

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**  
для самостоятельной работы  
по дисциплине

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ  
В ГОРНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ**

Донецк  
2023

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «ОХРАНА ТРУДА И АЭРОЛОГИЯ»

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

для самостоятельной работы по дисциплине  
«Математические методы и модели в горном производстве»  
для обучающихся по специальности 21.05.04 «Горное дело»  
всех форм обучения

РАССМОТРЕНО  
на заседании кафедры  
«Охрана труда и аэрология»  
Протокол № 4 от 14.12.2022 г.

УТВЕРЖДЕНО  
на заседании учебно-  
издательского совета ДОННТУ  
Протокол № 1 от 25.01.2023 г.

Донецк  
2023

УДК 622.001.573(076)

М54

**Составитель:**

Кавера Алексей Леонидович – кандидат технических наук, заведующий кафедрой охраны труда и аэрологии ГОУВПО «ДОННТУ».

**М54      Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математические методы и модели в горном производстве»** для обучающихся по специальности 21.05.04 «Горное дело» всех форм обучения / ГОУВПО «ДОННТУ», Каф. охраны труда и аэрологии ; сост. А. Л. Кавера. – Донецк : ДОННТУ, 2023. – Систем. требования: Acrobat Reader. – Загл. с титул. экрана.

В методических рекомендациях приведены необходимые теоретические сведения и варианты контрольных заданий для самостоятельной работы студентов по курсу «Математические методы и модели в горном производстве» Даны рекомендации и алгоритмы для выполнения контрольных заданий. Детально описан ход выполнения работ на ПЭВМ.

УДК 622.001.573(076)

## ВВЕДЕНИЕ

Математические методы и модели в горном производстве - раздел знаний, в которой изучаются методы количественного измерения взаимосвязей между различными показателями. Он является одной из важных дисциплин при подготовке специалистов для всех студентов горных специальностей.

Математические методы и модели в горном производстве построены на основе таких наук, как высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. В связи с громоздкостью реализации моделей при изучении математических методов и моделей в горном производстве необходимо использовать современные средства информационных технологий.

Цель изучения дисциплины " Математические методы и модели в горном производстве" состоит в том, чтобы научить студентов количественно оценивать взаимосвязи показателей для разных массивов информации с тестированием информации на её соответствие предусловиям и определением методов количественного измерения взаимосвязей, которые целесообразно использовать в каждом конкретном случае с учётом особенностей этой информации.

Во время изучения этой дисциплины студенты могут:

- освоить методы построения и реализации моделей с помощью персонального компьютера;
- получить практические навыки количественной оценки взаимосвязей показателей;
- анализировать полученные результаты;
- применять полученные навыки для решения конкретных задач.

Работы, приведенные в данной методичке, позволят студентам получить необходимые знания по использованию математических методов и моделей в горном производстве.

# ТЕМА 1. ПОСТРОЕНИЕ ПАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)

## 1.1. Постановка задачи

Данные опроса восьми шахт о прибыли от реализации угля, в зависимости от объёма инвестиций, приведены в таблице согласно варианту (см. пункт 1.4), требуется:

- I. Построить линейную однофакторную модель зависимости величины прибыли от реализации угля от объёма инвестиций,
- II. Определить коэффициент корреляции и оценить тесноту связи между величиной прибыли от реализации угля от объёма инвестиций,
- III. Определить коэффициент детерминации и коэффициент эластичности и объяснить их смысл.
- IV. Определить среднюю по модулю относительную ошибку аппроксимации и оценить точность построенной модели.

## 1.2. Теория к теме №1

I. Построить линейную однофакторную модель зависимости прибыли горного предприятия от объёма инвестиций:

$$y = a_0 + a_1 x, \quad (1.1)$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}, \quad (1.2)$$
$$a_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}.$$

II. Для однофакторной модели определить:

а) коэффициент корреляции и оценить тесноту связи между величиной прибыли горного предприятия от объёма инвестиций по формуле:

$$r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_y S_x}; \quad (1.3)$$

где

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n}; \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}; \quad (1.4)$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}; \quad S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (1.5)$$

Чем ближе значение коэффициента корреляции к единице, тем теснее корреляционная связь.

III. Рассчитать *коэффициент детерминации* для линейной модели по формуле:

$$R_{yx}^2 = r_{yx}^2, \quad (1.6)$$

Коэффициент детерминации показывает долю изменения (вариации) результативного признака под действием факторного признака.

*Коэффициент эластичности* для линейной модели парной регрессии рассчитывается по формуле

$$\Theta_{yx} = \frac{a_1 \bar{x}}{\bar{y}}. \quad (1.7)$$

Он показывает, насколько процентов в среднем изменяется результативный признак  $y$  при изменении факторного признака  $x$  на один процент.

IV. Найти среднюю по модулю относительную ошибку аппроксимации и оценить точность построенной модели по формуле

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - y_i|. \quad (1.8)$$

где

$$y_i = a_0 + a_1 x_i.$$

### 1.3. Пример выполнения контрольного задания к теме № 1

Выполним расчёт по данным таблицы 1.1.

Таблица 1.1

Величина прибыли горного предприятия $x$	1,4	5,5	7,6	9,8	12	14,7	18,9
Объём инвестиций	1,1	2	2,4	2,8	3,1	3,5	4

I. Для построения линейной однофакторной модели зависимости величины прибыли горного предприятия от объёма инвестиций подготовим таблицу 1.2.

Таблица 1.2.

Номер эксперимента	Величина прибыли горного предприятия $x_i$	Объём инвестиций $y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1	1,4	1,1	1,96	1,54
2	5,5	2	30,25	11
3	7,6	2,4	57,76	18,24
4	9,8	2,8	96,04	27,44
5	12	3,1	144	37,2
6	14,7	3,5	216,09	51,45
7	18,9	4	357,21	75,6
Сумма	69,9	18,9	903,31	222,47

По формуле (1.2) определим коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ :

$$a_0 = \frac{18,9 \cdot 903,31 - 222,47 \cdot 69,9}{7 \cdot 903,31 - 69,9 \cdot 69,9} = 1,05897; \quad a_1 = \frac{7 \cdot 222,47 - 69,9 \cdot 18,9}{7 \cdot 903,31 - 69,9 \cdot 69,9} = 0,164338.$$

Тогда регрессионная модель, согласно формуле (1.1) будет иметь вид

$$y = 1,05897 + 0,164338x. \quad (1.9)$$

Построим график зависимости и отметим экспериментальные точки (рис. 1.1).

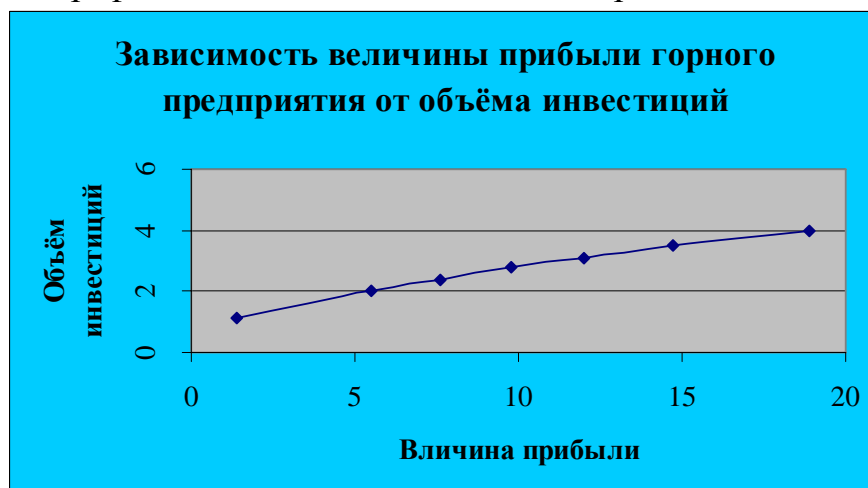


Рис. 1.1

II. Для полученной модели определим:

а) коэффициент корреляции по формуле (1.3) и оценим тесноту связи между прибылью горного предприятия и объёмом инвестиций. Для этого вычислим средние значения, используя данные таблицы 1.2 и формулы

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{69,9}{7} = 9,985; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{18,9}{7} = 2,7; \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} = \frac{222,47}{7} = 31,78. \quad (1.10)$$

Для вычисления средних квадратичных ошибок  $S_y, S_x$  подготовим таблицу 1.3.

Таблица 1.3

Величина прибыли горного предприятия $x_i$	Объём инвестиций $y_i$	регрессия $y_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$	$ y_i - y_i $
1,4	1,1	1,289040886	2,56	73,7144898	0,189041
5,5	2	1,962826686	0,49	20,12163265	0,037173
7,6	2,4	2,307936486	0,09	5,691632653	0,092064
9,8	2,8	2,669480086	0,01	0,034489796	0,13052
12	3,1	3,031023686	0,16	4,057346939	0,068976
14,7	3,5	3,474736285	0,64	22,2244898	0,025264
18,9	4	4,164955885	1,69	79,4644898	0,164956
		сумма=	5,64	205,3085714	0,707994

Среднеквадратические отклонения вычислим по формулам

$$S_x = \sqrt{\frac{205,3086}{7}} = 5,415699024; \quad S_y = \sqrt{\frac{5,64}{7}} = 0,89761589. \quad (1.11)$$

Коэффициент корреляции вычислим по формуле

$$r_{yx} = \frac{31,781 - 9,9857 \cdot 2,7}{0,89761589 \cdot 5,415699024} = 0,99152. \quad (1.12)$$

Коэффициент корреляции 0,99152 близок к единице, поэтому можно утверждать, что имеется сильная связь между величиной прибыли горного предприятия и объёмом инвестиций.

III. Рассчитаем коэффициент детерминации по формуле

$$R_{yx}^2 = r_{yx}^2 = 0,99152^2 = 0,9831142. \quad (1.13)$$

Значит 98,31 % величины прибыли горного предприятия зависят от изменения объёма инвестиций, а остальные 1,69 % связаны с изменением других, не включённых в модель, факторов.



Коэффициент эластичности вычислим по формуле

$$\mathcal{E}_{yx} = \frac{a_1 \bar{x}}{\bar{y}} = \frac{0,164 \cdot 9,98571}{2,7} = 0,6078. \quad (1.14)$$

С увеличением объёма инвестиций на 1 % прибыль горного предприятия увеличится в среднем на 0,607 %.

IV. Найдём среднюю по модулю линейную относительную ошибку аппроксимации по формуле

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| = \frac{0,707994}{7} = 0,101.$$

Коэффициент  $d$  низкий, значит точность построенной модели высока.

