необходимых опытов для получения той же информации, но и в нём принципиально иначе распределяется информация о входных факторах. Равномерность и равноточность задания входного аргумента при планировании эксперимента позволяет оценивать модель процесса во всем факторном пространстве.

При пассивном эксперименте вид модели и оценка её адекватности зависят от функции распределения входных параметров. Однако с учётом того, что результаты наблюдений получают только путём снятия информации с рабочего процесса без особых затрат, игнорировать эту информацию не следует.

Можно отметить те случаи, когда пассивный эксперимент неизбежен:

-при исследовании влияния на результаты промышленных процессов каких-либо переменных действий, стабилизация которых на определённых уровнях невозможна или экономически невыгодна (например, практически невозможно осуществить поступления на обогатительную фабрику руды вполне определённого состава, стабилизировать температуру пульпы, учесть износ оборудования и т.п.);

- при исследовании закономерностей в свойствах продуктов обогащения;

- при исследовании фактических изменений показателей за прошлый период;
- при исследовании хода технологического процесса;
- при исследовании результативности управления процессом и т.д.

Таким образом, при надлежащем внимании к активным методам, необходимо знать и уметь использовать пассивные методы.

Статистические методы обработки полученной информации можно использовать как при активном, так и при пассивном эксперименте. Разница заключается в последовательности обработки данных и переходом от метода наименьших квадратов, применяемого при пассивном эксперименте, к учёту отклонений наблюдаемых и расчётных значений выходного критерия при активном эксперименте.

При пассивном эксперименте в «чистом виде» широко применяются дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализы.

*Дисперсионный анализ* применяется для оценки вклада в разброс (дисперсию) выходного параметра какого-либо фактора. Такая оценка может потребоваться при исследовании колебаний данных, воспроизводимости экспериментов, определении доверительного интервала значений какой-либо величины или коэффициентов в уравнении, описывающем процесс. Дисперсионный анализ с многосторонней классификацией может служить для оценки влияния различных факторов на отклонение параметров исследуемого материала от среднего значения.

В обогащении полезных ископаемых дисперсионный анализ нашёл применение для оценки воспроизводимости химических анализов, лабораторных экспериментов, а в случае анализа промышленного продукта среднеквадратичное отклонение является мерой стабильности работы фабрики.

Близко к дисперсионному анализу примыкает факторное планирование экспериментов. *Факторный анализ* позволяет оценить вклад исследуемых факторов и их взаимодействия на среднее значение параметра, который характеризует процесс в целом.

*Корреляционный анализ* позволяет оценить тесноту связи различных параметров или факторов, влияющих на процесс. Этот метод широко распространён при исследовании промышленных процессов. Если коэффициент корреляции достаточно большой, можно получить информацию, позволяющую выбрать основные регулирующие действия на процесс, точки и методы измерения факторов, установить минимально необходимое количество измеряемых параметров. Если коэффициент линейной корреляции мал по абсолютной величине, то это свидетельствует о более сложной (нелинейной) зависимости между параметрами или о существенном влиянии других факторов. В этом случае необходимо вычисление более сложной зависимости в виде нелинейного уравнения.

Получение таких уравнений методом наименьших квадратов составляет основу *регрессионного анализа*. Однако при использовании регрессионного анализа необходима обязательная проверка адекватности модели и процесса.

Одним из направлений регрессионного анализа является *планирование экстремальных экспериментов*, которое включает: выбор основных факторов, действующих на процесс; определение направления крутого восхождения (градиента) до экстремального значения с помощью факторного плана или его дробных реплик; движение по градиенту; получение регрессионного уравнения с помощью плана более высокого порядка в экстремальной (почти стационарной) области.

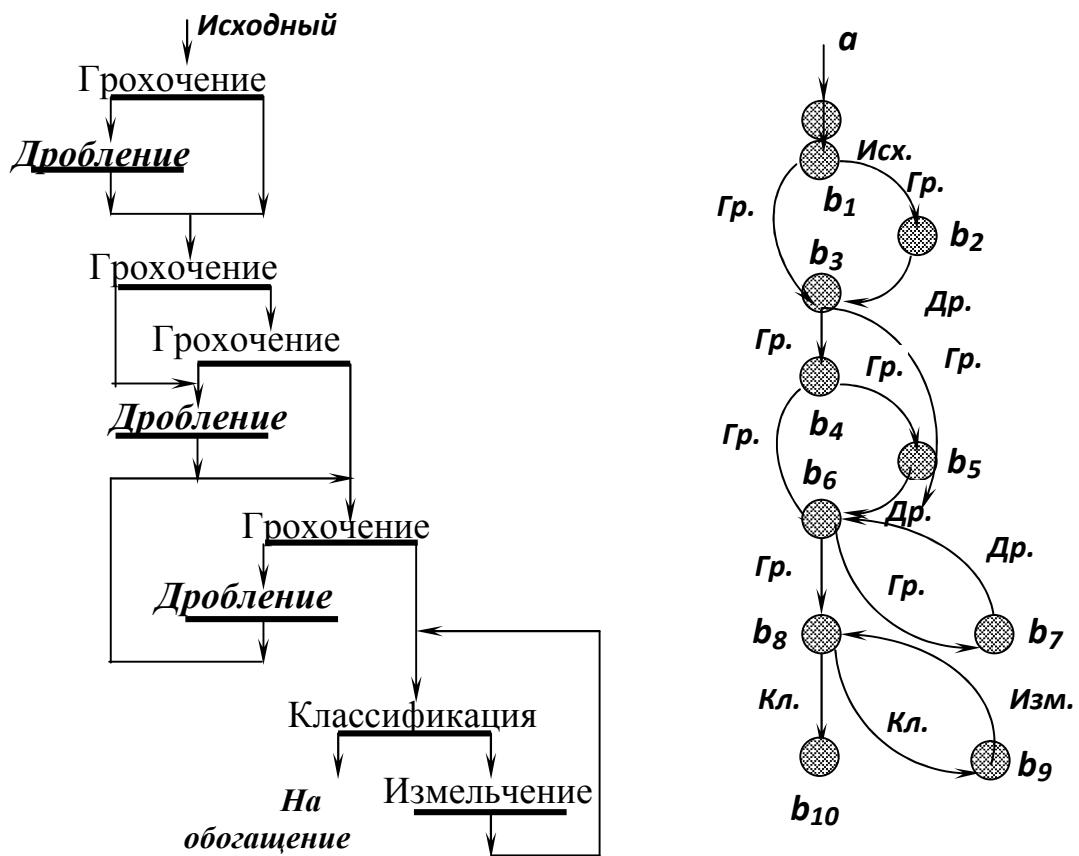
Большое распространение получили статистические методы *определения статических и динамических характеристик* сложных недетерминированных процессов для их автоматизации. Выбор регуляторов и машин для управления, основанный на таких статистических характеристиках, осуществлён применительно к процессам флотации, измельчения, отсадки и т.д.

### 6.2.2 Применение теории графов

Распространённый во всех областях науки и техники метод графического изображения процессов, зависимостей, структур и т.п. с помощью точек и соединяющих их линий привёл к созданию специфических и привычных для специалистов каждой отрасли графических схем типа электрических, технологических и т.п. В математике эти вопросы решаются в теории графов, которая является топологическим отображением теории множеств. Эта теория может быть приложена к любым схематическим изображениям процессов и служит общим математическим инструментом для их исследований. В ряде случаев использование математического аппарата теории графов позволяет сделать некоторые выводы и упрощения, которые не столь очевидны в обычных схемах. В этом смысле целесообразно использование языка теории графов и перевод на него технологических схем и зависимостей, которые рассматриваются в обогащении полезных ископаемых.

Графом называется совокупность узлов и соединяющих их рёбер. Тем самым даётся представление о структуре исследуемого объекта, устанавливаются связи между его отдельными узлами, а если ввести для рёбер соответствующую массовую характеристику, можно получить и количественную оценку связей.

Технологические схемы переработки полезных ископаемых могут быть представлены в виде состояний совокупности зёрен, которые последовательно меняются. Совокупность зёрен в каждом состоянии - полезного ископаемого в месторождении, дроблёном, измельчённом, классифицированном по крупности, разделённом по физическим свойствам - характеризуются определёнными параметрами, как совокупность, ограниченная предельными значениями параметров. Переход из одного состояния в другое может быть представлен направленными графиками, вершины которых обозначают соответствующее состояние, а рёбра - процессы перехода в новое состояние (рис. 6.1).



**Рис. 6.1 – Схема технологического процесса и граф.**  
 $b_i$  – состояние материала; Гр. – грохочение; Др. – дробление;  
 Кл. – классификация; Изм. – измельчение.

В процессах дробления и измельчения, когда весь материал переходит в один продукт иного состояния, граф имеет одно ребро; при классификации и разделении по физическим свойствам процесс характеризуется многорёберным (по числу полученных продуктов) графом. Вершины и ребра могут быть окрашены разными цветами в соответствии с принятыми обозначениями: такой хроматический график содержит подграфы разного цвета.

Теория графов для исследования технологических процессов позволяет более глубоко оценить структуру процесса. При сравнении двух или нескольких технологических схем, предназначенных для переработки одного и того же материала с получением тех же конечных продуктов, сопоставление графов позволяет выбрать наиболее короткий и, следовательно, более экономичный процесс с меньшим числом операций. На графике чётко выделяются циклы операций над отдельными промпродуктами. Наличие таких циклов указывает на существование продуктов, циркулирующих или накапливающихся в процессе, и для которых необходимо найти точку вывода.

Операции над графиками не ограничиваются анализом технологических схем, а позволяют при использовании статистических данных выделить значимые факторы, влияющие на процесс, определить минимальный набор критериев оптимизации и другую информацию.

### **6.2.3 Понятие математической модели**

Значение моделей при исследовании мира определил Дж. Форрестер: «Каждый индивидуум в своей личной и общественной жизни использует модели для принятия решений. Мысленный образ мира, окружающего нас, есть модель. Человек не несёт в себе полные образы семьи, бизнеса, правительства, страны. Он только отбирает концепции и взаимосвязи, которые использует, чтобы представить себе реальную систему. Мысленный образ - это модель. Все наши решения и действия определяются моделями. Вопросы заключается не в том, чтобы использовать или игнорировать модели, а состоит только в выборе между альтернативными моделями ».

Естественно, одно из самых широких определений модели - мысленный образ. Специалисту требуется определение более конкретное. Поэтому при исследованиях под моделью понимают формализованный мысленный образ. Если эта формализация доведена до математических соотношений, то имеют дело с математической моделью. Она находит определённые свойства реального процесса формализованные на том или ином языке, например, в виде дифференциальных или регрессионных уравнений. Однако, большинство физических процессов настолько сложны, что при современном состоянии науки очень редко удается создать их универсальные модели, действующие в любое время и на всех участках исследуемого процесса.

Поэтому, существует ряд подходов к получению моделей, приемлемых для работы. Главные из них - аналитические и эмпирические (экспериментальные). Аналитические методы основаны на использовании концепций и закономерностей, которые проверены веками, но справедливы, как правило, при многих ограничениях. Для физических процессов, особенно многофакторных, носящие вероятностный характер, определяются комбинированные или аналитико-экспериментальные модели. К этим процессам относятся все методы обогащения.

Итак, процессы обогащения достаточно сложны, зависят от многих факторов и их взаимодействия. Для исследования такой сложной системы необходимо принять некоторые упрощения, то есть при анализе технологического процесса рассмотреть не все разнообразные факторы, влияющие на него, а только наиболее существенные.

Самой простой моделью любой системы является так называемый «чёрный ящик». Внутренняя структура этой модели может быть совсем недоступна для наблюдения, но в пределах поставленной задачи модель ведёт себя так же, как и реальная система. Оптимальный план исследования «чёрного ящика» предполагает не только достижение максимального значения искомого параметра наиболее быстрым способом, но и получение математической модели процесса. Во многих случаях модель позволяет также с помощью физических аналогий и математического анализа лучше понять внутреннее строение «чёрного ящика». Иногда «чёрный ящик» является вообще единственным возможным инструментом исследования, так как только в редких случаях

удаётся «заглянуть» внутрь системы без нарушения естественного состояния и хода процесса.

Если объект хорошо изучен, то на основе известных физических или химических законов составляются уравнения, которые и являются математической моделью этого объекта. Для объектов типа «чёрный ящик» используются входные и выходные данные, полученные при экспериментальных методах. Получение математической модели иллюстрируется рис. 6.2.

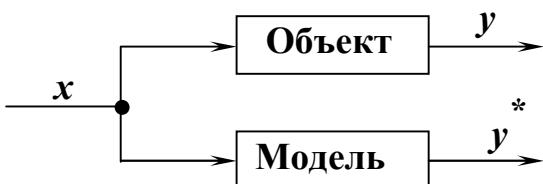


Рис. 6.2 – Схема получения модели объекта.

Входную  $x$  и выходную  $y$  переменные объекта замеряют и по результатам измерений находят связь между ними. Задача моделирования состоит в том, чтобы величина  $y^*$ , полученная с помощью математической модели, была близка к значению  $y$  на выходе объекта.

Под *математической моделью* процесса понимают совокупность соотношений, адекватных процессу, достаточных для решения поставленной задачи. Использование математической модели даёт возможность:

- выбрать оптимальный технологический режим процесса;
- сократить план исследовательских работ при разработке технологии производства;
- создать оптимальную схему автоматизации процесса (или предприятия в целом).

В большинстве случаев построение математической модели производственного процесса занимает значительное место в общем комплексе работ по автоматизации управления. Работы по автоматизации производственных процессов связаны с решением ряда взаимосвязанных проблем, к которым относятся: методы построения математических моделей производственных процессов; разработка алгоритмов управления; методы получения, передачи и переработки информации; разработка критериев оптимизации; разработка структурных схем управления и т.д. Статистические методы получения математических моделей делают возможным описание процессов по результатам наблюдений в условиях нормальной работы.

#### 6.2.4 Математическое моделирование технологических процессов

В промышленной практике универсальным и общим является стремление к максимально возможному приближению к поставленной цели наиболее быстрым способом и с наименьшими затратами.

Практика показывает, что большие затруднения вызывает даже однозначная формулировка цели в количественном выражении, так называемая целевая функция или критерий эффективности. При этом часто приходится одновременно решать противоречивые задачи, например, повышение извлечения полезного компонента при одновременном снижении себестоимости переработки полезных ископаемых. Задача заключается в том, чтобы найти экстремальное значение целевой функции, аргументами которой являются - производительность, качество полезного ископаемого, расход материалов и реагентов и т.д. Также необходимо считаться с тем, что действия управления могут изменяться только в определённых пределах. Кроме того, на систему могут быть наложены дополнительные ограничения: на значения параметров процесса, сложность алгоритма управления, на объем использованной информации и др.

Оптимальное управление процессом может рассматриваться как принятие определённых решений, соответствующих изменениям ситуации. Принятие решения связано с выбором из множества всевозможных допустимых обстоятельств некоторого одного определённого решения. Чем больше вариантов, тем больше информации необходимо для их разграничения и тем более громоздким будет описание всей задачи.

В процессе принятия решения оперируют функцией, аргументами которой являются допустимые варианты решения, а значениями - числа, описывающие меру достижения поставленной цели. Задача принятия решения тем самым сводится к нахождению максимального (или минимального) значения целевой функции, а также значений аргументов, при которых этот максимум достигается. Для отыскания оптимального решения в подобной ситуации одним из наиболее эффективных методов является *математическое моделирование*. Правильно построенная модель может предоставить исследователю новую информацию о моделируемом процессе. При этом, в случае сложных технологических систем, которые часто встречаются в практике работы обогатительных фабрик, такая информация может быть получена только таким способом.

Теоретическое исследование физической системы начинается с изучения общих законов, которые отражают опыт накопленный для других аналогичных систем. Используются уравнения кинетики химических реакций, энергетического и материального баланса, которые вытекают из общих законов сохранения массы и энергии, и особенно закон больших чисел или больших масс.

Многие технологические процессы трудно удовлетворительно описать теоретическими моделями, основанными на принципах физических явлений массопереноса или балансовых уравнений из-за сложности протекания этих процессов и ещё недостаточно чёткого их понимания. В этом случае для практических целей можно применить эмпирический способ построения моделей. Они составляются на основе методологической концепции «чёрного ящика» и выходят из возможности описание механизма протекания процессов на

основе входных и выходных переменных параметров без проникновения в сущность изучаемого процесса.

Математические модели бывают статические « $y = f(x)$ » и кинетические или динамические « $y = f(x, t)$ », которые прямо или косвенно учитывают время исследуемого процесса. Полученная любым способом модель чаще всего справедлива только в определённом диапазоне изменений фактора  $x$ , которой нужно указывать рядом с погрешностью при записи модели.

Рассмотрим закономерности разделения минералов в наиболее распространённых процессах.

### *Фракционный состав минерального сырья.*

Минеральное сырье и продукты обогащения отличаются тем, что любое физическое свойство  $\xi$  смеси частиц непрерывно изменяется в середине определённого диапазона  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$  из-за содержания в ней сростков с переменными свойствами (символом  $\xi$  обозначена любая физическое свойство). Дискретное изменение является частным случаем, например, для смеси, состоящей из чистых минералов.

Узкая или конечная фракция  $[\xi_i; \xi_i + \Delta\xi_i]$  - это частицы из какого-либо диапазона  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$ . Её представляют только те частицы смеси, для которых физическое свойство находится между границами фракции  $\xi_i < \xi < \xi_i + \Delta\xi_i$  или  $\xi_i < \xi < \xi_{i+1}$ . Размер (ширина) фракции есть  $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ .

В частных случаях гравитационного, магнитного, флотационного, электрического, радиометрического обогащения получают такие фракции: плотности  $[\delta_i; \delta_{i+1}]$  магнитной восприимчивости  $[\chi_i; \chi_{i+1}]$  флотируемости  $[k_i; k_{i+1}]$ , удельной электропроводности  $[\sigma_i; \sigma_{i+1}]$ , удельного заряда  $[q_i; q_{i+1}]$ , светимости  $[\varphi_i; \varphi_{i+1}]$ .

Бесконечно узкую или элементарную фракцию получают, если размер конечной фракции стремится к нулю  $\Delta\xi_i = d\xi \rightarrow 0$ .

Диапазон  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$  может быть разделён на конечные фракции с различным шагом  $\Delta\xi_i$ , равномерным или неравномерным.

Массовая доля (выход)  $i$ -й фракции  $[\xi_i; \xi_{i+1}]$  является отношением массы  $G_i$  её частиц к массе  $\sum G_i$  частиц всех фракций. Долю  $i$ -й фракции обозначим:

$$\bar{\gamma}_i = \gamma(\xi_i) \Delta\xi_i = G_i / \sum_{i=1}^n G_i. \quad (6.1)$$

Очевидно, что условием нормирования будет:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i) \Delta\xi_i = 1. \quad (6.2)$$

Выражение  $\gamma(\xi_i) \Delta\xi_i$  в формуле (6.1) разделяет выход  $\bar{\gamma}_i$  на два сомножителя, из которых один является размером фракции  $\Delta\xi_i$ , а второй  $\gamma(\xi_i)$

- дифференциальной функцией распределения  $\gamma(\xi)$  частиц смеси с физическим свойством  $\xi$ . Дифференциальная функция распределения  $\gamma(\xi)$  - это такая функция, для которой произведение  $\gamma_{y\epsilon} = \gamma(\xi)d\xi$  равно массовой доле элементарной фракции  $[\xi; \xi + d\xi]$  в смеси. Дифференциальную функцию распределения  $\gamma(\xi)$  можно определить как отношение доли  $\gamma_{y\epsilon}$  элементарной функции  $[\xi; \xi + d\xi]$  к её размеру  $d\xi$ . Размерность для  $\gamma(\xi)$  является всегда обратной размерности соответствующего физического свойства  $\xi$ :  $[\gamma(\xi)] = 1/[\xi]$ , например,  $[\bar{\gamma}(\delta)] = \text{м}^3/\text{т}$  при  $[\delta] = \text{т}/\text{м}^3$ . Кроме того, дифференциальную функцию распределения  $\gamma(\xi)$  можно характеризовать как плотность распределения твёрдого по элементарным фракциям.

Функция  $\gamma(\xi)$  учитывает физические свойства  $\xi$  частиц. Её вводом заканчивается первая часть количественной характеристики фракционного состава минеральных материалов.

Вторая часть должна учитывать содержание  $\beta$  ценных компонентов (или вредных примесей) в частицах. Для этого нужно знать среднее содержание  $\bar{\beta}_i$  компонента в каждой  $i$ -й фракции  $[\xi_i; \xi_{i+1}]$ , то есть знать набор цифр  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n$ . При уменьшении размера фракций  $\Delta\xi \rightarrow 0$  (и соответствующем увеличении их числа  $n \rightarrow \infty$ ) в диапазоне  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$  этот набор цифр заменяет непрерывную функцию  $\beta(\xi)$ .

Полученная зависимость  $\beta(\xi)$  содержания компонента от физического свойства частиц является второй после  $\gamma(\xi)$  и последней характеристикой фракционного состава сырья.

*Типичный метод экспериментального определения выходов фракций  $\bar{\gamma}_i = \gamma(\xi_i)\Delta\xi_i$  и содержаний  $\bar{\beta}_i$  в них ценных компонентов, а также функций  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  сводится к следующему.* Пробу материала взвешивают для получения  $\sum G_i$ , после чего её разделяют на  $n = 4 \div 10$  фракций с размерами  $\Delta\xi_1, \dots, \Delta\xi_n$ , перекрывающих диапазон  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$ . Для разделения на фракции в зависимости от исследуемого физического свойства используют соответствующие методы и аппаратуру. При разделении по крупности ( $\xi = d$ ) применяют ситовый или седиментационный анализ; по плотности ( $\xi = \rho$ ) - денситрический анализ; по магнитной восприимчивости ( $\xi = \chi$ ) - магнитный анализ и т. д. После разделения каждую  $i$ -ую фракцию взвешивают для нахождения  $G_i$  и  $\bar{\gamma}_i = G_i / (\sum G_i)$ ; параллельно в каждой фракции определяют содержание расчётного компонента. По этим данным ( $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\beta}_i$ ) находят функции  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$ .

В общем случае сложного сырья, если частицы его различаются несколькими ( $n$ ) физическими свойствами ( $\xi_1, \dots, \xi_n$ ) и содержат несколько ( $m$ )

ценных компонентов, фракционный состав характеризуется набором  $n$ -мерных функций:  $\gamma_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\beta_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$   $j = 1, 2, \dots, m$ , (где  $j$  - название или номер ценного компонента).

*Общие сведения о сепарационных характеристиках технологических процессов обогащения.* Извлечение конечной фракции  $[\xi_i; \xi_{i+1}]$  или  $[\xi_i; \xi_i + \Delta\xi]$  в концентрат отдельной операции или схемы обогащения равно отношению масс твёрдого этой фракции в концентрате  $G_{ik}$  и в питании  $G_{ii}$ :

$$\bar{\varepsilon}_{\hat{e}} = \frac{G_{ik}}{G_{ii}} = \frac{Q_{\hat{e}} \bar{\gamma}_{\hat{e}}}{Q_{ii} \gamma_{ii}} = \frac{Q_{\hat{e}} \gamma_{\hat{e}}(\xi) \Delta\xi}{Q_{ii} \gamma_{ii}(\xi) \Delta\xi}, \quad (6.3)$$

где  $Q_{\hat{e}}$  и  $Q_{ii}$  - производительность по твёрдому, соответственно для концентрата и питания, т/ч.

В числителе формулы (6.3) произведение  $Q_k$  и выхода фракции даёт производительность этой фракции  $\gamma_{ik} = \gamma_k(\xi) \Delta\xi$  для концентрата, а в знаменателе для питания. Здесь  $\gamma_k(\xi)$  характеризует распределение твёрдого по фракциям в концентрате, а  $\gamma_{ii}(\xi)$  - в питании.

При  $\Delta\xi_i \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  получают непрерывную функцию - сепарационную характеристику:

$$\varepsilon_{\hat{e}}(\xi) = \frac{Q_{\hat{e}} \gamma_{\hat{e}}(\xi) \Delta\xi}{Q_{ii} \gamma_{ii}(\xi) \Delta\xi} = \bar{\gamma}_{\hat{e}} \frac{\gamma_{\hat{e}}(\xi)}{\gamma_{ii}(\xi)}, \quad (6.4)$$

где  $\bar{\gamma}_{\hat{e}} = Q_{\hat{e}}/Q_{ii}$  - выход концентрата, доли ед.

Сепарационная характеристика операции или схемы является непрерывная функция  $\varepsilon_k(\xi)$ , показывающая извлечение элементарных фракций  $[\xi; \xi + d\xi]$  в концентрат в зависимости от их физического свойства  $\xi$ . Сепарационную характеристику  $\varepsilon_k(\xi)$  также называют разделительной функцией, главной технологической характеристикой сепаратора (или схемы), кривой извлечения фракций в концентрат и др.

Сепарационную характеристику для отходов  $\varepsilon_o(\xi)$  получают с использованием  $\varepsilon_k(\xi)$  по формуле:

$$\varepsilon_k(\xi) + \varepsilon_o(\xi) = 1. \quad (6.5)$$

Таким образом, для двухпродуктовых схем и сепараторов достаточно знать только одну из характеристик  $\varepsilon_k(\xi)$  или  $\varepsilon_o(\xi)$ .

Баланс по любой элементарной фракции для двухпродуктовой операции (или схемы в целом):

$$q_{\hat{e}}(\xi) + q_{ii}(\xi) = q_{ii}(\xi); \quad (6.6)$$

$$q_{\hat{e}}(\xi) = \varepsilon_{\hat{e}}(\xi) q_{ii}(\xi), \quad (6.7)$$

где  $q_e(\xi) = Q_e \gamma_e(\xi) d\xi$ ;  $q_o(\xi) = Q_o \gamma_o(\xi) d\xi$ ;  $q_r(\xi) = Q_r \gamma_r(\xi) d\xi$  - производительность по узкой фракции  $[\xi; \xi + d\xi]$ , соответственно, для концентрата, отходов и питания.

*Идеальная сепарационная характеристика имеет ступенчатый вид (рис. 6.3):*

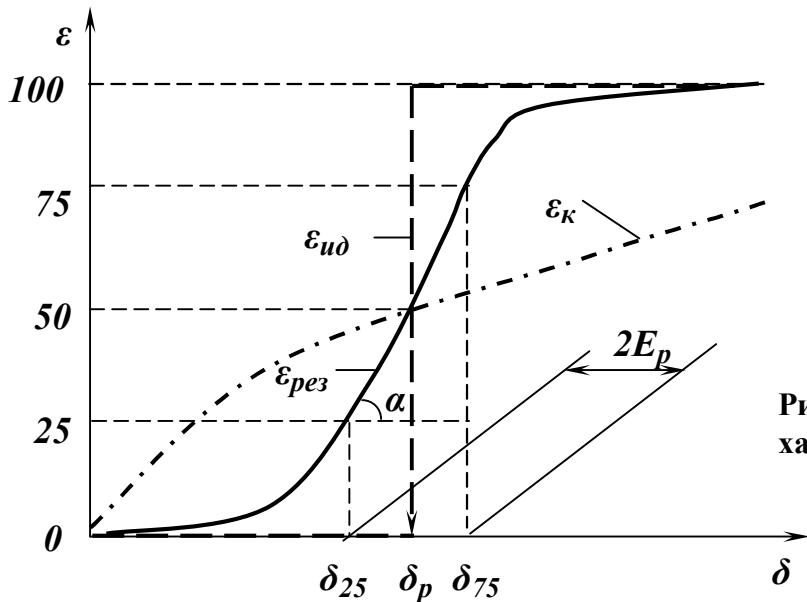


Рис. 6.3 – Сепарационные характеристики.

$$\varepsilon_{\text{еа}}(\xi) = \bar{I}(\xi - \xi_\delta) = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi > \xi_\delta; \\ 0,5 & \text{для } \xi = \xi_\delta; \\ 0 & \text{для } \xi < \xi_\delta. \end{cases} \quad (6.8)$$

Здесь для краткости применён символ единичной ступенчатой функции  $\bar{I}(\xi - \xi_p)$ , где константа  $\xi_p$  указывает точку, в которой происходит скачок на единицу.

*Неидеальные сепарационные характеристики.* Здесь возможны различные кривые в зависимости от типа сепаратора или схемы. Реальные сепараторы, как правило, имеют неидеальные сепарационные характеристики.

Граница разделения  $\xi_p = \text{const}$  соответствует элементарной фракции, которая наполовину извлекается в концентрат, наполовину в отходы. Координата границы  $\xi_p$  при известном  $\varepsilon_k(\xi)$  может быть рассчитана по формуле:

$$\varepsilon_k(\xi) = 0,5. \quad (6.9)$$

Во всех сепараторах и схемах обогащения предусмотрена возможность изменения положения границы разделения в желаемом направлении.

Крутизна сепарационной характеристики  $\operatorname{tg} \alpha = d\varepsilon_k(\xi) / d\xi \Big|_{\xi=\xi_p}$  в рабочей точке, соответствующей границы раздела  $\xi = \xi_p$ , является одной из оценок степени несовершенства сепарации для операции или схемы: чем больше крутизна, тем ближе сепарационная характеристика к идеальной. Совершенствование сепаратора или схемы - это, в первую очередь, повышение крутизны в рабочей точке.

Два параметра: граница разделения  $\xi_p$  и крутизна в рабочей зоне  $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon'_k(\xi_p)$  являются главными параметрами сепарационной характеристики  $\varepsilon_k(\xi)$ . По этим параметрам можно приблизительно оценить функцию и нарисовать её график. Типичный метод экспериментального определения сепарационной характеристики основан на использовании формулы (6.4):

- для работающего сепаратора или схемы измеряют производительности  $Q_i$  и  $Q_e$  для расчёта  $\bar{\gamma}_e = Q_e / Q_i$ ;
- отбирают пробы питания и концентраты и выполняют их фракционный анализ для определения функций распределения  $\gamma_i(\xi)$  и  $\gamma_e(\xi)$ ;
- производят расчёт сепарационной характеристики по формуле (6.4).

Для случая идеального обогащения (сепарационная характеристика имеет вид ступенчатого импульса) технологические показатели можно рассчитать, если фракционный состав сырья известен:

$$\bar{\gamma}_e = \int_{\xi_{min}}^{\xi_{\delta}} \gamma_{\text{ендо}}(\xi) d\xi; \quad (6.10)$$

$$\bar{\beta}_e = \frac{1}{\gamma_e} \int_{\xi_{min}}^{\xi_{\delta}} \beta(\xi) \gamma_{\text{ендо}}(\xi) d\xi. \quad (6.11)$$

При неидеальной сепарации в отдельном аппарате или по схеме обогащения в формулы прогноза технологических показателей вводят дополнительную сепарационную характеристику:

$$\bar{\gamma}_e = \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \varepsilon_e(\xi) \gamma_{\text{ендо}}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_e(\xi_i) \gamma_{\text{ендо}}(\xi_i) \Delta \xi_i; \quad (6.12)$$

$$\bar{\beta}_e = \frac{1}{\gamma_e} \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \varepsilon_e(\xi) \beta(\xi) \gamma_{\text{ендо}}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_e(\xi_i) \beta(\xi_i) \gamma_{\text{ендо}}(\xi_i) \Delta \xi_i / \gamma_e. \quad (6.13)$$

Сепарационные характеристики основных обогатительных аппаратов приведены в табл. 6.1.

Рассмотрим подробнее гравитационное обогащение.

Для одномерной модели отсадочной машины с естественной постелью совокупные уравнения имеют вид:

$$g\delta - g\bar{\delta}(x,t) - aV_x - \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0; \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial(\gamma V_x)}{\partial x}, \quad (6.15)$$

где  $a$  и  $k$  - коэффициенты.

Исключением скорости  $V_x(\delta, x, t)$  получено уравнение сепарации с одной неизвестной функцией  $\gamma(\delta, x, t)$  (рис. 6.4):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\gamma(\delta - \bar{\delta})], \quad (6.16)$$

где

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}(x, t) = \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \delta \gamma(\delta, x, t) d\delta; \quad (6.17)$$

$D$  - коэффициент микродиффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $t = y / V_{\text{тр}}$  - время сепарации, соответствует продвижению материала от загрузки до разгрузки, с.

