

Донецкий национальный технический университет

**Аверин Г.В.**

# **СИСТЕМОДИНАМИКА**

Донбасс  
Донецк  
2014

УДК 303.732.4:536.7

ББК 32.817:22.317

A194

Рекомендовано к печати Ученым советом Донецкого национального технического университета (протокол №1 от 21.02.2014 г.)

**Рецензенты:**

Профессор кафедры физики неравновесных процессов, метрологии и экологии Донецкого национального университета, докт. техн. наук, проф. Ф.В. Недопекин;  
Проректор по научной работе Донецкого национального технического университета, докт. техн. наук, проф. Е.А. Башков

**Аверин Г.В.**

A194 Системодинамика. – Донецк: Донбасс, 2014. – 403 с.

В монографии впервые обобщены эмпирические закономерности процессов развития природы и общества, изложены основные принципы, постулаты и положения системодинамики. Предлагаются подходы к изучению феномена времени, исходя из вероятностных принципов. Разработан метод и математический аппарат системодинамики. Сформулировано несколько важных общесистемных положений: введены понятия «энергии» и «энтропии» для систем различной природы; показана справедливость закона сохранения «энергии» для нефизических систем и раскрыта сущность закона возрастания «энтропии»; дано математическое понятие меры состояния и вектора эволюции системы; намечены пути аксиоматизации системодинамики и т.д. Представлены возможности использования метода системодинамики в прикладных научных областях.

Монография предназначена для научных работников, преподавателей, докторантов, аспирантов и магистров, занимающихся исследованиями в области системного анализа и общей теории систем.

**Averin G.V.**

A194 Systemdynamics. - Donetsk: Donbass, 2014. – 403 p.

The monograph for the first time generalizes empirical patterns of development processes in the environment and society, describes basic principles, postulates and applications of systemdynamics. The approaches to the study of the phenomenon of time based on the probabilistic principles are offered. The method and mathematical apparatus of systemdynamics are developed. Several important system-wide postulates are formulated: notions of «energy» and «entropy» are introduced for systems of diverse natures; the correctness of the law of «energy» conservation for non-physical systems is shown and the essence of the «entropy» increase law is revealed; mathematical notions of state measure and system evolution vector is given; the ways of systemdynamics axiomatization are outlined, etc. The opportunities of using the method of systemdynamics in applied scientific domains are shown. The monograph is intended for scientists, lectures, and graduate students carrying out research in the domain of system analysis and general systems theory.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	7
<b>ЧАСТЬ I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИСТОЧНИКИ СИСТЕМОДИНАМИКИ .....</b>	<b>15</b>
<b>Глава первая. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных .....</b>	<b>16</b>
1.1. Функциональные зависимости между переменными.....	16
1.2. Производные и дифференциалы .....	23
1.3. Однородные функции .....	29
1.4. Краткие сведения из дифференциальной геометрии.....	30
<b>Глава вторая. Векторный анализ и теория поля .....</b>	<b>40</b>
2.1. Некоторые сведения из векторной алгебры .....	40
2.2. Скалярное и векторное поле .....	44
2.3. Основные формулы векторного анализа .....	50
2.4. Уравнения в частных производных первого порядка .....	56
<b>Глава третья. Краткие сведения из теории вероятности .....</b>	<b>65</b>
3.1. Основные понятия теории вероятности.....	65
3.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	69
3.3. Случайные величины и их законы распределения .....	73
3.4. Элементы теории случайных процессов.....	80
<b>Глава четвертая. Содержание основ термодинамики.....</b>	<b>91</b>
4.1. Метод термодинамики .....	91
4.2. Эмпирические закономерности в термодинамике.....	98
4.3. Первое начало термодинамики .....	112
4.4. Второе начало термодинамики .....	114
4.5. Дифференциальные уравнения термодинамики.....	119
4.6. Аксиоматическое направление в термодинамике.....	120
<b>Глава пятая. У истоков конвергенции естественнонаучного и гуманитарного знания.....</b>	<b>125</b>
<b>ЧАСТЬ II. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ СИСТЕМОДИНАМИКИ .....</b>	<b>134</b>
<b>Глава шестая. Общие эмпирические закономерности процессов развития природы и общества.....</b>	<b>135</b>
6.1. Основные общесистемные закономерности.....	135
6.2. Вероятностные распределения событий и величин в природе и обществе .....	142
6.3. Вероятностные принципы в термодинамике .....	157
<b>Глава седьмая. Основные определения, принципы и постулаты системодинамики .....</b>	<b>170</b>
7.1. Основные понятия и определения .....	170
7.2. Функция состояния системы.....	175
7.3. Постулаты системодинамики.....	178
<b>Глава восьмая. Время в системодинамике.....</b>	<b>190</b>
8.1. Абсолютное и системное время.....	190
8.2. Шкала системного времени.....	202
8.3. Примеры построения шкал системного времени.....	211

<b>Глава девятая. Математический аппарат и законы системодинамики .....</b>	<b>218</b>
9.1. Основные уравнения и соотношения .....	218
9.2. Закон сохранения энергии .....	225
9.3. Закон взаимосвязи энтропии и времени.....	227
<b>Глава десятая. Векторные и дифференциальные уравнения системодинамики .....</b>	<b>233</b>
10.1. Вектор эволюции системы .....	233
10.2. Мера пространства состояний системы.....	235
10.3. Основное уравнение системодинамики.....	238
10.4. Понятие необратимости в системодинамике .....	238
<b>Глава одиннадцатая. Актуальные задачи системодинамики.....</b>	<b>241</b>
<b>ЧАСТЬ III. ПРИЛОЖЕНИЯ СИСТЕМОДИНАМИКИ.....</b>	<b>248</b>
<b>Глава двенадцатая. Системный анализ данных в глобалистике и прогностике.....</b>	<b>249</b>
12.1. Метод системодинамики как инструмент анализа данных в глобальных исследованиях .....	249
12.2. Существующая система оценки развития человеческого общества.....	255
12.3. Данные для оценки и индикаторы развития общества .....	261
12.4. Методика анализа данных социально-экономического развития.....	264
12.5. Оценка статуса Украины в современном мире .....	274
<b>Глава тринадцатая. Метод системодинамики и токсикология.....</b>	<b>288</b>
13.1. Предмет токсикологии.....	288
13.2. Краткие сведения из токсикометрии.....	291
13.3. Эмпирические закономерности в токсикологии.....	298
13.4. Уравнения состояния токсикологических систем .....	304
13.5. Основные соотношения и дифференциальные уравнения токсикологии .....	326
<b>Глава четырнадцатая. Системодинамика и проблемы термодинамики .....</b>	<b>334</b>
14.1. Термодинамика идеального газа .....	334
14.2. К аксиоматике классической термодинамики .....	340
14.3. Термический коэффициент полезного действия многомерного цикла Карно .....	350
14.4. Несколько слов о парадоксе Гиббса.....	352
<b>Глава пятнадцатая. Время как предмет моделирования .....</b>	<b>355</b>
15.1. Аналогии между системодинамикой и теорией относительности.....	357
15.2. Модели реляционного представления времени .....	361
15.3. Сущность логических парадоксов специальной теории относительности.....	369
15.4. Реляционно-полевая модель представления времени .....	378
<b>Заключение .....</b>	<b>391</b>
<b>Предметный указатель.....</b>	<b>392</b>
<b>Литература.....</b>	<b>397</b>