**1.4. Исходные данные для выполнения контрольного задания к теме №1 по вариантам:**

**Вариант 1**

Объём инвестиций ( $x$ ), млн. руб.	1,2	5,1	6	7,8	10	13	19	15
Прибыль горного предприятия ( $y$ ), млн. руб.	1	4,5	3,7	6,8	7,5	10	15,1	10

**Вариант 2**

Объём инвестиций ( $x$ ), млн. руб.	2	4,5	6,1	7,3	10,2	11	13	14,5
Прибыль горного предприятия ( $y$ ), млн. руб.	1	1,7	2,6	3,7	8,5	6,8	8	10

**Вариант 3**

Объём инвестиций ( $x$ ), млн. руб.	2,1	3,3	4,7	6,8	9,1	12	13,2	14
Прибыль горного предприятия ( $y$ ), млн. руб.	1,1	2	2,2	3,3	4,5	7	6,6	8

**Вариант 4**

Объём инвестиций ( $x$ ), млн. руб.	2,3	3,4	4,5	6,6	8,1	12,3	13,1	14
Прибыль горного предприятия ( $y$ ), млн. руб.	1,1	2	2,2	3,3	4,5	7	6,6	8

**Вариант 5**

Объём инвестиций ( $x$ ), млн. руб.	1,8	3	4,1	5,8	8	10	11	11,5
Прибыль горного предприятия ( $y$ ), млн. руб.	0,8	1,2	1,8	2,4	3,9	4,2	3,2	5

**Вариант 6**

Объём инвестиций ( $x$ ), млн. руб.	1,5	2,9	3,0	4,7	5,9	6,8	7,5	9,3
Прибыль горного предприятия ( $y$ ), млн. руб.	1	2,5	2,5	2,8	3	3,1	3,4	5

**Вариант 7**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2	3	4	5	6	7	8	9
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,1	1,8	1,9	2,3	2,6	3,3	3,8	4,9

**Вариант 8**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2,2	3,6	4,2	5,8	6,7	7,9	8,6	10,6
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,2	2,0	2,6	2,9	3, 1	3,9	4,5	5

**Вариант 9**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	1,8	3,1	4,4	5,7	6,8	7,5	8,9	11
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	0,9	1,5	1,7	2	2,7	3,4	3,5	4,8

**Вариант 10**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2	3	4,4	5,7	6,8	7,5	8,8	10,2
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1	1,3	2,2	2,3	2,4	2,8	3,6	4

**Вариант 11**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	1,7	2,8	3,5	4,7	5,2	6,7	7,6	9
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,2	1,5	1,9	2,0	2,2	2,4	3	3,3

**Вариант 12**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	1,5	2,5	3,4	4,7	5,8	7	8,5	10
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	0,9	1,1	1,2	2	2,3	2,5	2,7	3

**Вариант 13**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	1	2,3	3,4	4,3	5,6	6,8	8	9,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1	1,3	1,4	1,5	1,8	2,4	2,7	3

**Вариант 14**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2	2,9	3,4	4,7	5,1	7,5	8	9
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,5	1,9	1,9	2,4	2,5	2,8	3,2	3,3

**Вариант 15**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	3	4	5,5	7	7,9	8,6	9,7	10,8
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,4	1,7	1,9	1,9	2,1	2,3	2,4	2,9

**Вариант 16**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	3,2	4,8	5,6	7	8,1	9,2	10,3	11,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,3	1,5	1,8	1,9	2,0	2,1	2,5	2,9

**Вариант 17**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2,8	3,6	4,3	6	7,5	8,3	9,1	10,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1	1,3	1,8	1,7	1,9	2,3	2,4	2,8

**Вариант 18**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	0,9	1	1,2	1,6	1,9	2,3	2,9	3,3

**Вариант 19**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	3	3,8	4,4	5,5	6,3	7,1	8,5	9
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,6	1,7	1,7	2	2,1	2,2	2,7	3,5

**Вариант 20**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	1,9	2,7	3,4	4,4	5,5	6,2	7,3	8
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	0,8	1,1	1,6	1,8	1,8	2,3	2,6	3,1

**Вариант 21**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2	2,7	3,9	4,9	5,7	7	9	11
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,3	1,8	2,5	2,6	3,1	3,2	3,5	4

**Вариант 22**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	1,9	2,5	3,5	4,2	5,5	6,7	7,7	8,3
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,5	3

**Вариант 23**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2	2,7	4	4,5	6	6,7	7,2	8
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,2	1,5	1,6	1,9	3	2,8	3,1	3

**Вариант 24**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	3	4	6	7	8,5	9	9,5	10
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,1	1,7	2	2	2,1	2,8	2,5	2,7

**Вариант 25**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	4	4,5	5	5,5	6	6,6	7	7,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	2	2,2	2,5	2,8	2,7	2,9	3,5	3,4

**Вариант 26**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	2	2,2	2,2	2,3	3,4	3,3	3,5	3,8

**Вариант 27**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	2	2,7	4,2	4,5	6	6,7	7,2	8
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,3	1,6	1,7	1,9	3	2,8	3,1	3

**Вариант 28**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	3	4	6	7	8,5	9	9,5	10
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	1,2	1,8	2	2	2,1	2,8	2,5	2,7

**Вариант 29**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	4	4,5	5	5,5	6	6,6	7	7,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	2,1	2,8	2,5	2,8	2,7	2,9	3,5	3,4

**Вариант 30**

Объём инвестиций (x), млн. руб.	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
Прибыль горного предприятия (y), млн. руб.	2,2	2,4	2,2	2,3	3,4	3,3	3,5	3,8

## ТЕМА 2. АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ И КАЧЕСТВА МОДЕЛИ В ЦЕЛОМ

### 2.1. Постановка задачи

Для модели, полученной в работе №1, выполнить следующий анализ:

I. Осуществить проверку статистической значимости каждого параметра уравнения регрессии, используя *t-критерий*.

II. Осуществить проверку общего качества уравнения регрессии в целом. Сделать вывод являются ли статистически значимыми оценка степени взаимосвязи  $R^2$  и вся модель в целом, используя *F-критерий*.

### 2.2. Теория к теме №2

I. Статистическую значимость оценок параметров модели  $a_0$ ,  $a_1$  осуществить с помощью *t-критерия*. Для этого определим табличное значение *t-критерия* и фактические значения *t-критерия* для каждого из оцениваемых параметров.

Табличное значение  $t_{табл}$  определяется по таблице 1 (приложение А) при уровне значимости 5 % ( $\alpha = 0,05$ ) или 1 % ( $\alpha = 0,01$ ) для степеней свободы  $df = n - m - 1$ , где  $m$  – количество факторов в модели (в данном случае  $m=1$ ).

Фактические значения *t-критерия* для каждого из оцениваемых параметров следует вычислить по формулам:

$$t_{a_0} = \frac{|a_0|}{S_{a_0}}, \quad t_{a_1} = \frac{|a_1|}{S_{a_1}}, \quad (2.1)$$

где

$$S_{a_1} = S_e \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad S_{a_0} = S_e \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad S_e = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2}, \quad (2.2)$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \quad (2.3)$$

$y_i$  – экспериментальные значения;

$$y_i = a_0 + a_1 x_i . \quad (2.4)$$

Если  $t_{a_1} > t_{табл}$ , то оценка  $a_1$  является статистически значимой в модели при заданном уровне значимости. Аналогично определяется значимость для параметра  $a_0$ .

II. Значимость уравнения регрессии в целом и коэффициента детерминации  $R^2$  определяется с помощью критерия Фишера.

Коэффициент детерминации  $R^2$  определяется по формуле

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} . \quad (2.5)$$

В частности, для линейной регрессионной модели коэффициент детерминации равен квадрату коэффициента регрессии, т.е.

$$R^2 = r_{yx}^2 . \quad (2.6)$$

Фактическое значение критерия Фишера  $F_{факт}$  определяется по формуле:

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} , \quad (2.7)$$

где  $n$  – объём выборки;  $m$  – число факторов;  $R^2$  – коэффициент детерминации.

Табличное значение  $F_{табл}$  определяется по таблице 3 приложения А при 5 % уровне значимости для степеней свободы  $v_1 = m = 1$  (по горизонтали в таблице) и  $v_2 = n - m - 1 = n - 2$  (по вертикали в таблице), где  $n$  – число экспериментов, а  $m$  – число факторов. Если  $F_{факт} > F_{табл}$ , то с вероятностью 95 % делается заключение о том, что уравнение регрессии в целом статистически значимо и статистически значим показатель степени связи  $R^2$ , то есть отвергается нулевая гипотеза о том, что  $R^2 = 0$ .



### 2.3. Пример выполнения контрольного задания к теме №2

По исходным данным, приведенным в таблице 1.1, рассчитаем  $S_e, S_{a_0}, S_{a_1}$  по формулам (2.2). Для этого подготовим таблицу (2.1).

Таблица 2.1

Величина прибыли горного предприятия $x$	Объём инвестиций $y_i$	регрессия $y_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$	$e_i^2 = (y_i - y_i)^2$	$x_i^2$
1,4	1,1	1,289	2,56	73,7145	0,035736	1,96
5,5	2	1,9628	0,49	20,1216	0,001382	30,25
7,6	2,4	2,3079	0,09	5,69163	0,008476	57,76
9,8	2,8	2,6694	0,01	0,03448	0,017035	96,04
12	3,1	3,0310	0,16	4,05734	0,004758	144
14,7	3,5	3,4747	0,64	22,2244	0,000638	216,09
18,9	4	4,1649	1,69	79,4644	0,02721	357,21
		сумма=	5,64	205,3085	0,095236	903,31

Тогда получим:

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2} = \sqrt{\frac{1}{7-2} \cdot 0,095236} = 0,1380115;$$

$$S_{a_0} = S_e \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 0,1380115 \sqrt{\frac{903,31}{7 \cdot 205,3085}} = 0,05216;$$

$$S_{a_1} = S_e \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = 0,1380115 \sqrt{\frac{1}{205,3085}} = 0,00963.$$

Согласно (1.9) имеем:  $a_0 = 1,05897$ ;  $a_1 = 0,164338$ .

Для вычисления фактических значений  $t$ -критерия воспользуемся формулами (2.1):

$$t_{a_0} = \frac{|a_0|}{s_{a_0}} = \frac{1,05897}{0,05216} = 20,302; \quad t_{a_1} = \frac{|a_1|}{s_{a_1}} = \frac{0,164338}{0,00963} = 17,065.$$

По таблице 1 приложения А найдём табличное значение  $t$ -критерия для степеней свободы  $df = n - m - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$  и уровня значимости 5%, т. е.  $t_{табл} = 2,015$ .

При уровне значимости 5% имеет место неравенство:

$$t_{a_1} > t_{табл}, \text{ так как } 17,065 > 2,015.$$

Значит с уверенностью 95 % можно утверждать, что оценка  $a_1 = 0,164338$  является статистически значимой, а не случайной. Иными словами, с уверенностью 95 % можно утверждать, что величина расходов на питание зависит от доходов семьи.

Аналогично проверим для другого параметра. Поскольку имеет место:

$t_{a_0} > t_{табл}$  (так как  $20,302 > 2,015$ ), то с уверенностью 95% можно утверждать, что оценка  $a_0 = 1,05897$  в модели является тоже статистически значимой.

II. Значимость уравнения регрессии в целом и коэффициента тесноты связи  $R^2$  определяется с помощью критерия Фишера. Значение оценки  $R^2$  получено в практической работе №1 в выражении (1.13), а именно,  $R^2 = 0,9831142$ .

Фактическое значение  $F_{факт}$  определяется по формуле (2.7):

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,9831142}{(1-0,9831142)} \cdot \frac{(7-1-1)}{1} = 291,1.$$

Табличное значение  $F_{табл}$  определяется по таблице 3 приложения А при 5 % уровне значимости для степеней свободы  $v_1 = m = 1$  (по горизонтали в таблице) и  $v_2 = n - m - 1 = n - 2 = 7 - 2 = 5$  (по вертикали в таблице), где  $n$  – число экспериментов, а  $m$  – число факторов. В данном случае  $F_{табл} = 6,61$ .

Поскольку условие  $F_{факт} > F_{табл}$  выполняется (так как  $291,1 > 6,61$ ), то с вероятностью 95% делается заключение о том, что уравнение регрессии в целом статистически значимо и статистически значим показатель степени связи  $R^2$ , то есть отвергается нулевая гипотеза о том, что  $R^2 = 0$ .

## ТЕМА № 3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ЛИНИИ ТРЕНДА

### 3.1. Постановка задачи

Имеются данные величины объёма реализации угля по годам, приведенные в пункте 3.4 согласно выбранного варианта. Требуется осуществить прогноз объёма реализации на два последующие года вперёд. Для этого следует:

I. Нанести данные ряда динамики на график и провести линию тренда (линию регрессии). Вывести на диаграмме уравнение линии тренда и коэффициент аппроксимации  $R^2$ .

II. Поочерёдно заменять линию тренда на диаграмме, выбрав другие типы линии тренда. Для каждого из типов записать модель и значение коэффициента достоверности аппроксимации  $R^2$  в отчёт. Сравнить значения  $R^2$  в отчёте и выбрать на диаграмме тот тип линии тренда, для которой  $R^2$  имеет наибольшее значение, т. е. подобрать такую линию тренда, для которой коэффициент аппроксимации ближе к единице.

III. Для прогноза продлить линию тренда на два года вперёд. Полученную диаграмму поместить в отчёт. По данным графика сделать анализ прогноза на два года вперед, в котором отразить возрастет или уменьшится ожидаемая прогнозируемая величина относительно последнего анализируемого года.