Средняя плотность  $\bar{\delta}(x, t)$  среды (постели) изменяется по пространству  $x$  и для нестационарных режимов со временем  $t$ .

Для нахождения сепарационной характеристики  $\varepsilon_k(\delta)$  предварительно по уравнению (6.18) определяют фракционный состав материала  $\gamma_{np}(\delta, x) = \gamma(\delta, x, t_{\text{кон}})$  в зоне разгрузки концентрата и отходов при  $t = t_{\text{кон}} = y_{\text{разгр}} / V_{mp}$ .

Для стационарного режима в зоне разгрузки  $\partial \gamma / \partial t = 0$ , уравнение (6.17) упрощается и его решение имеет вид:

$$\gamma_{i\delta}(\delta, \tilde{\delta}) = \frac{\gamma_{i\delta}(\delta, \tilde{\delta}_0) \exp\left[\frac{g}{\alpha D} - \delta(x - x_0)\right]}{\int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \gamma_{i\delta}(\delta, \tilde{\delta}_0) \exp\left[\frac{g\delta}{\alpha D}(x - x_0)\right] d\delta}. \quad (6.18)$$

Таким образом, материал, который предельно расслоился, в конце зоны имеет фракционный состав  $\gamma_{i\delta}(\delta, \tilde{\delta})$ , который меняется с глубиной постели согласно статического распределения Гиббса.

Общее решение уравнения (6.18) превращается в конкретное частное с учётом начальных условий, которые зависят от фракционного состава исходного питания  $\gamma(\delta, \tilde{\delta}, t_0) = \gamma_{e\tilde{n}\delta}(\delta)$ .

Для нахождения произвольной  $\gamma_{i\delta}(\delta, \tilde{\delta}_0)$  через заданную функцию  $\gamma_{e\tilde{n}\delta}(\delta)$  нужно воспользоваться интегральным законом сохранения и по

известным  $\gamma_{\dot{e}\tilde{n}\delta}(\delta)$  и  $\gamma_{i\delta}(\delta, \tilde{\delta})$  рассчитать сепарационную характеристику по формуле:

$$\varepsilon_{\dot{e}}(\delta) = \frac{Q_{\dot{e}}\gamma_{\dot{e}}(\delta)}{Q_{\dot{e}\tilde{n}\delta}\gamma_{\dot{e}\tilde{n}\delta}(\delta)} = \int_{\tilde{\delta}_{\text{дал}}^{\delta}}^{\tilde{\delta}_{\delta}} \gamma_{i\delta} d\tilde{\delta} / \int_{x_{i\dot{e}\zeta}}^{\tilde{\delta}_{\text{дал}}^{\delta}} \gamma_{i\delta} d\tilde{\delta}, \quad (6.19)$$

где  $Q_{\dot{e}}/Q_{\dot{e}\tilde{n}\delta} = (\tilde{\delta}_{\delta} - \tilde{\delta}_{\text{дал}})/(\tilde{\delta}_{\text{дал}} - \tilde{\delta}_{i\dot{e}\zeta})$ ;  $\tilde{\delta}_{\delta}$  - координата положения отсекателя концентрата и отходов.

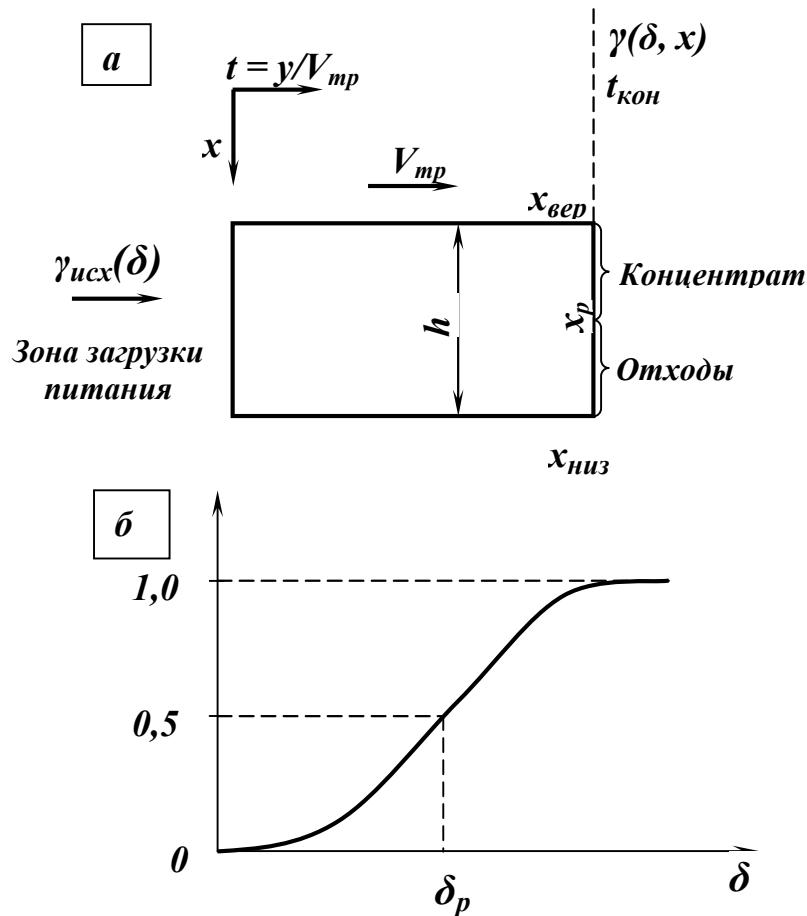


Рис. 6.4 - Рабочая зона (а) и сепарационная характеристика (б) отсадочной машины.

Средний фракционный состав концентрата получают усреднением:

$$\gamma_{\dot{e}}(\delta) = \frac{I}{\tilde{\delta}_{\delta} - \tilde{\delta}_{\text{дал}}^{\delta}} \int_{\tilde{\delta}_{\text{дал}}^{\delta}}^{\tilde{\delta}_{\delta}} \gamma_{i\delta}(\delta, \tilde{\delta}) d\tilde{\delta}. \quad (6.20)$$

Таблица 6.1 - Сепарационные характеристики обогатительных аппаратов

Аппарат и его режим	Сепарационная характеристика $\varepsilon_k(\xi)$	Граница разделения $\varepsilon_k(\xi_p) = 0,5$	Крутизна характеристики в точке разделения $\varepsilon'(\xi_p)$
1	2	3	4
Отсадочная машина с природной постелью, супензионный сепаратор с большим стеснением	$\varepsilon_e(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{gh\gamma_{\text{энд}}(\delta)}{\alpha D}} (\delta - \bar{\delta}) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\sqrt{\frac{gh}{2\pi\alpha D(\delta_{\max} - \delta_{\min})}}$
Отсадочная машина с искусственной постелью, супензионный сепаратор с умеренным стеснением	$\varepsilon_e(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} \left[ \frac{gh}{4\alpha D} (\delta - \delta_p) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\frac{gh}{8\alpha D}$
Грохот	$\varepsilon_{\text{грох}}(d) = 1 - \exp \left[ - \frac{V_c(d)M}{hQ_{\text{энд}}} \right]$	$d_p \approx d_0$	$\frac{MV_c(d_0)}{2hQ_{\text{энд}}}$
Гидроклассификатор с восходящим потоком при стесненных условиях	$\varepsilon_{\text{гк}}(\delta, d) = \begin{cases} \frac{1}{0} & \text{для } \frac{\tilde{N}_{\text{еэ}}}{\tilde{N}_{\text{вн}}} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{для } \frac{\tilde{N}_{\text{еэ}}}{\tilde{N}_{\text{вн}}} > \frac{1}{2} \end{cases}$	$\delta_{\delta} = \delta_{\text{энд}} + \frac{V_{cp}\alpha}{gd_p^2}$	$\infty$
Гидроклассификатор при стесненных условиях	$\varepsilon_{\text{гк}}(\delta, d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{th} \left[ \frac{ah}{4D} (d^2 - d_p^2) \right],$ где $a = g(\delta - \delta_{cp})/\alpha$	$d_p = \sqrt{\frac{\alpha V_{cp}}{g(\delta - \delta_p)}}$	$\frac{g(\delta_0 - \delta_{cp})h}{4\alpha D}$

Окончание табл. 6.1

1	2	3	4
Гидроциклон	$\varepsilon_{\text{нэ}}(\delta, d) = 0,5 - 0,5th[\text{Ah}/(4D)],$ где $A = \frac{V_o^2 d^2}{R} \cdot \frac{\delta - \bar{\delta}}{\alpha} - V_{cp}$	$d_p = \sqrt{\frac{Q_{\text{нэ}} \alpha R}{S V_o^2 (\delta - \bar{\delta})}}$	$\frac{h V_o^2 (\delta - \bar{\delta})}{4 \alpha R D}$
Роликовый (барабанный) магнитный сепаратор для стеснённых условиях	$\varepsilon_{\text{э}}(\delta, \chi) = \begin{cases} 1 & \text{для зоны } \frac{\delta - \bar{\delta}}{\bar{\delta} - \bar{\chi}} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$	$\delta_{\text{э}} = \frac{R H \text{grad} H}{V_o^2} \chi_p$	$\infty$
Ленточный магнитный сепаратор	$\varepsilon_{\text{э}}(\delta, \chi) = 0,5 + 0,5th[\text{Ah}/(4D)],$ где $A = \frac{1}{\alpha} [g(\delta - \bar{\delta}) - H \text{grad} H(\chi - \bar{\chi})]$	$g(\delta_p - \bar{\delta}) - H \text{grad} H \times$ $\times (\chi_p - \bar{\chi}) = 0$	$\frac{h H \text{grad} H}{8 \alpha D}$ при $\delta = \delta_0 = \text{const}$
Флотационная машина	$\varepsilon_{\text{э}}(k) = 1 - \exp(-St_{\text{нэ}} k)$ ( $S=500 - 1200 \text{ м}^2/\text{м}^3$ )	$k_p = \ln 2 / (St_{\text{нэ}})$	$0,5 St_{\text{нэ}}$
Электрический сепаратор в стеснённых условиях	$\varepsilon_{\text{э}}(\delta, q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{th} \left[ \frac{Eh(q - q_p)}{4 \alpha D} \right]$	$q_p = \frac{V_o^2 \delta}{RE}$	$\frac{Eh}{8 \alpha D}$

Примечание.  $Q_{ucx}$ ,  $M$  - производительность и масса материала на грохоте;  $V_c(d)$  - зависимость скорости просеивания на сетке грохота от размера частиц;  $h$  - глубина зоны сепарации;  $V_{cp}$  - скорость восходящего потока в гидроклассификаторе;  $V_o$ ,  $R$  - окружная скорость и радиус кривизны для гидроциклона;  $H$ ,  $E$  - напряжённость магнитного и электрического полей.

С использованием формул (6.19) - (6.20) для  $\gamma_{i\delta}$  получают приближённую формулу сепарационной характеристики (концентрат - лёгкий продукт):

$$\varepsilon_e(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \hat{O} \left[ \sqrt{\frac{gh\gamma_{e\tilde{\delta}}(\delta)}{\alpha D}} (\delta_\delta - \delta) \right], \quad (6.21)$$

где  $\hat{O}(\delta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\delta} \exp(-t^2/2) dt$  - интеграл вероятности;  $h = x_{\text{дл\delta}} - x_{i\epsilon\zeta}$  - толщина постели.

Полученное выражение для  $\varepsilon_e(\delta)$  не является в точности законом вероятности, потому что под знаком  $\Phi$  стоит функция  $\gamma_{e\tilde{\delta}}(\delta)$  при равномерном распределении по фракциям в питании. То есть, при  $\gamma_{e\tilde{\delta}}(\delta) = 1/(\delta_{\max} - \delta_{\min}) = \text{const}$  для  $\varepsilon_e(\delta)$  получают нормальный закон (при условии, что  $\tilde{\delta}_\delta$  находится в середине постели).

*Обобщающая компактная теория* всех разнообразных процессов обогащения полезных ископаемых основана на понятиях о фракционном составе минерального сырья и сепарационных характеристиках обогатительных аппаратов и технологических схем. Фракционный состав позволяет оценивать распределения твёрдой фазы и ценных компонентов по фракциям, различающихся физическими свойствами частиц. Сепарационная характеристика даёт оценку степени извлечения каждой из фракций в концентрат по отношению к сырью.

Фракционный состав минерального сырья и сепарационные характеристики позволяют прогнозировать технологические результаты обогащения (выход, содержание, извлечение) любой сырья с помощью исследуемой технологической схемы; оценивать эффективность работы и сравнивать обогатительные аппараты различных конструкций; решать задачи экономически оптимальной стратегии обогащения сложного сырья.

### 6.3 Исследование технологических схем

Исследования технологических схем обогащения минерального сырья, выполненные в лабораторных условиях, проверяют с целью подтверждения воспроизводимости полученных показателей обогащения в условиях непрерывного и замкнутого процесса, моделирующего промышленное предприятие.

К *стадии лабораторных* относятся исследования, проводимые на отдельных аппаратах с навесками массой не более 10 кг. По результатам лабораторных исследований составляют технологическую схему для дальнейших исследований.

В зависимости от поставленных задач дальнейшие исследования выполняют в укрупнённом, полупромышленном или опытно-промышленном масштабе.

*Укрупнённые лабораторные исследования* проводят в непрерывном режиме по полной схеме обогащения, составленной из лабораторного оборудования (производительность такой схемы обычно не превышает 100 кг/ч). В результате укрупнённых исследований составляют товарный баланс продуктов обогащения и нарабатывают необходимую массу концентрата для дальнейших исследований, кроме того отбирают пробу отходов с целью определения возможности их дальнейшего использования. На основе результатов укрупнённых лабораторных исследований составляют технологический регламент.

Укрупнённые исследования проводят на стадии предварительной разведки месторождений. Их результаты используются для обоснования целесообразности проведения детальной разведки месторождений, а также для подготовки к следующим полупромышленным исследованиям.

*Полупромышленные исследования* являются контрольными, поскольку с их помощью проверяется технология переработки минерального сырья, разработанная в результате укрупнённых лабораторных исследований. Исследование проводят, как правило, в непрерывном режиме с полным воспроизведением рекомендаций технологической схемы с учётом оборота воды и очистки сточных вод. Полупромышленные исследования заканчивают определением не менее, чем суточного баланса продуктов и наработкой концентратов в количествах, необходимых для дальнейших работ, предусмотренных схемой (например, окомкование, гидро- или пирометаллургические процессы), а также отходов в количествах, достаточных для производства опытных партий строительной или иной продукции.

Результаты полупромышленных исследований - технологический регламент, который используется для составления ТЭО проекта кондиций разведуемого месторождения; подсчёт и утверждение запасов месторождения. Данные полупромышленных исследований также необходимы при разработке проектов промышленных горно-обогатительных предприятий.

*Промышленные исследования* применяют для отработки и проверки технологии нетрадиционных видов минерального сырья, а также с целью отработки нового технологического оборудования и уточнения исходных данных для проектирования промышленных предприятий по переработке минерального сырья. Производительность установок составляет обычно 50 - 150 т/ч. Часто для промышленных исследований используют секции действующих обогатительных фабрик. При промышленных исследованиях нарабатывают крупные партии концентрата (до 100 тыс. т) для последующего окомкования и металлургического передела.

Программа промышленных исследований включает такие разделы: цель, задачи и сроки проведения исследовательских работ; этапы работ (наладка и регулирование оборудования, отработка узлов и вариантов схем, наладка

рекомендованных схем); контрольные исследования (балансовые и товарные опробования, актирование показателей переработки сырья); обобщение полученных результатов и составление отчёта. На основе программы исследований составляют смету расходов, необходимых для выполнения всего объёма исследовательских работ.

Продолжительность исследований определяется для каждой пробы программой исследований в зависимости от типа минерального сырья, массы пробы, сложности и вариантов исследуемых проб, необходимой массы конечных продуктов.

Полученные результаты - исходные данные для разработки проекта новой обогатительной фабрики или для реконструкции действующей.

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Укажите основные причины неопределённости и непредсказуемости поведения процессов обогащения.
2. Для чего используются методы математической статистики при исследовании технологических процессов?
3. Укажите различия между активным и пассивным экспериментами.
4. В каких ситуациях необходим пассивный эксперимент?
5. Опишите суть теории графов.
6. Опишите принцип моделирования процесса с использованием «чёрного ящика».
7. Раскройте закономерности разделения минералов при фракционном анализе.
8. Как определяются сепарационные характеристики технологических процессов обогащения?

## **7 СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ**

### **7.1 Постановка задачи**

Рост потребления промышленностью металлов, угля и других полезных ископаемых ставят задачи поисков и освоения новых видов минерального сырья (в том числе труднообогатимых руд), разработки новой эффективной технологии обогащения полезных ископаемых. Сложность технологического процесса, недостаточный уровень развития теории и необходимость учёта большого количества факторов не позволяют систематизировать разнообразную информацию об обогатимости различных типов полезных ископаемых и предложить способ априорной оценки обогатимости на основе минералогопетрографического описания. Как правило, существует несколько приемлемых режимов обогащения, между которых трудно выбрать оптимальный [4, 5, 11-14].

Необходимость постановки большого количества экспериментов, множество методик исследований, плохая воспроизводимость экспериментов и существенное влияние на их результаты большого количества параметров, которые не регистрируются, вносит элемент случайности в результаты оценки обогатимости полезного ископаемого. Опыт и квалификация исследователя, набор использованных аппаратуры и реагентов, продолжительность исследований и даже время года могут повлиять на оценку обогатимости и выбор технологической схемы переработки полезных ископаемых.

*Главными задачами* при исследовании полезных ископаемых на обогатимость являются:

- исследование свойств сырья;
- разработка схемы обогащения с учётом комплексного использования сырья;
- отработка технологической режимной карты процессов;
- усовершенствование технологической схемы на действующей фабрике;
- проверка разработанных режимов обогащения на действующей фабрике;
- исследования действия на технологический процесс новых реагентов;
- выяснение механизмов действия и влияния основных факторов на результаты обогащения и работу машин;
- получение исходных данных для технико-экономического обоснования строительства новой фабрики (цеха) или модернизации действующей для обогащения исследуемой сырья.

Из всех методов оценки обогатимости, применяемых в теоретических, технологических и проектных исследованиях, эксперимент считается наиболее достоверным и распространённым. Но даже прямой лабораторный метод определения обогатимости позволяет установить только качественную оценку влияния различных параметров на технологические показатели, так как опыты, как правило, имеют плохую воспроизводимость. Аналогичные трудности возникают в исследованиях на полупромышленных установках и фабриках. Здесь также нет стандартной методики сравнения различных режимов и оценки

получаемых результатов, а субъективные факторы и оценки, хотя и в меньшей степени, играют существенную роль. Кроме того, на результаты исследований оказывают значительное влияние различные неконтролируемые воздействия и причины, трудно поддающиеся учёту (например, износ оборудования, мелкие аварии, ненадёжность усреднения проб, точность химических анализов и т.д.).

Таким образом, создание количественных зависимостей и математических моделей невозможно при детерминистском подходе к процессу и определяет необходимость использования методов математической статистики как при исследованиях на обогатимость, так и при создании систем автоматического управления на действующих обогатительных фабриках. Внедрение экспериментально-статистических методов в практику исследований даёт возможность объективно оценивать качество исследовательской работы (качество постановки, проведения и конечных результатов эксперимента).

*Последовательность статистического исследования обогатимости полезного ископаемого может быть сформулирована следующим образом:*

- постановка цели исследования, выбор параметров оптимизации процесса, анализ их взаимосвязи и областей применения тех или иных параметров;
- выбор методики экспериментов, анализ воспроизводимости и оценка количества параллельных измерений для получения результатов с необходимой достоверностью;
- выделение факторов, влияющих на исследуемый процесс;
- составление плана экспериментов, его реализация и получение статистической модели процесса и рациональных режимов его ведения;
- получение кинетической или динамической модели процесса (при необходимости).

## **7.2 Статистическая оценка вероятности исследований**

### **7.2.1 Оценка ошибок измерений**

Воспроизводимость лабораторных опытов имеет большое значение при исследованиях на обогатимость, а также при теоретическом изучении процессов обогащения. В соответствии с теорией ошибок различают:

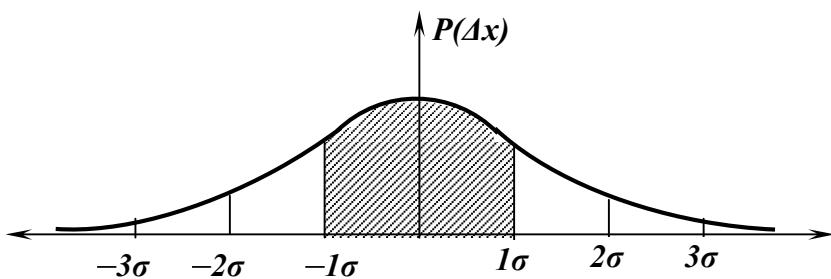
- *грубые ошибки (промахи)* - результаты, резко отличающиеся от других измерений и являющиеся следствием нарушения условий измерения;
- *систематические ошибки*, связанные с дефектом прибора или метода; их величина одинакова при всех измерениях. К одному виду систематических ошибок относятся ошибки, природа которых известна и величину которых можно определить (поправки). Ко второму - ошибки, которые выявляются только другими методами измерения той же величины;
- *случайные ошибки*, которые зависят от множества неконтролируемых факторов. Случайные ошибки учесть невозможно, их величину можно определить только повторными измерениями и статистической обработкой

результатов. Размер случайной ошибки характеризует воспроизводимость измерений.

В соответствии с теорией вероятности случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения (закон Гаусса), по которому вероятность ошибки:

$$P(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (7.1)$$

где  $\sigma^2$  - дисперсия распределения;  $\sigma$  - среднее квадратическое отклонение. Вероятность отклонения от среднего значения показана на рис. 7.1.



**Рис. 7.1 - Вероятность отклонения от среднего значения на величину  $\sigma$  (заштрихованная площадь).**

Поскольку истинное значение измеряемой величины  $\mu$  и дисперсия  $\sigma^2$  неизвестны, используют их статистические оценки  $\bar{x}$  и  $S^2$ . Для ряда случайной величины  $-x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$   $\Delta x = \mu - x_i$ .

Среднее арифметическое  $\bar{x}$  для  $n$  значений величины  $x_i$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (7.2)$$

При обработке очень большого материала расчёты можно упростить, если  $n$  наблюдаемых значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сгруппировать в  $m$  интервалов со средними  $t_1, t_2, \dots, t_m$  при одной длине интервала  $\Delta t$ . Если каждому из этих интервалов соответствуют частоты наблюдений  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , то среднее определяется выражением:

$$\bar{x} \approx \bar{t} = \frac{\sum_{j=1}^m t_j v_j}{\sum_{j=1}^m v_j}. \quad (7.3)$$

$\bar{x} \approx \bar{t}$  в результате округления при расчёте  $t_j$ . Разница между  $\bar{x}$  и  $\bar{t}$  будет небольшой, если число наблюдений велико, а интервалы малы. Каждую из частот ( $v_1, v_2$  и т. д.) можно назвать весом соответствующего значения, а  $\bar{x}$  будет средневзвешенным значением.

Выборочная дисперсия (математическое ожидание):

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad (7.4)$$

где  $S$  - средняя квадратичная ошибка (стандартное отклонение).

Относительная квадратичная ошибка, выраженная в процентах от случайной величины, называется коэффициентом вариации:

$$V_x = 100S_x / \bar{x}, \%. \quad (7.5)$$

Вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину не больше чем  $\Delta x$ ,

$$P(\bar{x} - \Delta x < X < \bar{x} + \Delta x) = A \quad (7.6)$$

называется доверительным интервалом или коэффициентом надёжности.

Интервал значений от  $\bar{x} - \Delta x$  и до  $\bar{x} + \Delta x$  называется доверительным интервалом, то есть с вероятностью, равной  $A$ , результат не выходит за пределы доверительного интервала от  $\bar{x} - \Delta x$  и до  $\bar{x} + \Delta x$ . Разумеется, чем больше надёжность нужна, тем больше будет соответствующий доверительный интервал, и наоборот, чем больший доверительный интервал задаётся, тем вероятнее, что результаты измерений не выходят за его пределы. Таким образом, для характеристики величины случайной ошибки необходимо задать два числа: величину ошибки (или доверительного интервала) и величину доверительной вероятности.

По закону Гаусса средней квадратической ошибке  $\sigma$  соответствует доверительная вероятность 0,68, удвоенной средней квадратической ошибке  $2\sigma$  - доверительная вероятность 0,95, утроенной средней квадратической ошибке  $3\sigma$  - доверительная вероятность 0,997. Обычно при технических исследованиях принимают доверительный интервал при доверительной вероятности  $P = 0,95$ .

По закону случайных ошибок, если измеряемая величина  $z$  является суммой или разностью двух случайных величин  $X$  и  $Y$ , то:

$$S_z^2 = S_x^2 + S_y^2 \quad \text{или} \quad S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}. \quad (7.7)$$

Закон сложения дисперсий сохраняется для любого числа слагаемых, откуда выходит, что средняя квадратическая погрешность среднего арифметического:

$$S_{\bar{x}} = S_x / \sqrt{n}. \quad (7.8)$$

Доверительный интервал определяется с помощью  $t$ -распределения Стьюдента (приложение 1), зависящего от доверительной вероятности  $P$  и числа степеней свободы  $f = n - 1$ :

$$\Delta x = \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}}. \quad (7.9)$$

Значение  $t_p$  очень сильно зависит от  $f$  при малых ее значениях  $n$  ( $n < 30$ ), при больших значениях  $n$  ( $n > 30$ ) эта зависимость значительно меньше. Из формулы (7.9) при  $\Delta x = \delta$  следует:

$$n \geq \frac{t_p^2 S_x^2}{\delta^2}. \quad (7.10)$$

Статистические оценки случайной величины (среднее арифметическое  $\bar{x}$  и стандартное отклонение  $S_x$ ) рассчитываются из предположения, что выборка  $x_i$  не содержит грубых ошибок (промахов). Для исключения промахов из большой выборки можно пользоваться правилом  $2\sigma$  или  $3\sigma$ . Для промаха  $x^*$  рассчитывается абсолютное значение разницы  $|x^* - \bar{x}|$ . При доверительной вероятности  $P = 0,95$   $x^*$  отвергается, если  $|x^* - \bar{x}| > 2\sigma$ , а при  $P = 0,997$ , если  $|x^* - \bar{x}| > 3\sigma$ .

Для небольших выборок, когда  $S_x$  существенно отличается от  $\sigma$  пользуются критерием Стьюдента, при этом сравнивают:

$$t = \frac{|x^* - \bar{x}|}{S_x} \quad (7.11)$$

с  $t_p$  (приложение 1). Если  $t > t_p$ , то с доверительной вероятностью  $P$  можно считать, что измерения  $x^*$  является грубая ошибка, но и при  $t \leq t_p$  нельзя говорить об отсутствии грубой ошибки, а можно только говорить о недостаточных основания для исключения данного измерения. После исключения грубой ошибки оценки  $\bar{x}$  и  $S_x$  необходимо вновь пересчитать и рассмотреть вопрос о промахах в оставшейся выборке.

### 7.2.2 Статистические критерии различия

В ходе исследований, особенно промышленных, накапливается значительный объем экспериментального материала в виде показателей обогащения, характеристик полезного ископаемого и т.д., которые соответствуют одинаковым или различным технологическим режимам, конструкциям аппаратов и типам полезных ископаемых. При этом возникают следующие вопросы:

- однородны ли показатели обогащения, полученные при различных режимах или конструкциях аппаратов, или эти выборки относятся к различным статистическим совокупностям;

- одинаково ли стабильны результаты, полученные при различных режимах, или в каком-то случае показатели менее стабильны и разброс данных больше;

- относится ли та или иная проба полезного ископаемого или результат к данной статистической совокупности;
- соответствует ли данное эмпирическое распределение тому или иному теоретическому распределению;
- адекватна ли выбранная математическая модель экспериментальным данным.

Эти вопросы решаются проверкой статистической гипотезы о принадлежности всех полученных данных к одной генеральной совокупности. Общий подход заключается в проверке нулевой гипотезы  $H_0$  об отсутствии реального различия между экспериментальными результатами, разброс которых объясняется случайными факторами, обуславливающими ошибку воспроизведимости [3, 5, 11-14].

*Нулевой гипотезой* ( $H_0$ ) называется выдвинутая гипотеза, отклонения от которой считаются случайными, противоположная ей гипотеза ( $H_1$ ) - альтернативной или конкурирующей.

*Критерий проверки гипотезы* позволяет выявить по результатам опытов, верна или неверна данная гипотеза. Критерий составляется на основе статистики  $Q_n = Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , распределение которой известно (нормальное,  $t$ ,  $F$  или  $\chi^2$ ). Критерий разделяет множество возможных значений статистики на область принятия гипотезы и область её неприятия (критическую). В случае попадания статистики в область неприятия гипотезы  $H_0$  она отвергается. Возможны такие случаи:

- гипотеза  $H_0$  верна и принимается в соответствии с критерием;
- гипотеза  $H_0$  неверна и отвергается в соответствии с критерием;
- гипотеза  $H_0$  верна, но её отвергают в соответствии с критерием (ошибка первого рода);
- гипотеза  $H_0$  неверна, но её принимают (ошибка второго рода).

Справедливость нулевой гипотезы проверяется расчётом вероятности того, что из-за случайности выборки различия могут достичь фактически наблюдаемой величины; если эта вероятность окажется очень маленькой, то нулевая гипотеза отвергается (т.е. маловероятно, что различия вызываются случайными величинами, а не реальными расхождениями). Вероятность  $P$ , которую принимают за основу при статистической гипотезе, определяет уровень значимости.

По результатам, полученным для двух выборок, рассчитывают значение некоторой контрольной величины  $\lambda$  и определяют область  $A$ , внутри которой следует ожидать  $\lambda$  с определённой вероятностью  $P$ . Если контрольная величина  $\lambda$  лежит вне области  $A$ , то выбранная гипотеза отвергается, различие между полученными величинами считается статистически значимым. Если контрольная величина  $\lambda$  лежит в области  $A$ , то выбранная гипотеза принимается. Вопрос отбросить или принять статистическую гипотезу решают на основе выборочных измерений, поэтому следует оценить возможность ошибки. Если, например, с вероятностью  $P$  отвергают гипотезу о том, что два средних значения  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат к одной и той же генеральной совокупности, то из этого можно

сделать вывод о различии этих значений. Вероятность того, что оба средних значения относятся одной и той же генеральной совокупности, будет  $\alpha = 1 - P$ .

Обычно задают вероятность ошибки первого рода  $\alpha$ , которую называют уровнем значимости, ошибка второго рода определяется вероятностью  $1 - \beta$ , где  $\beta$  - вероятность того, что ошибка не будет допущена. Это - мощность критерия. Уровень значимости  $\alpha$  принимают равным 0,05; 0,1; 0,01 или 0,005. Выбор доверительной вероятности  $P$  определяется конкретными задачами исследования. При этом следует учитывать, что с уменьшением  $\alpha$  возрастает вероятность ошибки второго рода.

При принятии или отбрасывании гипотезы используют три правила:

- проверяемая гипотеза отбрасывается, если ошибка первого рода может появиться в менее чем  $100\alpha = 1\%$  всех случаев, то есть  $P \geq 0,99$ . Тогда рассмотренная разница является значимой;

- проверяемая гипотеза принимается, если ошибка первого рода может появиться в более чем  $100\alpha = 5\%$  всех случаев, то есть  $P \leq 0,95$ . Тогда рассмотренная разница является незначимой;

- отвергаемую гипотезу следует дополнительно обсудить, если число возможных ошибок первого рода лежит в интервале между 5 и 1% ( $0,95 < P < 0,99$ ). В данном случае необходимо провести дополнительные исследования.

Суть ошибок первого и второго рода можно пояснить следующим примером. Пусть нулевая гипотеза  $H_0$  означает, что содержание полезного компонента в концентрате удовлетворяет требованиям потребителя (условиям поставки). Если поставка концентрата отклоняется, хотя  $H_0$  верна, то рискует производитель - ошибка первого рода. Если поставка концентрата принимается, хотя  $H_0$  неверна, то рискует потребитель - ошибка второго рода.