# CONTENTS

<b>Foreword</b> .....	<b>7</b>
<b>PART I. MATHEMATICAL METHODS AND SYSTEMDYNAMICS</b>	
<b>ORIGINS</b> .....	<b>15</b>
<b>Chapter one. Differential calculus of functions of several variables</b> .....	<b>16</b>
1.1. Functional dependencies between variables .....	16
1.2. Derivatives and differentials .....	23
1.3. Homogeneous functions .....	29
1.4. Background on differential geometry .....	30
<b>Chapter two. Vector analysis and field theory</b> .....	<b>40</b>
2.1. Some details from vector algebra.....	40
2.2. Scalar and vector field .....	44
2.3. Basic formulas of vector analysis.....	50
2.4. Partial differential equations of the first order .....	56
<b>Chapter three. Brief information from probability theory</b> .....	<b>65</b>
3.1. Basic concepts of probability theory .....	65
3.2. Addition and multiplication theorems of probabilities .....	69
3.3. Random variables and their distribution laws .....	73
3.4. Elements of the stochastic processes theory .....	80
<b>Chapter four. Content of thermodynamics foundations</b> .....	<b>91</b>
4.1. Method of thermodynamics.....	91
4.2. Empirical patterns in thermodynamics.....	98
4.3. The first principle of thermodynamics .....	112
4.4. The second principle of thermodynamics .....	114
4.5. Differential equations of thermodynamics .....	119
4.6. Axiomatic trend in thermodynamics .....	120
<b>Chapter five. At the origins of convergence of natural-scientific and humanitarian knowledge</b> .....	<b>125</b>
<b>PART II. SYSTEMDYNAMICS FUNDAMENTALS</b> .....	<b>134</b>
<b>Chapter six. General empirical patterns in the nature and society development</b> .....	<b>135</b>
6.1. Basic system-wide patterns .....	142
6.2. Probability distributions of events and quantities in nature and society .....	157
6.3. Probabilistic principles in thermodynamics.....	157
<b>Chapter seven. Basic definitions, principles and postulates of systemdynamics</b> .....	<b>170</b>
7.1. Basic notions and definitions .....	170
7.2. Function of the system state .....	175
7.3. Systemdynamics postulates.....	178
<b>Chapter eight. Time in systemdynamics</b> .....	<b>190</b>
8.1. Absolute and system time.....	190
8.2. System time scale .....	202
8.3. Examples of building system time scales.....	211

<b>Chapter nine. Mathematical apparatus and laws of systemdynamics.....</b>	<b>218</b>
9.1. Basic equations and relations .....	218
9.2. Law of energy conservation .....	225
9.3. Law of entropy and time relationship .....	227
<b>Chapter ten. Vector and differential equations of systemsynamics .....</b>	<b>233</b>
10.1. Vector of system evolution.....	233
10.2. System states space measure .....	235
10.3. Basic equation of systemdynamics.....	238
10.4. The notion of irreversibility in systemdynamics.....	238
<b>Chapter eleven. Urgent problems in systemdynamics.....</b>	<b>241</b>
<b>PART III. SYSTEMDYNAMICS APPLICATIONS.....</b>	<b>248</b>
<b>Chapter twelve. System analysis of data in globalistics and prognostics... 249</b>	
12.1. Systemdynamics method as a tool for data analysis in the global research .....	249
12.2. The current system of assessing the development of human society .	255
12.3. Data and indicators to assess the development of society .....	261
12.4. Data analysis methodology of socio-economic development.....	261
12.5. Assessment of the Ukraine status in the modern world.....	274
<b>Chapter thirteen. Systemdynamics method and toxicology.....</b>	<b>288</b>
13.1. The subject of toxicology .....	288
13.2. Brief background on toxicometry .....	291
13.3. Empirical patterns in toxicology .....	298
13.4. Equations of a toxicological system state .....	304
13.5. Basic relations and differential equations of toxicology.....	324
<b>Chapter fourteen. Systemdynamics and thermodynamics problems .....</b>	<b>334</b>
14.1. Thermodynamics of an ideal gas.....	334
14.2. On the axioms of classical thermodynamics.....	340
14.3. Thermal coefficient of the multidimensional Carnot cycle efficiency	350
14.4. A few words on Gibbs paradox.....	352
<b>Chapter fifteen. Time as modeling subject .....</b>	<b>355</b>
15.1. Analogs between systemdynamics and theory of relativity.....	357
15.2. Models for relational representation of time.....	361
15.3. The essence of logical paradoxes of special relativity theory.....	369
15.4. Relational-field model for time representation .....	378
<b>Conclusion .....</b>	<b>391</b>
<b>Index .....</b>	<b>392</b>
<b>References.....</b>	<b>397</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю монография затрагивает ряд актуальных научных проблем на стыке системного анализа, общей теории систем, термодинамики, теории вероятности и, как ни странно, философии. На стыке наук почва для новых идей всегда плодотворна. Несмотря на то, что в книге есть главы, где в сжатой форме излагаются некоторые разделы термодинамики, теории вероятностей и дифференциального исчисления функций нескольких переменных, данную книгу было бы не правильно рассматривать как учебное пособие. Монография обращена, прежде всего, к молодым ученым, докторантам, аспирантам и магистрам. В современной науке есть много неизведанного, изучить которое под силу только молодому пытливому уму, и запас времени, имеющийся в распоряжении молодых людей, играет в этом плане не последнюю роль. Более двадцати пяти лет назад мое знакомство с книгой известного ученого в области термодинамики А.А. Гухмана «Об основаниях термодинамики» зародило интерес к методологии построения наук и системному анализу [31]. И лишь по истечении значительного времени стало складываться определенное собственное видение и понимание, затронутых в этой книге, достаточно не простых проблем. Считаю, что только в общих чертах мне удалось показать, что логический подход принятый в термодинамике, как особая методология исследования свойств явлений и объектов, может быть распространен на системы различной природы. И я надеюсь, что найдутся сторонники предложенных идей, особенно среди молодых исследователей.

В 1959 году академик П.Л. Капица писал [47, стр. 420]: «Почему даже в наше время, которое многими называется временем научно-технической революции, общественные науки так слабо развиваются?... Ответ ясен: в науке об обществе нет объективного подхода. До тех пор, пока не удастся его создать, общественные науки будут развиваться с большим трудом. Этим мне кажется, объясняется тот разительный контраст, который сейчас существует в масштабах развития естественных и социальных наук».

Прошло пятьдесят лет. За это время мы пережили бурное развитие вычислительной техники, наблюдаем не менее бурное становление телекоммуникационных систем и информационных технологий, есть революционные открытия в физике, биологии, генетике, значительно продвинулись в развитии экономические науки. В экономике, вообще, появились новые научные направления, например, экономфизика, синергетическая экономика и т.д. Однако, до установления законов развития общества, о которых в свое время писал П.Л. Капица еще далеко.

В современном понимании объективный подход предполагает

использование методов, которые не зависят от воли и желаний субъекта, обеспечивают формализацию научной задачи в области предмета исследования и применяют адекватные (чаще всего количественные) модели для описания объективных закономерностей реальности. Важным является также формирование обширной эмпирической базы, существование феноменологических описаний явлений и процессов и использование инструментов и средств для опытной проверки научных фактов и апробации их на практике.

Не во всех науках и сферах человеческой деятельности удается применить объективные методы, однако в научном сообществе растет понимание этой необходимости. Именно поэтому в целом ряде областей знаний последнее время много внимания уделяется созданию универсальных методов моделирования. На повестке дня стоит разработка общей методологии моделирования процессов различной природы, т.е. создание единой системы теорий разных областей знаний. Еще не ясно, где будет образовано необходимое качество, которое обеспечит прорыв в решении этой важной научной задачи. Здесь необходимо отметить, что изначально универсальная методология должна быть применима как к процессам физической, так и нефизической природы.