### 3.2. Рекомендации к выполнению контрольного задания к теме №3

I. Для выполнения первого пункта необходимо:

1. Внести исходные данные на лист Excel.  
2. Поместить исходные данные в виде точек на диаграмму, выполнив действия:

а) выделить данные;

б) вызвать мастер диаграмм;

в) на первом шаге построения диаграммы выбрать тип диаграммы "Точечная" и первый вид диаграммы;

г) на втором шаге построения диаграммы во вкладке "Ряд" заполнить поле "Подписи оси X", поместив туда ссылки на диапазон ячеек, где

расположены данные по годам.

д) на третьем шаге построения диаграммы подписать оси и диаграмму, указать остальные параметры и завершить построение диаграммы.

3. Добавить линию тренда на диаграмму, выполнив действия:

а) выделить одну из точек на диаграмме и в меню правого щелчка на выделенной точке выбрать команду "Добавить линию тренда";

б) в появившемся окне во вкладке "Тип" выбрать нужный тип линии тренда;

в) во вкладке "Параметры" активизировать пункты:

– Показывать уравнение на диаграмме;

– Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации  $R^2$ ;

г) записать в отчёт уравнение регрессии и значение  $R^2$ .

II. Для выполнения этого пункта необходимо:

1. Выбрать другой тип линии тренда на диаграмме:

а) в меню правого щелчка линии тренда выбрать "Формат линии тренда";

б) в появившемся окне во вкладке "Вид" выбрать тип и вид линии тренда.

2. Для выбранного типа линии тренда записать в отчёт уравнение регрессии и значение  $R^2$ ;

3. Повторять шаги 1 и 2 до тех пор, пока не будут перебраны поочерёдно все предлагаемые типы линий тренда.

4. Согласно отчёта выбрать нужную модель (линию тренда), для которой величина  $R^2$  максимальна и её поместить на диаграмму.

III. Для выполнения этого пункта необходимо выполнить действия:

1. Для прогнозирования в меню правого щелчка линии тренда выбрать команду "Формат линии тренда", а затем во вкладке "Параметры" указать "Прогноз" на нужное количество шагов вперёд или назад (в данном случае продлить линию тренда вперёд на два года вперёд).

2. Полученную диаграмму поместить в отчёт.

3. На основе графика сделать анализ прогноза.

### 3.3. Пример выполнения контрольного задания к теме №3

Имеются исходные данные, приведенные в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	20,6	21,1	20,6	21,3	21,8	23	21,7	21,3

Выполним на ПЭВМ пункты I и II и запишем уравнение линии тренда и значения коэффициента достоверности аппроксимации для каждого типа этих линий:

- 1) линейная  $y = 0,1857x - 349,91$ ;  $R^2 = 0,345$ ;
- 2) логарифмическая  $y = 371,46\text{Ln}(x) - 2801,9$ ;  $R^2 = 0,3455$ ;
- 3) степенная  $y = 1\text{E-}56x^{17,333}$ ;  $R^2 = 0,3554$
- 4) экспоненциальная  $y = 6\text{E-}07e^{0,0087x}$ ;  $R^2 = 0,3552$ .

Для четвертого варианта линии тренда значение  $R^2$  наибольшее по сравнению с остальными. Следовательно, из всех типов линий тренда выбираем степенную.

Для степенной линии тренда добавим прогноз на два года вперёд как указано в пункте III рекомендаций для выполнения работы №3. График степенной линии тренда с прогнозом показан на рис. 3.1.

Как видно из рис. 3.1 в 2015-м году по сравнению с 2013-им годом в среднем объём реализации угля увеличится на 0,4 млн. руб.

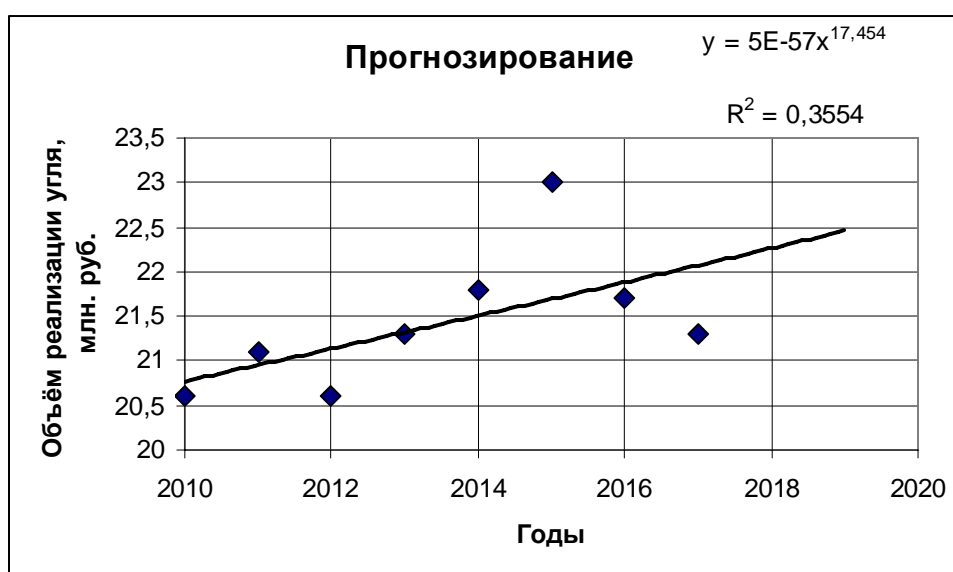


Рис. 3.1

### 3.4 Варианты исходных данных к заданию по теме №3

#### Вариант 1

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	35	35,6	38,7	39,4	41,8	43,3	42,9

#### Вариант 2

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб..	135,2	130,7	139,9	141,6	143,1	142,5	141,8

#### Вариант 3

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	9,7	10,3	10,8	10,7	11,6	11,4	11,4

#### Вариант 4

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	14,5	16,2	16,1	17,2	17,8	17,7	17,5

#### Вариант 5

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	32,8	30,2	21,7	27,8	27,5	27,2	27,9

#### Вариант 6

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	36,3	38,5	39,7	39,1	39,0	38,7	40,0

#### Вариант 7

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	52,7	56,5	60,7	54,8	70,4	68,1	67,8

#### Вариант 8

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	10,84	11,12	10,6	11,31	11,62	12,0	12,73	11,12

**Вариант 9**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	2,8	2,9	3,0	3,6	3,8	3,9	4,1

**Вариант 10**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	9,8	10,1	10,3	11,9	11,9	11,8	12,1

**Вариант 11**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	4,7	4,6	4,6	5,3	5,3	5,5	5,6

**Вариант 12**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	1,97	2,12	1,28	1,71	1,6	1,11	1,18	1,02

**Вариант 13**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	2,46	2,38	2,79	2,63	2,86	3,46	4,32	5,08

**Вариант 14**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	51,4	54,9	57,4	57,7	58,9	64,3	67,8	67,1

**Вариант 15**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	16,1	17,7	19,5	19,4	20,6	20,8	22,5	23,6

**Вариант 16**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	3,0	3,1	3,5	3,7	3,8	4,1	4,1	4,3

**Вариант 17**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	26,9	24,8	27,3	28,4	35,0	39,1	40,5	39,3

**Вариант 18**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	56,6	62,0	66,1	67,6	66,3	71,2	74,8	78,5

**Вариант 19**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	4,2	4,5	5,1	5,5	5,8	6,1	6,4	7,1

**Вариант 20**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	17,8	21,6	23,9	24,8	27,2	29,2	30,2

**Вариант 21**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	37,7	42,8	45,0	47,3	49,2	48,9	47,1

**Вариант 22**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	45,0	47,3	48,8	47,1	45,4	45,8	46,1

**Вариант 23**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	15,6	17,0	18,7	19,8	20,1	21,5	22,8

**Вариант 24**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	36,1	33,6	39,9	36,9	38,2	36,9	38,3

**Вариант 25**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	39,4	41,8	43,3	42,9	41,8	41,4	42,6

**Вариант 26**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Объём реализации угля, млн. руб.	24,8	27,2	29,2	30,4	35,6	38,7	39,4



**Вариант 27**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	14,6	15,6	17,0	18,7	19,8	20,1	21,5	22,8

**Вариант 28**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	18,87	19,0	19,32	19,6	20,02	20,88	21,55	20,1

**Вариант 29**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	15,6	15,3	17,7	19,9	20,0	19,7	25,5	28,0

**Вариант 30**

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Объём реализации угля, млн. руб.	20,8	21,1	20,6	21,3	21,6	22,0	21,7	21,1

## ТЕМА № 4. ПОСТРОЕНИЕ МНОГОФАКТОРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ МОДЕЛИ И ОЦЕНОК ЕЁ ПАРАМЕТРОВ

### 4.1 Постановка задачи

Имеются данные  $n$  испытаний величин  $x_1$ ,  $x_2$  и  $y$  по результатам обследования десяти статистически однородных участков шахт, приведенные в таблице пункта 4.3 согласно варианта ( $x_1$  – фондовооружённость;  $x_2$  – энерговооружённость;  $y$  – производительность труда).

Выполнить следующее:

I. Построить линейную регрессионную модель с помощью ПЭВМ:

$$y = b + a_1x_1 + a_2x_2 \quad (4.1)$$

и записать полученную модель в отчёт.

II. В отчёт поместить результаты выполнения команды из пакета анализа "Регрессия", с полученными на ПЭВМ данными (см. структуру таблицы 4.1).

Таблица 4.1.

Регрессионная статистика								
Множественный R								
R-квадрат								
Нормированный R-квадрат								
Стандартная ошибка								
Наблюдения								
Дисперсионный анализ								
	<i>Df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>			
Регрессия								
Остаток								
Итого								
	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>	<i>Нижние 95,0%</i>	<i>Верхние 95,0%</i>
Y-пересечение								
Переменная X 1								
Переменная X 2								

III. Определить по результатам выполнения команды пакета анализа "Регрессия" значение коэффициента множественной корреляции и детерминации.

IV. Проверить статистическую значимость оценок параметров модели.

V. Проверить статистическую значимость оценки степени достоверности взаимосвязи  $R^2$  и всей модели в целом.

## 4.2. Рекомендации и алгоритм для выполнения задания к теме №4

I. Для построения линейной многомерной регрессионной модели:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b \quad (4.2)$$

в среде Excel выполнить действия:

1. Ввести исходные значения независимых переменных в столбцах листа Excel, располагая по возрастанию их номеров слева направо (т. е.  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ), и значения зависимой от них переменной  $Y$  (см. рис. 4.1).

2. Выполнить команду Excel, "Регрессия" из пакета анализа (см. рис. 4.1).