Таким образом, гипотеза либо принимается, либо отвергается. Принятие гипотезы не означает того, что она является единственной правильной. Принятая статистическая гипотеза - это правдоподобное не противоречащее опыту утверждение.

### 7.2.3 Критерий Стьюдента ( $t$ -критерий)

#### *Сравнение средних значений*

При сравнении средних значений рассматривают совместно доверительные интервалы двух статистических совокупностей. Для оценки доверительного интервала используют  $t$ -критерий [5,9].

Пусть имеются две статистические выборки:  $x$  - с параметрами  $\bar{X}$  и  $S_x$ , полученные при  $n_x$  измерений и  $y$  - с параметрами  $\bar{Y}$  и  $S_y$  при  $n_y$  измерений. Распределения  $x$  и  $y$  близки к нормальному. Нулевая гипотеза состоит в предположении, что математические ожидания  $\mu_x$  и  $\mu_y$  равны, то есть  $\mu_x - \mu_y = 0$ .

Если дисперсии  $S_x^2$  и  $S_y^2$  отличаются незначительно, рассчитывают средневзвешенное двух дисперсий и параметр  $t$ :

$$\bar{S}^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}; \quad (7.12)$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{S}^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}}. \quad (7.13)$$

Число степеней свободы:

$$f = n_x + n_y - 2. \quad (7.14)$$

Если  $t > t_{95\%}$ , различие между  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  значимое.

**Пример 7.1.** При испытании двух блоков были получены такие результаты по зольности угольных концентратов (табл. 7.1).

Таблица 7.1 - Результаты испытания блоков

n	I блок			II блок		
	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	7,10	- 0,06	0,0025	6,95	0,05	0,0025
2	7,05	- 0,10	0,0100	6,80	- 0,10	0,0100
3	7,20	0,05	0,0025	7,05	0,15	0,0225
4	7,15	-	-	7,00	0,10	0,0100
5	7,30	0,15	0,0225	6,90	-	-
6	7,15	-	-	6,70	- 0,20	0,0400
7	7,10	- 0,05	0,0025	6,85	- 0,05	0,0025
8	-	-	-	6,95	0,05	0,0025
$\Sigma$	50,05	-	0,0400	55,20	-	0,0900
Среднее	7,15	-	-	6,90	-	-

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Выборочные дисперсии блоков I и II:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{0,0400}{7 - 1} = 0,0067;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{0,0900}{8 - 1} = 0,0129.$$

\* Средневзвешенная двух дисперсий:

$$\bar{S}^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2} = \frac{(7 - 1) \cdot 0,0067 + (8 - 1) \cdot 0,0129}{7 + 8 - 2} = 0,0100.$$

\* Критерий Стьюдента

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{S}^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}} = \frac{7,15 - 6,90}{0,010} \cdot \sqrt{\frac{7 \cdot 8}{7 + 8}} = 4,83.$$

При  $f = n_x + n_y - 2 = 7 + 8 - 2 = 13$  по таблице значений критерия Стьюдента (приложение 1) находим  $t_{0,95} = 2,16$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $t$  больше табличного и, соответственно, различие между зольностью в блоках нужно считать значимым.

### *Сравнение сопряжённых пар*

Работу двух аппаратов или два технологических режима часто приходится сравнивать в очень изменяющихся условиях, например при изменении качества полезного ископаемого, температуры пульпы и т. п. Попарное сравнение позволяет исключить вариацию, связанную с влиянием других факторов.

При этом оценивается не различие средних  $\bar{x}$  -  $\bar{y}$ , а разница пар наблюдений  $\Delta_i = x_i - y_i$ . Вариационный ряд  $\Delta$  рассматривается как самостоятельный со средним  $\bar{\Delta}$ , дисперсией  $S_{\bar{\Delta}}^2$  и числом степеней свободы  $f = n - 1$ , где  $n$  - число сопряжённых пар наблюдений. Тогда рассчитывают дисперсию и критерий Стьюдента:

$$S_{\bar{\Delta}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n(n-1)}; \quad (7.15)$$

$$t_{\bar{\Delta}} = \frac{|\bar{\Delta}|}{S_{\bar{\Delta}}} \succ t_p. \quad (7.16)$$

Если  $t_{\bar{\Delta}} \succ t_p$ , различие считают значимым, и наоборот.

**Пример 7.2.** Сравнивались два режима флотации угольных шламов. При равных условиях по исходному сырью получены концентраты с зольностью, приведенной в табл. 7.2.

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Выборочная дисперсия вариационного ряда  $\bar{\Delta}$ :

$$S_{\bar{\Delta}}^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1,12}{10(10-1)}} = 0,11.$$

\* Критерий Стьюдента:

$$t_{\bar{\Delta}} = \frac{|\bar{\Delta}|}{S_{\bar{\Delta}}} = \frac{0,7}{0,11} = 6,36.$$

Таблица 7.2 - Результаты опробования режимов флотации

$n$	$x_i$	$y_i$	$\Delta_i = x_i - y_i$	$\Delta_i - \bar{\Delta}$	$(\Delta_i - \bar{\Delta})^2$
1	10,1	9,3	0,8	0,1	0,01
2	9,8	9,1	0,7	-	-
3	11,0	9,5	0,5	- 0,2	0,04
4	11,3	9,8	0,5	- 0,2	0,04
5	10,5	10,0	0,5	- 0,2	0,04
6	9,2	9,0	0,2	- 0,5	0,25
7	10,8	10,2	0,6	- 0,1	0,01
8	10,6	9,6	1,0	0,3	0,09
9	10,4	9,7	0,7	-	-
10	11,3	9,8	1,5	0,8	0,64
$\Sigma$	105,0	96,0	7,0	-	1,12
Среднее	10,5	9,6	0,7	-	-

При  $f = n - 1 = 10 - 1 = 9$  по таблице значений критерия Стьюдента (приложение 1) находим  $t_{0,99} = 3,25$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $t$  больше табличного и, соответственно, различие следует считать значимым.

#### 7.2.4 Последовательный анализ Вальда

Так как внедрение нового метода в промышленность требует определённых затрат, часто возникает необходимость повышения эффективности процесса не менее, чем на определённую величину  $\Delta$ , при которой данное внедрение становится оправданным. Если при этом каждый эксперимент достаточно сложный и трудоёмкий, возникает задача сведения к минимуму количества таких экспериментов при условии подтверждения гипотезы  $\bar{y} \geq \bar{x} + \Delta$  с заданной доверительной вероятностью  $P$  [5,11].

При использовании метода последовательного анализа математическая обработка результатов выполняется не после завершения серии опытов, а после каждого опыта. В результате этой обработки выясняется, можно ли принять одну из конкурирующих гипотез (и какую) или продолжить исследования. Число

необходимых наблюдений при этом оказывается в среднем в три раза меньше, чем при классическом анализе. Вальд показал, что при задании ошибки первого рода  $\alpha$  и ошибки второго рода  $\beta$ , можно получить в координатах  $\Sigma y_i - n_y$  три области, как показано на рис. 7.2.

Уравнения линий имеют вид:

$$L_0 = an - b; \quad (7.17)$$

$$L_1 = an + b, \quad (7.18)$$

$$\text{где } a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}; \quad b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}. \quad (7.19)$$

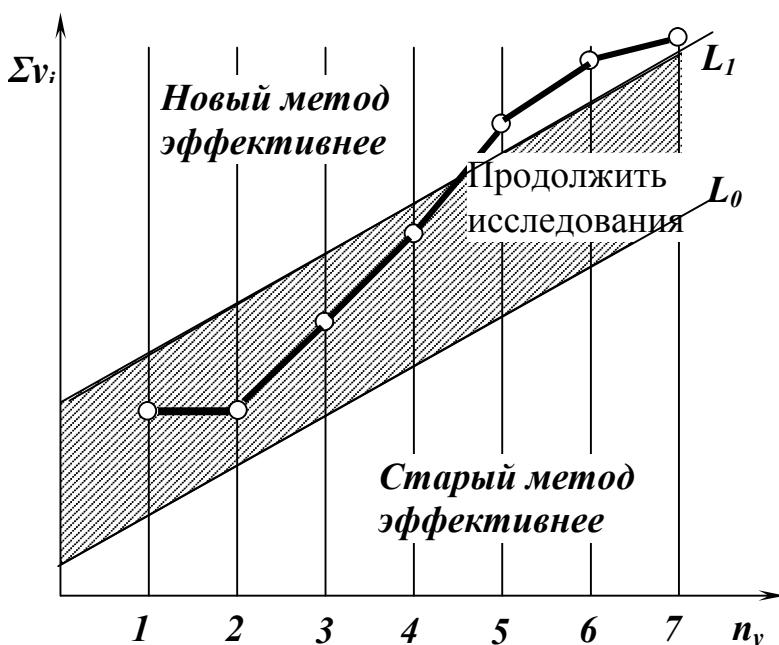


Рис. 7.2 - Сравнение вариантов при последовательном анализе Вальда.

**Пример 7.3.** Расходы при внедрении системы автоматизации одного из технологических узлов обогатительной фабрики окупятся, если извлечение полезного компонента повысится не менее, чем на  $\Delta\varepsilon = \bar{y} - \bar{x} = 2\%$ . Среднее извлечение по фабрике составляет  $\bar{x} = 82\%$  при стандартном отклонении  $S_x = 0,8\%$ . Поскольку исследование с целью установления рациональности внедрения системы автоматизации технологического узла оказалось трудоёмким было принято решение использовать метод Вальда.

Выполняем расчёты следующих параметров:

\* Дисперсия  $S_y$  рассчитывается с использованием коэффициента вариации  $V_x$ :

$$V_x = S_{\bar{x}} / \bar{x} = 0,8 / 82 = 0,00976 = 0,976\%.$$

Примем, что во всех случаях  $V_y \leq V_x$ , тогда при

$$\bar{y} = \bar{x} + \Delta\varepsilon = 82 + 2 = 84$$

дисперсия  $S_y$

$$S_y = \bar{y} \cdot V_x = 84 \cdot 0,00976 = 0,82 \text{ \%}.$$

Выберем  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$  и рассчитаем коэффициенты  $a$  и  $b$ .

$$a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} = \frac{82 + 84}{2} = 83,$$

$$b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} = \frac{0,82^2}{2} \cdot \ln \frac{0,99}{0,01} = 1,55$$

Результаты расчётов статистической оптимизации процесса приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3 - Результаты исследования статистической оптимизации процесса

№ опыта	1	2	3	4	5	6
$Y_i$	83,1	83,5	83,8	84,2	84,0	84,3
$L_1 = an + b$	84,55	167,55	250,55	333,55	416,55	499,55
$L_0 = an - b$	81,45	164,45	247,45	330,45	413,45	496,45
$\Sigma Y_i$	83,1	166,6	250,4	334,6	418,6	502,9

Результаты исследований показывают, что внедрение автоматизации технологического процесса целесообразно, так как уже на четвёртом опыте система оптимизации показывает эффект, а пятый и шестой опыты подтверждают наличие эффекта.

### 7.2.5 Критерий Фишера (F-критерий)

#### Парное сравнение дисперсий

Две выборочные совокупности могут не различаться значимо по своему среднему значению, но различаться по стандартным отклонениям (или дисперсиями). Задача сравнения дисперсий возникает при сравнении точности различных приборов или методов измерения, а также в рассмотренных выше применениях  $t$ -критерия, когда приходится предварительно проверять равенство дисперсий [5,11].

Если разница лежит в пределах возможных случайных колебаний, то оба распределения относятся к одной и той же генеральной совокупности. Нулевая гипотеза состоит в предположении, что  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ . Для решения вопроса о случайному или неслучайному различии дисперсий рассматривают отношение большей эмпирической дисперсии к меньшей:

$$S_1^2 / S_2^2 = F \succ 1. \quad (7.20)$$

Затем задают желаемую надёжность вывода  $P = 0,95$  или  $P = 0,99$  и по таблице (приложение 2) критическое значение отношения  $F$ , соответствующее данным числам степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$  (число степеней свободы  $f_1$  относится к большей эмпирической дисперсии). Если отношение (7.20), рассчитанное по

результатам исследований, будет больше критического значения, то различие дисперсий считают неслучайным (значимым) с надёжностью  $P$ .

**Пример 7.4.** При определении содержания меди в концентрате использованы два метода анализа. Первым методом анализа выполнено 5 измерений, вторым - 8. Результаты исследования методов анализа приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4 - Результаты исследования методов анализа

n	I анализ			II анализ		
	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	27,5	0,04	0,0016	27,9	0,85	0,7225
2	27,0	- 0,44	0,1936	26,5	- 0,55	0,3025
3	27,3	- 0,14	0,0196	27,2	0,15	0,0225
4	27,6	0,16	0,0256	26,5	- 0,55	0,3025
5	27,8	0,36	0,1296	27,0	- 0,05	0,0025
6	-	-	-	27,4	0,35	0,1225
7	-	-	-	27,3	0,25	0,0625
8	-	-	-	26,8	0,25	0,0625
$\Sigma$	137,2	-	0,3700	216,4	-	1,6000
Среднее	27,44	-	-	27,05	-	-

Нулевая гипотеза состоит в предположении, что между методами анализа нет различия в отношении воспроизводимости стабильности анализов.

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Выборочные дисперсии I и II:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{0,37}{5 - 1} = 0,0925;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{1,60}{8 - 1} = 0,2657.$$

\* Отношение большей эмпирической дисперсии к меньшей:

$$F = S_y^2 / S_x^2 = 0,2657 / 0,0925 = 2,87.$$

При  $f_x = 4$  и  $f_y = 7$  по таблице значений критерия Фишера (приложение 2) находим  $F_{(0,95, 4, 7)} = 6,09$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $F$  меньше табличного и, соответственно, предположение, что между методами анализа нет различия в отношении воспроизводимости стабильности анализов, не опровергается.

### 7.2.6 Критерий Кохрена (G-критерий)

#### *Сравнение нескольких дисперсий*

Если между несколькими приборами (или несколькими сериями измерений) обнаружен прибор (серия измерений), эмпирическая дисперсия  $S_1^2$  которого заметно отличается от других, необходимо выяснить, можно ли считать отличие выделенной дисперсии  $S_1^2$  от других случайным или это различие следует считать значимым [5,11,14]. Каждым из  $m$  исследуемых приборов делают одинаковое число  $n$  измерений, подсчитывают эмпирические дисперсии  $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$  (при этом  $S_1^2 \prec S_i^2$ ) и сравнивают наибольшую дисперсию с суммой всех дисперсий:

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}. \quad (7.21)$$

Если отношение (7.21) будет больше критического (приложение 3), то отличие первой дисперсии от других является существенным, то есть первый прибор (первая серия измерений) обладает меньшей точностью, чем другие. В противном случае для такого утверждения нет достаточных оснований.

**Пример 7.5.** Каждая из четырёх лабораторий выполнила анализ 17 проб шихты для коксования с целью определения процентного содержания серы при одних и тех же условиях. Дисперсии оказались равными соответственно 0,40; 0,25; 0,34 и 0,21. Можно ли считать, что все измерения обеспечивают одинаковую воспроизводимость результатов, то есть различие между дисперсиями незначимое?

Выполняем расчёт критерия  $G$ :

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} = \frac{0,40}{0,40 + 0,25 + 0,34 + 0,21} = 0,3333.$$

При числе степеней свободы  $f = 16$  и числе выборок  $k = 4$  по таблице значений критерия Кохрена (приложение 3) находим  $G_{(0,95; 17; 4)} = 0,4884$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $G$  меньше табличного. Следовательно, можно сделать вывод, что различия между дисперсиями незначимые и все измерения обеспечивают одинаковую воспроизводимость результатов.

## 7.2.7 Критерий Пирсона ( $\chi^2$ -критерий)

### *Сравнение распределений*

Если необходимо сравнить не только основные параметры, но и все распределения, применяют критерий Пирсона  $\chi^2$  (приложение 4). При помощи этого критерия можно доказать принадлежность данной выборки к нормальному распределению; доказать, что два эмпирических распределения относятся к одному и тому же виду; определить значимо ли отличается частота появления какого-либо события ожидаемого значения во всех интервалах, где эти значения предсказаны на основе теоретических представлений или математической модели [5,11].

Нулевая гипотеза состоит в предположении, что между эмпирическими и теоретическими распределениями не существует никакого различия. Выборку  $n$  значений делят на  $m$  классов, при этом должно быть  $m \approx \sqrt{n}$ . Для каждого такого класса определяют абсолютную частоту  $h$  содержащихся в нем значений измеряемой величины и сопоставляют её с частотой  $h_t$ , которая теоретически ожидается в соответствии с моделью:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t}. \quad (7.22)$$

Если теоретически найденное значение  $h_t$  для отдельных классов достаточно велико ( $h_t > 5$ ), то найденное значение будет принадлежать  $\chi^2$ -распределению с числом степеней свободы  $f = m - k$ . При этом  $k$  задаётся числом параметров, необходимых для характеристики выборки. Для нормального распределения  $k = 3$ .

Если при проверке следует, что  $\chi^2 > \chi^2_{(P;f)}$ , то проверяемая гипотеза отвергается, то есть между эмпирическими и теоретическими распределениями существует значимое различие. Различие незначимое, если  $\chi^2 < \chi^2_{(P;f)}$ .

**Пример 7.6.** На обогатительной фабрике за сутки тремя сменами выпущено сверхплановой продукции соответственно: 2, 13 и 15 т. Можно ли считать различия между количеством сверхплановой продукции по сменам случайным? Данные о работе смен приведены в табл. 7.5.

Если связи между количеством сверхплановой продукции и временем работы смены нет, то количество сверхплановой продукции должна быть одинаковым для каждой смены и равным  $h_t = 30/3 = 10$  (ожидаемое количество сверхплановой продукции).

Таблица 7.5 - Результаты работы смен

Выпуск сверхплановой продукции, т	Смена			Всего
	I	II	III	
Фактический	2	13	15	30
Ожидаемый	10	10	10	30

*Выполняем расчёт критерия  $\chi^2$ :*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t} = \frac{(2-10)^2}{10} + \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(15-10)^2}{10} = 9,8.$$

*Для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и числа степеней свободы  $f = 3 - 1 = 2$  параметр  $\chi^2 = 6,0$ . Значит, выпуск сверхплановой продукции зависит от времени работы смены.*

### **7.2.8 Дисперсионный анализ**

Ошибка воспроизводимости экспериментов, которая оценивается с помощью дисперсии, может быть следствием не одной, а нескольких причин или операций. Так, например, при исследовании на обогатимость дисперсия результатов может складываться из ряда компонентов: химического анализа, отбора проб и обогатительного эксперимента. Если известна величина компонентов дисперсии, совершаются соответствующие операции, чтобы наиболее эффективно снизить ошибку эксперимента.

При полупромышленных и промышленных испытаниях вопрос о влиянии полноты усреднения и однородности проб приобретает первостепенное значение. Важность раздельной оценки дисперсий, связанных с вариацией сортности полезного ископаемого, точностью поддержания режима обогащения и ошибкой анализа, определяется необходимостью подбора такого режима обогащения, который наряду с высокими средними показателями обеспечивает стабильность результатов при изменении качества полезного ископаемого.

Решение подобных задач составляет предмет дисперсионного анализа. С помощью дисперсионного анализа определяются дисперсии, обусловленные действием каждого фактора в отдельности и их взаимодействием, и оценивается статистическая значимость этих величин с учётом ошибки воспроизводимости.

Дисперсионный анализ можно выполнять только при следующих условиях:

- серии измерений можно рассматривать как случайные выборки из генеральных совокупностей, которые подчинены нормальному распределению;
- дисперсии, обусловленные ошибками воспроизводимости, для всех серий измерений однородны. Если такой уверенности нет, необходимо проверить однородность дисперсий с использованием критериев Кохрена или Фишера.

#### **Однофакторный дисперсионный анализ**

Если наблюдается действие одного фактора (простой случай), задачу можно сформулировать следующим образом: пусть наблюдают  $m$  независимых нормально распределённых величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , и при этом предполагают, что все они имеют одно и тоже среднее квадратическое отклонение  $S$ . Над каждым переменным выполняется  $n$  наблюдений (табл. 7.6).

Таблица 7.6 - Результаты наблюдений

№ испытания, $i$	№ прибора (уровень фактора), $j$			
	1	2	3	$m$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1m}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2m}$
...	...	...	...	...
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nm}$
Групповая средняя, $\bar{x}_{epj}$	$\bar{x}_{ep1}$	$\bar{x}_{ep1}$	...	$\bar{x}_{epm}$

В задаче необходимо на уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних при допущении, что групповые генеральные дисперсии хотя и неизвестны, но одинаковы.

Для решения этой задачи вводятся:

- *общая сумма квадратов* отклонений наблюдаемых значений признака от общей средней:

$$S_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2; \quad (7.23)$$

- *факторная сумма квадратов* отклонений групповых средних от общей средней (характеризует рассеяние между группами):

$$S_{\text{факт}} = \delta \sum_{j=1}^{\delta} (\bar{x}_{\text{групп}} - \bar{x})^2; \quad (7.24)$$

- *остаточная сумма квадратов* отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней (характеризует рассеяние в середине группы):

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}}. \quad (7.25)$$

Для вычисления общей и факторной сумм более удобны такие формулы:

$$S_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^m P_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn}, \quad (7.26)$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum_{j=1}^m R_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn}, \quad (7.27)$$

где  $P_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}^2$  - сумма квадратов наблюдаемых значений признака на уровне  $m_j$ ;

$R_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$  - сумма наблюдаемых значений признака на уровне  $m_j$ .

Если наблюдаемые значения признака являются сравнительно большими числами, то для упрощения вычислений вычитают из каждого значения одно и тоже число  $C$ , которое примерно равно общей средней. Если уменьшенные значения  $y_{ij} = x_{ij} - C$ , то

$$S_{\text{фак}} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (7.28)$$

$$S_{\text{ост}} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (7.29)$$

где  $Q_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}^2$  - сумма квадратов уменьшенных значений признака на уровне  $m_j$ ;  $T_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$  - сумма уменьшенных значений признака на уровне  $m_j$ .

Факторную и остаточную сумму делят на соответствующее число степеней свободы и находят факторную и остаточную дисперсии:

$$S_{\text{фак}}^2 = \frac{S_{\text{фак}}}{m-1}, \quad (7.30)$$

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{S_{\text{ост}}}{m(n-1)}. \quad (7.31)$$

После этого сравнивают факторную и остаточную дисперсии по критерию Фишера:

$$F_{\text{фак}} = S_{\text{фак}}^2 / S_{\text{ост}}^2. \quad (7.32)$$

Если  $F_{\text{фак}} < F_{\text{кр}}$  - различие групповых средних незначимо.

Если  $F_{\text{фак}} > F_{\text{кр}}$  - различие групповых средних значимо.

Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то отсюда следует справедливость нулевой гипотезы о равенстве групповых средних, поэтому дальнейшие вычисления (сравнение дисперсий с помощью критерия  $F$ ) лишние.

**Пример 7.7.** При совместном анализе точности группы измерительных приборов (потенциометров) решается вопрос: можно ли считать их систематические ошибки одинаковыми. Число потенциометров -  $m$  ( $m = 3$ ) и каждый из них измеряет  $pH$  одной и той же пульпы  $n$  раз ( $n = 4$ ). Результаты исследований приведены в табл. 7.7.

Таблица 7.7 - Результаты исследований

Число измерений, $n$	Число уровней фактора (число потенциометров), $m$		
	1	2	3
1	13,5	13,0	12,1
2	13,2	12,4	12,2
3	13,1	12,6	13,4
4	13,0	12,0	13,1
$\Sigma$	58,2	50,0	50,8
Среднее	13,2	12,5	12,7

Для упрощения вычислений вычитаем из каждого наблюдаемого значения общую среднюю  $\bar{x} = (13,2 + 12,5 + 12,7) / 3 = 12,8$  и переходим к уменьшенным величинам, например,  $y_{11} = x_{11} - 12,8 = 13,5 - 12,8 = 0,7$  и т.д.

Составляем расчётную таблицу (табл. 7.8) и с использованием итогового столбца вычисляем общую, факторную и остаточную суммы квадратов отклонений при числе уровней фактора  $m = 3$  и числе измерений на каждом уровне  $n = 4$ .

Таблица 7.8 - Расчётная таблица

№ опыта	Уровни фактора						Итоговый столбец	
	$m_1$		$m_2$		$m_3$			
	$y_{i1}$	$y_{i1}^2$	$y_{i2}$	$y_{i2}^2$	$y_{i3}$	$y_{i3}^2$		
1	0,7	0,49	0,2	0,04	- 0,7	0,49		
2	0,4	0,16	- 0,4	0,16	- 0,6	0,36		
3	0,3	0,09	- 0,2	0,04	0,6	0,36		
4	0,3	0,09	- 0,8	0,64	0,3	0,09		
$Q_j$		0,78		0,88		1,30	$\sum Q_j = 2,96$	
$T_j$	1,6		- 1,2		- 0,4		$\sum T_j = 0$	
$T_j^2$	2,56		1,44		1,69		$\sum T_j^2 = 5,69$	

Выполняем расчёт следующих параметров:

\*Общая сумма квадратов отклонений:

$$S_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = 2,96 - 0 = 2,96$$

\*Факторная сумма квадратов отклонений:

$$S_{\text{фак}} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = \frac{5,69}{4} - 0 = 1,42$$

\* Остаточная сумма квадратов отклонений:

$$S_{o\tilde{n}\tilde{o}} = S_{i\tilde{a}\tilde{u}} - S_{\hat{o}\hat{a}\hat{e}\hat{o}} = 2,96 - 1,42 = 1,54.$$

\* Факторная дисперсия:

$$S_{\hat{o}\hat{a}\hat{e}\hat{o}}^2 = \frac{S_{\hat{o}\hat{a}\hat{e}\hat{o}}}{m-1} = \frac{1,42}{3-1} = 0,71.$$

\* Остаточная дисперсия:

$$S_{o\tilde{n}\tilde{o}}^2 = \frac{S_{o\tilde{n}\tilde{o}}}{m(n-1)} = \frac{1,54}{3(4-1)} = 0,17.$$

Сравнение факторной и остаточной дисперсии с помощью критерия Фишера:

$$F_{i\tilde{a}\tilde{a}\tilde{e}} = S_{\hat{o}\hat{a}\hat{e}\hat{o}}^2 / S_{o\tilde{n}\tilde{o}}^2 = 0,71 / 0,17 = 4,17.$$

По таблице значений критерия Фишера (приложение 2) при числе степеней свободы числителя  $f_1 = 2$ , а знаменателя  $f_2 = 9$  находим  $F_{(0,95; 2; 9)} = 4,26$ .

Так как  $F_{i\tilde{a}\tilde{a}\tilde{e}} < F_{\hat{e}p}$ , то нет оснований отвергать нулевую гипотезу и, соответственно, различие между групповыми средними незначимо. То есть, все группы наблюдений извлечены из одной генеральной совокупности.

### Двухфакторный дисперсионный анализ

При увеличении числа факторов, влияющих на результаты исследования, процедура дисперсионного анализа принципиально не меняется, однако расчеты усложняются.

Задача двухфакторного дисперсионного анализа (двухступенчатой классификации, кросс-классификации) связана с экспериментом, в котором одновременно действуют два фактора  $A$  и  $B$ , которые варьируют в  $k$  и  $m$  уровнях, соответственно.

Оценку воспроизводимости результатов исследований с помощью двухфакторного дисперсионного анализа рассмотрим на примере.

**Пример 7.8.** Исследовались три реагентных режима флотационного процесса (фактор  $A$ ) для четырёх проб полезного ископаемого (фактор  $B$ ). На каждой пробе при различных режимах было проведено по два опыта. Необходимо оценить влияние этих факторов на изменение извлечение полезного компонента в концентрате. Результаты исследований приведены в расчётной табл. 7.9.

Таблица 7.9 - Результаты опробования и расчёта

№ режима (фактор $A$ )	№ пробы полезного ископаемого (фактор $B$ )				$X_A$	$X_B$
	1	2	3	4		
1	2	3	2	4		
	2	4	3	2		
	$X_{11} = 4$	$X_{12} = 7$	$X_{13} = 5$	$X_{14} = 6$	22	484
2	1	0	1	-1		
	2	-1	1	-1		
	$X_{21} = 3$	$X_{22} = -1$	$X_{23} = 2$	$X_{24} = -2$	2	4
3	3	6	-2	1		
	2	5	1	2		
	$X_{31} = 5$	$X_{32} = 7$	$X_{33} = -1$	$X_{34} = 3$	18	324
$X_B$	12	17	6	7	42	1764
$X_B^2$	144	289	36	49	518	300/160

Расчёт проводится по формулам, приведенным в табл. 7.10.

Таблица 7.10 - Расчётные формулы

Рассеивание	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия
Между столбцами $A$	$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{X^2}{km}$	$f_A = k - 1$	$S_A^2 / f_A$
Между строками $B$	$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{X^2}{km}$	$f_B = m - 1$	$S_B^2 / f_B$
Взаимодействие факторов $AB$	$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{X^2}{km} - (S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2)$	$f_{AB} = (k - 1)(m - 1)$	$S_{AB}^2 / f_{AB}$
Воспроизведимость	$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2}{n}$	$f_Z = km \times (n - 1)$	$S_Z^2 / f_Z$
Сумма	$S^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{X^2}{kmn}$	$f = km \times (n - 1)$	$S^2 / f$

$X_A$  - сумма всех значений строки  $A$ ;  $X_B$  - сумма всех значений столбца  $B$ ;  $X$  - сумма всех значений таблицы;  $n$  - число значений в каждой клетке.

С использованием формул табл. 7.10 выполняем расчёт следующих параметров:

\* Средние арифметические:

$$X = \sum_{a=1}^k X_A = \sum_{b=1}^m X_B = 22 + 2 + 18 = 12 + 17 + 6 + 7 = 42;$$

$$\sum_{a=1}^k X_A^2 = 484 + 4 + 324 = 812;$$

$$\sum_{b=1}^m X_B^2 = 144 + 289 + 36 + 49 = 518;$$

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2 = 4^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + (-1)^2 + 3^2 = 300;$$

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 1^2 + 2^2 = 160.$$

\* Сумма квадратов, характеризующая рассеяние отдельных наблюдений под влиянием:

- фактора A:

$$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{\left( \sum_{a=1}^k X_A \right)^2}{kmn} = \frac{812}{4 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 28,00;$$

- фактора B:

$$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{\left( \sum_{b=1}^m X_B \right)^2}{kmn} = \frac{518}{3 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 12,83;$$

- случайных погрешностей:

$$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2}{n} = 160 - \frac{300}{2} = 10,00;$$

- взаимодействия факторов:

$$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\left( \sum_{a=1}^k X_A \right)}{kmn} - \left( S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2 \right) = \\ = 160 - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} - (28 + 12 + 10) = 36,50.$$

\*Число степеней свободы:

$$f_A = k - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$f_B = m - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$f_{AB} = f_A \cdot f_B = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$f_Z = km(n - 1) = 3 \cdot 4 \cdot (2 - 1) = 12.$$

\*Средневзвешенные выборочные дисперсии:

$$\bar{S}_A^2 = S_A^2 / f_A = 28 / 2 = 14,00;$$

$$\bar{S}_B^2 = S_B^2 / f_B = 12,83 / 3 = 4,28;$$

$$\bar{S}_{AB}^2 = S_{AB}^2 / f_{AB} = 36,5 / 6 = 6,10;$$

$$\bar{S}_Z^2 = S_Z^2 / f_Z = 10 / 12 = 0,83.$$

\* Оценка значимости факторов  $A$ ,  $B$  и  $AB$  по величине рассчитанного критерия Фишера:

$$F_{A/Z} = \bar{S}_A^2 / \bar{S}_Z^2 = 14 / 0,83 = 16,87;$$

$$F_{B/Z} = \bar{S}_B^2 / \bar{S}_Z^2 = 4,28 / 0,83 = 3,55;$$

$$F_{AB/Z} = \bar{S}_{AB}^2 / \bar{S}_Z^2 = 6,1 / 0,83 = 7,35.$$

Сравниваем расчётные и табличные значения критерия Фишера и делаем выводы о значимости исследуемых факторов на флотационный процесс.