В настоящее время сложились три основных направления в развитии методологии моделирования. В физике актуальной задачей является построение новой картины мира – общей теории, способной охватить многие виды взаимодействий. Это поле исследований квантовой и ядерной физики, астрофизики и близких наук. Другая важная область исследований – представление мира самоорганизующимся как в целом, так и на многих уровнях своего существования, и здесь «правят балом» синергетика, теория самоорганизации, физика неравновесных процессов и т.д. Третье направление – это использование естественнонаучных методов в описании живой и неживой природы, поиск общей теории, применимой во многих областях знаний – биологии, экологии, экономике, развитию общества, научном предвидении будущего и т.д. Именно это направление, связанное с системным анализом и общей теорией систем, является, наверное, наиболее перспективным путем к новой парадигме моделирования. Вполне очевидно, что в рамках одной научной области, охватывающей только физические или, например, только биологические науки, создание универсальной теории моделирования систем невозможно.

На общую теорию систем (ОТС) уже долгое время возлагаются большие надежды. Однако, еще в начале шестидесятых годов прошлого столетия один из основоположников ОТС Л. фон Берталанфи в своей статье писал: «Несомненно, что общая теория систем открывает перед нами новые горизонты, однако ее связь с эмпирическими данными пока еще остается весьма скудной» [18]. С момента выхода в свет этой статьи качественного прорыва в формировании универсальной методологии общей теории систем не произошло. И это несмотря на ожидания того, что синтез знаний различных научных дисциплин может открыть широкие

возможности в моделировании систем. Последнее время стало очевидно, что излишнее теоретизирование всей проблемы происходит на фоне отрыва рабочих теорий от опыта и практики. Это привело к тому, что в общей теории систем стали развиваться философские и общенаучные направления, а вакуум отсутствия базовой методологии, ориентированной на обобщение эмпирических фактов из различных областей знаний, стал заполняться многообразием форм абстрактного описания систем. Возможно, что это закономерный и необходимый процесс, однако это направление исследований в общей теории систем становится преобладающим и явно оторванным от практики.

Причина застоя в науке, в общем-то, ясна: пытаюсь бессистемно охватить необъятное, исследователям становится все труднее устанавливать логические связи между процессами и явлениями различной природы. Кроме этого, в общей теории систем не удалось пока найти пути решения, поставленных амбициозных задач: определить системные связи в физических, биологических и социальных процессах; развить собственную методологию теоретического анализа, применимую в науках с различными предметами и объектами исследований; разработать таксономию различных классов систем, исходя из существования общесистемных закономерностей в природе и обществе; построить модели биологических и общественных систем; дать ответ на вопрос о допустимости системных моделей и законов в истории и т.д. [18]. Известно, что развитие эмпирической базы научных дисциплин формируется существенно более медленными темпами, чем устремления исследователей в построении теоретических моделей, причем не всегда подтвержденных опытом и практикой. Разрыв между теорией и экспериментом является симптомом серьезных нарушений нормального развития любой науки [47], и сегодня этот факт имеет прямое отношение к общей теории систем. Именно поэтому, после более чем пятидесяти лет научных поисков необходимы конкретные результаты, отвечающие исходным целям и задачам ОТС.

Очевидно, что возможный путь выхода из возникшего тупика связан с созданием структурированных информационных баз данных по научным направлениям, что позволяет применить современные методы поиска закономерностей, используя информационные технологии («Data mining»). Во многих областях знаний начинает развиваться это актуальное направление. Применение методов интеллектуального анализа данных (ИАД) позволит преобразовывать базы данных в базы знаний, благодаря чему в будущем вполне возможна формулировка общих принципов построения системного знания. Однако, это все в будущем, пока основной недостаток многих методов ИАД связан с отсутствием возможности учета при анализе данных фундаментальных закономерностей, свойственных тем или иным изучаемым явлениям или объектам.

Другой путь – это поиск перспективных направлений развития ОТС по отношению к различным классам систем и явлений и целенаправленное применение общесистемных принципов, характерных для

действительности и позволяющих создать обобщенную теорию для различных областей знаний, в том числе и гуманитарных. Именно поиску путей решения этой задачи и посвящена данная книга. В этом плане следует вспомнить, что все новое – это хорошо забытое старое, и, что старый друг лучше новых двух. Афоризм Я.И. Френкеля: «Не надо искать старое в новом, а надо находить новое в старом» – как нельзя лучше характеризует суть данной монографии.

Использование естественнонаучных методов в различных науках является актуальной задачей общей теории систем, т.к. область человеческого знания, связанная с естественными науками, наиболее развита. Здесь хотелось бы сказать, что в естествознании, помимо ОТС, есть теории, претендующие на определенную универсальность. В области физики – это термодинамика, которая стала теоретической основой для многих физических наук. В области математики – это теория вероятности и математическая статистика, получившие широкое распространение в самых разных прикладных областях. Осмелимся утверждать, что синтез методологий данных наук и использование логики их построения может дать импульс развитию ОТС.

Говоря о логике термодинамики, отметим, что ее исходные положения основаны на постулировании общесистемных закономерностей, свойственных физическим системам и установленных опытным путем [31]. Логика теории вероятности построена на принципе аксиоматизации фундаментальных закономерностей, характерных для многих явлений, в основе которых лежат случайные процессы [52]. Данные науки имеют одно общее – универсальный логический метод построения теорий, основанный на применении в своей предметной области объективного подхода при описании процессов и явлений, т.е. именно того похода, о котором говорил академик П.Л. Капица.

На универсальности метода термодинамики хотелось бы остановиться особо. И здесь лучше всего для иллюстрации этого факта привести известное высказывание А. Эйнштейна, которое очень часто цитируют: «Теория производит тем большее впечатление, чем проще её предпосылки, чем разнообразнее явления, между которыми она устанавливает связи, чем обширнее область её применения. Отсюда глубокое впечатление, которое произвела на меня термодинамика. Это единственная физическая теория универсального содержания, относительно которой я убежден, что в пределах применимости ее основных понятий она никогда не будет опровергнута».

Сущность оснований термодинамики крайне важна для методологии ОТС. Однако, следует признать, что в своем современном виде, несмотря на основательность, теория термодинамики не является полной, многие ее аспекты противоречивы и запутаны, а ряд положений не имеет логической ясности. Тем не менее, термодинамика – это универсальная теория с большим потенциалом для развития и возможностями проникновения ее метода в другие научные области. Развитие термодинамического метода

или аналогичных ему подходов в других областях знаний является актуальной задачей при изучении сложных систем. Однако метод термодинамики не должен буквально переноситься в другую область исследований; на методологическом уровне должна использоваться только структурно-логическая схема построения моделей, принятая в этой науке. Концептуально можно предположить, что термодинамика – это не только физическая теория, а нечто большее, что можно отразить как применение некой общей методологии моделирования к объектам физической природы. Признание фундаментальности и универсальности метода термодинамики будет расти по мере накопления эмпирических фактов и развития методов моделирования в различных областях знаний.