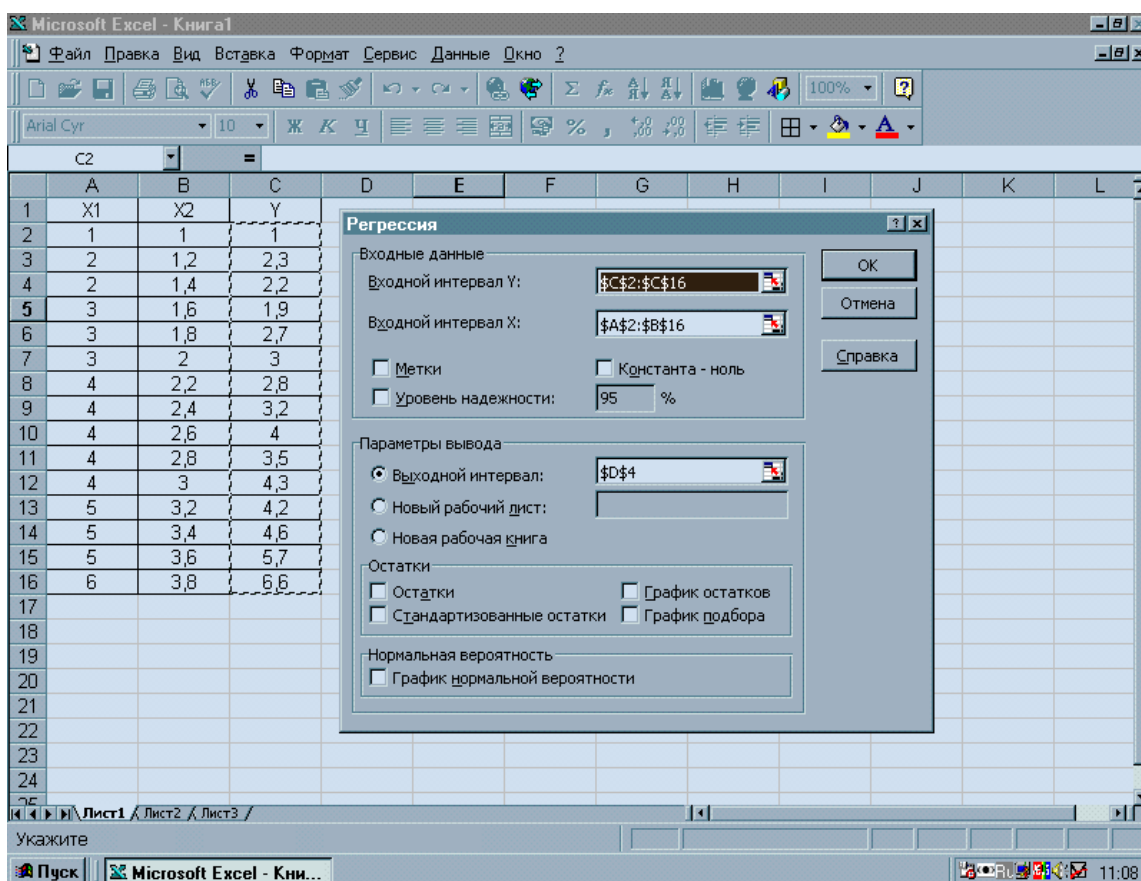


Рис. 4.1 – Окно "Регрессия"

3. В поле "Входной интервал  $Y$ " внести диапазон ячеек, в котором расположены значения  $Y$ . В поле "Входной интервал  $X$ " внести диапазон ячеек, в котором расположены значения всех факторных признаков  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . В

поле "Выходной интервал" указать ссылку на ячейку левого верхнего угла диапазона для вывода результатов расчёта. Результат показан на рисунке 4.2.

В ячейке результатов на пересечении столбца "Коэффициенты" со строкой "Y" выведена константа  $b$ , а со строками "X1", "X2", ..., "XN" – коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , соответственно (рис. 4.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	X1	x2	y								
2		1	1	1							
3		2	1,2	2,3							
4		2	1,4	2,2	вывод итогов						
5		3	1,6	1,9							
6		3	1,8	2,7	Регрессионная статистика						
7		3	2	3	Множественный R	0,951142413					
8		4	2,2	2,8	R-квадрат	0,90467189					
9		4	2,4	3,2	Нормированный R-квадрат	0,888783871					
10		4	2,6	4	Стандартная ошибка	0,491693685					
11		4	2,8	3,5	Наблюдения	15					
12		4	3	4,3							
13		5	3,2	4,2	Дисперсионный анализ						
14		5	3,4	4,6		df	SS	MS	F	значимость F	
15		5	3,6	5,7	Регрессия	2	27,53218117	13,76609	56,9405	7,505E-07	
16		6	3,8	6,6	Остаток	12	2,90115216	0,241763			
17					Итого	14	30,43333333				
18											
19											
20					Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Верхние 95,0%
21					Y-пересечение	-0,299686913	0,381182141	-0,786204	0,447	-1,130211	0,53083761
22					Переменная X 1	0,017908579	0,356600391	0,05022	0,96077	-0,759057	0,79487407
23					Переменная X 2	1,541953663	0,536313801	2,875096	0,01396	0,3734263	2,71048103

Рис. 4.2 – Результаты команды "Регрессия"

Как видно из рис. 4.2, регрессионная модель примет вид:

$$y = 0,0179 \cdot x_1 + 1,54195 \cdot x_2 - 0,2997. \quad (4.3)$$

Поместить модель (4.3) в отчёт.

II. Таблицу 4.2, распечатать и поместить в отчёт или скопировать с дисплея в отчёт.

III. Согласно рис. 4.2 коэффициенты множественной корреляции и детерминации в данном случае:  $R=0,951142413$ ;  $R^2=0,90467189$ .

IV. Статистическую значимость оценок параметров модели  $b$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  осуществим с помощью  $t$ -критерия. Для этого определим табличное значение  $t$ -критерия и фактические значения  $t$ -критерия для каждого из оцениваемых

параметров. Табличное значение  $t_{табл}$  определим по таблице 1 (приложение А) при уровне значимости 5% ( $\alpha = 0,05$ ) и для степеней свободы  $df = n - m - 1 = 15 - 2 - 1 = 12$ , а именно,  $t_{табл} = 1,782$ .

Фактические значения  $t$ -критерия для каждого из оцениваемых параметров посмотреть на рис. 4.2 в столбце  $t$ -статистика. В данном случае:

$$t_{a_1} = 0,05022; t_{a_2} = 2,875096; t_b = |-0,786204| = 0,786204.$$

Поскольку условие  $t_{a_1} > t_{табл}$  не выполняется (так как  $0,05022 < 1,782$ ), то с уверенностью 95% можно утверждать, что оценка  $a_1$  параметра модели не является статистически значимой.

Условие  $t_{a_2} > t_{табл}$  выполняется (так как  $2,875096 > 1,782$ ), поэтому с уверенностью 95% можно утверждать, что оценка  $a_2$  является статистически значимой в модели.

Условие  $t_b > t_{табл}$  не выполняется (так как  $0,786204 < 1,782$ ), поэтому с уверенностью 95% можно утверждать, что оценка  $b$  не является статистически значимой в модели.

V. Значимость уравнения регрессии в целом и коэффициента тесноты связи  $R^2$  определяется с помощью критерия Фишера.

Фактическое значение  $F_{факт}$  определяется из результатов выполнения команды "Регрессия" в столбце "F" на рис. 4.2. В данном случае  $F_{факт} = 56,9405$ .

Табличное значение  $F_{табл}$  определим по таблице 3 приложения А при 5% уровне значимости для степеней свободы  $v_1 = m = 2$  (по горизонтали в таблице) и  $v_2 = n - m - 1 = n - 3 = 15 - 3 = 12$  (по вертикали в таблице), где  $n$  – число экспериментов, а  $m$  – число факторов, т. е.  $F_{табл} = 3,89$ .

Условие  $F_{факт} > F_{табл}$  выполняется, поэтому с вероятностью 95% делается заключение о том, что уравнение регрессии в целом статистически значимо и статистически значим показатель степени связи  $R^2$ , то есть отвергается нулевая гипотеза  $R^2 = 0$ .

*Примечание.* Для двух оценок в модели с уверенностью 95% отвергается гипотеза об их статистической значимости. Это может быть по нескольким

причинам:

- 1) малое количество экспериментов;
- 2) наличие мультиколлинеарности факторов;
- 3) наличие гетероскедастичности остатков;
- 4) наличие автокорреляции.

#### 4.3. Варианты исходных данных к заданию по теме №4

##### Вариант 1

$y$	74	84	73	93	80	90	117	120	135	140
$x_1$	33	34	36	35	33	37	39	42	43	44
$x_2$	56	58	67	70	73	77	78	99	93	96

##### Вариант 2

$y$	70	81	79	77	78	85	110	115	120	130
$x_1$	32	34	37	35	36	37	41	45	49	54
$x_2$	51	54	53	70	73	80	83	94	93	100

##### Вариант 3

$y$	75	81	79	74	78	85	110	118	120	130
$x_1$	32	38	37	35	36	39	41	45	49	52
$x_2$	49	54	52	70	75	80	83	90	93	98

##### Вариант 4

$y$	7,1	7,7	7,9	7,6	7,8	8,4	9,1	9,5	9,8	10
$x_1$	3,1	3,6	3,7	3,6	3,8	4,2	4,5	4,8	5,1	5,7
$x_2$	5	5,4	5,5	6,1	7,1	7,7	8,1	8,5	8,7	9

##### Вариант 5

$y$	7,3	7,7	8	7,9	7,8	8,1	8,7	9,1	9,5	10
$x_1$	3,1	3,4	3,7	3,6	3,9	4,2	4,6	4,8	5,1	5,4
$x_2$	5	5,2	5,5	5,9	5,8	6,7	7,1	7,5	8	8,5

##### Вариант 6

$y$	7,2	7,5	8	7,8	7,9	8,1	8,4	9	9,3	9,7
$x_1$	3	3,4	3,6	3,5	3,9	4	4,3	4,6	5	5,2
$x_2$	4,8	5,2	5,5	5,7	5,8	6,2	6,7	7	7,6	8

##### Вариант 7

$y$	7	7,5	8	7,8	8	8,1	8,4	8,7	9	9,2
$x_1$	3	3,5	3,6	3,7	3,9	4,2	4,3	4,7	5	5,3
$x_2$	4,8	5,2	5,6	5,7	5,8	6,2	6,5	7	7,6	8,1

**Вариант 8**

$y$	5,7	6,3	6,1	6,4	6,8	6,7	7	7,3	7,6	8
$x_1$	2,9	3,5	3,4	3,7	3,9	4,1	4,3	4,7	5,1	5,3
$x_2$	4,5	5	4,8	5,3	5,5	5,5	6	6,4	7	7,4

**Вариант 9**

$y$	4,8	5,3	5,1	5,4	5,8	5,7	6	5,9	6,5	7
$x_1$	2,5	2,9	2,8	3,1	3,3	3,3	3,7	3,5	4	4,5
$x_2$	3,7	3,9	3,8	4,1	4,3	4,2	4,5	4,4	5	5,5

**Вариант 10**

$y$	4,5	5,2	4,9	5,2	5,6	5,5	6,1	5,7	6,5	6,9
$x_1$	2,5	2,9	2,8	3	3,2	3,1	3,8	3,4	3,5	4,3
$x_2$	3,7	3,9	3,7	4,1	4,3	4,2	4,6	4,1	4,6	5,9

**Вариант 11**

$y$	3,5	3,6	3,9	4,4	4,9	4,7	5,2	5,8	5,3	6,2
$x_1$	3	3,1	3,2	3,3	3,7	3,4	4	4,2	3,8	4,5
$x_2$	4	3,9	4,1	4,1	4,3	4,2	4,5	4,8	4,7	5,1

**Вариант 12**

$y$	3,5	3,9	4,1	4,4	5	4,7	5,3	6,3	7	6,9
$x_1$	2,9	3,3	3,2	3,4	3,7	3,4	4	4,4	5	4,8
$x_2$	4,1	3,9	4	4,1	4,3	4,4	4,7	5	5,3	5

**Вариант 13**

$y$	2,8	3,5	4,1	4	4,5	4,7	5,3	6	7	6,9
$x_1$	2,9	3,3	3,2	3,4	3,6	3,4	3,7	4,4	5	4,9
$x_2$	4	3,9	4,3	4,1	4,4	4,4	4,7	4,9	5,5	5

**Вариант 14**

$y$	4	4,5	4,1	4,6	4,5	5	5,5	6	6,5	6,9
$x_1$	2,9	3,3	3,2	3,8	3,6	3,8	4	4,4	4,6	4,8
$x_2$	4	3,9	4	4,1	4,4	4,6	5	5,3	5,7	6

**Вариант 15**

$y$	3,9	4,5	4,2	4,6	4,5	4,9	5,5	6,2	6,7	7,5
$x_1$	2,7	3,3	3,2	3,3	3,1	3,8	4,1	4,2	4,1	4,8
$x_2$	4	3,9	3,7	4	4,4	4,1	4,6	5	5,7	6,1

**Вариант 16**

$y$	8	8,5	8,3	8,5	9	8,9	8,7	9,3	9	10
$x_1$	2,5	3,3	3	3,7	4,5	3,8	4,1	4,5	5	5,5
$x_2$	3	3,6	3,6	3,8	3,7	4,5	3,9	4,5	4,8	5,5