Результаты дисперсионного анализа приведены в табл. 7.11.

Таблица 7.11 - Результаты дисперсионного анализа

Расхождение	$S^2$	$f$	$\bar{S}^2$	$F_p$	$F_{99}$
По реагентным режимам ( $A$ )	28,00	2	14,00	16,87	6,93
По качеству проб руды ( $B$ )	12,83	3	4,28	3,55	5,95
По взаимодействию ( $AB$ )	36,50	6	6,10	7,35	4,82
Случайное	10,00	12	0,83		
Полное	87,33				

*Сравнение расчётных значений критерия Фишера ( $F_p$ ) и табличного ( $F_{99}$ ) показывает, что влияние фактора А и взаимодействия факторов АВ значимо ( $F_p > F_{99}$ ), фактора В - незначимо ( $F_p < F_{99}$ ).*

### **7.2.9 Корреляционный и регрессионный анализы**

Дисперсионный анализ позволяет подтвердить влияние тех или иных факторов на исследуемый результативный признак, но он не даёт возможности определить ни степень их влияния (тесноты связи), ни форму зависимости. Для решения этих опытов используют корреляционный анализ [5,11,12]. Чтобы изучить характер влияния одной величины  $x$  на другую  $y$  выполняют эксперимент, при котором измеряют значение величины  $y$  при различных значениях величины  $x$ . Если две переменные величины  $x$  и  $y$  зависят друг от друга так, что каждому значению одной из них соответствует вполне определённое значение другой, то между ними имеется функциональная связь. Эта связь может быть выражена уравнениями, вид которых определяется характером существующей связи.

Статистические методы позволяют определить уравнение связи, анализировать параметры процесса, построить математическую модель процесса, или, другими словами, установить взаимную зависимость между различными факторами и технологическими результатами процесса.

Статистическое исследование промышленного процесса включает:

- определение законов распределения параметров процесса для выяснения возможности применения тех или иных статистических методов обработки результатов;

- определение тесноты и формы связи между отдельными параметрами процесса;

- получение статистической модели процесса в виде регрессионного уравнения и оценка его адекватности;

- определение динамических характеристик процесса.

Корреляционный анализ позволяет оценивать тесноту связи различных параметров и факторов, влияющих на процесс. Этот метод широко применяется при исследованиях промышленных процессов. При определении коэффициента корреляции, если он достаточно высокий, можно получить информацию, которая позволяет выбрать основные регулировочные влияния на процесс, точки и методы измерения факторов, установить минимально необходимое число измеряемых параметров. Если коэффициент линейной корреляции по абсолютной величине мал, это свидетельствует о более сложной (нелинейной) зависимости между измеряемыми параметрами или о существенном влиянии на них других параметров. В этом случае необходимы вычисления более сложной зависимости в виде нелинейного уравнения. Получение таких уравнений методом наименьших квадратов является основой регрессионного анализа.

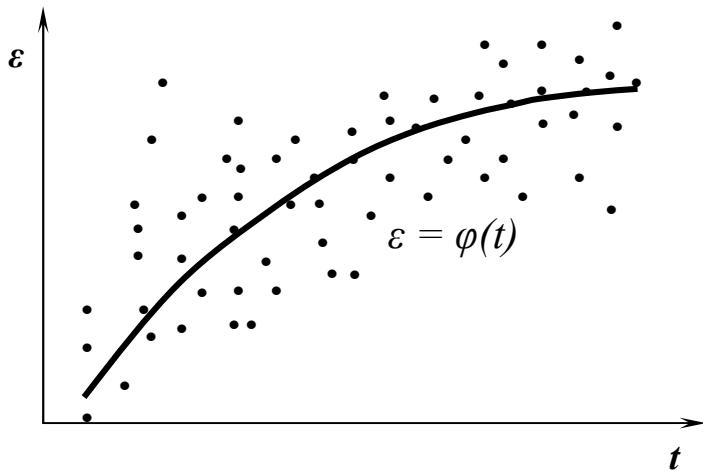
Для корреляционного и регрессионного анализов, как правило, используются данные промышленного процесса (записи в рабочих журналах) и данные специального опробования и специальных исследований.

Регрессионные модели можно использовать, главным образом, для анализа влияния отдельных факторов или их взаимодействия. Кроме того, на регрессионном анализе основано планирования экстремальных экспериментов.

### **Метод наименьших квадратов**

Метод наименьших квадратов применяется в тех случаях, когда искомые величины нельзя измерить непосредственно или представить в виде функций измеряемых величин. Для нахождения  $n$  неизвестных величин достаточно выполнить  $m$  серий наблюдений ( $m > n$ ), чтобы составить число уравнений, необходимое для определения неизвестных величин [8,11,12,14].

При экспериментальном изучении функциональной зависимости одной величины  $y$  от другой величины  $x$  выполняют ряд измерений величины  $y$  при различных значениях величины  $x$ . Например, на обогатительной фабрике получены различные извлечения при различной продолжительности процесса флотации  $t$ . Результаты исследований, представленные точками в координатах  $\varepsilon - t$ , создают корреляционное поле (рис. 7.3).



**Рис. 7.3 - Корреляционная связь между продолжительностью флотации и извлечением.**

Через это поле можно провести кривую и подобрать формулу, которая описывает существующую стохастическую зависимость таким образом, чтобы параметры этой кривой оказались наилучшим (из всех других кривых). Наличие случайных ошибок измерения указывает на нецелесообразность подбора такой формулы, которая точно бы описывала все опытные значения, то есть график искомой функции не должен проходить через все точки (рис. 7.3), а должен сглаживать случайные ошибки.

Аналитические выражения, которые выбираются на основе теоретических представлений или понятий простоты и удобства, имеют вид:

$$y = b_1x + b_0; \quad (7.33)$$

$$y = b_2x^2 + b_1x + b_0; \quad (7.34)$$

$$y = b_1 e^{b_2 x} + b_0; \quad (7.35)$$

$$y = 1/(b_1 x + b_0) \quad (7.36)$$

и т. д. В общем виде:

$$y = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_n). \quad (7.37)$$

Оценка параметров  $b_0, b_1, \dots, b_n$  определяется из условия, что сумма квадратов отклонений измеренных значений  $y_n$  от расчётных  $\varphi(x_n, a_0, a_1, \dots, a_n)$

$$S^2 = \sum_{n=1}^N [y_n - \varphi(x_n, b_0, b_1, \dots, b_n)]^2, \quad (7.38)$$

принимала бы наименьшее значение.

Размер  $S^2$  называется остаточной дисперсией и представляет собой сумму квадратов расстояний от каждой точки корреляционного поля до линии регрессии по вертикали. Нахождение значений параметров  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , при которых получается наименьшее значение функции:

$$S^2 = S^2(b_0, b_1, \dots, b_n) \rightarrow \min, \quad (7.39)$$

состоит в решении системы уравнений:

$$\frac{\partial S^2}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_1} = 0; \dots; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_n} = 0. \quad (7.40)$$

Система уравнений (7.40) решается в зависимости от вида функций (7.33) - (7.37). Наиболее приемлем тот вид формулы, для которого остаточная дисперсия  $S_{ad}^2$  (дисперсия адекватности) минимальна.

Точность аппроксимации оценивается остаточной дисперсией  $S_{ad}^2$ , которая определяется ошибкой измерения величины  $y$  при каждом значении  $x$  и, соответственно, не должна значительно отличаться от дисперсии воспроизводимости  $y$   $S_{\text{адм}}^2$ . Сравнение по критерию Фишера:

$$F = S_{ad}^2 / S_{\text{адм}}^2 \leq F_{P, f_1, f_2} \quad (7.41)$$

указывает на адекватность регрессионной модели.

В качестве меры оценки информативности уравнения регрессии принято отношение дисперсий:

$$F = S_{(\bar{y})}^2 / S_{ad}^2, \quad (7.42)$$

где  $S_{(\bar{y})}^2$  - рассеяние относительно среднеарифметического;

$S_{(\bar{y})}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  - средний квадрат отклонений (по ординате) точек корреляционного поля от линии  $\bar{y} = C$ ;

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \phi(x_i)]^2$$

- средний квадрат отклонений (по ординате) точек

корреляционного поля от эмпирической линии регрессии.

При оценке практической ценности уравнения регрессии важен не столько статистический уровень значимости, то есть превышение  $F_m$ , сколько числовое значение  $F$ . Не имеет смысла использовать уравнение регрессии, для которого  $F = 1,4$ , даже если оно формально значимо. Действительно, если квадратичная ошибка, которая определяет рассеяние результатов наблюдений относительно уравнения регрессии, меньше, чем ошибка, которая характеризует рассеяние результатов относительно среднего, всего в  $\sqrt{1,4} \approx 1,2$  раз, то ясно, что преимущества уравнения регрессии по сравнению с уравнением  $y = \bar{y}$  несущественны.

Регрессионные модели технологических процессов, полученные как в результате активного эксперимента, так и в результате пассивной обработки данных, могут служить для расчёта оптимальных значений параметров. Математические модели содержат существенную информацию о влиянии отдельных факторов и эффектов взаимодействия факторов. Размер коэффициентов уравнения оценивает степень влияния данного параметра или их взаимодействия. Существенную информацию дает знак, которой указывает направление изменения параметра оптимизации (его уменьшение «-» или увеличение «+»).

### ***Корреляция***

О наличии или отсутствии связи между двумя случайными величинами в первом приближении судят по корреляционному полю [4, 8, 9].

Для характеристики тесноты связи между величинами  $X$  и  $Y$  используют безразмерную величину - коэффициент корреляции  $r_{xy}$ , изменяющийся в пределах  $-1 < r_{xy} < 1$ . Положительная корреляция между случайными величинами характеризует такую вероятностную зависимость между ними, когда при росте одной вторая в среднем тоже будет расти. Отрицательная корреляция характеризует зависимость, когда при росте одной случайной величины вторая в среднем будет убывать. Величина коэффициента корреляции определяет тесноту связи между случайными величинами: чем ближе значения  $r_{xy}$ , тем теснее статистическая связь. Близкое к нулю значение  $r_{xy}$  свидетельствует об отсутствии линейной связи.

Коэффициент парной корреляции определяется по формулам:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n S_x S_y}, \quad (7.43)$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (7.44)$$

$$r_{xy} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \right] - \bar{x} \bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}}. \quad (7.45)$$

где  $n$  - число измерений;  $S_{\bar{x}}$  и  $S_{\bar{y}}$  - среднеквадратичные отклонения

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \quad \text{и} \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2}. \quad (7.46)$$

Надёжность статистических характеристик ослабевает с уменьшением объёма выборки. Принципиально возможны случаи, когда отклонение полученной величины коэффициента корреляции от нуля оказывается статистически незначимым. Связь можно считать достоверной, если:

$$|r| \geq t S_r, \quad (7.47)$$

где  $r$  - абсолютное значение коэффициента корреляции;  $t$  - критерий Стьюдента;  $S_r$  - среднеквадратичная ошибка коэффициента корреляции:

$$S_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}. \quad (7.48)$$

Критерий надёжности коэффициента корреляции:

$$\mu = |r| / S_r. \quad (7.49)$$

Если  $\mu > 2,6$ , связь между переменными считается значимой.

Практически во всех случаях статистических исследований реального процесса коэффициент корреляции является довольно грубой оценкой тесноты связи, которой имеет смысл только при линейной зависимости между параметрами.

**Пример 7.9.** На обогатительную фабрику поступает руда, содержащая два полезных компонента - минералы  $X$  и  $Y$ . При этом в партиях сырья с повышенным содержанием  $X$  обычно наблюдается и более высокое содержание  $Y$ , поэтому есть основания ожидать, что эти величины находятся в связи друг с другом. Анализы 10 проб руды приведены в столбцах 2 и 3 расчётной таблицы 7.12.

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Средние квадратические отклонения:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{271,75}{10} - 4,99^2} = 1,51;$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{31,82}{10} - 1,74^2} = 0,40.$$

\*Коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 \right] - \bar{x}\bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}} = \frac{\frac{92,28}{10} - 4,99 \cdot 1,74}{1,51 \cdot 0,40} = 0,90.$$

Таблица 7.12 - Исходные данные и результаты расчёта

<i>n</i>	<i>x<sub>i</sub></i>	<i>y<sub>i</sub></i>	<i>x<sub>i</sub></i> <sup>2</sup>	<i>y<sub>i</sub></i> <sup>2</sup>	<i>x<sub>i</sub>y<sub>i</sub></i>	<i>Y<sub>выч</sub></i>
1	6,7	2,4	44,89	5,76	16,08	2,15
2	5,4	1,5	29,16	2,25	8,10	1,84
3	7,2	2,3	51,84	5,29	16,56	2,27
4	6,4	1,9	40,96	3,61	12,16	2,07
5	3,9	1,6	15,21	2,56	6,24	1,48
6	2,2	1,1	4,84	1,21	2,42	1,07
7	5,8	2,0	33,64	4,00	11,60	1,93
8	4,3	1,6	18,49	2,56	6,88	1,57
9	4,6	1,7	21,16	2,89	7,82	1,64
10	3,4	1,3	11,56	1,69	4,42	1,36
$\Sigma$	49,9	17,4	271,75	31,82	92,28	17,38
Среднее	4,99	1,74	-	-	-	1,74

Полученный коэффициент корреляции достаточно высок, что указывает на наличие тесной связи между содержанием минералов *X* и *Y*. Найдём уравнение регрессии, которое позволяет вычислить значения наиболее вероятного содержания одного из минералов при известных значениях содержания второго.

\* Коэффициент регрессии:

$$r \frac{S_y}{S_x} = \frac{0,90 \cdot 0,40}{1,51} = 0,24.$$

\* Уравнение регрессии *Y* по *X*:

$$Y = 1,74 + 0,24(X - 4,99) = 0,54 + 0,24X.$$

С использованием уравнения регрессии вычисляем значения *y<sub>выч</sub>* и сопоставляем с заданными значениями *y<sub>i</sub>*. В данном случае результат сопоставления удовлетворительный.

## Множественная регрессия

При изучении множественной регрессии аналитические выражения, которые выбираются на основе теоретических представлений о процессе, в общем виде можно записать [3, 5, 9]:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, b_0, b_1, \dots, b_n). \quad (7.50)$$

Например, при изучении связи между тремя переменными, две из которых ( $x_1$  и  $x_2$ ) принимаются за независимые, третья ( $y$ ) - за функцию, их линейная регрессия определяется зависимостью:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0. \quad (7.51)$$

С геометрической точки зрения это уравнение определяет плоскость в пространстве переменных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y$ . Для определения параметров  $b_0, b_1, b_2$  используют способ наименьших квадратов. Сумма квадратов отклонений фактических значений  $y_i$  от вычисленных  $\hat{y}_{\text{доп.}}$  должна иметь наименьшее значение:

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{\text{доп.}})^2 \rightarrow \min. \quad (7.52)$$

Функция  $\phi$  будет иметь минимум, если  $b_0, b_1, b_2$  удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_2} = 0. \quad (7.53)$$

Дифференцирование функции  $\phi$  по переменным  $b_0, b_1, b_2$  позволяет получить уравнение множественной регрессии:

$$y_i - \bar{y} = b_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2i} - \bar{x}_2), \quad (7.54)$$

где коэффициенты  $b_1, b_2$  определяют с применением системы уравнений:

$$\begin{cases} b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}). \end{cases} \quad (7.55)$$

Для оценки тесноты связи применяют коэффициент множественной корреляции, который определяется через суммы квадратов отклонений:

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 - 2b_1 b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (7.56)$$

или через парные коэффициенты корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1}r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}, \quad (7.57)$$

где парные коэффициенты корреляции:

$$r_{x_1y} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i}y_i) \right] - \bar{x}_1 \bar{y}}{S_{\bar{x}_1} S_{\bar{y}}}; \quad (7.58)$$

$$r_{x_2y} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{2i}y_i) \right] - \bar{x}_2 \bar{y}}{S_{\bar{x}_2} S_{\bar{y}}}; \quad (7.59)$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i}x_{2i}) \right] - \bar{x}_1 \bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1} S_{\bar{x}_2}}. \quad (7.60)$$

Связь можно считать достоверной, если:

$$|R| \geq t S_R, \quad (7.61)$$

где  $r$  - абсолютное значение коэффициента корреляции;  $t$  - критерий Стьюдента;  $S_R$  - среднеквадратичная ошибка коэффициента корреляции:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}}. \quad (7.62)$$

Критерий надёжности коэффициента корреляции:

$$\mu = |R| / S_R. \quad (7.63)$$

**Пример 7.10.** В результате исследования процесса флотации необходимо установить зависимость между содержанием полезного компонента в концентрате ( $\beta$ ) и отходах ( $\vartheta$ ) и извлечением полезного компонента в концентрат ( $\varepsilon$ ). Результаты опробования и расчётные данные приведены в табл. 7.13.

С использованием исходных данных табл. 7.13 составляем уравнение множественной регрессии:

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon} + b_1(\beta_i - \bar{\beta}) + b_2(\vartheta_i - \bar{\vartheta}).$$

Выполняем расчёт коэффициентов и составляем уравнение регрессии:

$$\begin{cases} b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) + b_2 \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2 = \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}), \end{cases}$$

то есть:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot 0,971 - b_2 \cdot 0,258 &= 11,780; \\ -b_1 \cdot 0,258 + b_2 \cdot 0,0854 &= -3,590, \end{aligned}$$

откуда:  $b_1 = 4,86$ ;  $b_2 = -27,38$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= 75,9 + 4,86(\beta_i - 7,78) - 27,38(\vartheta_i - 0,60) \\ \text{или } \varepsilon_i &= 54,52 + 4,86\beta_i - 27,38\vartheta_i. \end{aligned}$$

Оценка тесноты связи по коэффициенту множественной корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2 - 2b_1 b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta})}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}},$$

то есть:

$$R = \sqrt{\frac{4,86^2 \cdot 0,971 + (-27,38)^2 \cdot 0,0854 - 4,86 \cdot (-27,38) \cdot (-0,258)}{162,9}} = 0,86$$

Величина коэффициента корреляции достаточно велика, что свидетельствует о тесной связи исследуемых параметров.

Для установления достоверности рассчитаем среднеквадратичную ошибку коэффициента корреляции:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}} = \frac{1 - 0,86^2}{\sqrt{10}} = 0,08.$$

При  $f = n - 1 = 9$  по таблице значений критерия Стьюдента (приложение 1) находим  $t_{0,95} = 2,26$ .

Поскольку  $|R| > S_R \cdot t$ , то есть  $0,86 > 0,08 \cdot 2,26$ , полученная зависимость достоверна с коэффициентом надежности (значимости):

$$\mu = R/S_R = 0,86/0,082 = 10,5 \quad \text{и} \quad \mu > t.$$

Таблица 7.13 - Результаты исследований и предварительные расчёты

<i>n</i>	$\beta_i$	$\vartheta_i$	$\varepsilon_i$	$\beta_i - \bar{\beta}$	$\vartheta_i - \bar{\vartheta}$	$\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$	$(\beta_i - \bar{\beta})^2$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2$	$(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\vartheta_i - \bar{\vartheta})$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$\varepsilon_{\hat{u}\hat{u}^\top}$
1	8,0	0,48	82	0,22	- 0,12	6,1	0,0484	0,0144	37,21	- 0,0264	1,342	- 0,732	80,26
2	8,3	0,52	81	0,52	- 0,08	5,1	0,2704	0,0064	26,01	- 0,0416	2,652	- 0,408	80,62
3	8,1	0,47	80	0,32	- 0,13	4,1	0,1024	0,0169	16,81	- 0,0416	1,312	- 0,533	81,02
4	8,0	0,53	78	0,22	- 0,07	2,1	0,0484	0,0049	4,41	- 0,0154	0,462	- 0,147	78,89
5	7,9	0,62	76	0,12	0,02	0,1	0,0144	0,0004	0,01	0,0024	0,012	0,003	75,93
6	7,7	0,59	75	- 0,08	- 0,01	- 0,9	0,0064	0,0001	0,81	0,0008	0,072	0,009	75,79
7	7,5	0,65	74	- 0,28	0,05	- 1,9	0,0784	0,0025	3,61	- 0,0140	0,532	- 0,095	73,17
8	7,6	0,69	72	- 0,18	0,09	- 3,9	0,0324	0,0081	15,21	- 0,0162	0,702	- 0,351	72,75
9	7,4	0,74	71	- 0,38	0,14	- 4,9	0,1444	0,0196	24,01	- 0,0532	1,862	- 0,686	70,72
10	7,3	0,71	70	- 0,48	0,11	- 5,9	0,2304	0,0121	34,81	- 0,0528	2,832	- 0,649	70,56
$\Sigma$	77,8	6,00	759	-	-	-	0,9710	0,0854	162,90	- 0,2580	11,780	- 3,590	759,71
Cp.	7,78	0,60	7,59	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76,0

*Таким образом, связь между содержанием полезного компонента в концентрате ( $\beta$ ), отходах ( $\vartheta$ ) и извлечением полезного компонента в концентрат ( $\varepsilon$ ) следует считать значимой. Полученное уравнение регрессии позволяет с достаточной степенью надёжности рассчитывать взаимосвязанные технологические показатели ( $\beta, \vartheta, \varepsilon$ ) в зависимости друг от друга.*

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Опишите последовательность статистического исследования процесса обогащения полезного ископаемого.
2. Раскройте суть нормального закона распределения (закона Гаусса).
3. Что такое «выборочная дисперсия» и как она определяется?
4. Укажите правила, которые используются при принятии или отбрасывании гипотезы.
5. Опишите методику сравнения двух средних значений при помощи критерия Стьюдента.
6. Раскройте суть последовательного анализа Вальда.
7. Опишите методику парного сравнения дисперсий при помощи критерия Фишера.
8. Раскройте суть однофакторного дисперсионного анализа.
9. В чём заключается задача двухфакторного дисперсионного анализа, особенности его проведения?
10. Для каких целей применяется корреляционный анализ?
11. Опишите последовательность составления уравнения множественной регрессии и оценки её достоверности.

## 8 СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

### **8.1 Традиционный и статистический методы планирования экспериментов**

Существует два метода планирования эксперимента: классический (метод Зайделя-Гаусса) и статистический [5, 4, 11, 13].

При классическом методе поочерёдно меняется каждый фактор до определения частичного максимума при постоянном значении всех факторов. Число опытов, необходимое для нахождения оптимальных условий процесса, зависит от числа факторов, взаимного влияния факторов и числа вариаций каждого из них. Минимальное число опытов будет соответствовать предположению, что взаимодействие факторов отсутствует, а максимальное число опытов будет соответствовать предположению, что оптимальное значение любого фактора будет существенно меняться в зависимости от взаимодействия всех остальных. Например, при четырёх факторах и пяти вариациях минимально необходимое число опытов будет  $5^4 = 625$ .

При исследовании сложных руд делают выборочную постановку отдельных серий опытов. При этом в большинстве случаев удаётся подобрать не оптимальный режим обогащения, а только некоторое приближение к нему. Постановка же полного эксперимента для учёта взаимодействия факторов, если и возможна, то мало полезна, потому что до окончания экспериментов результаты первых окажутся несопоставимы с результатами последних, так как происходят неконтролируемые изменения свойств исходных материалов, оборудования и т.д. Большинство результатов, полученных в таких громоздких экспериментах, не представляют интереса, так как нет необходимости знать зависимость параметра оптимизации в области, которая находится далеко от оптимальных условий исследуемого процесса.

Область применения классического метода ограничивается нахождение частных зависимостей между двумя-тремя параметрами. Эти зависимости представляют интерес, главным образом для теоретической интерпретации, особенно в случае наличия двух или нескольких экстремумов. В этом случае необходимо получить экспериментальные точки во всем диапазоне изменения параметра.

Если целью исследования является нахождение оптимальных условий процесса, классический метод оказывается неэффективным. Кроме того, сложные системы, например флотационные, часто вообще не допускают изменения одного фактора вследствие их внутренней взаимосвязи. Изменение одного фактора может служить причиной изменения других.

Методы статистического планирования экспериментов основаны на одновременной смене многих факторов, при этом планы экспериментов допускают такую следующую статистическую обработку данных, которая позволяет выделить влияние каждого отдельного фактора и их совокупности на

изменение исходных параметров процесса. Метод статистического планирования можно применять при таких ограничивающих условиях:

- существует выходной параметр (функция цели) процесса, который количественно и однозначно определяет его эффективность (возможно при ограничениях, налагаемых на другие выходные параметры);

- функция отклика непрерывная, то есть при изменении значений факторов функция цели изменяется непрерывно;

- функция отклика имеет один экстремум, то есть существует одно оптимальное соотношение факторов, при котором функция цели имеет максимальное (минимальное) значение;

- известны все факторы, существенно влияющие на процесс, и эти факторы управляемые, то есть возможно изменять их значения по предварительно составленному плану;

- результаты экспериментов воспроизводимые: ошибка воспроизводимости существенно меньше изменения выходного параметра под влиянием заданного изменения значений факторов с учётом ошибки, вносимой точностью поддержания факторов на заданном уровне.

Экспериментально-статистические методы позволяют даже при низком уровне теоретических знаний о механизме процесса получить математическую модель, которая включает все существенные факторы независимо от их физического смысла. Эти методы позволяют при значительном сокращении количества опытов получить больше информации, чем при классическом методе. Статистика позволяет оценить надёжность полученных результатов рассчитать доверительные интервалы отдельных опытов, экстремальных точек и коэффициентов уравнений.

Предположим, что на процесс влияет только один фактор, тогда изменение параметра оптимизации  $u$  в зависимости от фактора  $x$  может быть представлено графически в виде кривой  $ab$  (рис. 8.1) и аналитически:

$$Y = f(X). \quad (8.1)$$

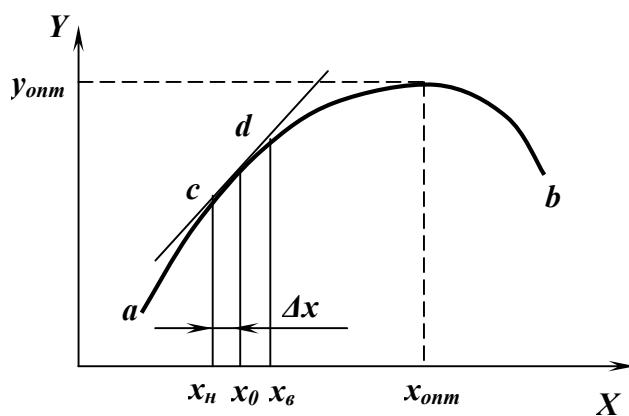


Рис. 8.1- Одномерная функция отклика.

Такая функция называется функцией отклика, экстремуму которой соответствуют координаты  $x_{onm}$  и  $y_{onm}$ . При планировании первой серии опытов

уровень фактора  $x_0$  называется нулевым уровнем;  $\Delta x$  - интервал варьирования  $x_n$ , - нижний уровень (кодируется «-»),  $x_e$  - верхний уровень (кодируется «+»). В результате первых двух опытов можно сделать вывод, что значение  $x$  необходимо увеличивать.

При двух факторах функция отклика графически может быть представлена как поверхность в трёхмерном пространстве или уравнением:

$$Y = f(X_1, X_2). \quad (8.2)$$

На рис. 8.2 нанесены кривые равного значения параметра оптимизации для двух переменных  $X_1$  и  $X_2$ .

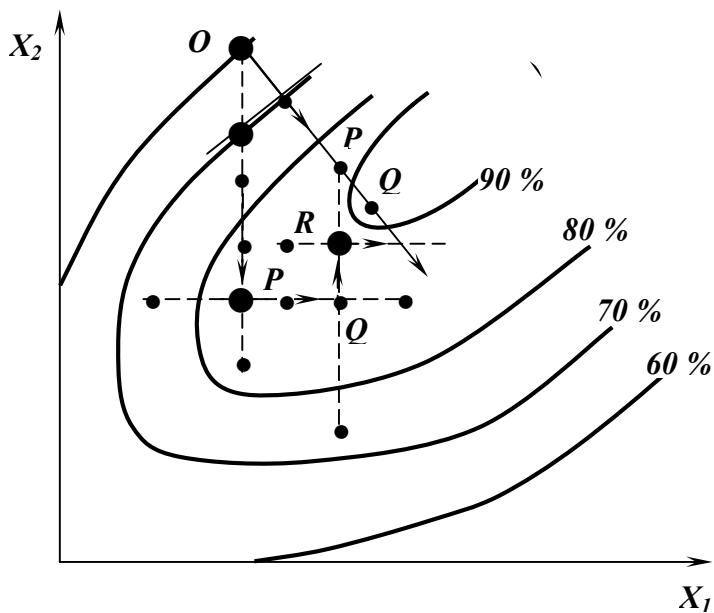


Рис. 8.2 - Движение до максимума поверхности отклика методами однофакторного эксперимента и крутого восхождения.

При классическом методе сначала исследователь фиксирует переменную  $X_1$ , движется из точки  $O$  в направлении переменной  $X_2$  и определяет точку  $P$ , соответствующую экстремальному значению параметра оптимизации. В точке  $P$  фиксируется переменная  $X_2$  и начинается движение в направлении оси  $X_1$ , что позволяет найти точку  $Q$ . Опять фиксируется  $X_1$  и продолжается движение по  $X_2$  и т.д. до достижения оптимума. Очевидно, что более эффективен план, по которому первоначально определяется направление  $Q$ , а детальное изучение поверхности отклика осуществляется в оптимальной области.

В случае большого числа факторов графическое представление функции невозможно, а аналитическое уравнение будет иметь вид:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (8.3)$$

Эффективность планирования тем выше, чем больше факторов влияет на процесс.

Опыты должны быть рандомизированы, то есть они должны проводиться в последовательности, устанавливаемой с помощью таблицы случайных чисел, или любой другой процедурой, обеспечивающей случайный характер

проведения опытов. Рандомизация позволяет нивелировать систематические (например, периодические) влияния неконтролируемых факторов.

## 8.2 Техника постановки активного эксперимента

### 8.2.1 Терминология и основные понятия

Далее мы будем иметь дело с некоторым абстрактным объектом, на котором осуществляется эксперимент. В процессе эксперимента исследователь ставит опыты.

*Опыт* - осуществление определённого действия на объект и регистрация полученного результата.

На объект действуют *факторы*. Фактором называется входная независимая переменная, которая может принимать на некотором интервале времени определённые значения. Каждый фактор имеет область определения (или существования). Эта область может быть непрерывной или дискретной, а сам фактор - количественным или качественным.

Пример количественного фактора - содержание твёрдого в пульпе, а качественного фактора - сорт руды, тип реагента, способ флотации и т.п.

К каждому фактору в активном эксперименте предъявляются такие требования:

- фактор должен быть *управляемый*;
- фактор должен быть *операционным*, то есть должны быть указаны последовательность и способ его установки и контроля;
- фактор должен быть *первичным*, то есть непосредственно действовать на объект, а не быть функцией других, более элементарных действий;
- фактор должен быть измеряемым достаточно точно.

К совокупности факторов предъявляется требование совместимости, то есть все их комбинации осуществимы, безопасны и независимы.

Важным понятием является *область определения фактора*. Эта область определяется ограничениями. Ограничениями могут быть:

- *принципиальные*; например, температура не может быть меньше абсолютного нуля, для конкретного аппарата может быть невозможной подача отрицательного количества воды, содержание компонента не может быть меньше нуля и т.д. (это условия физической осуществимости);
- *технические*, связанные с возможностями аппаратуры, дозаторов и т.п.
- *экономические*, связанные с дефицитностью компонентов, продолжительностью эксперимента и т.п.

Изменение входных факторов приводит к изменению принятого критерия исследуемого процесса (критерий эффективности, параметр оптимизации, целевая функция).

Критерий эффективности процесса - это выходная величина, изменение которой интересует экспериментатора. Обычно стремятся достичь экстремального значения этого критерия. Во многих случаях экстремум может

быть технически не достижимым, тогда находится наибольшее (или наименьшее) значение критерия.