Исходя из применения объективных подходов в ОТС и развития методологии данной науки, существенным является возможность постулирования или аксиоматизации общих закономерностей или исходных положений, свойственных целым классам различных систем и явлений. Это направление в общей теории систем развивается крайне слабо. В то же время аксиоматический метод является одним из способов дедуктивного построения научных теорий. Известно, что аксиоматизация осуществляется обычно после того, как содержательно теория уже в достаточной мере развита и построена, а основные положения подтверждены сопоставлением научных результатов с опытными фактами. Пока что ОТС находится в начальной стадии этого пути, однако объем ее исходного знания уже достигает уровня, на котором возможно создание фундаментальных моделей, охватывающих разные классы систем.

Особо отметим, что построение подобных моделей непосредственно связано с проблемой изучения феномена времени и его взаимосвязи с наблюдаемыми событиями. «Время – это ключ к пониманию природы» – отмечал И. Пригожин. Сегодня этот феномен реальной действительности является предметом исследования физики, однако органически включить в фундаментальное описание природы необратимость процессов и явлений, «стрелу времени» и наблюдаемые события физике пока не удалось [77]. Возможно, что обоснование существования «стрелы времени» [114] или других фундаментальных понятий, тесно связанных с феноменом времени, должно сформироваться не в области физики, а в области описательных наук, которые оперируют повсеместно наблюдаемыми в природе событиями. Кроме того, физика – излишне детерминированная наука, а в науках о жизни и обществе выраженный детерминизм, по крайней мере, преждевременен, т.к. еще не закончен этап обобщения эмпирического знания. Не исключено, что концепция естественнонаучного детерминизма, как она понимается в физике, плохо отражает суть явлений и процессов в этих науках. Тем не менее, сближение наук и конвергенция научных методологий – это необратимый процесс в познании природы.

Построение фундаментальных моделей в ОТС должно идти по пути постулирования общесистемных закономерностей природы и общества, органического единства статистического и динамического описания

систем и явлений, создания общепринятого математического аппарата, а также нового представления времени как системной категории. Именно в этой области лежат истоки научной теории как раздела общей теории систем, которую называют *системной динамикой* или *системодинамикой*. Сегодня под системной динамикой понимают научное направление в анализе сложных систем, изучающее их поведение во времени и в зависимости от отношений и связей между элементами систем. Данное название использовалось в работах И. Пригожина и Дж. Форрестера, достаточно часто встречается в литературе и наиболее ясно отражает суть проблемы анализа и моделирования систем. Именно название «Системодинамика» и положено в основу данной книги. Причем такое название принято также и в дань тому, что изложение материала тесно связано с логикой построения термодинамики, а многие известные ученые отмечали, что название «Термодинамика» не полностью отвечает содержанию предмета и уровню «амбиций» этой науки. Системодинамика, как термодинамика в физике, может стать методологической основой для прикладных приложений ОТС.

Любая научная теория может быть построена разными путями, однако она всегда основывается на систематизации опытных данных, установлении базовых эмпирических закономерностей и формировании общих принципов, свойственных предмету исследований науки, а также разработке методологии, использующей математический аппарат.

В данной книге построение теории идет двумя путями. С одной стороны, обобщаются эмпирические закономерности для различных классов систем, формулируются принципы и постулаты системодинамики, а также разрабатывается ее математический аппарат на основе развития аксиоматического направления в теории, который идейно несколько связан с подходом, предложенным в свое время К. Каратеодори [48, 49]. С другой стороны, часто используются принципы и методы, принятые в термодинамике. Это позволяет применить разные подходы при создании теории системодинамики и распространить ее метод на другие области знаний. Преимущество данной книги заключается не только в построении теории системодинамики для некоторых классов систем, но и, что особенно важно, в иллюстрации возможностей применения ее метода при построении теорий в прикладных областях.

Первая часть книги посвящена краткому изложению некоторых разделов математики, необходимых для представления математического аппарата системодинамики. Здесь также анализируется содержание основ и эмпирических фактов термодинамики в свете дальнейшего изложения материала. Читатель, имеющий достаточную математическую подготовку, может бегло ознакомиться с первыми тремя главами книги. Эти разделы предназначены в основном для магистров и аспирантов, которые чувствуют, что есть необходимость предварительного изучения этих глав, прежде чем перейти к чтению основного материала.



Вторая часть, которая является основной, связана с обобщением эмпирических закономерностей процессов развития природы и общества и изложением основных принципов, постулатов и положений системодинамики. Здесь формулируются также подходы к изучению феномена времени, исходя из вероятностных принципов, принятых в системодинамике. Все это позволяет развить математический аппарат и установить связь метода системодинамики с теорией вероятности и математической статистикой, термодинамикой и векторным анализом. Сегодня математизация биологических, общественных и гуманитарных наук не затрагивает их исходных положений, методологий и закономерностей, т.е. оснований данных наук. Именно поэтому для наглядности изложение материала второй части монографии ведется на примере построения фундаментальной модели, формализующей закон перехода количественных изменений в качественные. Данный закон имеет место во всех процессах развития природы и общества и является одним из основополагающих законов диалектики. В этой части книги также сформулировано несколько важных общесистемных положений, например, введены понятия «энергии» и «энтропии» для систем различной природы; показана справедливость закона сохранения «энергии» для нефизических систем; раскрыта сущность закона возрастания «энтропии» и его связь с течением времени, исходя из существования статистических закономерностей, которые свойственны различным классам систем; дано математическое понятие меры состояния и вектора эволюции системы; намечены пути развития системодинамики и т.д. Этим иллюстрируются возможности ОТС, методология которой претендует на универсальность.

Третья часть книги посвящена прикладным приложениям системодинамики. Здесь представлены возможности использования математического аппарата системодинамики в некоторых научных областях. Именно с целью показать универсальность метода системодинамики даны наглядные примеры изучения процессов социально-экономического развития стран мира и построения системных моделей в токсикологии. Развитие человеческого общества и токсикология – это две области приложения метода системодинамики, которые лежат вне предмета исследования физических наук и имеют развитую феноменологическую базу. Именно поэтому полученные результаты могут методически «обогащать» общую теорию систем и дать импульс развитию ее методологии, исходя из сферы практического применения теории.

В данной части книги рассматриваются также некоторые актуальные проблемы термодинамики и, в частности, пути аксиоматизации классической термодинамики. Сегодня теория термодинамики – это один из источников всей современной методологии моделирования и яркий пример единства феноменологии и теории, что крайне важно для развития общей теории систем.

Отдельный небольшой раздел книги посвящен общенаучным проблемам, связанным с методологией моделирования времени. В этом

разделе изучаются идеи взаимосвязи принципов системодинамики с положениями специальной теории относительности (СТО), идет речь о парадоксах СТО и затрагиваются дискуссионные вопросы, которые касаются сущности модельных представлений времени. Это направление представляет собой необъятное поле для будущих исследований.

**Благодарности.** В заключение хотелось бы выразить благодарность всем тем кто, оказал мне помощь в подготовке и издании этой монографии. Данный труд возник благодаря обсуждениям проблем системного анализа и термодинамики с профессором Цейтлиным Ю.А. в процессе моей учебы в докторантуре ИГТМ НАН Украины (г. Днепропетровск). Хотя с тех пор прошло уже много времени и Учителя уже нет в этом мире, кажется, что это было совсем недавно.

Я выражаю искреннюю признательность коллегам, с которыми долгое время работал в МакНИИ и ДонНТУ, к.т.н. Яковенко А.К., к.ф-м.н. Венгеру И.Р., проф. Бондаренко Ю.В., проф. Лапко В.В., проф. Башкову Е.А. и многим другим за личный пример отношения к делу, помощь в профессиональном росте, советы, консультации и дискуссии. Различную помощь при подготовке и оформлении монографии я получил от моих, теперь уже бывших, аспирантов Павлия В.А. и Родригеса А.Э., а также магистра Шерекина Д.П. Большую помощь в работе оказала мне доцент Звягинцева А.В., которая непосредственно участвовала в подготовке и написании двенадцатой и тринадцатой глав книги и взяла на себя неблагодарный труд редактирования всей монографии.