**Вариант 17**

$y$	7	8,5	8,3	8,7	9,5	8,9	8,7	9,3	9,7	11
-----	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

$X_1$	3,5	4	3,7	4	4,5	4,1	4	4,3	4,9	5,5
$X_2$	2,9	3,5	3,3	3,8	4	4,1	3,7	4,2	4,8	5,9

### Вариант 18

$y$	6	7	7,5	8	9,5	8,9	9,3	10	11	13
$x_1$	2	2,5	2,6	3	3,7	4	3,8	3,6	3,7	3,5
$x_2$	3	3	3,1	3,5	4	3,3	4,1	5	6,5	7,5

### Вариант 19

$y$	5,5	7	7,5	8,5	8,3	9	9,5	10,5	11	14
$x_1$	3	3,5	3,3	3,7	3,5	4	3,8	3,6	4	4,2
$x_2$	2	2,3	2,6	3	3,2	3,1	4,2	5	5,5	6,5

### Вариант 20

$y$	4,1	6	7,8	8,5	8,3	9,5	10	10,5	11,5	13
$x_1$	3,1	3,5	3,3	4	3,5	4,3	4,1	4	4,8	5
$x_2$	4	3	3,5	4	3,9	4,4	5,1	5,7	5,2	5,8

### Вариант 21

$y$	63	69	73	80	75	82	95	110	125	135
$x_1$	22	28	36	39	33	37	45	55	59	65
$x_2$	47	55	56	60	62	67	77	70	80	93

### Вариант 22

$y$	55	69	75	87	75	85	95	110	120	130
$x_1$	37	28	36	44	33	37	41	50	55	57
$x_2$	41	55	50	59	65	70	77	73	79	87

### Вариант 23

$y$	49	57	64	74	85	97	115	125	120	130
$x_1$	26	32	37	40	45	40	55	60	55	57
$x_2$	33	40	43	50	60	75	70	75	85	95

### Вариант 24

$y$	25	34	30	45	55	67	80	95	110	120
$x_1$	11	15	12	20	23	28	38	45	60	63
$x_2$	30	34	31	40	49	55	60	65	75	83

### Вариант 25

$y$	30	40	35	45	53	67	80	95	110	125
$x_1$	15	18	17	23	27	33	35	40	44	47
$x_2$	35	42	36	42	47	55	60	63	70	80



**Вариант 26**

$y$	35	41	47	57	68	65	75	85	90	125
$x_1$	18	19	22	23	27	33	35	36	44	55
$x_2$	30	38	42	48	55	50	57	63	65	69

**Вариант 27**

$y$	46	41	48	55	65	75	80	95	95	115
$x_1$	19	15	23	26	29	30	29	37	44	55
$x_2$	25	24	29	33	37	42	50	55	60	70

**Вариант 28**

$y$	53	58	55	62	67	75	88	95	107	115
$x_1$	26	27	25	29	28	33	31	35	38	40
$x_2$	25	29	35	40	41	42	50	55	57	63

**Вариант 29**

$y$	43	55	64	61	68	75	85	90	95	100
$x_1$	16	25	23	21	28	30	33	32	38	35
$x_2$	22	26	35	40	42	45	50	55	57	62

**Вариант 30**

$y$	19	25	37	48	60	75	80	95	100	110
$x_1$	27	29	28	35	32	38	39	45	41	49
$x_2$	45	50	55	51	58	54	59	63	68	70

## ТЕМА 5. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ ОСТАТКОВ. КРИТЕРИЙ ДАРБИНА-УОТСОНА

### 5.1. Постановка задачи

Необходимо с помощью критерия Дарбина-Уотсона проверить гипотезу о наличии автокорреляции остатков первого порядка при построении модели зависимости переменной  $y$  от  $x$ , по экспериментальным данным, приведенным в таблице пункта 5.4 согласно варианта.

### 5.2. Алгоритм исследования наличия автокорреляции остатков первого порядка

Тестирование Дарбина-Уотсона осуществляется в несколько этапов:

**Шаг 1.** По экспериментальным данным по формулам (1.1) и (1.2) рассчитываются параметры регрессионной модели:

$$y = a_0 + a_1 x. \quad (5.1)$$

**Шаг 2.** Вычисляются остатки по формуле:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \quad (5.2)$$

**Шаг 3.** Рассчитывается значение  $d$ -статистики по формуле:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}. \quad (5.3)$$

Причём доказана необходимость выполнения условия  $0 \leq d \leq 4$ .

**Шаг 4.** Задаётся уровень значимости  $\alpha$  (чаще всего его принимают равным 0,05 или 0,01). По таблице Дарбина-Уотсона при уровне значимости  $\alpha$ , количестве факторов  $k = m$  и количестве испытаний  $n$  определяется два значения:  $d_L$  и  $d_U$ .

**Шаг 5.** Проверяется в какую из зон, изображённых на рис. 5.1, попадает полученное на шаге 3 значение статистики  $d$ .



Таблица 5.1.

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	26,48	45,069
2	27,74	50,642
3	28,736	51,871
4	27,28	50,07
5	30,219	52,707
6	30,796	53,814
7	30,896	54,939
8	33,113	58,213
9	35,032	60,043
10	37,335	63,383
11	41,003	68,221
12	44,869	77,965
13	46,449	84,655
14	50,282	90,875
15	53,555	97,074
16	52,859	101,645
17	55,917	102,445
18	62,017	107,719
19	71,398	120,87
20	82,078	147,135

Тестирование Дарбина-Уотсона осуществим в несколько шагов.

**Шаг 1.** По экспериментальным данным согласно формул (1.1) и (1.2)

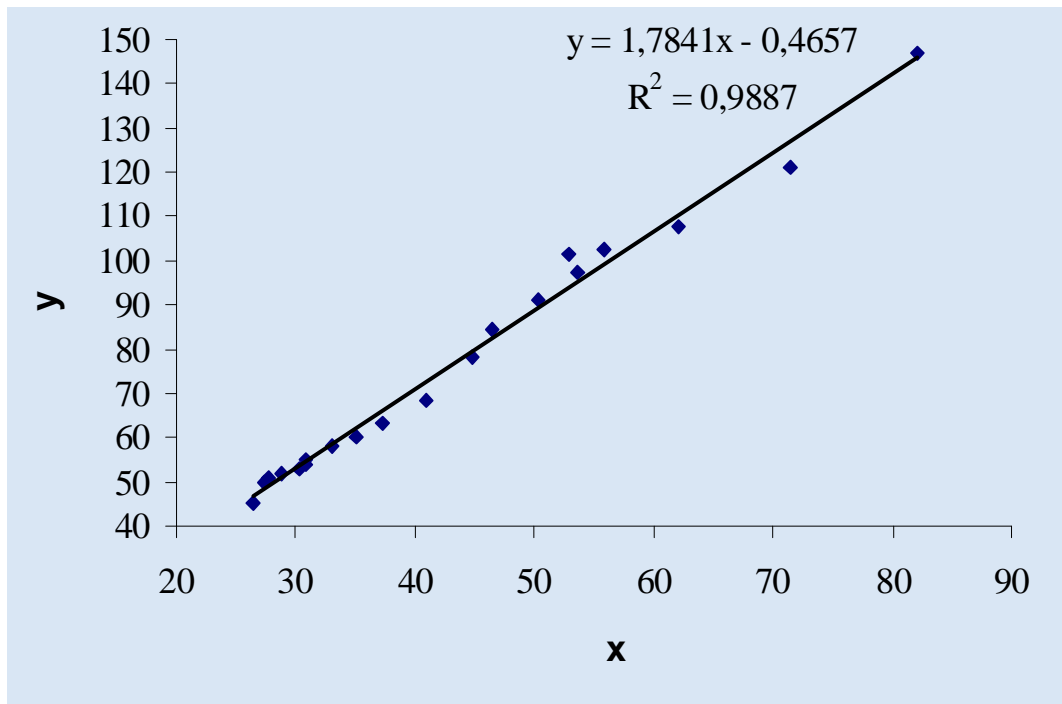


Рис. 5.2 – Линейная регрессионная модель

рассчитываются параметры регрессионной модели  $y = a_0 + a_1x$  как описано в практической работе 1. Регрессионная зависимость показана на рис. 7.1.

Как видно из рисунка 5.1, регрессионная модель имеет вид:  
 $y = 1,7841x - 0,4657$   $y = 1,7841x - 0,4657$ .

Коэффициент детерминации  $R^2 = 0,9887$ .

**Шаг 2.** Вычисляются остатки по формуле (5.2) и результаты расчёта заносятся в таблицу 5.2.

**Шаг 3.** Рассчитывается значение  $d$ -статистики по формуле (5.3). Для её расчёта можно использовать вспомогательную таблицу 5.2.

Значение  $d$ -статистики в данном случае:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} = 1,171648.$$

**Шаг 4.** Примем уровень значимости  $\alpha$  равным 0,05. По таблице

Дарбина-Уотсона при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , количестве факторов  $k = m = 1$  и количестве испытаний  $n = 20$  определяется два значения:  $d_L = 1,20$  и  $d_U = 1,41$ .

Таблица 5.2

$i$	$x_i$	$y_i$	$y_i = 0,4718 \cdot x_i - 927,08$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$	$e_i^2$	$(e_i - e_{i-1})^2$
1	26,48	45,069	46,77727	-1,70827	2,91818	
2	27,74	50,642	49,02523	1,616766	2,613932	11,05585
3	28,736	51,871	50,8022	1,068802	1,142339	0,300264
4	27,28	50,07	48,20455	1,865452	3,479911	0,634651
5	30,219	52,707	53,44802	-0,74102	0,549108	6,793685
6	30,796	53,814	54,47744	-0,66344	0,440157	0,006018
7	30,896	54,939	54,65585	0,283146	0,080172	0,896033
8	33,113	58,213	58,6112	-0,3982	0,158566	0,464237
9	35,032	60,043	62,03489	-1,99189	3,967631	2,539841
10	37,335	63,383	66,14367	-2,76067	7,621318	0,591026
11	41,003	68,221	72,68775	-4,46675	19,95188	2,910705
12	44,869	77,965	79,58508	-1,62008	2,624669	8,103527
13	46,449	84,655	82,40396	2,251039	5,067177	14,98559
14	50,282	90,875	89,24242	1,632584	2,66533	0,382487
15	53,555	97,074	95,08178	1,992224	3,968958	0,129341
16	52,859	101,645	93,84004	7,804958	60,91737	33,78787
17	55,917	102,445	99,29582	3,14918	9,917337	21,67627
18	62,017	107,719	110,1788	-2,45983	6,050762	31,46099
19	71,398	120,87	126,9155	-6,04547	36,54773	12,85683
20	82,078	147,135	145,9697	1,16534	1,358018	51,99581
					172,0405	201,571
					d=	1,171648

**Шаг 5.** Зоны автокорреляционной связи при  $d_L = 1,20$  и  $d_U = 1,41$  отражены на рис. 5.3. Проверяется в какую из зон, изображённых на рис. 5.3, попадает полученное на шаге 3 значение  $d$ -статистики.

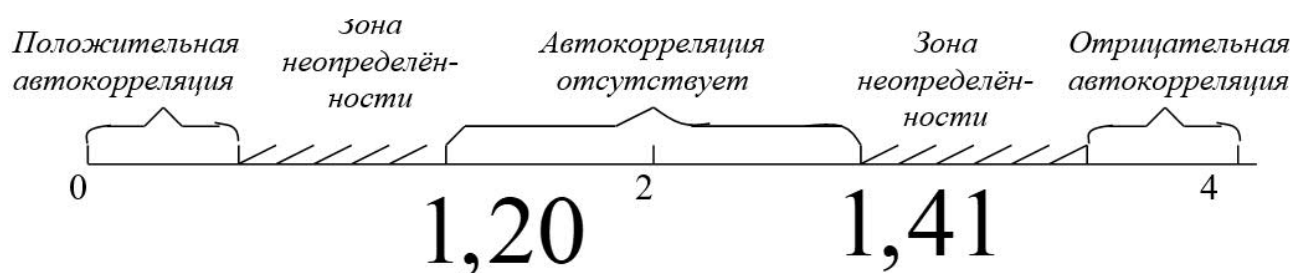


Рис. 5.3. Зоны автокорреляционной связи по критерию Дарбина-Уотсона

Фактическое значение  $d$ -статистики равно 1,171648 и попадает в интервал  $0 \leq d \leq d_U$ , так как имеет место  $0 \leq d \leq 1,2$ . Как видно из рис.5.3, гипотеза об отсутствии автокорреляции первого порядка отвергается, т. е. имеет место положительная автокорреляция остатков. Высокое значение коэффициента детерминации  $R^2$  ( $R^2 = 0,9887$ ) ещё не говорит о том, что полученная регрессионная модель является удовлетворительной, так как имеет место автокорреляция остатков. При наличии автокорреляции следует осуществлять более тщательные исследования. Возможно, следует использовать нелинейные модели, либо включать в модель дополнительные переменные, или использовать специальные модели (например, лаговые, авторегрессии и др.).