Между параметрами оптимизации и факторами обычно существует некоторая функциональная связь, например,  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Геометрически, функция для  $Y$  может быть представлена в виде поверхности, расположенной в многомерном пространстве факторов. Такая, поверхность называется *гиперповерхностью*, а если функция  $f$  - линейная, то *гиперплоскостью*. Геометрическая трактовка функций оказывается полезной, так как в этом случае процесс движения к экстремуму может быть отождествлён с подъёмом (или спуском) на гору, правда, тоже многомерную.

Если зависимость  $f(x)$  достаточно точно описывает исследуемый процесс в интересующей экспериментатора области, то эта зависимость называется *статической моделью процесса*.

Если в зависимость  $f(x)$  включено время, то такая зависимость называется динамической моделью процесса. Модель - это приблизительное математическое описание процесса. Качество этого приближения оценивается ошибками.

Результат какого-либо опыта иногда называют *откликом*, а гиперповерхность - *функцией отклика*.

В соответствии с этим в отличие от физического закона модель может быть хорошей или плохой. Более того, очевидно, существует много моделей, которые описывают объект. Разница между ними будет проявляться только в величине ошибки. Кроме того, одной и той же ошибке (если она не стремится к нулю) может также соответствовать некоторое множество моделей.

*Сравнительные эксперименты.* Целью многих работ не является установление некоторых абсолютных констант, а только установление того факта, что некоторый набор факторов лучше другого. В этом случае, если устойчиво наблюдается разница между наборами, можно не требовать точных измерений, а с использованием методов статистики с необходимой вероятностью установить интересующий нас факт.

Например, если хотят получить максимальное извлечение, то извлечение - целевая функция, если хотят получить максимальное извлечение при заданном качестве концентрата, то фактически отыскивается условный экстремум.

### 8.2.2 Этапы планирования эксперимента

Рассмотренные ранее методы регрессионного анализа базируются на обработке результатов «пассивного эксперимента», например, данных опробования промышленного процесса, при этом математические методы применяют только на последнем этапе - при обработке результатов наблюдений. Планирование эксперимента предполагает постановку опытов по некоторой ранее составленной схеме (матрице), которая обладает специальными свойствами. Планирование эксперимента предусматривает применение математических методов на всех этапах: при анализе априорной информации, планировании эксперимента, обработке его результатов и принятии решений на

промежуточных этапах (для выбора стратегии исследований) и в конце работы (для интерпретации полученных данных).

С усложнением объектов исследований эффективность традиционного подхода к осуществлению активного эксперимента, согласно которому варьировался один фактор, а остальные поддерживались на постоянном уровне, резко снижается, так как не учитывалось взаимное влияние факторов, возмущающее действие среды и наличие обратных связей. Кроме того, при традиционном подходе требовалось проведение большого числа опытов, а надёжность и достоверность результатов, компактность их представления были очень невысоки.

При активном планировании эксперимента все факторы, определяющие процесс, меняют (варьируют) одновременно в соответствии с правилами планирования, а результаты эксперимента представляют в виде математической модели. Выделяют следующие этапы планирования:

- сбор и анализ априорной информации;
- обоснование критерия эффективности исследуемого процесса;
- выбор зависимых и независимых переменных, области изменения независимых переменных;
- определение методов контроля параметров;
- выбор типа математической модели;
- Разработка методики и плана (последовательность проведения) экспериментов;
- разработка схемы и методики испытания;
- определение метода анализа экспериментальных данных;
- осуществление эксперимента и проверка статистических предпосылок для получения данных;
- обработка результатов получения математической модели и её интерпретация;
- выдача рекомендаций.

Рассмотрим подробнее некоторые этапы экспериментов.

## **8.3 Определение критерия процесса и независимых факторов**

### **8.3.1 Выбор критерия эффективности процесса**

Критерий эффективности, оптимизации, функция цели, выходной параметр - все это формализованный смысл наших стремлений и степень понимания, что хорошо, а что плохо. В любых исследованиях выбор критерия определяет их успех.

Выбор критерия - сложная и важная задача. Любой обогатительный процесс характеризуется рядом выходных показателей. Среди них:

- непосредственно измеряемые, такие как выход продуктов, содержание полезного компонента в продуктах, объем переработки;

- технологические критерии, которые вычисляются: извлечение, коэффициент селективности и многочисленный ряд других;
- технико-экономические, вычисляемые с использованием первых двух групп, цен и затрат: себестоимость переработки, рентабельность, прибыль, производительность труда и т.д.

Извлечение в концентрат ценного продукта является одной из важнейших характеристик разделительных процессов. Производительность процесса по готовому продукту - второй важнейший показатель. Третья характеристика процесса разделения - качество концентрата. Указанные критерии процесса связаны между собой так, что рост эффективности каждого из них снижает в какой-то степени эффективность других. Очевидно, что один показатель, например извлечение, не может быть критерием разделения без учета качества концентрата. Иначе, выгоднее будет не обогащать руду, поскольку извлечение в этом случае будет 100%.

Проф. Барский Л.А. сформулировал требования к критериям эффективности процесса [11]:

- критерий должен быть численным и однозначным;
- критерий должен учитывать конечную цель производства;
- критерий должен быть максимально простым и, по возможности, иметь физический смысл.

В настоящее время существует более 100 критериев и ни один из них не удовлетворяет сформулированным требованиям.

В каждом конкретном случае в зависимости от поставленной цели принимают наиболее универсальный критерий.

При планировании экстремальных экспериментов часто в качестве критерия принимается два показателя. Один из них - основной, по которому ищется оптимальный режим (экстремум), и дополнительный, который учитывает, как правило, какие-либо ограничения. Например, при исследовании процесса обогащения угля, критерием можно принять условие:

$$A_{omx} \rightarrow \max$$

$$A_{k-m} < 8\% \text{ (любое допустимое значение)},$$

где  $A_{omx}$ ,  $A_{k-m}$  - зольность отходов и концентрата, соответственно.

В этом случае при поиске экстремума, или наибольшего значения ( $A_{omx}$ ) эксперименты прекращают при достижении порогового значения ( $A_{k-m}$ ).

### 8.3.2 Определение независимых факторов

При исследовании обогатительных процессов очень важно выявить все факторы, влияющие на процесс, а также оценить степень их влияния. Если какой-либо из значимых факторов не включён в рассмотрение, но имеет случайные отклонения в некотором диапазоне значений, то погрешности результатов эксперимента резко возрастают. С одной стороны, включение в план исследований всех факторов, которые существенно влияют на процесс, очень важно, потому что эксперимент, который направлен на отыскание оптимальных

условий, может потерять всякое значение, если один или несколько факторов не учтены. С другой стороны, включение в программы исследований всех факторов, которые существенно влияют на процесс, усложняет задачу - увеличивает её размерность.

Степень влияния различных факторов на процесс неодинакова. Обычно только несколько факторов оказывают существенное влияние на конечную величину, а другие влияют на неё незначительно. Задача заключается в выявлении и идентификации существенных факторов на «нулевом» фоне всех остальных, при этом необходимо учитывать как качественные, так и количественные характеристики существенных факторов. Выделить существенные факторы можно на основе анализа, публикаций и опроса мнений специалистов. Для анализа такой априорной информации применяют различные методы экспертных оценок: дисперсионный анализ, использование дробных и полных насыщенных планов эксперимента, методы случайного баланса и разветвлённой стратегии. При выборе факторов необходимо соблюдать следующие условия:

- диапазоны изменения факторов должны быть технологические и «умные», нельзя допускать таких значений, при которых возможны выпуск брака или авария;
- факторы в середине диапазона должны подчиняться всем предпосылкам метода наименьших квадратов;
- при очень узком диапазоне модель может быть неинформативной.

Последнее обстоятельство может быть проиллюстрировано следующим примером: известно, что извлечение горючей массы во флотационный угольный концентрат зависит от удельного расхода сортировщика и изменяется по экспоненциальному закону (рис. 8.3). Однако при анализе изменения извлечения  $\epsilon$  в диапазоне расхода сортировщика  $q = 1,7 - 2 \text{ кг} / \text{т}$  можно сделать парадоксальный вывод о независимости извлечения от расхода сортировщика.

Факторы могут иметь и качественные отличия, например различные реагенты, различные конструкции и т.п.

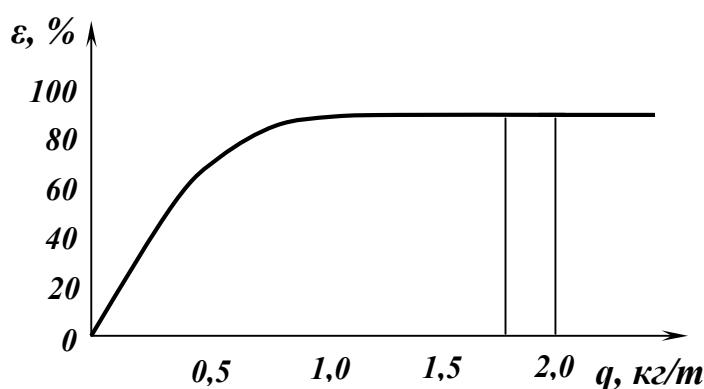


Рис. 8.3 - Зависимость извлечения горючей массы от удельного расхода сортировщика.

При экспериментах на оборудовании, работающем в непрерывном режиме, необходимо определить продолжительность переходного процесса после изменения значения какого-либо фактора. Отбор проб, снятие показаний можно

делать только в установившемся режиме. Опробование следует делать только по истечении времени  $t$  (рис. 8.4).

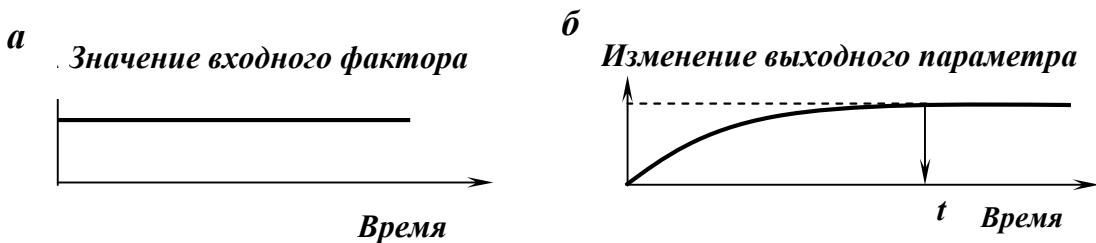


Рис. 8.4 - Режимы работы оборудования.  
а - непрерывный; б - переходный.

При исследовании необходимо выбрать независимую переменную, отклик (функцию отклика) на воздействие факторов. Отклик зависит от цели и специфики исследований. Он может быть технологическим (извлечение полезного компонента в концентрат, индекс селективности и т.п.), экономическим (прибыль, рентабельность и т.д.), статистическим и т.п. Отклик должен быть чувствительным к изменению факторов, легко вычисляемым, выражаться одним числом, иметь физический смысл.

Структуру модели исследователь выбирает на основе априорных знаний и интуиции, при этом выбор модели зависит также от знаний об объекте исследований, математического аппарата и цели исследований. Если вид функции отклика неизвестен, её раскладывают в степенные ряды и представляют в виде полинома. Полиномиальные модели очень эффективны, при определённых условиях разложение в степенные ряды возможно для всех функций. С использованием экспериментальных данных получают оценки параметров модели:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots , \quad (8.4)$$

где  $\hat{y}$  - оценка отклика;  $b$  - оценки коэффициентов.

Для определения оценок коэффициентов применяют метод наименьших квадратов. Чтобы убедиться в правильности оценки, осуществляют статистический анализ, при котором проверяют значимость коэффициентов и адекватность модели. Под проверкой значимости коэффициента подразумевают проверку гипотезы о равенстве его нулю, под адекватностью понимают соответствие модели опытным данным.

## 8.4 Выбор структуры модели и плана эксперимента

Благодаря возможности использования ЭВМ можно выбирать структуру модели в соответствии с концепцией «веера моделей». Традиционно при исследованиях рассматривалась одна модель или совокупность различных моделей и из них выбиралась единственная (осуществлялась дискриминация).

Концепция «веера моделей» заключается в том, что модель, которая подходит для прогнозирования значений отклика, часто оказывается не пригодной для экстраполяции, а модель, хорошо описывающая процесс в лабораторных условиях, оказывается не пригодной для промышленных условий. Всё это и обусловило необходимость рассмотрения различных моделей без их дискриминации [5,9,13].

Например, сначала рассматривают достаточно простую модель, которая учитывает только линейные эффекты:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i. \quad (8.5)$$

Затем рассматривают эффекты взаимодействия факторов, то есть  $x_i x_j$  при  $i \neq j$ :

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} x_i x_j, \quad (8.6)$$

после чего учитывают квадратичные эффекты  $x_i^2$ ; осуществляют перестройку независимых переменных:  $\ln x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $x^{3/2}$ ,  $e^x$  и т.п.

Рассмотрим методы построения моделей вида (8.6) с применением идеи активного планирования эксперимента.

После выбора модели (или их совокупности) осуществляют эксперимент, по результатам которого определяют параметры выбранной модели. Активное планирование эксперимента предполагает проведение опытов в соответствии с планом эксперимента.

План эксперимента определяет расположение опытных точек в пространстве независимых переменных (факторном пространстве), то есть условия проведения опыта. План эксперимента задаётся в виде матрицы плана, например в виде таблицы, каждая строка которой соответствует условиям опыта, а столбец - значению независимой переменной в каждом опыте. С использованием матричных обозначений модель (8.6) можно записать как:

$$\hat{Y} = XB, \quad (8.7)$$

где  $\hat{Y}$  - вектор-столбец оценок отклика;  $X$  - матрица плана;  $B$  - вектор-столбец оценок коэффициентов.

Модель (8.6) имеет вид:

$$Y = XB + E, \quad (8.8)$$

где  $Y$  - вектор-столбец наблюдений значений отклика;  $E$  - вектор-столбец погрешностей.

Стандартный способ определения значений  $B$  - применение метода наименьших квадратов:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (8.9)$$

В статистическом анализе фундаментальную роль играет информационная матрица  $(X^T X)/s_y^2$ , а также обратная ей дисперсионная матрица. Выбором

элементов матрицы плана (матрицы  $X$ ) можно определённым образом формировать статистические свойства модели.

Для представления планов в стандартной форме их обычно центрируют с переносом начала координат в центр факторного пространства. Кроме того, при составлении матрицы плана  $X$  независимые переменные  $x$  нормируют и задают для них факторное пространство:

$$-1 \leq x_i \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad x_i^* = (x_i^* - x_{i0}^*) / \Delta x_i^*, \quad (8.10)$$

где  $x_i^*$  - значение фактора  $i$  в натуральном масштабе;  $x_{i0}^*$  - значения координат  $i$ -го фактора в центре плана в натуральном масштабе, то есть  $x_{i0}^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*) / 2$ ;  $\Delta x_i^*$  - интервал варьирования  $i$ -го фактора, то есть  $\Delta x_i^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*) / 2$ .

При составлении матрицы плана можно задаться условием ротатабельности, которое заключается в том, что дисперсия оценки функции отклика зависит от удаления  $r$  точки  $x$  от центра плана. В соответствии с уравнением (8.9) это условие может быть записано так:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^T (X^T X)^{-1} Y = \text{const}; \\ r = \sqrt{(x - x_0)^T (x - x_0)} = \text{const}. \end{array} \right. \quad (8.11)$$

План является насыщенным, если число запросов равно числу коэффициентов модели и ненасыщенным, если число опытов больше числа коэффициентов.

Таким образом, планирование эксперимента заключается в том, чтобы до постановки опытов обеспечить оптимизацию анализа данных, игнорирование которой значительно усложняет вычисления и интерпретацию данных.

Понятие оптимальности плана можно трактовать по-разному. Одну и ту же задачу можно решать с помощью различных планов. Если свойства плана известны, можно осуществить эксперимент и анализ данных с наибольшей эффективностью.

Критерии оптимальности планов связаны со свойствами информационной и дисперсионной матриц [5]. Планы можно формировать с использованием критериев оптимальности оценок коэффициентов, например, с минимизацией обобщённой дисперсии коэффициентов. Обобщённая дисперсия коэффициентов модели определяется как дисперсия вектора коэффициентов, она задаётся определителем дисперсионной матрицы. Чем меньше обобщённая дисперсия, тем меньше определитель. Для ортогональных планов обобщённая дисперсия равна произведению дисперсий коэффициентов модели. Подобная оптимальность планов называется *D-оптимальностью* (по первой букве слова *Determinant* - определитель). При *D-оптимальности* точность определения одного коэффициента может быть повышена за счёт снижения точности определения других. Если экспериментатора не удовлетворяет ситуация, в которой он рискует получить некоторые коэффициенты с очень большими

дисперсиями оценок, то он может применить другие критерии оптимальности. Например, использовать *A-оптимальные планы* (от слов *Average value* - среднее значение), для которых характерна минимальная средняя дисперсия оценок коэффициентов. При этом точность оценок всех коэффициентов будет одинаковой. А-оптимальным планам соответствует минимум следа дисперсионной матрицы, то есть минимум суммы диагональных элементов. Можно принять условия, при которых дисперсии оценок коэффициентов не были бы слишком велики. Этим требованиям соответствуют *E- оптимальные планы* (от слов *Eigen value* - собственное значение), в которых минимизируется максимальное собственное число дисперсионной матрицы. Используют также другие критерии оптимальности планов. Среди критериев оптимальности планов, связанных с прогнозными свойствами модели, можно назвать *G-критерий*, который минимизирует максимальную дисперсию прогноза. К планам, связанным с прогнозными свойствами модели, относятся ротатабельные планы.

При осуществлении любого эксперимента естественно желание экспериментатора сократить число экспериментов, упростить расчёты, перейти от простой модели, например, первого порядка, к более сложным, используя результатов предыдущих опытов (свойство композиционности плана) - эти требования необходимо учитывать при выборе того или иного плана.

Очень немногие планы одновременно удовлетворяют различным критериям оптимальности. Часто критерии оптимальности противоречивы, поэтому экспериментатору следует искать компромиссный план: оптимальный по одному критерию и квазиоптимальный по другим.

Рассмотрим несколько наиболее показательных планов эксперимента, которые могут быть использованы при исследовании обогатительных процессов и аппаратов.

## 8.5 Факторное планирование экспериментов

Факторное планирование позволяет оценивать линейные эффекты взаимодействия при большом числе независимых переменных и получать модели, связывающие зависимую и независимые переменные [3, 5, 9, 11,13].

### 8.5.1 Полный факторный эксперимент

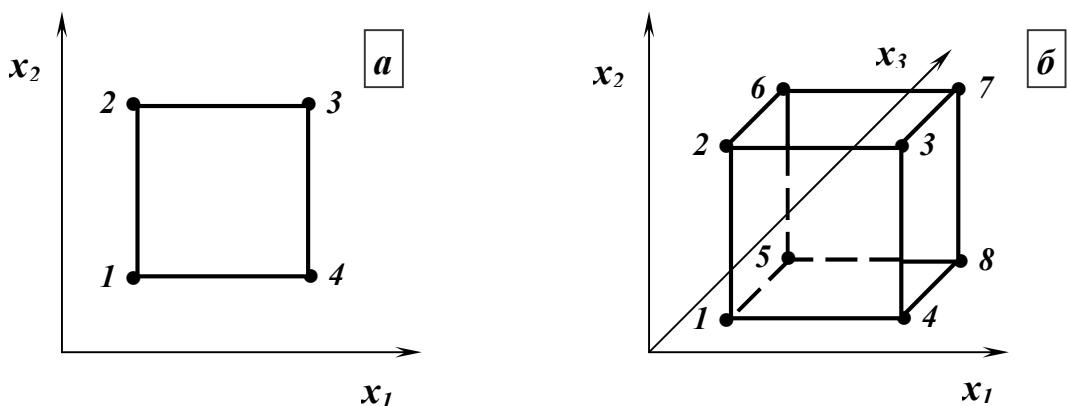
В полном факторном эксперименте (ПФЭ) для каждого фактора выбирается определённое число уровней и затем осуществляются все возможные их комбинации. В факторных экспериментах варируют одновременно всеми переменными. Недостатком ПФЭ является необходимость постановки большого числа опытов, так как с ростом числа факторов число опытов растёт по степенному закону:

$$N = k^n, \quad (8.12)$$

где  $N$  - число опытов;  $k$  - число факторов;  $n$  - число уровней каждого фактора.

Все возможные комбинации варьирования двух факторов на двух уровнях будут исчерпаны при постановке четырёх опытов ( $N = 2^2$ ), а трёх факторов на двух уровнях - при постановке восьми опытов ( $N = 2^3$ ). Геометрическая интерпретация ПФЭ показана на рис. 8.5.

План экспериментов формально представляется матрицей, где каждая строка соответствует одному опыту и определяет его условия. При реализации матрицы каждый фактор может принимать только два значения - «верхнее» и «нижнее». Знаки «+1» или «-1» обозначают, на каком уровне находятся значения факторов («+1» - на верхнем уровне, «-1» - на нижнем уровне).



**Рис. 8.5 - Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента:** а - план типа  $2^2$ ; б - план типа  $2^3$ .

При заполнении матрицы руководствуются правилом: частота смены знака (уровня) каждого следующего фактора вдвое меньше предыдущего. Если в матрице перебраны все возможные комбинации значений факторов, то матрица представляет полный факторный эксперимент «ПФЭ».

Матрица полного факторного эксперимента при трёх факторах приведена в табл. 8.1. Число строк матрицы -  $N = 2^3 = 8$ . В матрице условно не показаны «1», но они там незримо присутствуют.

Перед экспериментом (реализацией матрицы планирования) задаются основными уровнями факторов (в натуральных единицах: %, г/л, кг/т и т.д.) и интервалами варьирования для каждого фактора. Основной уровень обозначают:  $X_{oi}$ , интервал варьирования -  $\Delta x$ . Кодовое обозначение основного, верхнего и нижнего уровней соответственно «0», «+1» и «-1».

Тогда для матрицы (табл. 8.1) условия проведения первого, второго и третьего опытов (значения факторов):

$$\begin{array}{lll} X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\ X_1 = X_{o1} + \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\ X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} + \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \text{ и т.д.} \end{array}$$

Таблица 8.1 - Полный факторный эксперимент для трёх независимых переменных (планирование типа  $2^3$ )

№ опыта	Факторы			Параметр оптимизации
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	
1	-	-	-	y <sub>1</sub>
2	+	-	-	y <sub>2</sub>
3	-	+	-	y <sub>3</sub>
4	+	+	-	y <sub>4</sub>
5	-	-	+	y <sub>5</sub>
6	+	-	+	y <sub>6</sub>
7	-	+	+	y <sub>7</sub>
8	+	+	+	y <sub>8</sub>

Полный факторный эксперимент для трёх факторов позволяет раздельно оценить основные эффекты  $A, B, C$ , эффекты взаимодействия первого порядка  $AB, AC, BC$  и эффект взаимодействия второго порядка  $ABC$ .

Выбор нулевой точки (центра эксперимента) соответствует оптимальным значениям факторов на основе априорной информации, опыта экспериментатора и результатов обогащения аналогичных полезных ископаемых. При выборе интервала варьирования  $\Delta x$  руководствуются следующим:

- все значения факторов в матрице должны быть реализованы, то есть должны находиться в области существования этих факторов;
- величина интервала от «+1» до «-1» должна существенно превышать ошибку фиксирования данного фактора;
- интервал варьирования данного фактора должен обеспечивать влияние на выходные параметры процесса.

При постановке эксперимента опыты следует рандомизировать. Рандомизация заключается в случайном выборе очерёдности постановки опытов. Для случайного выбора номеров опытов можно использовать таблицу случайных чисел или лотерею. Рандомизацию применяют для исключения возможной систематической ошибки опытов и придания её случайного характера.

Функцию отклика моделируется полиномом первого порядка с учётом парных взаимодействий факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Благодаря ортогональности планов ПФЭ, их симметричности коэффициенты уравнения регрессии определяются по формулам:

$$b_0 = N^{-1} = \sum_{u=1}^N \bar{y}_u; \quad (8.13)$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n ; \quad (8.14)$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} ; \quad i \neq j ; \quad (8.15)$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku} ; \quad i \neq j \neq k , \quad (8.16)$$

где  $x_{ijk}$  - элементы матрицы планирования (+1 или -1), в которой  $ij$  - номер фактора, а  $u$  - номер опыта.

Различные знаки при коэффициентах свидетельствуют о том, что влияние одного коэффициента слабеет при росте другого. Если коэффициенты имеют один знак, то совместное изменение факторов оказывает большее влияние на функцию отклика, чем индивидуальное изменение каждого фактора.

Гипотезу об однородности выборочных дисперсий воспроизводимости проверяют по критерию Кохрена со степенями свободы  $f_1 = m - 1$  ( $m$  - число опытных данных в каждой серии опытов),  $f_2 = N$  и степени риска  $\alpha$ :

$$\text{при } G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_1^n S_y^2} \prec G_{\text{рабл}} \quad (8.17)$$

гипотеза об однородности не отвергается.

Рассчитывается оценка дисперсии воспроизводимости со степенью свободы  $f = f_1 \cdot f_2$ :

$$S^2 = \left( \sum_1^n S_y^2 \right) / N . \quad (8.18)$$

В случае непринятия гипотезы об однородности оценки дисперсий воспроизводимости можно увеличить число параллельных опытов для вариантов варьирования с большими значениями выборочных дисперсий или признать невоспроизводимость эксперимента. Для выявления источников неоднородности применяют методы дисперсионного анализа.

Значимость коэффициентов регрессии проверяют с помощью критерия Стьюдента. Коэффициент значим, если:

$$|b_i| \geq t S_{bi} . \quad (8.19)$$

Возможны такие причины незначимости коэффициента регрессии:

- интервал варьирования фактора близок к оптимуму;
- интервал варьирования узкий; чем меньше интервал варьирования, тем вероятнее, что даже фактор с сильным влиянием не обнаружит себя как существенный;

- параметр оптимизации процесса не зависит от варьирования фактора.

Если имеет место первая или третья причина, значение фактора стабилизируется на определённом уровне; во втором случае увеличивают интервал варьирования.

После исключения незначимых коэффициентов проверяют адекватность модели - выясняют соотношение между дисперсией адекватности  $S_{ad}^2$  и дисперсией воспроизводимости опытных данных  $S^2$ . Дисперсия адекватности  $S_{ad}^2$  характеризует рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения регрессии:

$$S_{ad}^2 = m^{-1}(N-d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2, \quad (8.20)$$

где  $m$  - число параллельных опытов;  $d$  - число оцениваемых параметров в уравнении регрессии. Дисперсия адекватности оценивается с  $f = N - d$  степенями свободы.

Если  $S_{ad}^2$  не превышает погрешности эксперимента, оценке которой является  $S^2$ , то считается, что модель адекватна, а если  $S_{ad}^2 > S^2$ , то модель нельзя считать пригодной. Адекватность проверяется по критерию Фишера с уровнем значимости  $1 - \alpha$  и степенями свободы  $f_1 = N - d$  и  $f_2 = N(m-1)$ :

если отношение:  $F = S_{ad}^2 / S^2 \sim F_{kp}$ , (8.21)

модель признается адекватной. В случае непринятия гипотезы об адекватности модели переходить к рассмотрению более сложной модели не следует, целесообразнее, если это возможно, провести эксперимент с меньшим интервалом варьирования факторов.

Использование полного факторного эксперимента не всегда целесообразно, так как с одной стороны необходимо большое число опытов, с другой стороны на первом этапе исследования не требуется высокая точность уравнений аппроксимирующей поверхности. Поэтому чаще используют дробный факторный эксперимент (ДФЭ).

**Пример 8.1.** На обогатительной фабрике были проведены исследования процесса фильтрования магнетитового концентрата. Изучали влияние содержания твёрдого в пульпе ( $X_1 = 30\text{-}60\%$ ), величины разряжения ( $X_2 = 0,03\text{-}0,09 \text{ МПа}$ ) и частоты вращения дисков ( $X_3 = 0,2\text{-}0,5 \text{ мин}^{-1}$ ) на удельную производительность вакуум-фильтра ( $Y, \text{т}/\text{ч}\cdot\text{м}^2$ ).

Для планирования эксперимента был использован ПФЭ типа  $2^3$ , который позволил оценить все линейные эффекты и все их взаимодействия. Матрица планирования и результаты экспериментов приведены в табл. 8.2.

Функцию отклика моделируется полиномом первого порядка с учётом парных взаимодействий факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Коэффициенты уравнения регрессии определяются по формулам:

$$b_0 = N^{-1} = \sum_{u=1}^N \bar{y}_u; \quad b_0 = 1,21;$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu}; \quad b_1 = -0,099; \quad b_2 = 0,129; \quad b_3 = -0,179;$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju}; \quad b_{12} = -0,019; \quad b_{13} = 0,024; \quad b_{23} = -0,054;$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku}; \quad b_{123} = -0,001.$$

Уравнение регрессии принимает вид:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,019x_1x_2 + \\ & + 0,024x_1x_3 - 0,054x_2x_3 - 0,001x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Проводится проверка гипотезы об однородности выборочных дисперсий воспроизводимости.

Критерий Кохрена  $G_{\text{мабл}}$ . со степенями свободы:  $f_1 = m - 1 = 6 - 1 = 5$ ,  $f_2 = N = 8$  и степенью риска  $\alpha = 0,05$ :  $G_{\text{мабл}} = 0,4387$

$$\text{при } G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_1^n S_y^2} = 0,326 \prec G_{\text{мабл}}$$

гипотеза об однородности не отвергается.

Рассчитывается оценка дисперсии воспроизводимости со степенью свободы  $f = f_1 \cdot f_2 = 5 \cdot 8 = 40$ :

$$S^2 = \left( \sum_1^n S_y^2 \right) / N = 57 \cdot 10^{-3} / 8 = 7,125 \cdot 10^{-3}$$

Значимость коэффициентов регрессии проверяют с помощью критерия Стьюдента. Коэффициент значим, если  $|b_i| \geq t S_{bi}$ .

$$S_{bi} = \sqrt{S^2 / Nm} = \sqrt{7,125 / 8 \cdot 6} = 0,0121.$$

При  $\alpha = 0,05$  и  $f = N(m-1) = 40$   $t = 2,0211$ .

$$b_{kp} = t S_{bi} = 2,0211 \cdot 0,0121 = 0,0244.$$

Таблица 8.2 - Матрица планирования и результаты эксперимента

Интервал варьирования. № опыта	Уровни факторов			Взаимодействия факторов				Опытные данные		Расчет δ
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$\bar{y}$	$S_y^2 \cdot 10^3$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Основной уровень $x_i = 0$	45	0,06	0,4							
Интервал варьирования $\Delta x$	15	0,03	0,2							
Верхний уровень $x_i = +1$	60	0,09	0,6							
Нижний уровень $x_i = -1$	30	0,03	0,2							
№ опыта:										
1	+	+	+	+	+	+	+	1,01	2,2	1,01
2	-	+	+	-	-	+	-	1,20	5,5	1,21
3	+	-	+	-	+	-	-	0,90	7,4	0,85
4	-	-	+	+	-	-	+	1,01	9,1	1,05
5	+	+	-	+	-	-	-	1,43	18,6	1,47
6	-	+	-	-	+	-	+	1,71	3,2	1,67
7	+	-	-	-	-	+	+	1,10	0,9	1,11
8	-	-	-	+	+	+	-	1,31	10,1	1,30

Примечание. В столбце 9 приведены средние значения функции отклика  $\bar{y}$  (удельная производительность вакуум-фильтра,  $\text{т}/\text{ч}\cdot\text{м}^2$ ); в столбце 10 - дисперсия воспроизводимости опытных данных в каждой серии опытов ( $m = 6$ ); в столбце 11 - результаты расчёта удельной производительности фильтра по полученным уравнениям.