Особо хотелось бы выразить глубокую признательность рецензентам проф. Ф.В. Недопекину и проф. Е.А. Башкову за ряд ценных указаний, замечаний и предложений.

Выполнить эту работу было бы невозможно без лояльного отношения семьи: жены и детей, за что я им искренне благодарен. Жизнь человека, как и все в природе, подчинена законам сохранения, поэтому, взяв существенное время из нее для одного дела, мы ограничиваем свои возможности во многом другом, и чаще всего от этого страдают близкие.

И, наконец, любой научный труд – это вклад в общее знание, которое создается многими учеными. Поэтому, заканчивая предисловие, хотелось бы обратить внимание на приведенное ранее высказывание А. Эйнштейна о термодинамике. Все в этом мире подвержено развитию, поэтому и термодинамика может качественно измениться и перерасти в новую науку, которая в своей основе будет иметь уже не только физическую теорию. Это был бы закономерный результат колоссального труда поколений ученых, создавших теорию классической термодинамики.

*Г. Аверин,  
Донецк, 01.02.2014 г.*

Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой

К. Маркс

## ЧАСТЬ I

### Математические методы и источники системодинамики



**ГЛАВА 1**  
**Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**

**ГЛАВА 2**  
**Векторный анализ и теория поля**

**ГЛАВА 3**  
**Краткие сведения из теории вероятности**

**ГЛАВА 4**  
**Содержание основ термодинамики**

**ГЛАВА 5**  
**У истоков конвергенции естественнонаучного и гуманитарного знания**

# Глава первая

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 1.1 Функциональные зависимости между переменными

В современной науке приложения математики весьма разнообразны: считается, что все виды движения материи могут изучаться на основе применения математического метода. Однако, роль математики в механике, физике, биологии, социальных и гуманитарных науках крайне различна. Если в механике и физике математика лежит в основе методологии данных наук, то в биологии, социальных и гуманитарных науках она играет второстепенную роль, при которой используются преимущественно методы математической статистики, имитационные и кибернетические модели. В этом случае трудности применения математического метода связаны со сложностями формализации явлений, изучаемых в данных науках.

Однако, множество явлений, процессов и движений в природе могут описываться математическими функциями. Отсюда и вытекает объективная актуальность применения математических методов в современных науках. В первых трех главах данного раздела в тезисном изложении будут приведены некоторые сведения из дифференциального исчисления, векторного анализа, теории вероятности и т.д., которые имеют значение для дальнейшего построения математического аппарата системодинамики. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей в системодинамике будет связано с нижеизложенными положениями дифференциального анализа.

1. *Понятие функции.* Основополагающее значение в математике имеет понятие функции, которое в самом общем понимании означает связь между переменными величинами. Если величина  $x$  может принимать произвольные значения и указано какое-либо правило, посредством которого в соответствии с этими значениями приводятся определенные значения другой величины  $y$ , то говорят, что  $y$  является *функцией* от  $x$ . Это условие записывают символически в виде:

$$y = f(x), \quad x \in \Omega_x. \quad (1.1)$$

Величину  $x$  называют независимой переменной или аргументом, а величину  $y$  – зависимой переменной. В свою очередь, множество  $\Omega_x$  – это область определения (область задания) функции, представляющая собой множество значений, которые может принимать величина  $x$ .

Слово «величина» в указанном выше определении функции понимается в широком смысле – это может быть именованное число, отвлеченное число (действительное или комплексное), несколько чисел (например, точка пространства) и, вообще, элемент любого множества.

Обычно считается, что характерное свойство величины заключается в том, что она может быть измерена, т.е. определена путем выполнения ее количественного сравнения с некоторой определенной величиной того же рода, которая принимается за *единицу меры*. Процесс сравнения зависит от свойств изучаемой величины и называется *измерением*. В результате измерения получается *число*, выражающее отношение рассматриваемой величины к единице этой же величины, принятой за единицу меры.

Величины, исследуемые в математике, разделяются на два класса: постоянные и переменные.

*Постоянной величиной* называется величина, которая при данном исследовании сохраняет одно и то же, неизменное, значение. Поэтому ей соответствует при фиксированной единице меры, определенное число.

*Переменной величиной* называется такая величина, которая по тем или иным причинам может принимать различные значения при данном исследовании.

Две переменные величины называются независимыми, если значения одной из них не зависят от значений, которые принимаются другой величиной.

Если какая-либо величина при осуществлении процесса изменяется во времени, то меняется и измеряющее ее действительное число  $\xi = z/z_0$  ( $z_0$  – единица измерения или меры). Поэтому говорят, что каждой величине соответствует измеряемое ее число. Обычно система скалярных величин включает в себя, кроме положительной шкалы величины, начало отсчета (ноль) и отрицательную шкалу величины. Таким образом строят шкалы измерений – ряд цифровых величин, расположенных в нисходящем или восходящем порядке, для воспроизведения количественных свойств объектов или явлений. Подобные шкалы обычно называют шкалами интервалов.

Всякий закон природы дает нам соотношение между величинами или, вернее, между числами, выражающими эти величины. Предметом исследования математики являются как раз числа и различные соотношения между ними, независимо от конкретного характера законов, которые привели нас к этим числам и соотношениям.

Во всех случаях, когда употребляется термин «функция», подразумевается, если не оговорено противное, однозначная функция, т.е. такое соответствие, при котором каждому значению аргумента  $x$  соответствует только одно значение функции  $y$ . Если одному и тому же значению аргумента соответствует несколько (быть может, даже бесконечное множество значений  $y$ ), то величина  $y$  называется многозначной функцией аргумента  $x$ .

2. *Способы задания функций*. Существуют различные способы задания функций. Наиболее распространен аналитический способ задания, при котором функция представляется формулой, устанавливающей какие операции надо произвести над величиной  $x$ , чтобы найти величину  $y$ .

Функция считается заданной если:

- указана совокупность всех значений аргумента  $x$ ;
- указан закон, который позволяет по заданному значению аргумента  $x$  находить соответствующее ему значение величины  $y$ .

Частным значением функции называется ее значение, которое соответствует частному значению аргумента при  $x = x_0$ . Для обозначения значения функции при  $x = x_0$  используется символ  $f(x_0)$  или  $y(x_0)$ .

Если функция задана аналитически, то областью существования функции (иначе, областью определения функции) называется совокупность тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.

При аналитическом способе задания функция может быть представлена:

- в явном виде, когда дано выражение величины  $y$  через величину  $x$ , т.е. формула связи имеет вид  $y = f(x)$ ;
- в неявном виде, когда величины  $x$  и  $y$  связаны между собой уравнением вида  $F(x, y) = 0$ ;
- в параметрическом виде, когда соответствующие друг другу значения величин  $x$  и  $y$  выражены через третью вспомогательную переменную  $\tau$ , которую называют параметром.

Среди других способов задания функций широко используется также табличный и графический способы.

3. *Функции нескольких переменных.* В процессах моделирования нередки случаи, когда независимых переменных может быть несколько. Поэтому в прикладных исследованиях наибольший интерес представляет понятие действительной функции нескольких действительных переменных.