## 5.4. Исходные данные для практической работы № 5 по вариантам

**Вариант 1**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	25,5	45,1
2	27,7	46,6
3	29,7	51,9
4	27,3	50,1
5	32,2	52,7
6	30,8	53,8
7	30,9	51,9
8	33,1	58,2
9	35,0	60,0
10	38,3	61,7
11	41,0	68,2
12	45,9	78,0
13	46,4	84,7
14	51,3	88,5
15	53,6	97,1
16	54,9	101,6
17	55,9	102,4
18	60,0	107,7
19	71,4	117,9
20	83,1	140,1

**Вариант 2**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	27,5	45,1
2	27,7	55,6
3	30,0	51,9
4	27,3	50,1
5	30,2	52,7
6	30,8	53,8
7	30,9	54,9
8	33,1	58,2
9	35,0	60,0
10	37,3	63,4
11	41,0	68,2
12	44,9	78,0
13	46,4	84,7
14	50,3	90,9
15	53,6	106,8
16	52,9	103,1
17	55,9	110,6
18	59,4	112,6
19	71,4	125,6
20	82,1	150,0

**Вариант 3**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	31,5	60,1
2	27,7	57,6
3	31,0	51,9
4	27,3	50,1
5	30,2	52,7
6	32,8	57,8
7	30,9	54,9
8	33,1	58,2
9	35,0	61,0
10	37,3	63,4
11	41,0	66,2
12	46,9	76,0
13	48,4	80,7
14	50,3	90,5
15	53,6	106,8
16	52,9	103,1
17	55,9	110,6
18	60,4	105,6
19	71,4	117,6
20	81,1	145,6

**Вариант 4**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	37,5	60,1
2	39,7	57,6
3	41,0	51,9
4	37,3	50,1
5	40,2	52,7
6	52,8	57,8
7	40,9	54,9
8	43,1	58,2
9	45,0	60,0
10	37,3	63,4
11	51,0	68,2
12	56,9	76,0
13	58,4	80,7
14	60,3	90,9
15	63,6	106,8
16	62,9	103,1
17	65,9	110,6
18	70,4	105,6
19	81,4	117,6
20	92,1	145,6

**Вариант 5**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	27,5	62,1
2	29,7	67,6
3	29,7	55,9
4	27,3	50,1
5	30,2	52,7
6	52,8	57,8
7	40,9	54,9
8	43,1	58,2
9	45,0	60,0
10	37,3	63,4
11	51,0	68,2
12	56,9	76,0
13	58,4	80,7
14	60,3	90,9
15	63,6	106,8
16	62,9	103,1
17	75,9	116,6
18	80,4	105,6
19	81,4	117,6
20	85,1	144,3

**Вариант 6**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	24,3	59,1
2	26,5	66,6
3	26,5	66,9
4	24,1	58,1
5	27,0	52,9
6	49,6	58,8
7	37,7	57,9
8	39,9	62,2
9	41,8	64,0
10	34,1	69,4
11	47,8	73,2
12	53,7	76,0
13	55,2	80,7
14	57,1	90,9
15	60,4	100,8
16	59,7	105,1
17	72,7	116,6
18	77,2	105,6
19	78,2	117,6
20	81,9	141,1



**Вариант 7**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	38,9	68,3
2	44,4	70,8
3	46,4	72,1
4	50,4	70,3
5	58,6	72,9
6	57,2	74,0
7	57,3	72,1
8	59,5	78,4
9	61,4	80,2
10	64,7	81,9
11	67,4	88,4
12	70,4	98,2
13	72,8	104,9
14	77,7	113,2
15	80,0	115,2
16	81,3	121,8
17	82,3	122,6
18	90,0	122,9
19	110,4	136,0
20	120,4	140,1

**Вариант 8**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	64,8	65,7
2	65,0	76,2
3	67,3	72,5
4	64,6	70,7
5	67,5	73,3
6	68,1	74,4
7	68,2	75,5
8	68,4	78,8
9	70,3	80,6
10	72,6	87,0
11	76,3	91,8
12	80,2	101,6
13	79,7	108,3
14	83,6	114,5
15	86,9	130,4
16	86,2	126,7
17	89,2	134,2
18	92,7	136,2
19	104,7	149,2
20	115,4	173,6

**Вариант 9**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	15,9	54,4
2	12,1	51,9
3	15,4	46,2
4	11,7	44,4
5	14,6	47,0
6	17,2	52,1
7	15,3	49,2
8	20,5	52,5
9	20,4	57,3
10	22,7	59,7
11	26,4	62,5
12	30,3	72,3
13	31,8	74,0
14	33,7	83,8
15	37,0	100,1
16	36,3	96,4
17	39,3	103,9
18	43,8	98,9
19	54,8	110,9
20	64,5	138,9

**Вариант 10**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	49,5	49,6
2	51,7	47,1
3	53,0	41,4
4	49,3	39,6
5	52,2	42,2
6	64,8	47,3
7	52,9	44,4
8	56,4	47,7
9	58,3	49,5
10	50,6	47,9
11	64,3	52,7
12	70,2	60,5
13	71,7	65,2
14	73,6	75,4
15	76,9	91,3
16	76,2	85,6
17	79,2	93,1
18	83,7	88,1
19	94,7	100,1
20	105,4	128,1

**Вариант 11**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	16,0	52,0
2	18,0	57,0
3	21,0	55,9
4	23,1	50,1
5	26,0	52,7
6	28,0	53,0
7	26,7	54,9
8	28,9	58,2
9	30,8	50,0
10	23,1	56,4
11	36,8	58,2
12	32,7	66,0
13	34,2	65,7
14	36,1	75,9
15	39,4	91,8
16	38,7	88,1
17	51,7	101,6
18	56,2	90,6
19	57,2	102,6
20	60,9	129,3

**Вариант 12**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	2,5	65,0
2	2,7	73,3
3	2,7	73,6
4	2,5	63,9
5	2,8	58,2
6	5,1	64,7
7	3,8	63,7
8	4,1	68,4
9	4,3	70,4
10	3,5	75,6
11	4,9	79,8
12	5,5	82,8
13	5,6	87,9
14	5,8	99,1
15	6,2	109,9
16	6,1	114,6
17	7,4	127,1
18	7,9	115,1
19	8,0	128,1
20	8,4	153,7

**Вариант 13**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	26,6	46,3
2	28,8	47,8
3	30,8	53,1
4	28,4	51,3
5	33,3	53,9
6	31,9	55,0
7	32,0	53,1
8	34,2	59,4
9	36,1	61,2
10	39,4	62,9
11	42,1	69,4
12	47,0	79,2
13	47,5	85,9
14	52,4	89,7
15	54,7	98,3
16	56,0	102,8
17	57,0	103,6
18	61,1	108,9
19	72,5	119,1
20	84,2	141,3

**Вариант 14**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	24,7	45,1
2	26,4	55,6
3	30,0	51,9
4	30,0	50,1
5	33,2	52,7
6	33,9	53,8
7	37,1	54,9
8	39,7	58,2
9	38,5	60,0
10	42,9	63,4
11	45,1	68,2
12	49,4	78,0
13	51,1	84,7
14	55,3	98,0
15	58,9	106,8
16	63,4	109,0
17	67,1	110,6
18	71,2	112,6
19	85,7	125,6
20	98,5	150,0

**Вариант 15**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	37,5	64,6
2	33,7	62,1
3	37,0	56,4
4	33,3	54,6
5	36,2	57,2
6	38,8	62,3
7	36,9	59,4
8	39,1	62,7
9	41,0	65,5
10	43,3	67,9
11	47,0	70,7
12	52,9	80,5
13	54,4	85,2
14	56,3	95,0
15	59,6	111,3
16	58,9	107,6
17	61,9	115,1
18	66,4	110,1
19	77,4	122,1
20	87,1	150,1

**Вариант 16**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	32,8	54,6
2	35,0	52,4
3	36,3	47,2
4	32,6	45,5
5	35,5	47,9
6	48,1	52,6
7	36,2	49,9
8	38,4	52,9
9	40,3	54,6
10	32,6	57,6
11	46,3	62,0
12	52,2	69,1
13	53,7	73,3
14	55,6	82,6
15	58,9	97,1
16	58,2	93,7
17	61,2	100,5
18	65,7	96,0
19	76,7	106,9
20	87,4	132,3

**Вариант 17**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	11,5	61,6
2	13,7	67,1
3	13,7	55,4
4	11,3	49,6
5	14,2	52,2
6	36,8	57,3
7	24,9	54,4
8	27,1	57,7
9	29,0	59,5
10	21,3	62,9
11	35,0	67,7
12	40,9	75,5
13	42,4	80,2
14	44,3	90,4
15	47,6	106,3
16	46,9	102,6
17	59,9	116,1
18	64,4	105,1
19	65,4	117,1
20	69,1	143,8

**Вариант 18**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	22,1	59,1
2	24,3	66,6
3	24,3	66,9
4	21,9	58,1
5	24,8	52,9
6	47,4	58,8
7	35,5	58,9
8	37,7	63,2
9	39,6	65,0
10	31,9	70,4
11	45,6	74,2
12	51,5	77,0
13	53,0	81,7
14	54,9	91,9
15	58,2	101,8
16	57,5	106,1
17	70,5	117,6
18	75,0	106,6
19	76,0	118,6
20	79,7	142,1

**Вариант 19**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	11,5	50,3
2	13,7	55,8
3	13,7	44,1
4	11,3	38,3
5	14,2	40,9
6	36,8	46,0
7	24,9	43,1
8	27,1	46,4
9	29,0	48,2
10	21,3	51,6
11	35,0	56,4
12	40,9	64,2
13	42,4	68,9
14	44,3	79,1
15	47,6	95,0
16	46,9	91,3
17	59,9	104,8
18	64,4	93,8
19	65,4	105,8
20	69,1	132,5

**Вариант 20**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	23,3	55,7
2	25,8	61,2
3	25,8	49,5
4	23,1	43,7
5	26,3	46,3
6	51,1	51,4
7	38,1	48,5
8	40,5	51,8
9	42,6	53,6
10	34,1	57,0
11	49,2	61,8
12	55,6	69,6
13	57,4	74,3
14	59,4	84,5
15	63,0	100,4
16	62,2	96,7
17	76,6	110,2
18	81,5	99,2
19	82,6	111,2
20	86,6	137,9

**Вариант 21**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	19,2	37,7
2	21,4	43,2
3	21,4	45,0
4	19,0	45,7
5	21,9	48,3
6	44,5	53,4
7	32,6	52,5
8	34,8	55,8
9	36,7	57,6
10	29,0	61,0
11	42,7	65,8
12	48,6	73,6
13	50,1	78,3
14	53,0	88,5
15	56,3	104,4
16	55,6	101,7
17	68,6	115,2
18	73,1	104,2
19	74,1	116,2
20	77,8	142,9

**Вариант 22**

Период д времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	12,1	37,8
2	13,2	41,5
3	13,2	33,6
4	12,0	29,8
5	13,5	31,5
6	24,7	34,9
7	18,8	39,0
8	19,9	40,6
9	20,9	42,0
10	17,0	43,0
11	23,9	48,3
12	26,8	54,3
13	27,6	57,9
14	28,5	57,0
15	30,1	67,6
16	29,8	65,1
17	36,3	74,1
18	38,5	66,8
19	39,0	74,8
20	40,9	92,6