Таким образом, коэффициенты  $b_{12}$ ,  $b_{13}$  и  $b_{123}$  принимаются незначимыми и уравнение регрессии принимает вид:

$$\hat{y} = 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,054x_2x_3.$$

Проверка адекватности модели:

$$S_{ad}^2 = m^{-1}(N-d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2 = [6 \cdot (8-5)]^{-1} \cdot 100,8 \cdot 10^{-3} = 5,6 \cdot 10^{-3}.$$

Адекватность проверяется по критерию Фишера. При уровне значимости  $1 - \alpha = 95\%$  и степенях свободы  $f_1 = N-d = 3$  и  $f_2 = N(m-1) = 40$  критерий Фишера  $F_{kp} = 2,84$ .

$$\text{Отношение } F = S_{ad}^2 / S^2 = 5,6 \cdot 10^{-3} / 7,125 \cdot 10^{-3} = 0,79 < F_{kp},$$

Модель признается адекватной.

### 8.5.2 Дробный факторный эксперимент

При увеличении числа факторов число вариантов варьирования в ПФЭ растёт по показательному закону, например, для исследования 15 факторов с применением ПФЭ нужна постановка как минимум  $2^{15} = 32768$  опытов.

Реализовать столько экспериментов практически невозможно, в первую очередь из-за значительных затрат времени и средств. Но если последние и найдутся, то за время проведения опытов состоятся неконтролируемые изменения сырья, оборудования и других факторов, в результате чего полученные результаты окажутся несопоставимыми. Кроме того, при проведении исследований во многих случаях достаточно получить только линейную аппроксимацию функции отклика без оценки некоторых факторов взаимодействия [5, 9, 11-13].

Уменьшить необходимое число опытов можно введением в план  $2^n$  факторов в большем количестве, чем предполагается матрицей планирования, т.е. насыщением плана до числа опытов, кратного двум, например, для трёхфакторного плана нужно поставить четыре опыта ( $2^2$ ). Для сокращения числа опытов в матрицу планирования следует ввести дополнительные столбцы, характеризующие эффекты взаимодействия, которыми можно пренебречь. Например, для трёхфакторного плана нужно ввести фиктивный фактор  $x_3$  и варьировать его как вектор-столбец  $x_1x_2$ . Таким образом, можно поставить четыре опыта вместо  $2^3 = 8$ .

Обычно планы дробного факторного эксперимента (ДФЭ) обозначают  $2^{n-p}$ . Из множества  $n$  факторов отбирают  $p$  вспомогательных и  $n - p$  основных факторов, для которых строят полный факторный план. Этот план потом дополняют  $p$  столбцами, соответствующими оставшимся факторам.

Способ построения каждого из  $p$  столбцов определяется генераторами плана ДФЭ - произведениями основных факторов. В случае плана  $2^{n-p}$  должно быть  $p$  генераторов.

В случае ДФЭ с планом  $2^{3-1}$  генератор может быть равен  $x_3 = x_1x_2$ . Полученный план (табл. 8.3) является полурепликой (половиной) полного факторного плана. При этом все свойства полного факторного эксперимента сохранены.

Таблица 8.3 - Дробный факторный эксперимент для трёх независимых переменных (планирование типа  $2^{3-1}$ )

№ опыта	Факторы			Параметр оптимизации
	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1x_2$	
1	-	-	+	$y$
2	-	+	-	$y_1$
3	+	+	+	$y_2$
4	+	-	-	$y_3$

Матрица ДФЭ представляет собой  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$  и т.д. реплику, в которой столбец одного из эффектов получают перемножением столбцов других эффектов.

При выборе дробных реплик необходимо определить и проанализировать с учётом априорной информации смешивание оценок коэффициентов модели. Для этого рассчитывают *определяющий контраст* ДФЭ. Поясним его на примере дробной реплики  $2^{3-1}$ . Для произведения трёх столбцов матрицы выполняется соотношение  $x_1x_2x_3 = +1$  - это и есть определяющий контраст. Таким образом, контраст - это произведение левой и правой частей равенства, определяющего генераторы плана. Например, для плана  $2^{5-2}$  в качестве генераторов взяты соотношения  $x_4 = x_1x_3$  и  $x_5 = x_1x_2x_3$ . Тогда определяющими контрастами являются  $1 = x_1x_3x_4$  и  $1 = x_1x_2x_3x_5$ .

*Обобщающий контраст* плана строится из определяющих контрастов и их произведений во всех возможных сочетаниях  $n = 2, 3, \dots, p$ . Перемножая контрасты и считая, что  $x^2 = 1$ , получим ещё один контраст  $x_2x_4x_5$ . Таким образом, обобщающий контраст равен  $x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3x_5$ .

Умножая все составляющие обобщающего контракта на факторы и учитывая, что  $x^2 = 1$ , получаем правило смешивания коэффициентов:

$$x_1 = x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5 = x_2x_3x_5;$$

$$x_2 = x_1x_2x_3x_4 = x_4x_5 = x_1x_3x_5;$$

$$x_3 = x_1x_4 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5;$$

$$x_4 = x_1x_3 = x_2x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5;$$

$$x_5 = x_1x_3x_4x_5 = x_2x_4 = x_1x_2x_3;$$

$$x_{12} = x_2x_3x_4 = x_1x_4x_5 = x_3x_5;$$

$$x_{23} = x_1x_2x_4 = x_3x_4x_5 = x_1x_5,$$

то есть  $b_1 = \beta_{34} + \beta_{1245} + \beta_{235} + \beta_1$  и т. д.

В зависимости от выбора генераторов получают дробные факторные планы с различной разрешающей способностью. Число элементов в контрасте определяет разрешающую способность плана.

Следует отдавать предпочтение дробным факторным планам с наибольшей разрешающей способностью - главным дробным факторным планам.

Для оценок коэффициентов и анализа моделей с использованием ДФЭ и ПФЭ применяют одни и те же формулы.

## 8.6 Метод крутого восхождения

Факторное планирование может успешно применяться только тогда, когда исследователь находится в оптимальной области. Рассмотренное выше факторное планирование, как правило, не позволяет определить рациональные технологические режимы изучаемого процесса. Однако выбор преимущественных факторов и оценка их значимости по коэффициентам линейной регрессии позволяет спланировать следующие эксперименты для достижения оптимальной области кратчайшим путём.

Кратчайшее расстояние до максимума (минимума) непрерывной однозначной функции отклика из любой точки определяется градиентом - прямой, перпендикулярной изолинии параметра оптимизации (рис. 8.2):

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial X_j} \bar{j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_m} \bar{m}, \quad (8.22)$$

где  $\partial f / \partial X_i$  - частная производная функции отклика по  $i$ -му фактору;  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{m}$  - единичные векторы в направлении координатных осей факторного пространства [5, 9, 11].

Оценками частных производных  $\partial f / \partial X_i$  являются коэффициенты линейной регрессии  $b_i$ , следовательно, для движения по градиенту необходимо менять факторы пропорционально их коэффициенту регрессии и в ту сторону, куда указывает знак коэффициента. Это изменение факторов называют шагом крутого восхождения. В большинстве случаев за шаг крутого восхождения каждого фактора можно принимать его коэффициент в модели, выраженный в единицах измерения фактора. Для этого вычисляется произведение коэффициентов на интервале варьирования  $b_i \Delta x_i$ , и фактор с максимальным произведением принимается за базовый  $b_{iB}$ . Для него выбирают шаг варьирования  $\Delta x_{iB}$ . Пропорционально базовому определяют шаги и по другим факторам:

$$\Delta x_i = \Delta x_{iB} b_i / b_{iB},$$

где  $\Delta x_i$  - новый шаг варьирования для  $i$ -го фактора.

Шаговый процесс движения по поверхности отклика продолжается до тех пор, пока исследователь не попадёт в экстремальную область, где линейное приближение уже оказывается недостаточным. Момент перехода через экстремум будет сопровождаться ухудшением значения выходного параметра (параметра оптимизации). Таким образом определяется оптимальная область.

Базовый шаг варьирования определяется на основе тех же соображений, что и первоначальный интервал варьирования. На расчёт градиента  $b_0$  влияния не оказывает. Для качественных факторов на двух уровнях или фиксируется лучший уровень, или градиент реализуется дважды для каждого уровня отдельно. Незначительные факторы стабилизируются на любом уровне в интервале  $\pm 1$ . Если нет специальных соображений, выбирают нулевой уровень. Если же, например, по экономическим соображениям целесообразно поддерживать нижний уровень, то выбирают его. В движении по градиенту эти факторы не участвуют.

Движение по градиенту возможно и в случае получения неадекватной модели. В эксперимент могут быть включены и некоторые факторы, коэффициенты при которых оказались незначимыми, но важные по технологическим соображениям, так как причины незначительности коэффициентов могут зависеть от неверного выбора интервалов варьирования.

**Пример 8.2.** Необходимо определить оптимальные условия флотации цинковой руды.

Факторы, их основные уровни и интервалы варьирования выбирали с учётом условий работы обогатительной фабрики. Изучали влияние шести факторов ( $x_1$  - продолжительность перемешивания с медным купоросом, мин;  $x_2$  - расход бутилового ксантофената, г/т;  $x_3$  - расход медного купороса, г/т;  $x_4$  - продолжительность аэрации, мин;  $x_5$  - продолжительность флотации, мин;  $x_6$  - расход дитиофосфата, г/т) на индекс селективности - параметр  $y$ :

$$y = \sqrt{\varepsilon(1-R)/[R(1-\varepsilon)]}, \quad (8.23)$$

где  $\varepsilon = \gamma\beta / \alpha$  - извлечение полезного компонента в концентрат, доли ед.;  $\alpha, \beta$  - содержание металла в исходном продукте и концентрате, доли ед.;  $\gamma$  - выход концентрат, доли ед.;  $R$  - извлечение породного компонента в концентрат, доли ед.

$$R = \sqrt{\frac{\varepsilon(1-R)}{R(1-\varepsilon)}}. \quad (8.24)$$

Использована 1/4 реплики от факторного эксперимента  $2^{6-2}$ , реализовано 16 опытов.

По данным результатов ДФЭ (табл. 8.4) получены оценки коэффициентов регрессии для выбранного параметра оптимизации  $y$ . Статистический анализ полученного уравнения регрессии показал, что оно адекватно с надёжностью 95%.

*Таблица 8.4 - Результаты проведения ДФЭ*

Фактор	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$
Основной уровень	3	15	50	7,5	8	10
Шаг варьирования	–	10	– 4	– 1	1	3,5
Интервал варьирования	2	10	15	7,5	2	6
Коэффициент регрессии	0,3	0,768	– 0,196	– 0,197	0,31	0,44

*Последовательность применения метода крутого восхождения поясняется табл. 8.5.*

*Таблица 8.5 - Результаты, полученные при оптимизации цинковой флотации методом крутого восхождения*

№ опыта	Факторы						Индекс селективности
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	
1	5	25	46	6,5	9	13,5	–
2	5	35	42	5,5	10	17,0	14,86
3	5	45	38	4,5	11	20,5	16,43
4	5	55	34	3,5	12	24,0	17,65
5	5	65	30	2,5	13	27,5	15,83
6	5	75	26	1,5	14	31,0	14,36

*За базовый принят фактор  $x_2$ , так как произведение коэффициента  $b_2$  на интервал его варьирования ( $\Delta x_2 = 10$ ) ровно 7,68, то есть максимально. Фактор  $x_1$  в расчётах не учитывается и его уровень зафиксирован:  $\tilde{x}_1 = 5$ . Реализация экспериментов в точках 3 - 5 метода крутого восхождения позволила существенно улучшить процесс: достичь индекса селективности 17,65.*

*Таким образом, методом крутого восхождения были определены оптимальные условия процесса флотации цинковой руды: расходы бутилового ксантофена, медного купороса и дитиофосфата - соответственно 55, 34 и 24 г/т; продолжительность аэрации, флотации и перемешивания с медным купоросом - соответственно 3,5; 12 и 5 мин (незначимых фактор). Определение оптимальных условий флотации с учётом шести факторов потребовало постановки 22 опытов (16 опытов по ДФЭ  $2^{6-2}$  и 6 опытов крутого восхождения).*

## 8.7 Симплексный метод планирования экспериментов

Симплексный метод планирования экспериментов по сравнению с методом крутого восхождения при анализе одного параметра оптимизации более громоздкий и менее точен [4, 5, 9, 11].

Сущность симплексного метода состоит в том, что первая серия экспериментов ставится так, чтобы точки, которые отвечают условиям проведения опытов, создавали правильный (регулярный) симплекс в

многомерном пространстве. Правильный симплекс - это множество  $n + 1$  равноудалённых друг от друга точек в  $n$ -мерном пространстве. Для  $n = 2$  это равносторонний треугольник, для  $n = 3$  - тетраэдр и т.д.

Правильный симплекс с центром в начале координат в  $n$ -мерном пространстве задаётся матрицей:

$$\begin{pmatrix} -k & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ R_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ 0 & R_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & R_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R_n \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

где  $k_i = 1/\sqrt{2i(i+1)}$ ;  $R_i = 1/\sqrt{2(i+1)}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В матрице каждая строка соответствует одному из опытов серии. В столбцах указаны кодированные значения факторов при единичной длине ребра симплекса. Например, для двухмерного пространства  $k_1 = 0,5$ ;  $R_1 = 0,5$ ;  $k_2 = 0,2887$ ;  $R_2 = 0,4082$ . Вершины начального симплекса имеют такие координаты:  $(0,5; -0,2887)$ ;  $(0,5; -0,2887)$ ;  $(0; 0,4082)$ . Перед проведением экспериментов необходимо выбрать интервал варьирования каждого фактора и принять его равным единице. После построения исходного симплекса и проведения опытов результаты анализируют и выбирают вершину симплекса, в которой получено наименьшее значение целевой функции (при поиске максимума).

Для движения к оптимуму необходимо поставить опыт в точке, которая является зеркальным отражением точки с минимальным значением функции отклика относительно противоположной грани симплекса.

Для определения условий проведения опыта в отражённой точке используют формулу:

$$x_{ij}^{n+2} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{ij} - x_{ij}^*, \quad (8.26)$$

где  $x_{ij}^{n+2}$  - координата новой точки;  $x_{ij}^*$  - координата точки, соответствующей

худшему результату;  $\sum_{i=1}^n (x_{ij})$  - сумма координат всех точек симплекса, кроме худшей.

На рис. 8.6 иллюстрируется движение правильного симплекса к экстремуму поверхности отклика, представленной линиями равного значения критерия эффективности двухфакторного процесса (факторы  $X_1$  и  $X_2$ ).

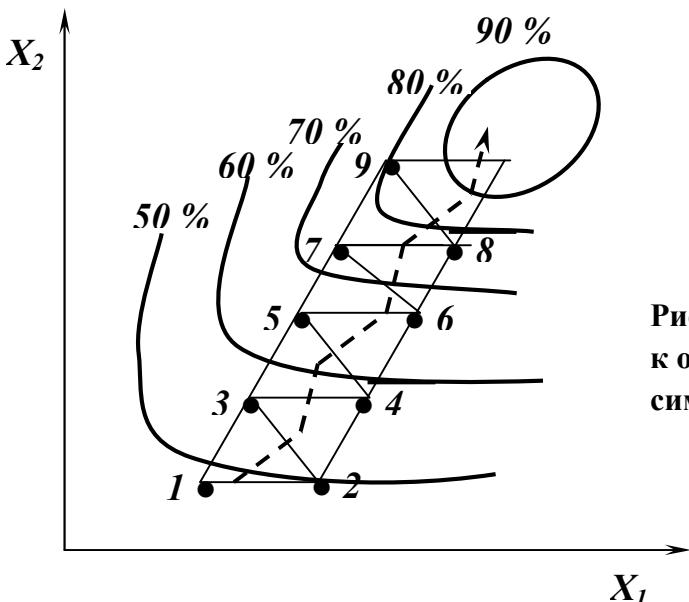


Рис. 8.6 - Схема движения к оптимальной области симплексным методом.

Опыты, поставленные в вершинах симплекса 1, 2 и 3 показали, что худшим результатом оказался опыт 1. Следующий опыт ставится в вершине 4, которая является зеркальным отражением вершины 1 и создаёт с вершинами 1 и 2 новый симплекс. Далее сопоставляются опыты в вершинах 2, 3 и 4. Худший результат (вершина 2) заменяют новой - вершиной 5, где проводится следующий эксперимент и т.д. При достижении области оптимума размер симплекс уменьшают. Условие достижения оптимума следующее:

$$\left( \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y_i - y_m)^2} \right) / n \leq \varepsilon, \quad (8.27)$$

где  $\varepsilon$  - заданная малая величина;  $y_m$  - среднее значение отклика в вершинах симплекса.

Целесообразно в каждой вершине симплекса опыты повторить несколько раз и в дальнейшем учитывать математическое ожидание функции отклика.

К преимуществам последовательного симплексного метода относят достаточную простоту, высокую эффективность (повышается с увеличением числа параметров оптимизации), возможность применения в случае временного дрейфа характеристик объекта и совмещения изучения поверхности функции отклика с движением симплекса к экстремуму. Недостатки данного метода - в невозможности описания поверхности отклика (однако по данным, полученным в результате движения симплексов, можно построить уравнение регрессии) и в невозможности учёта качественных изменений факторов.

Несмотря на преимущества, метод часто характеризуется медленной сходимостью и сравнительно высокой погрешностью определения оптимальных значений факторов в области экстремума целевой функции, которые обусловлены, главным образом, субъективным выбором интервала изменения факторов, а также отражением симплекса без учета поведения целевой функции в исследуемой области.

**Пример 8.3.** Необходимо с применением симплекс-метода найти оптимальную область флотации угля (табл. 8.6).

Таблица 8.6 - Применение симплекс-метода для оптимизации флотации угля

№ опыта	Симплекс		Расход				Извлечение $\varepsilon$ , %	
	координаты	вершина	собиратель		вспениватель			
			кодир. ед.	г/т	кодир. ед.	г/т		
1	ABC	A	-0,5	900	0,0	50	80	
2	ABC	B	0,0	1000	0,5	55	83	
3	ABC	C	-0,5	900	1,0	60	82	
4	ABC	A*	0,0	1000	1,5	65	86	
5	A*BC	C*	1,5	1100	1,0	60	89	
6	A*BC*	B*	1,5	1100	2,0	70	91	
7	A*B*C*	A**	2,0	1200	1,5	65	93	
8	A**B*C*	C**	2,0	1200	2,5	75	92	
9	A**B*C**	B**	2,5	1300	2,0	70	91	

Двухмерность факторного пространства позволила показать на рис. 8.7 схему движения симплекса в процессе поиска. Факторами оптимизации  $x_1$  и  $x_2$  являлись расходы собирателя и вспениватель, соответственно. В качестве целевой функции было принято извлечение горючей массы в концентрат  $\varepsilon$ . Интервалы изменения расхода собирателя и вспениватель составляют, соответственно, 200 г/т и 10 г/т. Центр плана -  $x_1 = 1000$  г/т и  $x_2 = 50$  г/т.

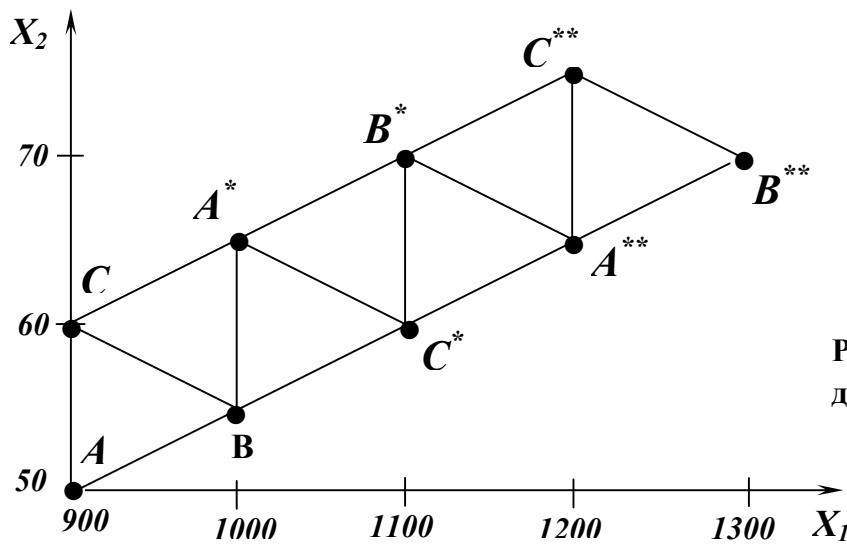


Рис. 8.7 – Схема движения симплекса.

После реализации экспериментов в точках A, B, C исходного симплекса, то есть при условиях, которые заданы координатами этих точек, очевидно, что худший технологический результат  $\varepsilon_1 = 80\%$  получен в точке A. На следующем шаге применена операция отображения координат точки A.

Координаты новой точки эксперимента  $A^*$  рассчитывают по формуле (8.26):

$$x_1^{A^*} = \frac{2(0 - 0,5)}{2} - (-0,5) = 0; \quad x_2^{A^*} = \frac{2(0,5 + 1)}{2} - 0 = 1,5.$$

В следующем симплексе с вершинами  $A^*, B, C$  худший результат в точке  $C$ . Для этого симплекса по той же формуле (8.26) определяют координаты точки  $C^*$  ( $x_1^{C^*} = 1,5; x_2^{C^*} = 1$ ). Таким же образом определяют и другие точки симплекс-метода.

Результат опыта в вершине  $A^{**}$ :  $\varepsilon = 93$ . Продолжение исследования показывает, что приращения функции  $\varepsilon$  практически нет. Можно сделать вывод, что симплекс достиг экстремальной области. Продолжение поиска приводит к «вращению» симплекса. Принимаем координаты максимума:

расходы собирателя  $X_1 = 1200$  г/т, расходы вспенивателя  $X_2 = 65$  г/т, при этом извлечение составляет  $\varepsilon = 93\%$ .

Если исследовать исходную модель на максимум, например, с помощью частных производных, то получим координаты экстремума, мало отличающиеся от найденных симплекс-методом. Некоторое расхождение в результатах связано с конечными размерами симплекса, но если принять его меньшим (уменьшить шаги варьирования), точность повысится.

## 8.8 Ротатабельное центрально-композиционное планирование экспериментов

Для получения статистической модели при планировании эксперимента в области оптимальных значений параметров необходимо детально изучить функцию отклика [4, 5, 11]. С этой целью её обычно задают в виде полинома второй, а иногда и большей степени. На основе полиномиальной модели можно решить различные задачи:

- интерполяционные - прогнозирование значения функции отклика в середине исследуемого факторного пространства в любой его точке;
- экстраполяционные - прогнозирование функции отклика для точки, расположенной вне факторного пространства;
- оптимизационные - определение оптимальных значений параметров на основе максимизации или минимизации целевой функции.

Полиномиальная модель позволяет оценить степень влияния на функцию отклика различных факторов, минимизировать ресурсы и построить различные графики и диаграммы. Математическая модель почти стационарной области помогает образно представить и исследовать более точно экстремальную поверхность отклика. В большинстве случаев экстремальную область можно описать полиномами второго порядка.

Рассмотренное ранее факторное планирование типа ПФЭ  $2^n$  не позволяет оценить коэффициенты при квадратичных членах модели. Нужно использовать планирование типа  $3^n$ , но оно сложно и требует большого числа

опытов. Для достижения этой цели существует несколько методов планирования экспериментов - ортогональное центрально-композиционное, ротатабельное центрально-композиционное и др. Последнее предпочтительнее, так как позволяет получить одинаковую точность модели во всех направлениях. В основе этих методов лежит факторное планирование типа ПФЭ  $2^n$ , матрица которого дополняется так называемыми «звездными точками» ( $\alpha$ ) и нулевыми (центральными) точками. Метод позволяет получить модель в виде:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2, \quad (8.28)$$

где  $b_0$  - свободный член,  $b_i$  - коэффициенты при линейных членах,  $b_{ij}$  - коэффициенты при взаимодействиях,  $b_{ii}$  - коэффициенты при квадратичных членах модели,  $X_i$  - факторы.

Новый план экспериментов разбивается как бы на 2 части, первая из которых (ПФЭ) позволяет найти коэффициенты  $b_o$ ,  $b_j$  и  $b_{ji}$ , вторая - при квадратичных членах.

Характеристика ротатабельного центрально-композиционного планирования приведена в табл. 8.7.

Таблица 8.7 - Характеристика ротатабельного центрально-композиционного планирования

Число факторов	Число точек				$\alpha$
	ПФЭ	звездных	центральных	общее	
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,682
4	16	8	7	31	2,000
5	32	10	10	52	2,378

Размер плеча звездных точек рассчитывается по выражению:

$$\alpha = 2^{n/4}, \text{ где } n - \text{число факторов.}$$

Центральный ротатабельный композиционный план второго порядка для трёх факторов приведен в табл. 8.8.

Таблица 8.8 - Ротатабельный центрально-композиционный план для трёх факторов

Матрица планирования			Матрица вычисления					
X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> <sup>2</sup>	X <sub>2</sub> <sup>2</sup>	X <sub>3</sub> <sup>2</sup>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
+1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
-1	+1	-1	1	1	1	-1	1	-1
+1	+1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	+1	1	1	1	1	-1	-1
+1	-1	+1	1	1	1	-1	1	-1
-1	+1	+1	1	1	1	-1	-1	1
+1	+1	+1	1	1	1	1	1	1
-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

В первой части матрицы представлен план ПФЭ 2<sup>3</sup>, во второй - звёздные точки, а в третьей части - нулевые центральные точки. Расчёт коэффициентов модели производится по формулам:

$$b_0 = 0,166(oy) - 0,057 \sum_{j=1}^n (jjy), \quad (8.29)$$

$$b_j = 0,073(jy), \quad (8.30)$$

$$b_{jj} = 0,0625(jjy) + 0,0069 \sum_{j=1}^n (jjy) - 0,0568(oy), \quad (8.31)$$

$$b_{ju} = 0,125(juy), \quad (8.32)$$

где  $(oy) = \sum_i y_i$ ;  $(jjy) = \sum_i X_{ji}^2 y_i$ ;  $(jy) = \sum_i X_{ji} y_i$ ;  $(juy) = \sum_i X_{ji} X_{ui} y_i$ .

Регрессионный анализ модели осуществляется аналогично планированию ПФЭ 2<sup>n</sup>, но дисперсии коэффициентов модели рассчитываются по другим формулам:

$$b_0 = AN^{-1} \left\{ 2\lambda_1^2 [n+2] \sum_{\mu=1}^n y_{\mu} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} \right\}; \quad (8.33)$$

$$b_i = \lambda_2 N^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} y_{\mu}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (8.34)$$

$$b_{ij} = \lambda_2^2 N^{-1} \lambda_1^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} x_{j\mu} y_{\mu}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j; \quad (8.35)$$

$$\begin{aligned} b_{ij} = AN^{-1} & \left\{ \lambda_2^2 [(n+2)\lambda_1 - n] \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} + \right. \\ & \left. + \lambda_2^2 (1 - \lambda_1) \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{\mu=1}^N y_{\mu} \right\}; \end{aligned} \quad (8.36)$$

$$\lambda_1 = (2^{n-p} N)(2^{n-p} + 2\alpha^2)^2; \quad (8.37)$$

$$\lambda_2 = (2^{n-p} + 2\alpha^2)^{-1} N; \quad (8.38)$$

$$A = \{2\lambda_1[(n+2)\lambda_1 - n]\}^{-1}. \quad (8.39)$$

Ротатабельное центрально-композиционное планирование экспериментов рационально использовать только при условии получения однородной дисперсии оценки целевой функции.

## 8.9 Применение компьютерных технологий обработки данных при исследованиях

Возможности рассмотренных выше математических аппаратов статистической обработки массивов и планирования активных экспериментов значительно расширяются, а продолжительность обработки результатов исследований сокращается при использовании современных компьютерных систем обработки данных. В результате бурного прогресса технического и программного обеспечения персональных компьютеров решение задач, возникающих при исследованиях, стало доступным практически каждому.

Достаточно вспомнить популярное приложение Windows - Excel, содержащее богатую библиотеку статистических методов обработки данных.

Однако, существуют и более специализированные программы, направленные не только на обработку данных, но и на многочисленные методы моделирования и планирования экспериментов.

К таким программам можно отнести приложения Windows с различными версиями Mathcad, Statistica, Axum7, Statgraphics Plus, Simulink и др.

**Mathcad** является мощным математическим редактором, который позволяет проводить различные научные и инженерные расчёты с использованием принципа Wysiwyg («что Вы видите, то и получите»). Например, для выполнения сложных расчётов достаточно ввести математическое выражение с помощью встроенного редактора формул и тут же получить результат. Есть возможность графического представления результатов. В состав Mathcad входят несколько интегрированных между собой компонентов: текстовый редактор; вычислительный процессор, выполняющий расчёты по введённым формулам с использованием численных методов; символьный процессор, который является, по сути, системой искусственного интеллекта; большое количество справочной информации, как математической, так и инженерной, оформленной в виде библиотеки интерактивных электронных книг.

**Statistica** - это профессиональный статистический модуль, который обладает широкой гаммой базовых и специфических аналитических процедур для обработки данных в бизнесе, науке и инженерном деле. Есть возможность провести дисперсионный и регрессионный анализ, нелинейное моделирование, кластерный факторный и канонический анализ. Характеризуется наличием подпрограмм для осуществления различных методов планирования и обработки результатов активного факторного эксперимента.

В приложении 5 приведен пример подготовки и проведения физического эксперимента по воздушной сепарации с использованием методов планирования и программного модуля **Statistica**.

Программный модуль **Axum7** удобный для создания профессиональных двух- и трёхмерных графиков различных типов. Обладает Microsoft Office интерфейсом и широкими возможностями управления исходными данными, их математической обработки и редактирования графического представления результатов.

**Statgraphics Plus for Windows** является наиболее популярным статистическим графическим продуктом, обладающим удобством пользования интерфейсом. Рассмотрим возможности данной программы подробнее.

Statgraphics Plus включает более 250 статистических и системных процедур, которые могут применяться практически во всех областях научных исследований и при решении промышленных задач.

Статистические процедуры имеют модульную структуру в составе:

- меню *Describe*: содержит статистические методы анализа по одной и множеству переменных, процедуру подбора распределений и средства табуляции данных;
- меню *Compare*: включает методы сравнения двух и более выборок данных, процедуры дисперсионного анализа;
- меню *Relate*: посвящено процедурам простого, полиномиального и множественного регрессионного анализа;

Кроме того, программа содержит меню *Special*, где предусмотрены модули:

- модуль «Контроль качества»: предназначен для оценки эффективности всех цепей промышленного процесса и формирования контрольных карт;
- модуль «Планирование эксперимента»: поможет сформулировать критерий эффективности исследуемого процесса, подобрать лучший план, организовать сбор и обработку нужной информации. В модуле предлагаются эффективные способы упрощения и интеграции знаний о процессе. Процедура имеет последовательность: определение факторов; выбор плана; генерация рабочей таблицы для сбора данных; выбор модели; интерпретация полученных результатов;
- модуль «Многомерные методы»: предназначен для изучения и раскрытия взаимоотношений множества переменных факторов. Модуль поможет сгруппировать данные, определить взаимосвязи между переменными, выдвинуть и проверить различные статистические гипотезы. Существуют процедуры для проведения кластерного анализа, анализа по методу главных компонент, факторного и канонического корреляционного анализа;
- модуль «Расширенный регрессионный анализ» включает (кроме базовых процедур регрессионного анализа) сравнение линий регрессии, нелинейную множественную регрессию и ряд других полезных процедур.

Одной из сильных сторон Statgraphics является интерактивная графика с Windows-интерфейсом, которая позволяет пользователю взаимодействовать с данными с помощью графики любым способом. Существует возможность вращения и рассматривания со всех сторон трёхмерного изображения.

Следует остановиться на широких возможностях модуля «Планирование эксперимента». Модуль включает в себя полный набор различных типов планов, учитывающих взаимодействия факторов до восьмого порядка. Основные процедуры, входящие в рассматриваемый модуль:

- планирование эксперимента - полные и дробные планы, планы Плакетта-Бурмена, блочные планы;
- формирование поверхности отклика - центральные композиционные планы, трёхуровневые факториалы, планы Бокса-Бенкена, блочные планы и др.;
- формирование сечений поверхностей отклика;
- смешанные планы.

Для примера рассмотрим использование Statgraphics Plus в качестве аппарата исследования процесса обогащения угольного шлама в винтовом сепараторе.