Функция от двух переменных определяется следующим образом. Рассматривается множество  $\Omega$  упорядоченных пар чисел  $(x, y)$ . Если в силу некоторого закона каждой паре чисел  $(x, y) \in \Omega$  приведено в соответствие число  $z$ , то говорят, что на множестве  $\Omega$  определена функция  $z = f(x, y)$  от двух переменных  $x$  и  $y$ . Так как каждой паре чисел  $(x, y)$  на плоскости соответствует точка с координатами  $(x, y)$ , то функция  $z = f(x, y)$  задается на множестве  $\Omega$  точек плоскости. Функцию  $z = f(x, y)$  изображают в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат  $\{x, y, z\}$  в виде множества точек  $x, y, z$ , лежащих на некоторой поверхности  $z = f(x, y)$ . Например, функция  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , изображается верхней половиной сферической поверхности радиуса  $R=1$  с центром в начале координат. Аналогично можно рассматривать множество  $\Omega$  упорядоченных систем

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  из  $n$  чисел, и функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть функция от  $n$  переменных, определенная на множестве  $\Omega$  точек  $n$ -мерного пространства.

Для определения функций многих переменных вводят понятие  $n$ -мерного пространства. Геометрически в случае трех независимых переменных система из трех чисел  $x, y, z$  может быть истолкована как точка трехмерного пространства, а множество таких точек как часть пространства или геометрическое тело. Если каждой точке этого пространства поставлено в соответствие некоторое число  $u$  то говорят, что задана функция трех переменных  $u = f(x, y, z)$ . В этом случае функция представляется уже в четырехмерном пространстве и не может быть геометрически интерпретирована, т.к. человек интуитивно не представляет пространства с числом измерений более трех. Несмотря на это, геометрические методы распространяют также и на функции большого количества переменных, для чего используют представления об  $n$ -мерном пространстве.

Построение геометрии указанных пространств для  $n$  измерений проводится по аналогии со случаем трех измерений. При этом можно непосредственно исходить из обобщения геометрических оснований трехмерной геометрии, из той или иной системы ее аксиом или обобщения аналитической геометрии. Для этого переносят все основные положения, принятые для трехмерного пространства, на произвольное число координат  $n$ . Именно так и начиналось построение  $n$ -мерной евклидовой геометрии. В настоящее время предпочитают исходить из обобщения понятий векторного пространства.

Евклидово пространство произвольного числа измерений  $n \geq 3$  (не исключая случая бесконечномерного пространства) проще всего определить как пространство, в котором выделены подмножества – прямые и плоскости. Принято, что в данном пространстве действуют обычные отношения: принадлежности, порядка, конгруэнтности (либо определены расстояния или движения). Считается также, что выполняются все обычные аксиомы, кроме следующей аксиомы трехмерного пространства: две плоскости, имеющие общую точку, содержат по крайней мере еще одну общую точку. Если это выполнено, то пространство трехмерно, если же не выполнено, то пространство, как минимум, четырехмерно.

Понятие плоскости обобщается следующим образом: плоскостью называется такое множество точек, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит проходящую через них прямую. В этом смысле все пространство тоже является плоскостью. Пересечение всех плоскостей, содержащих данное множество точек  $M$ , будет плоскостью. Говорят, что эта плоскость «натянута» на  $M$ . Подобное множество называют аффинной оболочкой  $M$ . Если плоскость натягивается на  $m + 1$  точку, но не натягивается на меньшее их число, то она называется  $m$ -мерной

плоскостью или, короче  $m$ -плоскостью. При таком определении обычная точка есть  $0$ -плоскость, прямая –  $1$ -плоскость, обычная плоскость –  $2$ -плоскость, трехмерное пространство –  $3$ -плоскость. Пространство называется  $n$ -мерным, если оно является  $n$ -плоскостью. Таким образом, для определения  $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  при любом заданном  $n \geq 3$  достаточно добавить аксиому: пространство есть  $n$ -плоскость. В этом пространстве есть  $m$ -плоскости с  $0 < m \leq n - 1$ . Каждая  $m$ -плоскость с  $m \geq 2$  является  $m$ -мерным евклидовым пространством  $\Omega_m$ , входящим в  $\Omega_n$ . Так как четыре точки всегда содержатся в  $3$ -плоскости, то и любые две прямые содержатся в  $3$ -плоскости, т.е. в пространстве  $\Omega_3$ .

В пространстве  $\Omega_n$  через любую точку можно провести  $n$ , и не более, взаимно перпендикулярных прямых и ввести соответственно прямоугольные координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В данной системе координат длина любого отрезка  $XY$  выражается формулой:

$$XY = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) можно положить в основу  $n$ -мерного определения  $\Omega_n$ . Пусть  $\Omega_n$  есть такое множество, в котором введены координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и каждой паре  $n$ -мерных точек  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ставится в соответствие число («расстояние»), определяемое формулой (1.2), тогда к геометрии относятся те и только те определения и утверждения, которые могут быть сформулированы через отношения расстояний. Например, отрезок  $AB$  есть множество всех точек  $X$ , для которых  $AX + XB = AB$ , а прямая  $AB$  – множество всех точек  $X$ , для которых  $\pm AX \pm XB = AB$ .

4. *Некоторые понятия  $n$ -мерной геометрии.* В  $n$ -мерной геометрии области и тела определяются путем расширения понятий некоей трехмерной плоскости [99].

Множество «точек»  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , координаты которых независимо друг от друга удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1; a_2 \leq x_2 \leq b_2; \dots; a_n \leq x_n \leq b_n,$$

называется  $n$ -мерным замкнутым «прямоугольным параллелепипедом» и обозначается в виде:

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n].$$

При  $n = 2$  отсюда, в частности, получается обычный плоский прямоугольник; трехмерному «параллелепипеду» отвечает в пространстве обыкновенный прямоугольный параллелепипед.

Если в написанных выше соотношениях исключить равенство:

$$a_1 < x_1 < b_1; a_2 < x_2 < b_2; \dots; a_n < x_n < b_n,$$

то этим определится открытый «прямоугольный параллелепипед»:

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n).$$

Разности  $a_1 - b_1; a_2 - b_2; \dots; a_n - b_n$  называются измерениями обоих



видов параллелепипедов, а точку

$$\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}$$

определяют как центр параллелепипеда.

Окрестностью «точки»  $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  называется любой открытый «параллелепипед»:

$$(x_{10} - \delta_1, x_{10} + \delta_1; x_{20} - \delta_2, x_{20} + \delta_2; \dots; x_{n0} - \delta_n, x_{n0} + \delta_n),$$

$(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0)$  с центром в точке  $M_0$ .

В случае, если все измерения параллелепипеда равны  $2 \cdot \delta > 0$ , то окрестность точки  $M_0$  будет охвачена  $n$ -мерным «кубом»:

$$(x_{10} - \delta, x_{10} + \delta; x_{20} - \delta, x_{20} + \delta; \dots; x_{n0} - \delta, x_{n0} + \delta).$$

Рассмотрим множество «точек»  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq h, \quad (h > 0).$$

При  $n = 2$  геометрический образ, соответствующий этому множеству, представится равнобедренным прямоугольным треугольником, а при  $n = 3$  – тетраэдром. В общем случае данный образ называют симплексом (данный симплекс является замкнутым, в отличие от открытого, который получится, если в написанных выше соотношениях исключить равенство).

Наконец, вокруг точки  $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  множество «точек»  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которое определено неравенством

$$(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + \dots + (x_n - x_{n0})^2 \leq r^2 \quad \text{или} \quad < r^2,$$

образует замкнутую (или открытую)  $n$ -мерную «сферу» радиуса  $r$  с центром в «точке»  $M_0$ . Здесь величина  $r$  – малое положительное число.