**Вариант 23**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	45,2	45,7
2	47,4	51,2
3	47,4	39,5
4	45,0	35,7
5	47,9	38,3
6	70,5	43,4
7	58,6	40,5
8	60,8	43,8
9	62,7	45,6
10	55,0	49,0
11	68,7	53,8
12	74,6	61,6
13	78,1	66,3
14	80,0	76,5
15	83,3	99,4
16	82,6	95,7
17	95,6	109,2
18	100,1	98,2
19	101,1	110,2
20	104,8	136,9

**Вариант 24**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	42,2	33,7
2	44,4	39,2
3	44,4	41,0
4	42,0	41,7
5	44,9	44,3
6	67,5	49,4
7	55,6	48,5
8	57,8	51,8
9	59,7	53,6
10	52,0	57,0
11	65,7	61,8
12	68,6	69,6
13	70,1	74,3
14	73,0	84,5
15	76,3	100,4
16	75,6	97,7
17	88,6	111,2
18	93,1	100,2
19	94,1	112,2
20	97,8	138,9

**Вариант 25**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	24,2	56,7
2	26,4	62,2
3	26,4	50,5
4	24,0	44,7
5	26,9	47,3
6	49,5	52,4
7	37,6	49,5
8	39,8	52,8
9	41,7	54,6
10	34,0	58,0
11	47,7	62,8
12	53,6	70,6
13	55,1	75,3
14	57,0	85,5
15	60,3	101,4
16	59,6	97,7
17	72,6	111,2
18	77,1	100,2
19	78,1	112,2
20	81,8	138,9

**Вариант 26**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	21,2	50,7
2	23,4	56,2
3	23,4	44,5
4	21,0	38,7
5	23,9	41,3
6	46,5	46,4
7	34,6	43,5
8	36,8	46,8
9	38,7	48,6
10	31,0	52,0
11	44,7	56,8
12	50,6	64,6
13	52,1	69,3
14	54,0	79,5
15	57,3	95,4
16	56,6	91,7
17	69,6	105,2
18	74,1	94,2
19	75,1	106,2
20	78,8	132,9

**Вариант 27**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	29,2	90,7
2	31,4	96,2
3	31,4	98,0
4	29,0	98,7
5	31,9	101,3
6	54,5	106,4
7	42,6	105,5
8	44,8	108,8
9	46,7	110,6
10	39,0	114,0
11	52,7	118,8
12	58,6	126,6
13	60,1	131,3
14	63,0	141,5
15	66,3	157,4
16	65,6	154,7
17	78,6	168,2
18	83,1	157,2
19	84,1	169,2
20	87,8	195,9

**Вариант 28**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	28,5	57,7
2	30,7	63,2
3	30,7	51,5
4	28,3	45,7
5	31,2	48,3
6	53,8	53,4
7	41,9	50,5
8	44,1	53,8
9	46,0	55,6
10	38,3	59,0
11	52,0	63,8
12	57,9	71,6
13	59,4	76,3
14	61,3	86,5
15	65,6	102,4
16	70,0	98,7
17	77,9	112,2
18	82,4	101,2
19	83,4	113,2
20	87,1	139,9

**Вариант 29**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	8,5	31,7
2	10,7	37,2
3	10,7	25,5
4	8,3	19,7
5	11,2	22,3
6	33,8	27,4
7	21,9	24,5
8	24,1	27,8
9	26,0	29,6
10	18,3	33,0
11	32,0	37,8
12	37,9	45,6
13	39,4	50,3
14	41,3	60,5
15	45,6	76,4
16	50,0	72,7
17	57,9	86,2
18	62,4	75,2
19	63,4	87,2
20	67,1	113,9

**Вариант 30**

Период времени, $i$	$x_i$	$y_i$
1	11,5	12,7
2	13,7	18,2
3	13,7	6,5
4	11,3	0,7
5	14,2	3,3
6	36,8	8,4
7	24,9	5,5
8	27,1	8,8
9	29,0	10,6
10	21,3	14,0
11	35,0	18,8
12	38,9	26,6
13	40,4	31,3
14	42,3	41,5
15	46,6	57,4
16	51,0	53,7
17	58,9	67,2
18	63,4	56,2
19	64,4	68,2
20	68,1	94,9

## **ТЕМА 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ**

### **6.1. Постановка задачи**

Цель работы: приобретение навыков расчета степени влияния факторов на результативные показатели методом дифференциальных исчислений по данным, приведенным в таблицах 6.1 6.2 согласно варианта.

Контрольные вопросы:

1. дайте определение понятий: факторный анализ, детерминированный и стохастический анализ;
2. охарактеризуйте такие типы факторных моделей: аддитивные, мультипликативные, комбинированные;
3. объясните геометрическое содержание метода дифференциальных исчислений для определения степени влияния факторов.

### **6.2. Теоретические основы алгоритма расчета степени влияния факторов на результативные показатели методом дифференциальных исчислений**

Геометрический смысл метода дифференциальных исчислений представлен на рис.6.1.

Известна зависимость результативного показателя  $y$  от фактора  $x$  ( $y=f(x)$ ). Если эта зависимость нелинейная, то приращение результативного показателя ( $\Delta y = y_1 - y_0$ ) можно определить следующим образом  $\Delta y = dy + \alpha$ ,

где  $dy$  — дифференциал функции  $y$ ;

$\alpha$  — бесконечно малая величина при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Дифференциал представляет собой произведение производной ( $f'(x)$ ) на приращение фактора ( $\Delta x$ )  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ ;  $\Delta x = x_1 - x_0$ .

Тогда  $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha$ .

Если функция  $f(x)$  линейная, то величина  $\alpha=0$ , т.е. в случае линейных зависимостей метод дифференциального исчисления дает точные результаты.

**Шаг 1.** Для двумерного случая приращение результативного показателя

при заданных приращениях факторов можно определить следующим образом

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 .$$

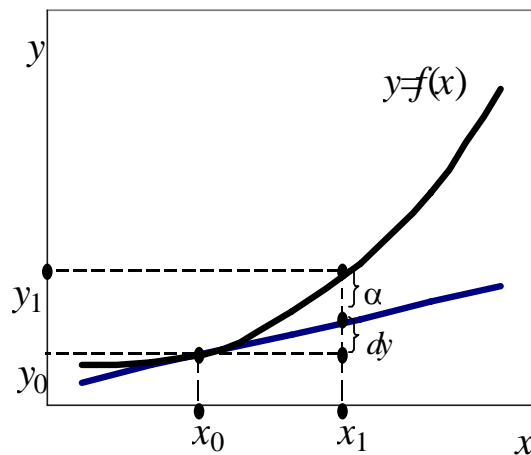


Рисунок 6.1 — Геометрический смысл метода дифференциальных исчислений

Приращение функции  $y$  за счет фактора  $x_1$

$$\Delta y_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 ,$$

за счет фактора  $x_2$

$$\Delta y_{x_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 .$$

**Шаг 2** Для многомерной аддитивной линейной зависимости задача детерминированного факторного анализа может быть сформулирована и решена следующим образом:

$$y = \sum_{i=1}^m a_i x_i ;$$

$$x_i^{(0)} \leq x_i \leq x_i^{(1)} ,$$

где  $a_i$  — коэффициенты при переменных  $x_i$ ;

$x_i^{(0)}, x_i^{(1)}$  — соответственно минимальное и максимальное значения  $i$ -го факторного показателя.

### Шаг 3 Общее приращение результативного показателя

$$\Delta y = \sum_{i=1}^m a_i x_i^{(1)} - \sum_{i=1}^m a_i x_i^{(0)}.$$

### Шаг 4 Приращение показателя $y$ за счет фактора $x_i$

$$\Delta y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

где  $\Delta x_i = x_i^{(1)} - x_i^{(0)}$ .

При этом должно соблюдаться равенство

$$\Delta y = \sum_{i=1}^m \Delta y_{x_i}.$$

## 6.3. Пример выполнения практической работы № 6

Установить степень влияния факторов  $x_1, \dots, x_5$  на результативный показатель  $y$  для следующей факторной модели:

$$y = 19x_1 + 9,5x_2 + 2,4x_3 + 5,1x_4 + 6,3x_5;$$

$$0,8 \leq x_1 \leq 1,6;$$

$$2,3 \leq x_2 \leq 2,8;$$

$$1,1 \leq x_3 \leq 1,75;$$

$$2,0 \leq x_4 \leq 2,3;$$

$$0,5 \leq x_5 \leq 0,8.$$

**Шаг 1** Общее приращение результативного показателя определяется из выражения

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} \Delta x_3 + \frac{\partial y}{\partial x_4} \Delta x_4 + \frac{\partial y}{\partial x_5} \Delta x_5.$$

### Шаг 2

Приращение  $\Delta y$  за счет фактора  $x_1$

$$\Delta y_{x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1;$$

за счет фактора  $x_5$

$$\Delta y_{x_5} = \frac{\partial y}{\partial x_5} \Delta x_5;$$

Для решения задачи используется программа *Microsoft Excel*. При этом

создается таблица исходных данных в виде коэффициентов при переменных заданной факторной модели и электронная таблица для выполнения основных расчетов

Исходные данные							
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$			
19	9,5	2,4	5,1	6,3			
Факторы	$x_{\min}$	$x_{\max}$	$\Delta x_i$	$\frac{\partial y}{\partial x_i}$	$\Delta y_{x_i}$	$\Delta y$	$k_i$
$x_1$	0,8	1,60	0,80	19,00	15,20	24,93	0,609
$x_2$	2,3	2,80	0,50	9,50	4,75	24,93	0,190
$x_3$	1,1	1,75	0,65	2,40	1,56	24,93	0,062
$x_4$	2,0	2,30	0,30	5,10	1,53	24,93	0,061
$x_5$	0,5	0,80	0,30	6,30	1,89	24,93	0,075

Расчеты выполняются по следующим формулам:

$$\Delta x_i = x_{i\max} - x_{i\min} ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = a_i ;$$

$$\Delta y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i ;$$

$$\Delta y = \Delta y_{x_1} + \dots + \Delta y_{x_5} ;$$

$$k_i = \frac{\Delta y_{x_i}}{\Delta y} .$$

Полученные результаты (степень влияния факторов) иллюстрируются при помощи диаграммы. Создание диаграммы в *Excel* осуществляется с помощью мастера диаграмм, вызов которого производится с панели инструментов.