С помощью данной программы был разработан и в лабораторных условиях реализован ротатабельный композиционный факторный план второго порядка, для которого дисперсия функции отклика является постоянной во всех точках, равноудалённых от центра эксперимента.

Входными факторами приняты: производительность сепаратора,  $Q$ ; содержание твёрдого в питании,  $T$ ; содержание в исходном питании класса  $<0,1$  мм,  $\gamma$ . Выходными параметрами служили качественные показатели продуктов обогащения - зольность концентрата ( $A_{k-m}$ ) и зольность отходов ( $A_{omx}$ ).

После ввода в программу результатов реализации плана были получены (при доверительной вероятности  $P = 95\%$ ) следующие математические модели в стандартизированном масштабе:

$$A_{omx} = 6633 - 1,55 \cdot T - 2,41 \cdot Q - 4,40 \cdot \gamma + 0,27 \cdot T^2 - 0,12 \cdot T \cdot Q - 0,34 \cdot T \cdot \gamma + 0,81 \cdot Q^2 - 0,41 \cdot Q \cdot \gamma - 0,34 \cdot \gamma^2 \quad (8.40)$$

$$A_{k-m} = 9,25 + 0,87 \cdot T + 1,01 \cdot Q + 1,16 \cdot \gamma + 0,21 \cdot T^2 - 0,39 \cdot T \cdot Q - 0,59 \cdot T \cdot \gamma + 0,79 \cdot Q^2 + 0,75 \cdot Q \cdot \gamma \quad (8.41)$$

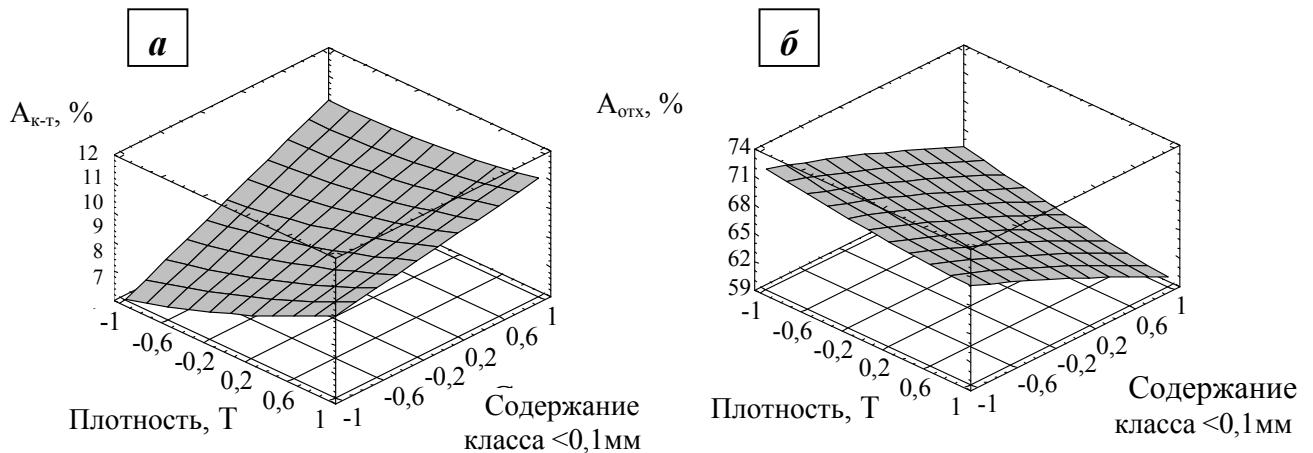
Статистически незначимые коэффициенты модели, удалённые программой, здесь не показаны. Адекватность моделей проверена с помощью критерия Фишера ( $F_{tab} > F_{расч}$ ). Среднеквадратичная ошибка эксперимента составила  $S_{omx} = 1,55\%$ ,  $S_{k-m} = 0,24\%$ .

На рис. 8.8 приведены частичные пересечения поверхностей отклика, представленные рассмотренным модулем в соответствии с выражениями (8.40) и (8.41). Сечения реализованы при постоянном значении объёмной нагрузки на сепаратор.

Программа позволяет получать и контурные графики в плоском координатном пространстве, так называемые «линии равного выхода», которые иллюстрируют наличие (или отсутствие) экстремума функции отклика и его координаты.

**Simulink** - это программный пакет, предназначенный для построения модели, проведения модельных экспериментов и анализа динамических систем. Он поддерживает работу с линейными и нелинейными системами, которые моделируются в непрерывном времени, промежутке времени. Системы могут быть многоскоростными, то есть состоять из различных частей, которые выбраны или обновлены с различными скоростями.

Пакет содержит модуль Matlab, который позволяет получать результаты анализа полученных динамических моделей как в аналитическом представлении, так и в визуальном.



**Рис. 8.8 - Частичные сечения поверхностей отклика зольности концентрата (а) и отходов (б) по осям плотность питания - содержание класса <0,1 мм.**

Благодаря Simulink есть возможность выйти за пределы идеализированных линейных моделей и исследовать более реальные нелинейные модели, которые учитывают всевозможные факторы, например, сопротивление среды, влияние температуры и др.

Пакет может быть полезным при анализе уравнений кинетики некоторых процессов обогащения, накопления продуктов в циркуляционных схемах и др.

### **Вопросы для самоконтроля.**

1. Раскройте суть классического метода планирования эксперимента.
2. Укажите ограничивающие условия применения метода статистического планирования экспериментов.
3. Опишите одномерную функцию отклика.
4. Перечислите основные этапы планирования эксперимента.
5. Сформулируйте требования к критериям эффективности процесса.
6. Какие условия необходимо соблюдать при выборе факторов, влияющих на процесс?
7. Что такое «план экспериментов»? Укажите основные правила составления матрицы плана.
8. Перечислите критерии оптимальности планов.
9. Для каких целей применяется факторное планирование экспериментов?
10. Раскройте суть полного факторного эксперимента (ПФЭ).
11. Как формируется план дробного факторного эксперимента (ДФЭ)?
12. Опишите метод крутого восхождения.

13. В чём состоит сущность симплексного метода?
14. Опишите матрицу ротатабельного центрально-композиционного плана для трёх факторов.
15. Охарактеризуйте специализированные компьютерные программы обработки данных при исследованиях.

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Чертов, А.Г. Физические величины / А.Г. Чертов. – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.
2. Кучин, Б.Л. Технологические измерения и измерительные приборы / Б.Л. Кучин. – М.: Металлургия, 1971. – 94 с.
3. Смирнов, В.О. Моделювання процесів збагачення корисних копалин / В.О. Смирнов, П.В. Сергєєв, В.С. Білецький. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2011. – 300 с.
4. Папушин, Ю.Л. Дослідження корисних копалин на збагачуваність / Ю.Л. Папушин, В.О. Смирнов, В.С. Білецький. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2006. – 344 с.
5. Рубинштейн, Ю.Б. Математические методы в обогащении полезных ископаемых / Ю.Б. Рубинштейн, Л.А. Волков. – М.: Недра, 1987. – 296 с.
6. Прохоров, С.А. Математическое описание и моделирование специальных процессов / С.А. Прохоров. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. – 209 с.
7. Клейн, С.Д. Подобие и приближенные методы / С.Д. Клейн. – М.: Мир, 1968. – 304 с.
8. Козин, В.З. Экспериментальное моделирование и оптимизация процессов обогащения полезных ископаемых / В.З. Козин. – М.: Недра, 1984. – 112 с.
9. Технологическая оценка минерального сырья. Методы исследования: Справочник / под ред. П.Е. Остапенко. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
10. Митрофанов, С.И. Исследование полезных ископаемых на обогатимость / С.И. Митрофанов, Л.А. Барский, В.Д. Самыгин. – М.: Недра, 1974. – 352 с.
11. Тихонов, О.Н. Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых / О.Н. Тихонов. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
12. Губин, В.И. Статистические методы обработки экспериментальных данных: учеб. пособие / В.И. Губин, В.Н. Осташков. – Тюмень: Изд-во «ТюмГНГУ», 2007. – 202 с.
13. Пилов, П.И. Математическое моделирование и структурно-экстраполярный анализ в задачах обогащения: монография / П.И. Пилов, А.М. Мильцын, В.И. Олевский. – 2-е изд., испр. и доп. – Днепропетровск: Национальный горный университет, 2011. – 187 с.

14. Карманов, Ф.И. Статистические методы обработки экспериментальных данных / Ф.И. Карманов, В.А. Острайковский. – М.: Абрис, 2012. – 208 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Критерий Стьюдента $t$

Число степеней свободы, $f$	Уровень значимости, $\alpha$			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,80	2,20	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,05	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,90	3,96
18	1,73	2,10	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,80	3,74
25	1,71	2,06	2,79	3,72
26	1,71	2,06	2,78	3,71
27	1,71	2,05	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,76	3,66
29	1,70	2,05	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,75	3,65

40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
$\infty$	1,64	1,96	2,58	3,29

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Критерий Фишера $F$

Уровень значимости, $\alpha = 0,01$								
$ f_1 $ $f_2 $	4	7	10	16	24	40	100	$\infty$
1	5625,0	5928,0	6056,0	6169,0	6234,0	6286,0	6334,0	6366,0
2	99,25	99,34	99,40	99,44	99,46	99,48	99,49	99,50
3	28,71	27,67	27,23	26,83	26,60	26,41	26,23	26,12
4	15,98	14,98	14,54	14,15	13,93	13,74	13,57	13,46
5	11,39	10,45	10,05	9,68	9,47	9,29	9,13	9,02
6	9,15	8,26	7,87	7,52	7,31	7,14	6,99	6,88
7	7,85	7,00	6,62	6,27	6,07	5,90	5,75	5,65
8	7,01	6,19	5,82	5,48	5,28	5,11	4,96	4,86
9	6,42	5,62	5,26	4,92	4,73	4,56	4,41	4,31
10	5,99	5,21	4,85	4,52	4,33	4,17	4,01	3,91
12	5,41	4,65	4,30	3,98	3,78	3,61	3,46	3,36
14	5,03	4,28	3,94	3,62	3,43	3,26	3,11	3,00
16	4,77	4,03	3,69	3,37	3,18	3,01	2,86	2,75
18	4,58	3,85	3,51	3,19	3,00	2,83	2,68	2,57
Уровень значимости, $\alpha = 0,05$								
$ f_1 $ $f_2 $	4	7	10	16	24	40	100	$\infty$
1	225,0	237,0	242,0	246,0	249,0	251,0	253,0	254,0
2	19,25	19,36	19,39	19,43	19,45	19,47	19,49	19,50
3	9,12	8,88	8,78	8,69	8,64	8,60	8,56	8,53
4	6,39	6,09	5,96	5,84	5,77	5,71	5,66	5,63
5	5,19	4,88	4,74	4,60	4,53	4,46	4,40	4,36
6	4,53	4,21	4,06	3,92	3,84	3,77	3,71	3,67
7	4,12	3,79	3,63	3,49	3,41	3,34	3,28	3,23
8	3,84	3,50	3,34	3,20	3,12	3,05	2,98	2,93
9	3,63	3,29	3,13	2,98	2,90	2,82	2,76	2,71
10	3,48	3,14	2,97	2,82	2,74	2,67	2,59	2,54
12	3,26	2,92	2,76	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30
14	3,11	2,77	2,60	2,44	2,35	2,27	2,19	2,13
16	3,01	2,66	2,49	2,33	2,24	2,16	2,07	2,01
18	2,93	2,58	2,41	2,25	2,15	2,07	1,98	1,92

*Примечание:*  $f_1$  – относится к большей дисперсии,  $f_2$  – к меньшей.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3**

**Критерий Кохрена  $G$**

Уровень значимости,  $\alpha = 0,01$

$ f_k $	1	3	6	10	16	36	144	$\infty$
2	0,9999	0,9794	0,9172	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,9933	0,8831	0,7606	0,6743	0,6059	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,9676	0,7814	0,6410	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,9279	0,6957	0,5531	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,8828	0,6258	0,4866	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,8376	0,5685	0,4347	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,7945	0,5209	0,3932	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,7544	0,4810	0,3592	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,7175	0,4469	0,3308	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000
15	0,5747	0,3317	0,2386	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,4799	0,2654	0,1877	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
30	0,3632	0,1913	0,1327	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2940	0,1508	0,1033	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,2151	0,1069	0,0722	0,0567	0,0461	0,0344	0,9245	0,0167
120	0,1225	0,0585	0,0387	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
$\infty$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Уровень значимости,  $\alpha = 0,05$

$ f_k $	1	3	6	10	16	36	144	$\infty$
2	0,9985	0,9392	0,8534	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,7977	0,6771	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,6841	0,5598	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,5981	0,4783	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,5321	0,4184	0,3568	0,3135	0,2612	0,2129	0,1667
7	0,7271	0,4800	0,3726	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,4377	0,3362	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4027	0,3067	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111

*Окончание таблицы*

10	0,6020	0,3733	0,2823	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
15	0,4709	0,2758	0,2034	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2205	0,1602	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
30	0,2929	0,1593	0,1137	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1259	0,0887	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,0895	0,0623	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0495	0,0337	0,0260	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
$\infty$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### Критерий Пирсона $\chi^2$

Число степеней свободы, <i>f</i>	Уровень значимости					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

## ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ВОЗДУШНОЙ СЕПАРАЦИИ ОТХОДОВ ЛОМА КАБЕЛЬНО-ПРОВОДНИКОВОЙ ПРОДУКЦИИ

Процесс сепарации отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции на пневмовибрационном сепараторе имеет характер массового разделения зёрен на фракции различной плотности. Для упрощения расчётов рассмотрим характер движения отдельно взятого зерна лёгкой и тяжёлой фракции по соответствующим ситам.

Рассмотрим силы, действующие на частицы в рабочей камере сепаратора при разделении, которые показаны на рис. 1.

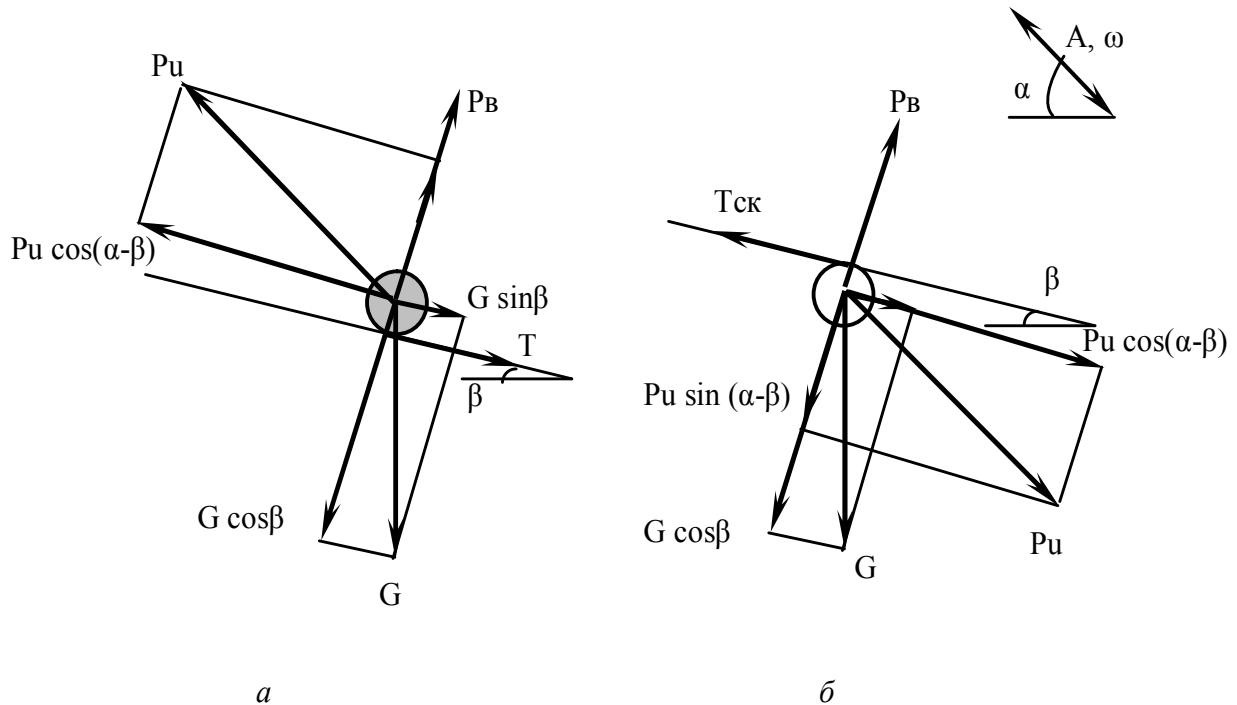


Рисунок 1. Силы, действующие на тяжёлые (a) и лёгкие (б) частицы в рабочей камере сепаратора.

На рис. 1 обозначено:  $G$  – сила тяжести частицы, Н;  $P_u$  – сила инерции частицы, Н;  $T$  – сила трения частицы по нижнему ситу, Н;  $T_{ck}$  – сила трения скольжения частицы по верхнему ситу, Н;  $P_v$  – сила давления воздуха, Н;  $\alpha$  – угол, под которым действует возмущающая сила, град.;  $\beta$  – угол наклона сита к горизонту, град.;  $A$  – амплитуда колебаний, м;  $\omega$  – угловая скорость,  $\text{с}^{-1}$ .

Из равновесия сил, действующих на тяжёлые частицы (рис. 1, а), вытекает, что для подбрасывания материала на нижнем сите необходимо выполнение следующего условия:

$$G \cos \beta < P_u \sin (\alpha - \beta) + P_v . \quad (1)$$

Если условно принять форму частиц близкой к шарообразной, то сила тяжести частицы определится из соотношения:

$$G = \pi d^3 \delta g / 6, \quad (2)$$

где  $d$  – диаметр частицы,  $\delta$  – плотность материала частицы,  $g$  – ускорение свободного падения.

Сила давления воздуха пропорциональна квадрату скорости витания частицы:

$$P_e = F V_e^2 \Delta / 3 = \pi d^2 V_e^2 \Delta / 12, \quad (3)$$

где  $F$  – площадь сечения частицы,  $F = \pi d^2 / 4$ ;  $V_e$  - скорость витания частицы,  $\Delta$  - плотность воздуха.

Скорость воздушного потока должна выбираться из условия уноса частиц лёгкого материала, определяемого по величине скорости витания.

Сила инерции частицы может быть определена из выражения:

$$P_u = G A \omega^2 \sin(\alpha - \beta) / g \quad (4)$$

После подстановки соотношений (2–4) в условие подбрасывания тяжёлых частиц на нижнем сите (1) получим выражение для угловой скорости, которую должен иметь привод сепаратора:

$$\omega_n > [(d g \delta \cos \beta - 0.5 V_e^2 \Delta) / d \delta A \sin(\alpha - \beta)]^{1/2}. \quad (5)$$

Для лёгких частиц сила трения скольжения частицы по верхнему ситу определяется как:

$$T_{ck} = N f, \quad (6)$$

где  $N$  – нормальная реакция поверхности сита,  $f$  - коэффициент трения материала лёгких частиц о поверхность верхнего сита.

С учётом сил, действующих на лёгкие частицы (рис. 1, б), которые прижаты к верхнему ситу потоком воздуха, нормальная реакция определится из выражения:

$$N = G \cos \beta + P_u \sin(\alpha - \beta) - P_e. \quad (7)$$

Для того, чтобы осуществлялось скольжение лёгкой частицы по верхнему ситу из условия равновесия сил, действующих на неё, необходимо:

$$P_u \cos(\alpha - \beta) + G \sin \beta > f(G \cos \beta + P_u \sin(\alpha - \beta) - P_e). \quad (8)$$

С учётом выражений (2–4) и (7) получим соотношение параметров для определения угловой скорости вращения привода сепаратора, при которой будет происходить скольжение лёгких частиц по верхнему ситу:

$$\omega_c > \{ [d g \delta (f \cos \beta - \sin \beta) - 0,5 V_e^2 \Delta] / [dg \delta A \sin (\alpha - \beta) (\cos (\alpha - \beta) - f \sin (\alpha - \beta))] \}^{1/2}. \quad (9)$$

Экспериментами установлено, что на расслоение частиц особое влияние оказывает встряхивающее действие сепаратора. Исходя из этого, режим разделения в сепараторе определяется в основном угловой скоростью, при которой обеспечивается подбрасывание тяжёлых частиц на нижнем сите. Следовательно, рабочие значения угловой скорости должны определяться по выражению (5) для  $\omega_n$ .

Таким образом, предварительные исследования показали, что для обеспечения разделения отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции в рабочем пространстве пневмовибрационного сепаратора необходимы следующие условия.

1. Поднятие зёрен материала лёгких фракций и удержание их на верхнем сите обеспечивается при динамическом напоре воздуха

$$P_e = F V_e^2 \Delta / 3.$$

2. Для обеспечения транспортирования частиц материала по верхнему и нижнему ситу сепаратора необходима угловая скорость

$$\omega_n > [(d g \delta \cos \beta - 0,5 V_e^2 \Delta) / d \delta A \sin (\alpha - \beta)]^{1/2}.$$

3. Для исключения равнопадания частиц различных материалов и взаимного засорения продуктов необходимо выполнять условие:

$$d_1 / d_2 < (\delta_2 - \Delta) / (\delta_1 - \Delta).$$

Следовательно, нужна узкая шкала классификации материала перед пневматическим обогащением.

Для проведения исследований вибропневматической сепарации отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции была создана лабораторная установка (рис. 2). Лабораторная модель вибропневматического сепаратора, для наглядности наблюдения за процессом разделения материала, выполнена из прозрачного органического стекла. Динамический режим колебаний модели сепаратора создаётся вибрационным электродинамическим стендом ВЭДС-100Б.

Модель сепаратора устанавливается посредством опорной рамы на вибрационный стол, являющийся исполнительным органом стенда ВЭДС-100Б. Опорная рама обеспечивает установку требуемого наклона сепаратора и направления действия возмущающей силы.

Пневматический режим работы сепаратора обеспечивается вентилятором с регулируемым расходом воздуха.

Общий вид лабораторной установки показан на рис. 2.

Установка вибропневматического сепаратора работает следующим образом. С помощью вибрационного стенда создаётся определённый динамический режим колебаний модели, передаваемый через вибрационный стол. Частота колебаний модели контролируется по шкале вибрационного стенда, а амплитуда - амплитудником, установленным на модели сепаратора.

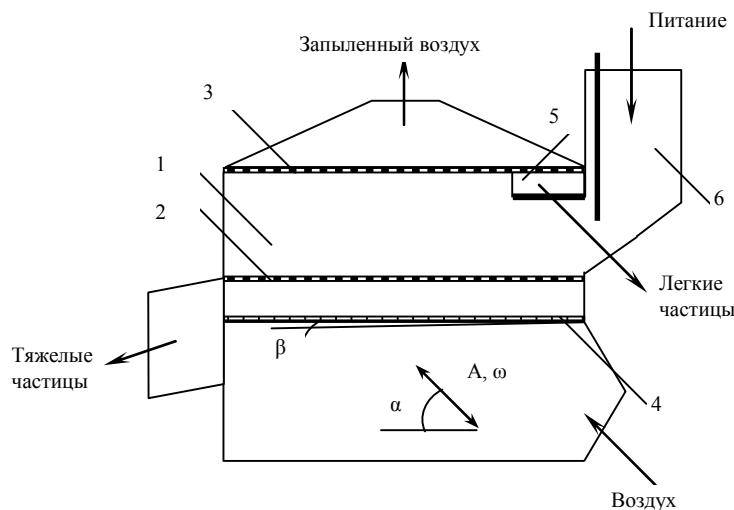


Рисунок 2. Схема лабораторной модели пневмовибрационного сепаратора: 1 – рабочая камера; 2 – нижнее сито; 3 – верхнее сито; 4 – распределительная решетка; 5 – делительная плоскость и окна для разгрузки легкой фракции; 6 – бункер.

Регулировка расхода воздуха в камере сепаратора осуществляется шиберным устройством, установленным на всасывающем патрубке вентилятора.

Методика проведения экспериментальных исследований вибропневматической сепарации отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции заключалась в следующем. В начале выполнялась подготовка проб материала путём дробления его на дробильном оборудовании. Затем производилось определение гранулометрического и фракционного состава отобранной пробы. На основании теоретических выводов определялись параметры вибропневматической сепарации на модели.

После настройки режима вибраций проводились непосредственные эксперименты при определённом режиме пневмовибрационной сепарации, определялись количественные и качественные показатели продуктов разделения, выполнялась оценка полученных результатов.

В ходе пассивного эксперимента определялось значение и доверительный интервал количественных и качественных показателей пневмовибрационной сепарации отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции.

Качественными показателями, оценивающими работу лабораторной модели пневмовибрационного сепаратора, являются:

- 1) содержание металла в концентрате,
- 2) извлечение металла в концентрат,
- 3) содержание неметалла в отходах,
- 4) извлечение неметалла в отходы,
- 5) эффективность сепарации.

Эффективность процесса разделения определялась по формуле Ханкока-Луйкена. В соответствии с этим критерием эффективность определяется как отношение фактической разности между извлечением данного материала в продукт и выходом этого продукта к теоретически возможной их разности:

$$E = (\varepsilon_m - \gamma_m) / (\varepsilon_{mt} - \gamma_{mt}), \quad (10)$$

где  $\varepsilon_m$  – извлечение металла в соответствующий продукт,  $\gamma_m$  – выход продукта,  $\varepsilon_{mt}$  – теоретически возможное извлечение данного материала в продукт,  $\gamma_{mt}$  – максимальный теоретически возможный выход продукта в идеальных условиях.

При условии, что теоретический максимум извлечения равен единице, а теоретический максимальный выход равен содержанию металла в исходном питании, выражение (10) приобретает вид:

$$E = (\varepsilon_m - \gamma_m) / (1 - \beta_{ucx}), \quad (11)$$

где  $\beta_{ucx}$  – содержание металла в исходном питании.

Удельная производительность сепаратора определялась из соотношения:

$$q = M / S \cdot t, \quad (12)$$

где  $M$  – масса исходного материала,  $S$  – площадь рабочей поверхности сепаратора,  $t$  – время сепарации.

Для проведения экспериментальных исследований была подготовлена проба отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции крупностью 1,25-5 мм массой 600 г, в состав которой входит алюминий и резиновая изоляция плотностью 2720 и 1200 кг/м<sup>3</sup>, соответственно. Результаты определения фракционного анализа отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции приведены в табл. 1.

Таблица 1. Фракционный состав пробы крупностью 1,25-5 мм

Материал	Содержание в исходном	
	масса, г	%
Алюминий	496,44	82,74
Резиновая изоляция	103,56	17,26
Всего	600,0	100,0

В табл. 2 представлены теоретически и экспериментально определённые скорости витания частиц отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции крупностью 1,25-5 мм.

Таблица 2. Скорости витания частиц отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции

Материал	Крупность, мм	Эквивалентный диаметр, мм	Скорость витания, м/с	
			теоретическая	фактическая
Алюминий	2,5-5	4,13	17,5	11,9
	1,25-2,5	1,72	11,3	10,6
Резиновая изоляция	2,5-5	4,14	11,6	7,9
	1,25-2,5	2,06	8,2	7,6

При проведении экспериментов по воздушной сепарации указанного материала поддерживался следующий режим: частота колебаний лабораторной модели сепаратора  $\omega = 15$  Гц, амплитуда колебаний  $A = 2,5$  мм, угол наклона сепаратора к горизонту  $\beta = 6^0$ , угол, под которым действует возмущающая сила  $\alpha = 68^0$ . Каждый эксперимент дублировался три раза и определялись средние показатели. Результаты исследований процесса сепарации в лабораторных условиях представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 3. Количественные показатели работы лабораторной установки

Масса питания, г	Время обогащения, мин.	Удельная производительность, т/ч м <sup>2</sup>
600	1,75	0,74
600	1,58	0,86
600	2	0,67
600	1,8	0,79
600	1,5	0,85
600	2	0,69
600	1,6	0,88
600	2	0,68
600	1,5	0,87

Данные табл. 3 позволяют заключить, что была достигнута удельная производительность  $q = 0,77 \pm 0,196$  т/ч·м<sup>2</sup>.

Анализ данных табл. 4 свидетельствует о том, что при пневмовибрационной сепарации в лабораторных условиях была достигнута высокая эффективность разделения алюминия и резины  $E = 94,3 \pm 2,28\%$ .

В лабораторных условиях была проведена также серия экспериментов по исследованию влияния разрыхленности на показатели разделения отходов многокомпонентного лома кабельно-проводниковой продукции воздушной сепарацией. Для этого были подготовлены искусственные смеси частиц алюминия и резины близких размеров с разным общим их количеством.

Таблица 4. Качественные показатели работы лабораторной установки

Тяжёлый продукт			Лёгкий продукт			Эффективность, %		
выход, %	содержание, %		извлечение алюминия, %	выход, %	содержание, %			
	алюминия	резины			алюминия	резины		
82,12	99,91	0,09	99,16	17,88	3,9	96,1	99,55	98,7
82,43	100	0	99,57	17,67	3,96	96,03	98,31	99,3
82,8	98,72	1,28	99,96	17,9	3,51	96,49	90,67	99,4
83,82	99,36	0,64	98,59	16,18	4,73	95,27	98,8	85,6
83,82	98,15	0,85	99,43	16,18	3,28	96,72	90,66	90,4
82,33	100	0	99,43	17,87	3,97	96,03	99,32	99,1
82,88	99,3	0,7	99,26	17,12	4,35	95,65	94,98	94,9
82,29	98,14	1,86	99,46	19,01	5,19	94,81	99,97	99,5
81,87	99,5	0,5	96,45	18,13	5,78	94,22	98,96	84,5
82,07	98,71	1,29	97,91	17,93	4,06	95,94	99,77	91,8

Результаты разделения смесей, соответствовавших значениям разрыхленности, полученным в ходе компьютерного моделирования, представлены в табл. 5.

Количество алюминиевых частиц, попавших в тяжёлый концентрат, определялось визуально, извлечение частиц вычислялось по известной формуле.

Таблица 5. Влияние разрыхленности на показатели разделения

Разрыхленность, <i>m</i>	Количество частиц, шт.			Извлечение алюминия в тяжёлый продукт, $\varepsilon$ , доли ед.
	питание		тяжёлый продукт	
	алюминий	резина	алюминий	
1	2	3	4	5
0,1	73	87	7	0,0959
			1	0,0137
			2	0,0274
			5	0,0685
			10	0,1370
<i>среднее</i>				0,0685
0,3	65	70	12	0,1846
			5	0,0769
			7	0,1077
			15	0,2308
			10	0,1538
<i>среднее</i>				0,1508
0,5	55	65	28	0,5091
			26	0,4727
			33	0,6000
			35	0,6364
			32	0,5818
<i>среднее</i>				0,560

Окончание табл. 5

1	2	3	4	5
0,6	50	60	29	0,5800
			34	0,6800
			39	0,7800
			36	0,7200
			38	0,7600
<i>среднее</i>				0,7040
0,9	20	30	16	0,8000
			17	0,8500
			18	0,9000
			19	0,9500
			18	0,900
<i>среднее</i>				0,880

По экспериментальным данным табл. 5 построена зависимость извлечения алюминиевых частиц в тяжёлый продукт от разрыхленности и выполнено ее сравнение с логистической кривой. Графики приведены на рис. 3.

Для логистической кривой подобрана следующая эмпирическая зависимость:

$$\varepsilon = 1 / (1 + e^{-10m + 5}). \quad (13)$$

Здесь  $\varepsilon$  – извлечение частиц алюминия в тяжёлый продукт, доли ед.;  $e$  – основание натуральных логарифмов;  $m$  – разрыхленность материала в рабочем пространстве сепаратора.

Данные рис. 3 позволяют заключить, что рациональный диапазон изменения разрыхленности начинается с интервала 0,4-0,5, т.к. эти значения соответствуют равновероятному распределению частиц между продуктами пневмовибрационной сепарации.