Другими словами «сфера» – это множество «точек»  $M$ , «расстояние» которых от некоторой постоянной «точки»  $M_0$  не превосходит (или меньше)  $r$ . Ясно, что этой  $n$ -мерной «сфере» при  $n = 2$  отвечает круг, а при  $n = 3$  – обыкновенный шар.

Открытую «сферу» любого радиуса ( $r > 0$ ) с центром в точке  $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  можно рассматривать как некоторую окрестность этой точки. В отличие от окрестности вокруг  $n$ -мерного параллелепипеда, эту окрестность называют «сферической». Известно, что если «точка»  $M_0$  окружена окрестностью одного из указанных двух типов, то ее можно окружить и окрестностью второго типа так, чтобы эта окрестность содержалась в первой.

Приведенные выше понятия  $n$ -мерных тел лежат в основе определения открытых и закрытых  $n$ -мерных областей.

Назовем точку  $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  внутренней точкой множества  $\Omega$  (в  $n$ -мерном пространстве), если она принадлежит множеству  $\Omega$  вместе с некоторой достаточно малой ее окрестностью. Множество, целиком состоящее из внутренних точек, называют открытой областью. Таким

образом, открытый  $n$ -мерный прямоугольный параллелепипед, открытая  $n$ -мерная сфера и открытый симплекс являются примерами открытых областей.

Из дифференциального исчисления известно, что точка  $M_0$  называется точкой сгущения множества, если в любой близости от  $M_0$  содержатся точки, отличные от этой точки. Обобщим теперь понятие точки сгущения на случай множества  $\Omega$  в  $n$ -мерном пространстве. Точка  $M_0$  называется точкой сгущения множества  $\Omega$ , если в каждой ее окрестности содержится хотя бы одна точка  $\Omega$ , отличная от точки  $M_0$ .

Точки сгущения для открытой области, не принадлежащие этой области, называются пограничными точками области. Пограничные точки в их совокупности образуют границу области. Открытая область вместе с ее границей называется закрытой областью.

Для открытого «параллелепипеда» пограничными будут точки  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которых

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n,$$

причем хоть в одном случае имеет место именно равенство.

Точно так же, для рассмотренной выше открытой сферы пограничными точками будут точки  $M$ , для которых в точности выполняется равенство  $\overline{MM_0} = r$ .

Наконец, для открытого симплекса пограничными являются точки  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющие соотношениям:

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq h$$

причем, хоть однажды осуществляется равенство.

Таким образом, замкнутый прямоугольный параллелепипед, замкнутая сфера и замкнутый симплекс дают примеры замкнутых областей. Известно, что замкнутой области принадлежат все ее «точки» сгущения.

Все изложенное выше можно рассматривать как установление лишь некоего геометрического языка; с этим не связано (при  $n > 3$ ) никаких реальных геометрических представлений. Это связано с тем, что представить пространство более трех переменных достаточно не просто. Однако данный подход позволяет дать определение понятию  $n$ -мерной функции в следующем виде.

Пусть имеем  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , совместные значения которых могут выбираться произвольно из некоторого множества  $\Omega$  точек  $n$ -мерного пространства. Данные переменные обычно называются независимыми между собой при условии, что каждая из них может принимать любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

Переменная  $u$  (с областью изменения  $U$ ) называется функцией независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (с областью определения на множестве  $\Omega$ ), если каждой системе значений этих переменных из

множества  $\Omega$  по некоторому правилу или закону соответствует единственное определенное значение  $u$  из множества  $U$ . Символически функция  $u$  независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  записывается в виде:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Если  $n$ -мерную точку  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  обозначить через  $M$ , то функцию  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от переменных  $x_k$  иногда называют функцией точки  $M$  и обозначают тем же знаком:  $u = f(M)$ .

Областью существования функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется совокупность значений независимых переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при которых функция (1.3) определена (т.е. принимает действительные значения). Область существования функции часто называется также областью определения функции.

На  $n$ -мерные функции в пространстве многих переменных распространяются основные понятия, используемые при математическом анализе функций одной или двух переменных: предел функции, непрерывность и определенность функции нескольких переменных, операции над непрерывными функциями и т.д.

## 1.2 Производные и дифференциалы

Частная производная является одним из основных понятий дифференциального исчисления и определяет скорость изменения функции нескольких переменных при изменении только одного аргумента.

В дальнейшем для упрощения записей все определения и формулы приводятся только для функций от трех переменных.

1. *Частное приращение функции.* Если в функции  $u = f(x, y, z)$  одна из независимых переменных, например  $x$ , получила приращение  $\Delta x$ , то частным приращением  $\Delta u_x$  функции  $u$  называется разность:

$$\Delta u_x = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z).$$

Соответственно для переменных  $y$  и  $z$  имеем:

$$\Delta u_y = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z);$$

$$\Delta u_z = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

*Частные производные.* Составим следующее отношение  $\frac{\Delta u_x}{\Delta x}$ . Если при стремлении  $\Delta x$  к нулю это отношение стремится к определенному пределу, то данный предел называется частной производной функции  $u = f(x, y, z)$  по независимой переменной  $x$  и обозначается одним из символов:  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $u'_x$ ,  $f'_x$ . Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u_x}{\Delta x},$$

или в более подробной записи частную производную можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (1.4)$$

Аналогично определяются частные производные функции  $u = f(x, y, z)$  по независимым переменным  $y$  и  $z$ . Частная производная по  $y$  обозначается одним из символов:  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $u'_y$ ,  $f'_y$  и, в свою очередь, равна:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}.$$

Аналогично, частная производная по  $z$  обозначается одним из символов:  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ ,  $u'_z$ ,  $f'_z$  и представляется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u_z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Вычисление частных производных функции нескольких независимых переменных проводится по тем же правилам, по которым вычисляются производные функции одной независимой переменной. При этом при определении частной производной считают постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой вычисляется частная производная.

Из существования и непрерывности в данной точке частных производных некоторой функции вытекает непрерывность в этой точке и самой функции.

2. Полное приращение функции  $u = f(x, y, z)$  определяется по формуле:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z),$$

где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – приращения независимых переменных, которые являются аргументами функции.

Полный дифференциал функции  $u = f(x, y, z)$  обозначается символом  $du$  и вычисляется по формуле:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad (1.5)$$

и аналогично для двух переменных, если  $z = f(x, y)$ , то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Полный дифференциал  $du$  некоторой функции является главной частью ее приращения  $\Delta u$ , которая линейная относительно  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , т.е.  $\Delta u \approx du$ , причем при бесконечно малых значениях  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  разность

$(\Delta u - du)$  представляет собой бесконечно малую величину более высокого порядка малости, чем  $\Delta\varphi = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ .

Приближенное равенство  $\Delta u \approx du$  на основании формулы (1.5) может быть записано в виде:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \text{ или} \quad (1.6)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \approx \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (1.7)$$

Это приближенное соотношение тем более точно, чем меньше величины  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ .

3. *Производные от сложных функций.* Если имеем функцию  $u = f(x, y, z)$ , определенную в открытой области  $\Omega$ , причем каждая из переменных  $x, y, z$  является функцией от переменной  $\tau$ :

$$x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau),$$

то и функция  $u$  является функцией переменной  $\tau$ . В этом случае говорят, что  $u$  есть сложная функция аргумента  $\tau$ . Производная от функции  $u$  по независимой переменной  $\tau$  вычисляется по формуле:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}. \quad (1.8)$$

Вычисленная по этой формуле производная называется полной производной от функции  $u$  по независимой переменной  $\tau$ .