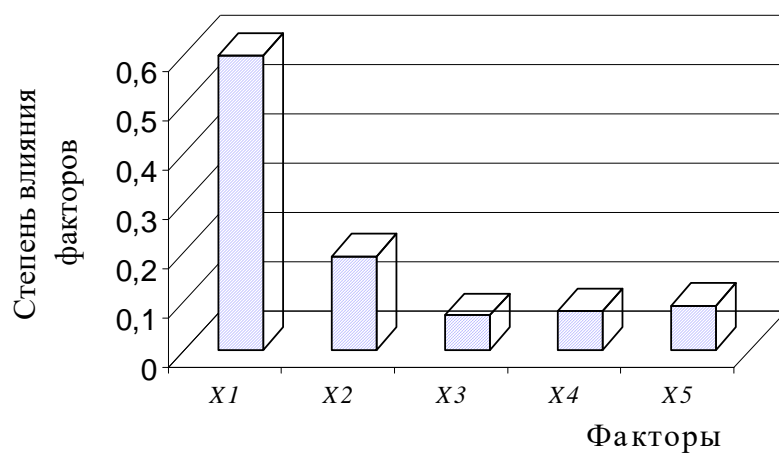


Рис. 6.2 — Диаграмма степени влияния факторов

## 6.4 Исходные данные для практической работы № 6 по вариантам

Таблица 6.1

№ варианта	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1	2	5	3	7
2	3	3	5	4
3	4	6	4	3
4	2	5	6	6
5	5	4	7	1
6	2	2	1	3
7	1	1	3	2
8	6	5	5	4
9	3	4	7	5
10	4	3	3	7
12	2	6	4	1
13	6	7	1	3
14	5	2	5	2
15	2	7	6	4
16	3	3	7	3
17	4	4	2	5
18	6	5	3	6
19	7	1	1	2
20	1	5	4	7
21	7	6	2	1
22	2	2	5	4
23	3	4	3	3
24	5	2	1	5
25	4	3	2	6

Таблица 6.2

№ варианта	X1min	X1max	X2min	X2max	X3min	X3max	X4min	X4max
1	3	8	1	5	2	8	1	9
2	4	7	4	8	4	7	6	8
3	2	9	5	9	5	8	4	6
4	3	5	2	6	2	6	5	8
5	5	6	5	7	3	5	2	9
6	3	7	4	8	4	5	3	5
7	2	8	3	6	2	7	4	6
8	4	6	4	5	4	7	3	7
9	1	7	6	7	5	8	4	8
10	4	8	2	5	2	6	3	6
11	2	5	5	7	2	5	3	8
12	4	9	6	8	6	7	5	6
13	5	7	2	5	5	7	5	7
14	2	6	1	7	4	5	6	8
15	1	5	4	8	2	7	2	5
16	4	7	5	6	7	9	3	9
17	2	8	3	7	1	6	4	7
18	3	5	2	7	5	8	1	8
19	3	9	4	8	3	9	6	6
20	4	7	5	6	4	8	4	8
21	4	8	3	5	6	9	2	5
22	1	6	1	7	2	6	3	7
23	5	8	4	5	4	5	5	6
24	4	5	6	7	3	7	4	5
25	2	8	4	8	1	8	2	4

## Вопросы по дисциплине

1. Предмет и задачи предмета «математические методы и модели». Области применения моделей.
2. Методологические вопросы построения и типы моделей.
3. Основные цели и задачи прикладного корреляционно-регрессионного анализа.
4. Парная регрессия и метод наименьших квадратов (МНК).
5. Средняя ошибка аппроксимации.
6. Оценка тесноты связи (коэффициент корреляции, детерминации, корреляционное отношение).
7. Оценка статистической значимости регрессии.
8. Интерпретация уравнения регрессии.
9. Коэффициент эластичности.
10. Классическая линейная модель множественной регрессии (КЛММР).
11. Оценивание коэффициентов КЛММР методом наименьших квадратов.
12. Парная и частная корреляция в КЛММР.
13. Множественный коэффициент корреляции и множественный коэффициент детерминации.
14. Оценка качества модели множественной регрессии.
15. Мультиколлинеарность и методы ее устранения.
16. Спецификация уравнений регрессии и ошибки спецификации.
17. Линейная модель множественной регрессии с гетероскедастичными остатками.
18. Линейная модель множественной регрессии с автокорреляцией остатков.
19. Критерий Дарбина-Уотсона.
20. Временные ряды.
21. Модели временных рядов.
22. Аналитическое выравнивание временных рядов.
23. Оценка параметров тренда.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

## t-распределение: критические значения t

Число степеней свободы, $df$	Надёжность							
	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	3,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
$\infty$	0,253	0,524	0,842	2,282	1,645	1,960	2,326	2,576
$df$	$-t_{0,40}$	$-t_{0,30}$	$-t_{0,20}$	$-t_{0,10}$	$-t_{0,005}$	$-t_{0,025}$	$-t_{0,01}$	$-t_{0,005}$

Таблица 2

Процентили  $\chi^2$ -распределения

Число степеней свободы, <i>df</i>	0,5	1	2,5	5	10	90	95	97,5	99	99,5
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,61
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,646	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
24	9,89	10,86	10,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,64

Таблица 3

**F-распределение: критические значения F с  $v_1$  и  $v_2$  степенями свободы (уровень значимости 5%)**

$v_1/v_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,64	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,82	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
$\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

**Таблица 4 F-распределение: критические значения F с  $v_1$  и  $v_2$  степенями свободы (уровень значимости 1 %)**

$v_1/v_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	4,64
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,53	2,45	2,36	2,27	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
$\infty$	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00



Таблица 5

**$d$ -статистика Дарбина-Уотсона. Критические точки  $d_L$  и  $d_U$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  (5%),  $n$  – число наблюдений.**

$n$	Число факторов									
	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$	
	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	0,30	2,59		
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	0,38	2,41	0,24	2,82
11	0,93	1,32	0,76	1,60	0,60	1,93	0,44	2,28	0,32	2,65
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	0,51	2,18	0,38	2,51
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	0,57	2,09	0,45	2,39
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	0,63	2,03	0,51	2,30
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,81	1,75	0,69	1,96	0,56	2,22
16	1,11	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,73	1,94	0,62	2,16
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,66	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,54	0,93	1,70	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,07	1,54	0,97	1,69	0,96	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,89	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,65	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,23	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,87
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,75	1,00	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,14	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,53	1,35	1,59	1,30	1,65	1,24	1,72	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,20	1,79
39	1,44	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,43	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,37	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,53	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,52	1,79	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,58	1,72	1,55	1,75	1,53	1,77
90	1,64	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,65	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,76	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78
150	1,72	1,75	1,71	1,76	1,69	1,77	1,68	1,79	1,67	1,80

Таблица 6

**$d$ -статистика Дарбина-Уотсона. Критические точки  $d_L$  и  $d_U$  при уровне значимости  $\alpha = 0,01$  (1 %),  $n$  – число наблюдений.**

$n$	Число факторов									
	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$	
	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$
6	0,39	1,14								
7	0,44	1,04	0,29	1,68						
8	0,50	1,00	0,35	1,49	0,23	2,10				
9	0,55	1,00	0,41	1,39	0,28	1,88	0,18	2,43		
10	0,60	1,00	0,47	1,33	0,34	1,73	0,23	2,19	0,15	2,69
11	0,65	1,01	0,52	1,29	0,40	1,64	0,29	2,03	0,19	2,45
12	0,70	1,02	0,57	1,27	0,45	1,58	0,34	1,91	0,24	2,28
13	0,74	1,04	0,62	1,26	0,50	1,53	0,39	1,83	0,29	2,15
14	0,78	1,05	0,66	1,25	0,55	1,49	0,46	1,76	0,34	2,05
15	0,81	1,07	0,70	1,25	0,59	1,46	0,49	1,70	0,39	1,97
16	0,84	1,09	0,74	1,25	0,63	1,45	0,53	1,66	0,44	1,90
17	0,87	1,11	0,77	1,26	0,67	1,43	0,57	1,63	0,48	1,85
18	0,90	1,12	0,81	1,26	0,71	1,42	0,61	1,60	0,52	1,80
19	0,93	1,13	0,84	1,27	0,74	1,42	0,65	1,58	0,56	1,77
20	0,95	1,15	0,87	1,27	0,77	1,41	0,69	1,57	0,60	1,74
21	0,98	1,16	0,89	1,28	0,80	1,41	0,72	1,55	0,63	1,71
22	1,00	1,17	0,92	1,28	0,83	1,41	0,75	1,54	0,67	1,69
23	1,02	1,19	0,94	1,29	0,86	1,41	0,78	1,53	0,70	1,67
24	1,04	1,20	0,96	1,30	0,88	1,41	0,81	1,53	0,73	1,66
25	1,06	1,21	0,98	1,31	0,91	1,41	0,83	1,52	0,76	1,65
26	1,07	1,22	1,00	1,31	0,93	1,41	0,86	1,52	0,78	1,64
27	1,09	1,23	1,02	1,32	0,95	1,41	0,88	1,52	0,81	1,63
28	1,10	1,24	1,04	1,33	0,97	1,42	0,90	1,51	0,83	1,62
29	1,12	1,25	1,05	1,33	0,99	1,42	0,92	1,51	0,86	1,61
30	1,13	1,26	1,07	1,34	1,01	1,42	0,94	1,51	0,88	1,61
31	1,15	1,27	1,09	1,35	1,02	1,43	0,96	1,51	0,90	1,60
32	1,16	1,28	1,10	1,35	1,04	1,43	0,98	1,51	0,92	1,60
33	1,17	1,29	1,11	1,36	1,06	1,43	1,00	1,51	0,94	1,59
34	1,18	1,30	1,13	1,36	1,07	1,44	1,01	1,51	0,95	1,59
35	1,20	1,31	1,14	1,37	1,09	1,44	1,03	1,51	0,97	1,59
36	1,21	1,32	1,15	1,38	1,10	1,44	1,04	1,51	0,99	1,59
37	1,22	1,32	1,17	1,38	1,11	1,45	1,06	1,51	1,00	1,59
38	1,23	1,33	1,18	1,39	1,13	1,45	1,07	1,52	1,02	1,59
39	1,24	1,34	1,19	1,39	1,14	1,45	1,09	1,52	1,03	1,58
40	1,21	1,34	1,20	1,40	1,15	1,46	1,10	1,52	1,04	1,59
45	1,29	1,38	1,25	1,42	1,20	1,47	1,16	1,53	1,11	1,59
50	1,32	1,40	1,29	1,45	1,25	1,49	1,21	1,54	1,16	1,59
55	1,36	1,43	1,32	1,47	1,28	1,51	1,25	1,55	1,21	1,59
60	1,38	1,45	1,35	1,48	1,32	1,52	1,28	1,56	1,25	1,60
65	1,41	1,47	1,38	1,50	1,35	1,53	1,32	1,57	1,26	1,60
70	1,43	1,49	1,40	1,52	1,37	1,55	1,34	1,58	1,31	1,61
75	1,45	1,50	1,42	1,53	1,40	1,56	1,37	1,59	1,34	1,62
80	1,47	1,52	1,44	1,54	1,42	1,57	1,39	1,60	1,36	1,62
85	1,48	1,53	1,46	1,55	1,44	1,58	1,41	1,60	1,39	1,63
90	1,50	1,54	1,47	1,56	1,45	1,59	1,43	1,61	1,41	1,64
95	1,51	1,55	1,49	1,57	1,47	1,60	1,45	1,62	1,43	1,64
100	1,52	1,56	1,50	1,58	1,48	1,60	1,46	1,63	1,44	1,65
150	1,61	1,64	1,60	1,65	1,58	1,67	1,57	1,68	1,56	1,69

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сдвижков, О. Е. Математика в Excel – 2003 / О. Е. Сдвижков. — М.: СОЛОН-Пресс. 2010. — 192 с.: ил. — (Серия «Библиотека студента»).
2. Леоненков, А. В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel / А. В. Леоненков. — СПб.: БХВ - Петербург, 2005. — 704 с.: ил.
3. Шаповал, С. Н. Методические рекомендации и задачи для курсовой работы по дисциплине "Математические методы и модели в горном производстве" для студентов со специализацией УГП / Шаповал С. Н., Овсянников В. П.-Донецк: ДонНТУ, 2011. – 69 с.
4. Гусев, Ю. О. Теория экономического анализа / Ю.О. Гусев. - Донецк: РИА ДонНТУ, 2000. - 191с.
5. Солодова, О. А. Методические рекомендации и задания для практических работ по дисциплине "ЭКОНОМЕТРИЯ" (для студентов экономических специальностей всех форм обучения) / Солодова О. А., Солодова Л. А.– Донецк : ДонНТУ, 2006. – 78 с.
6. Вагнер, Г. Основы исследования операций. В 3 т./ Г. Вагнер. - М.: Мир, 1972-1973.
  - Т.1. - 1972. - 336 с.
  - Т.2. - 1973. - 488 с.
  - Т.3. - 1973. - 503 с.
7. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. - М.: Высш. шк., 1986. - 317 с.
8. Руководство по проектированию вентиляции угольных шахт. – Киев : Основа, 1994. - 311 с.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для самостоятельной работы студентов по дисциплине  
«Математические методы и модели в горном производстве»

Составитель:

Кавера Алексей Леонидович – кандидат технических наук,  
заведующий кафедрой «Охрана труда и аэрология» ГОУВПО «ДОННТУ».

Ответственный за выпуск:

Кавера Алексей Леонидович – заведующий кафедрой охраны труда и аэрологии  
ГОУВПО «ДОННТУ», кандидат технических наук, доцент.