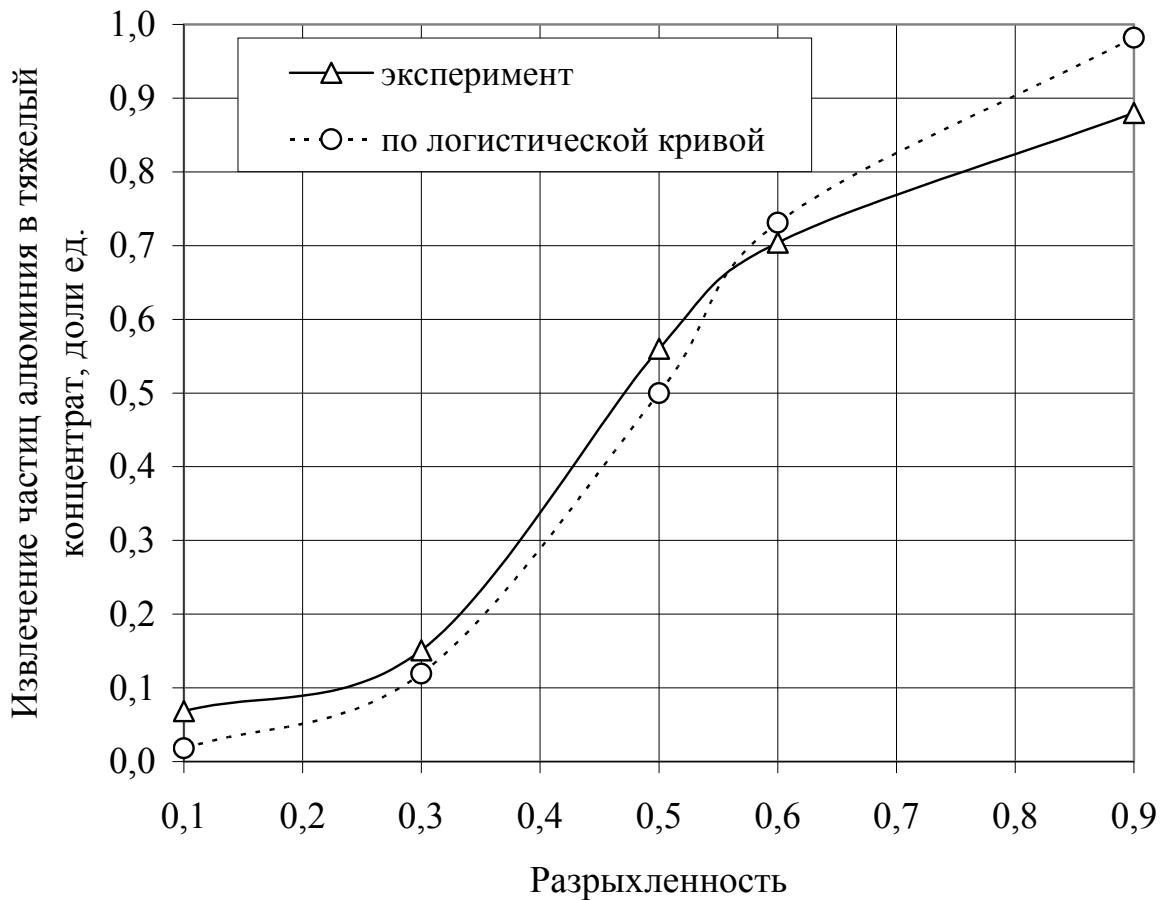


Рисунок 3. Сопоставление данных эксперимента с логистической кривой разделения.

Для создания математической модели процесса воздушной сепарации алюминиевых и резиновых частиц была выполнена серия экспериментов с применением планирования по матрице ротатабельного центрально-композиционного плана РЦКП. При планировании входными факторами были приняты:  $X_1$  – расход воздуха,  $X_2$  – амплитуда колебаний,  $X_3$  – нагрузка на сепаратор,  $X_4$  – угол наклона сепаратора. Опыты дублировались и определялись средние значения выходного параметра.

Разрыхленность слоя материала в сепараторе определяется такими параметрами как расход воздуха, амплитуда колебаний и нагрузка на сепаратор. Нагрузка на сепаратор фиксировалась заданным значением высоты открытия загрузочного шибера. Основные уровни и шаг варьирования параметров представлены в табл. 6, а матрица планирования и результаты – в табл. 7. В качестве функции отклика была принята эффективность сепарации, определяемая по критерию Ханкока (в %).

Таблица 6. Исходные данные для РЦКП вибропневматической сепарации

Параметр	Обозначение	Код	Ед. измерения	Шаг	Уровни		
					-1	0	+1
Удельный расход воздуха	$q_s$	$X_1$	$\text{м}^3/\text{ч}\cdot\text{м}^2$	50	150	200	250
Амплитуда колебаний	$A$	$X_2$	мм	0,5	2	2,5	3
Нагрузка на сепаратор	$Q$	$X_3$	кг/ч	4	10	14	18
Угол наклона сепаратора	$\beta$	$X_4$	град.	3	3	6	9

Таблица 7. Матрица РЦКП и результаты экспериментов

№№	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	E, %
1	2	3	4	5	6
1	-1	-1	-1	-1	84,5
2	1	-1	-1	-1	86,1
3	-1	1	-1	-1	85,3
4	1	1	-1	-1	88,2
5	-1	-1	1	-1	82,5
6	1	-1	1	-1	84,3
7	-1	1	1	-1	82,3
8	1	1	1	-1	84,9
9	-1	-1	-1	1	84,1
10	1	-1	-1	1	85,9
11	-1	1	-1	1	85,6
12	1	1	-1	1	87,8
13	-1	-1	1	1	82,4

Окончание табл. 7

1	2	3	4	5	6
14	1	-1	1	1	84,7
15	-1	1	1	1	82,1
16	1	1	1	1	85,2
17	-2	0	0	0	83,1
18	2	0	0	0	87,8
19	0	-2	0	0	82,9
20	0	2	0	0	85,4
21	0	0	-2	0	85,9
22	0	0	2	0	83,2
23	0	0	0	-2	85,7
24	0	0	0	2	83,5
25	0	0	0	0	84,5
26	0	0	0	0	84,6
27	0	0	0	0	84,4
28	0	0	0	0	84,6

Статистическая обработка результатов и расчёт коэффициентов регрессии выполнялись с помощью пакета прикладных программ **Statistica**. В результате расчётов была получена модель взаимосвязи входных параметров и функции отклика ( $E$ ) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 E = & 84,525 + 1,15417*X_1 + 0,495833*X_2 - 1,02083*X_3 - 0,195833*X_4 + \\
 & + 0,240625*X_1^2 + 0,20625*X_1*X_2 + 0,08125*X_1*X_3 + 0,03125*X_1*X_4 - \\
 & - 0,084375*X_2^2 - 0,35625*X_2*X_3 + 0,01875*X_2*X_4 + 0,015625*X_3^2 + \\
 & + 0,06875*X_3*X_4 + 0,028125*X_4^2. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Значимость коэффициентов модели определена с помощью стандартизированной Парето диаграммы с учётом 5% уровня значимости, отмеченного на рис. 4 вертикальной линией.

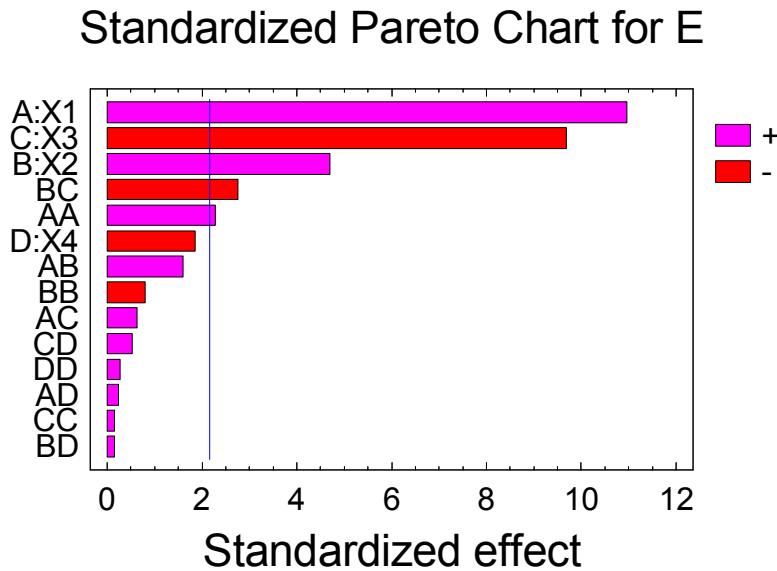


Рисунок 4. Значимость факторов в модели.

Из Парето-распределения следует, что фактор  $X_4$  – угол наклона сепаратора в принятом диапазоне его изменения – незначим. Незначимыми являются взаимодействия  $X_1X_2$ ,  $X_1X_3$ ,  $X_1X_4$ ,  $X_2X_4$ ,  $X_3X_4$  и члены второго порядка  $X_2^2$ ,  $X_3^2$ ,  $X_4^2$ . С учётом значимости коэффициентов регрессионная модель для эффективности процесса получена в виде полинома:

$$E = 84,525 + 1,1542X_1 + 0,4958X_2 - 1,0208X_3 + 0,2406X_1^2 - 0,3562X_2X_3. \quad (15)$$

Поверхности отклика для различных сочетаний факторов представлены на рис. 5-7. На рис. 8-10 показаны изолинии для эффективности  $E$  разделения алюминиевых и резиновых частиц на лабораторной установке пневмовибрационной сухой воздушной сепарации в условиях, заданных матрицей планированного эксперимента.

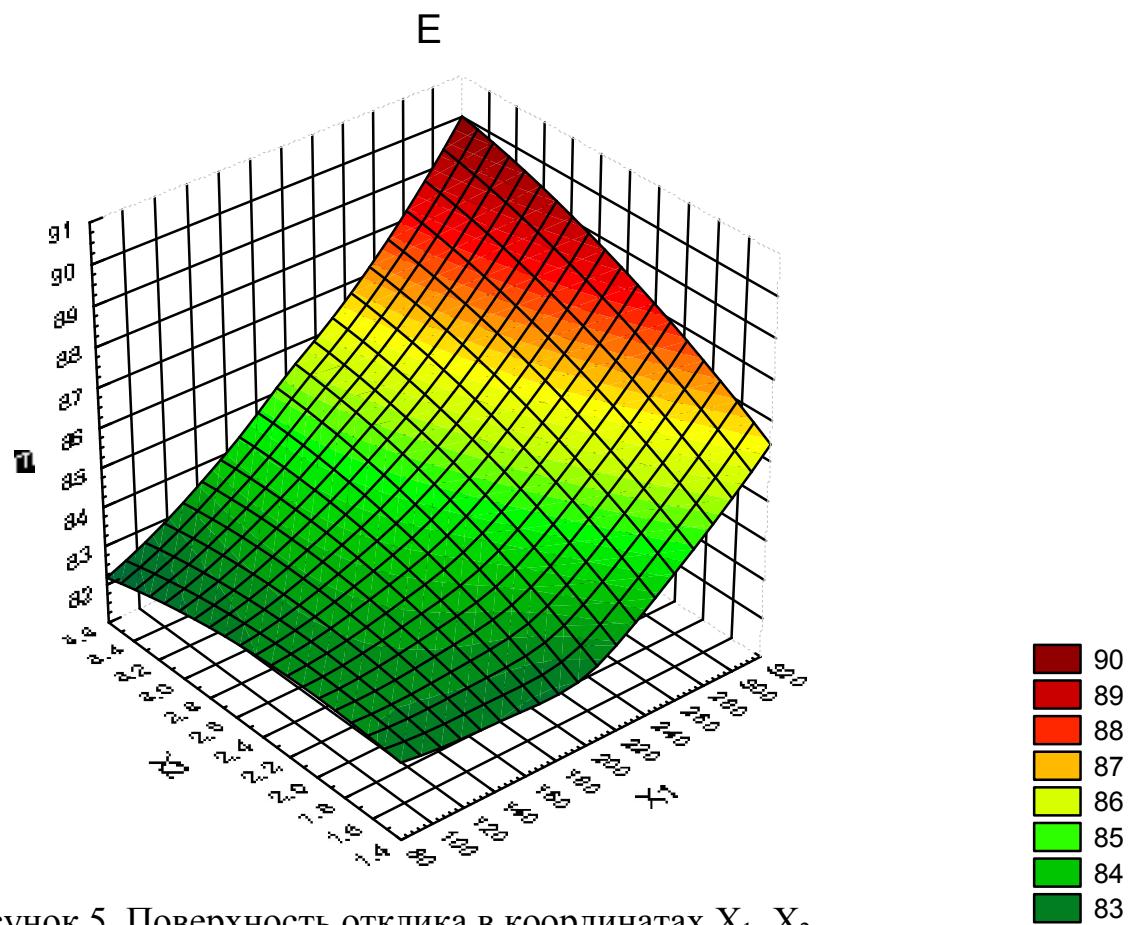


Рисунок 5. Поверхность отклика в координатах  $X_1$ ,  $X_2$ .

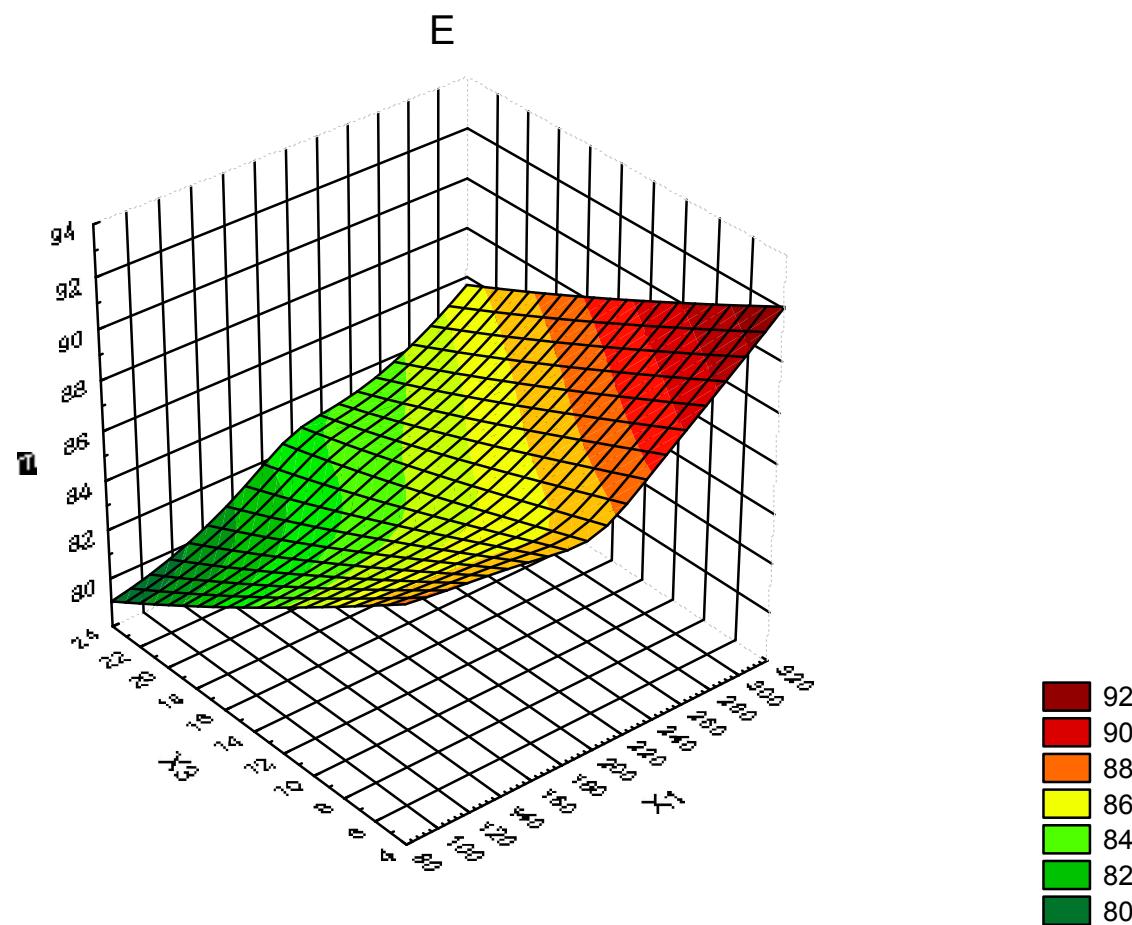


Рисунок 6. Поверхность отклика в координатах  $X_1$ ,  $X_3$ .

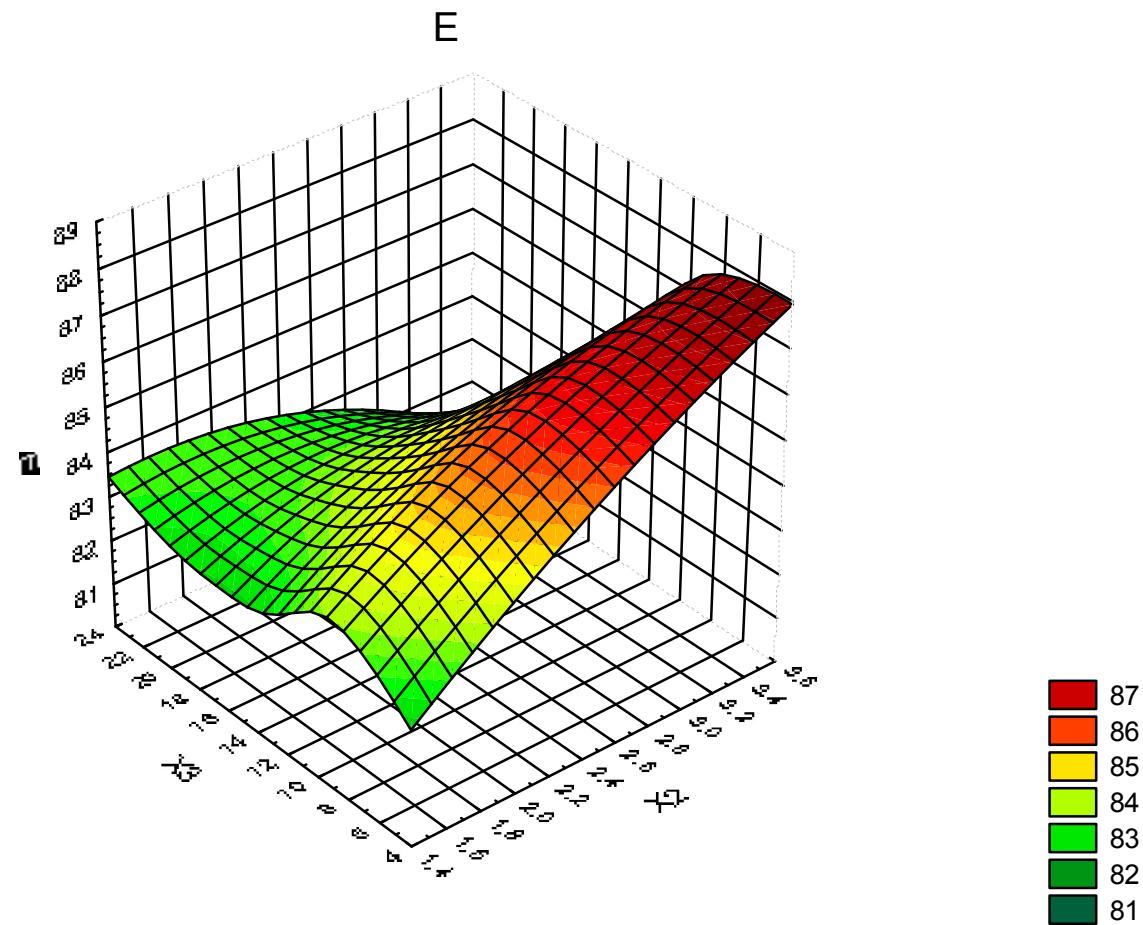


Рисунок 7. Поверхность отклика в координатах  $X_2$ ,  $X_3$ .

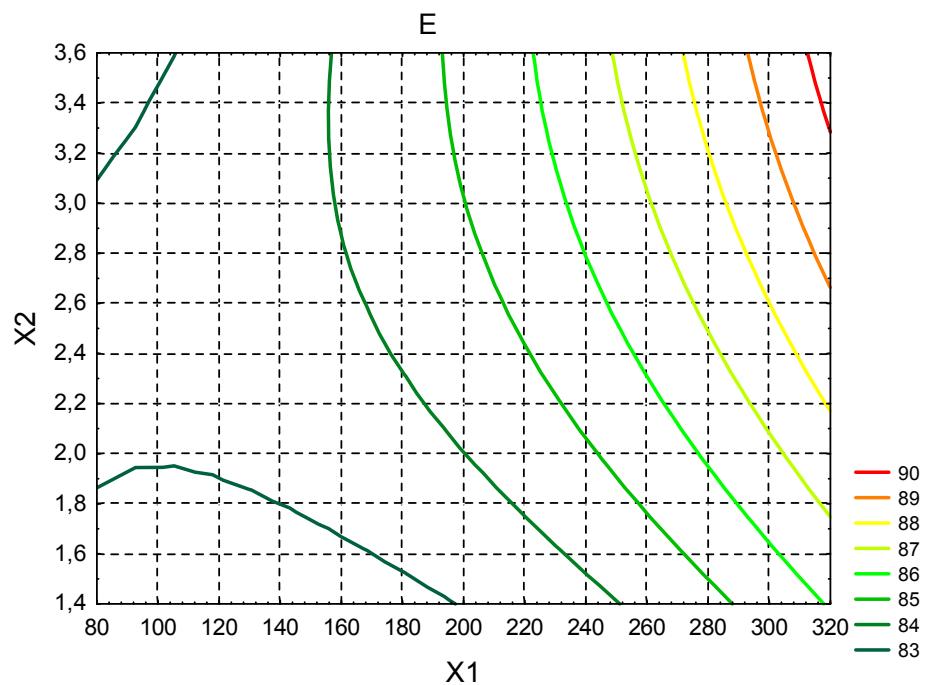


Рисунок 8. Изолинии эффективности разделения  
в координатах  $X_1$  (расход воздуха),  $X_2$  (амплитуда колебаний).

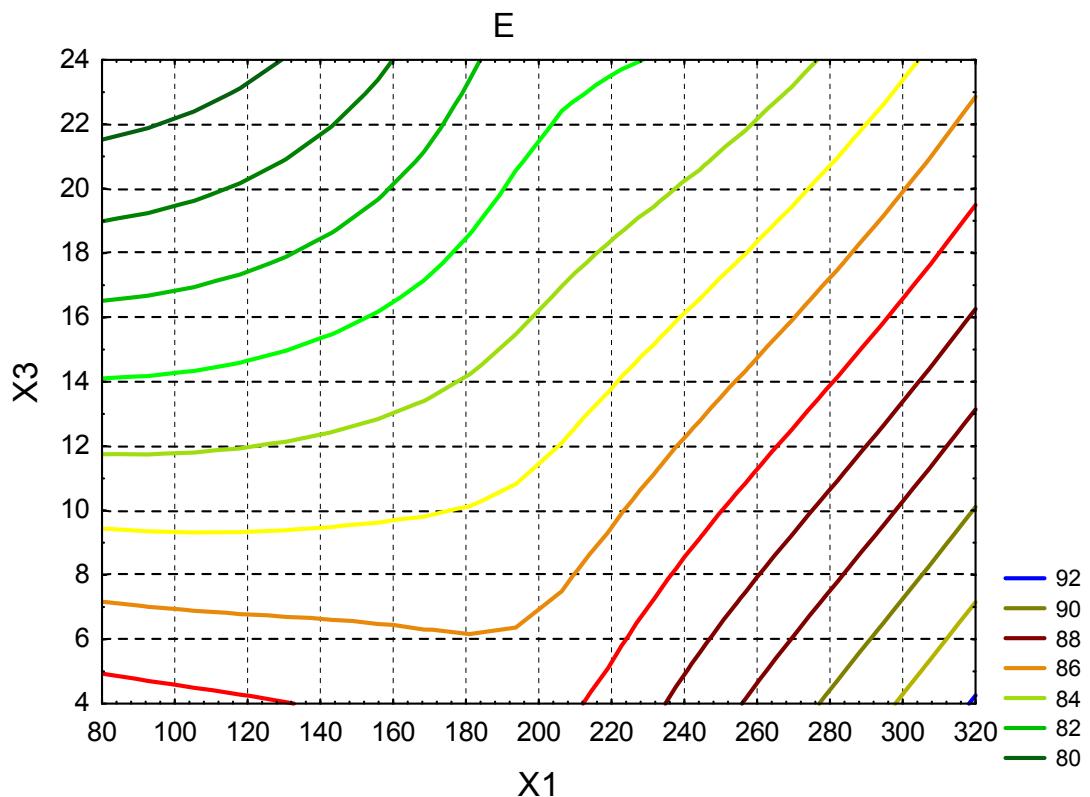


Рисунок 9. Изолинии эффективности разделения  
в координатах  $X_1$  (расход воздуха),  $X_3$  (нагрузка на сепаратор).

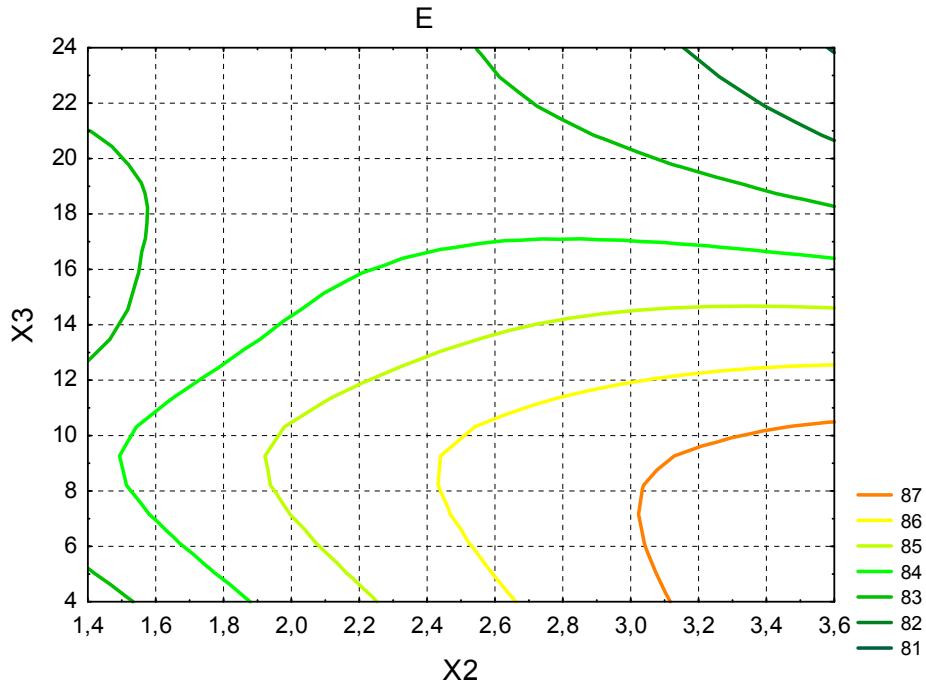


Рисунок 10. Изолинии эффективности разделения в координатах  $X_2$  (амплитуда колебаний),  $X_3$  (нагрузка на сепаратор).

Изучение факторного пространства по полученной математической модели, имеющей вид уравнения (15) и представленной на рис. 5-10, позволило сделать следующие основные выводы. Наибольшее влияние на эффективность разделения оказывают удельный расход воздуха и нагрузка на сепаратор, причём их влияние взаимно противоположное: расход воздуха влияет прямо пропорционально, а нагрузка на сепаратор – обратно пропорционально.

Наиболее высокие значения эффективности разделения (более 88%) алюминиевых и резиновых зёрен в пневмовибрационном сепараторе достигаются при высоких удельных расходах воздуха  $280\text{-}320 \text{ м}^3/\text{ч}\cdot\text{м}^2$  в широком диапазоне изменения амплитуды колебаний – от 2 до 3,6 мм (см. рис. 5 и 8). Эта же эффективность может быть получена при снижении удельного расхода воздуха до  $230 \text{ м}^3/\text{ч}\cdot\text{м}^2$  и низкой нагрузке на сепаратор – от 4 до 12 кг/ч (см. рис. 6 и 9). При амплитуде колебаний более 3 мм не удаётся получить эффективность разделения выше 87% даже при низкой нагрузке на сепаратор (не более 10 кг/ч), о чём свидетельствуют данные рис. 7 и 10.

Выполненный анализ результатов факторного эксперимента позволяет ещё раз подчеркнуть определяющее значение разрыхленности материала для эффективности разделения, т.к. и удельный расход воздуха и нагрузка на сепаратор влияют на этот параметр. Влияние амплитуды колебаний менее значимо по сравнению с первыми двумя параметрами.

**САМОЙЛИК** Виталий Григорьевич  
**КОРЧЕВСКИЙ** Александр Николаевич

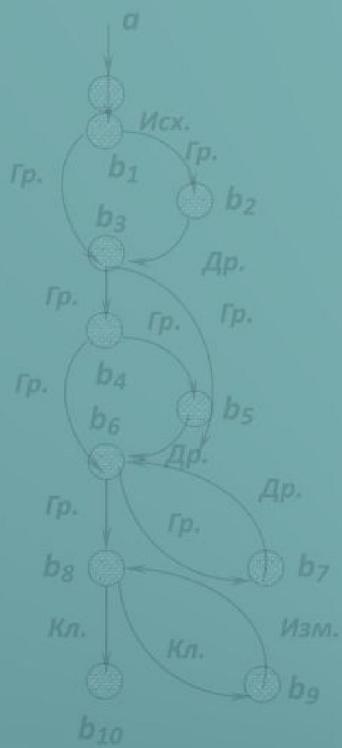
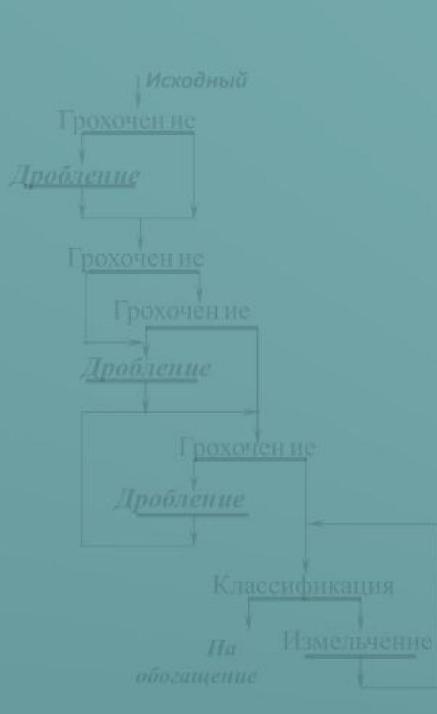
**ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА ФИЗИЧЕСКОГО  
ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ОБОГАЩЕНИИ  
ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ**

Учебное пособие  
(на русском языке)

Редакционно- техническое оформление,  
компьютерная верстка *A.H. Корчевский*  
Дизайн обложки *A.A. Гончаренко*

Подписано к печати 25.03.2016 г.  
Формат 60x84<sup>1/16</sup>. Бумага мелованная.  
Гарнитура «Times New Roman». Печать лазерная.  
Уч.-изд. л. 12,27. Ус. печ. л. 11,92.  
Заказ № 1621 Тираж 300 экз.

Печать ООО «Технопарк»  
«Университетские технологии»  
г. Донецк, ул. Артема, 58  
Тел.: +380 (62) 304-92-51



$$\left( S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) dx dz - S dx dz = \frac{dS}{dy} dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(\rho' v'_x)}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v'_y)}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho' v'_z)}{\partial z'} = 0; \\
 & \rho' \left( v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) = \rho' g'_x - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \\
 & + \mu' \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right] \\
 & v'_x \frac{\partial \tau'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \tau'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial \tau'}{\partial z'} = a' \left( \frac{\partial^2 \tau'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \tau'}{\partial z'^2} \right) \\
 & \alpha' = - \frac{\lambda' \left( \frac{\partial \tau'}{\partial n'} \right)_F}{\tau'_F - \tau'_0} \\
 & \frac{A_p A_v}{A_l} \rho \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = 0 \\
 & \frac{A_p A_v^2}{A_l} \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) = A_p A_g \rho g_x - \frac{A_p}{A_l} \frac{\partial p}{\partial x} + \\
 & + \frac{A_p A_v}{A_l^2} \mu \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dots \right]
 \end{aligned}$$