Если функция имеет вид  $u = f(\tau, x, y, z)$ , а переменные  $x, y$  и  $z$ , в свою очередь, также являются функциями аргумента  $\tau$ , т.е.  $x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)$ , то

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{d\tau}. \quad (1.9)$$

Данные зависимости часто используются при изучении различных процессов изменения состояния сложных систем, когда их свойства меняются во времени.

Если  $z = f(u, v)$  – функция от двух переменных  $u$  и  $v$ , а каждая из них является, в свою очередь, функцией двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , то и  $z$  есть функция независимых переменных  $x$  и  $y$ , а ее частные производные по этим переменным вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Если функция  $z$  зависит от переменных  $x$  и  $y$  не только посредственно через  $u$  и  $v$ , но и явно, т.е.  $z = f(x, y, u, v)$ , то имеют место следующие формулы для вычисления частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

В соотношениях (1.11) производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функции  $z$  от переменных  $x$  и  $y$  вычисляются в предположении, что переменные  $u$  и  $v$  – величины постоянные.

4. *Инвариантность дифференциала.* Если функция  $u = f(x, y, z)$  имеет непрерывные частные производные  $u'_x, u'_y, u'_z$ , причем величины  $x, y, z$ , в свою очередь, являются функциями некоторых известных переменных  $\tau$  и  $s$ :

$$x = x(\tau, s), \quad y = y(\tau, s), \quad z = z(\tau, s),$$

которые также имеют непрерывные частные производные  $x'_\tau, x'_s, y'_\tau, y'_s, z'_\tau, z'_s$ , то для функции нескольких переменных  $u$  имеет место инвариантность формы (первого) дифференциала вида:

$$\begin{aligned}du &= u'_\tau d\tau + u'_s ds = u'_x(x'_\tau d\tau + x'_s ds) + u'_y(y'_\tau d\tau + y'_s ds) + \dots \\ &\dots + u'_z(z'_\tau d\tau + z'_s ds) = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz.\end{aligned}$$

Эта запись имеет форму дифференциала аналогичную той, когда  $x, y, z$  были бы независимыми переменными.

5. *Частные производные высших порядков.* Если задана функция трех независимых переменных  $u = f(x, y, z)$  и вычислены ее частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ , то они также являются функциями независимых переменных  $x, y, z$ . От каждой из этих функций, в свою очередь, можно вычислить производные.

Если вычислить частную производную по  $x$  от  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , то получим частную производную второго порядка от функции  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , взятую два раза по переменной  $x$ . Эта производная обозначается символом  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\tag{1.12}$$

Если вычислить частную производную по  $y$  от  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , то получим частную производную второго порядка функции  $u$ , взятую сначала по переменной  $x$ , а потом по переменной  $y$ . Эта производная обозначается

символом  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  и представляется в виде  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

Частные производные высшего порядка, взятые по переменным  $x, y, z$  вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \dots$$

являются смешанной частью производной. Аналогичным образом определяются производные третьего и четвертого порядка и т.д., то есть до  $n$ -го порядка включительно.

Например, символ  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  обозначает производную третьего порядка

функции  $u = f(x, y, z)$ , вычисленную три раза по  $x$ . Символ же  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$

обозначает, что от функции  $u$  взята производная третьего порядка, причем она вычислялась два раза по переменной  $x$  и от полученной производной  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  вычислена один раз производная по переменной  $y$ .

При выводе ряда важных дифференциальных уравнений используется теорема о равенстве вторых смешанных производных, в соответствии с которой вторые смешанные производные функции  $u$  при условии их непрерывности в точке  $M(x, y, z)$  равны между собой в этой точке. Иными словами, для функции  $u(x, y, z)$  значение её второй смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, т.е.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{или} \quad \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_y = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_x. \quad (1.13)$$

6. *Дифференциалы высших порядков.* Дифференциалом второго порядка функции  $u = f(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  – независимые переменные, называется дифференциал от дифференциала первого порядка. Данная функция обозначается через  $d^2 u$ , причем  $d^2 u = d(du)$ .

Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2. \quad (1.14)$$

Дифференциал третьего порядка функции  $u = f(x, y)$  есть дифференциал ее дифференциала второго порядка. Данная функция обозначается символом  $d^3 u$ , т.е.  $d^3 u = d(d^2 u)$ .

Дифференциал третьего порядка вычисляется по формуле:

$$d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3. \quad (1.15)$$

Если условиться, что над символами  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial y}$  можно производить все арифметические действия по тем же правилам, по которым они производятся над числами, а произведение

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} (u)$$

заменить частной производной  $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ , то формулы для вычисления  $d^2 u$

и  $d^3 u$  можно в символической записи представить в виде:

$$d^2 u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u;$$

$$d^3 u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 u.$$

Известно, что для дифференциала порядка  $n$  функции  $u = f(x, y)$  имеет место символическая формула вида:

$$d^n u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u. \quad (1.16)$$

7. *Производные неявных функций.* Если функция  $u$  от трех независимых переменных  $x, y, z$  задается уравнением  $f(x, y, z, u) = 0$ , из которого невозможно выделить функцию  $u$  в явном виде, то говорят, что  $u$  есть неявная функция переменных  $x, y, z$ . В этом случае частные производные функции  $u$  по независимым переменным  $x, y, z$  определяются по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial u}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u}}. \quad (1.17)$$

Аналогично можно рассматривать неявное уравнение с большим числом переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ , различные частные производные в этом случае вычисляются согласно (1.17) по каждой переменной  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Производные более высоких порядков (например, производные  $k$ -того порядка) получают дифференцируя выражения (1.17) при условии, что функция  $f(x, y, z, u) = 0$  имеет непрерывные производные  $k$ -того порядка.



### 1.3 Однородные функции

Понятие однородности играет важную роль в некоторых разделах математики. Существуют однородные многочлены, однородные координаты, однородные функции и т.д. В качестве примера можно привести следующие однородные функции с различными переменными:

$$y = x_1^2 + x_2^2; \quad y = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}; \quad y = \sqrt{x_1 + x_2}$$

1. *Определение однородной функции.* Известно, что функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  от  $n$  аргументов, определенная в области  $\Omega$ , называется однородной функцией  $m$ -ной степени, если при умножении всех ее аргументов на множитель  $t$  функция приобретает этот же множитель в  $m$ -ной степени, т.е. тождественно выполняется равенство:

$$f(t \cdot x_1, t \cdot x_2, \dots, t \cdot x_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.18)$$

Ограничимся предположением, что переменные  $x_1, \dots, x_n$  и  $t$  принимают лишь положительные значения. Также предполагается, что область  $\Omega$ , в которой рассматривается функция  $f$ , вместе с любой своей точкой  $M(x_1, \dots, x_n)$  содержит и все точки вида  $M_t(t \cdot x_1, \dots, t \cdot x_n)$ . Это значит, что область содержит при  $t > 0$  весь луч, исходящий из начала координат и проходящий через точку  $M$ .

Константа  $m$  может быть любым вещественным числом и называется степенью однородности функции  $f$ .

2. *Свойства однородных функций.* Пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  есть однородная функция нулевой степени, тогда

$$f(t \cdot x_1, t \cdot x_2, \dots, t \cdot x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

приняв  $t = \frac{1}{x_1}$ , получим:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Если ввести функцию  $\varphi$  от  $(n-1)$  аргументов вида:

$$\varphi(v_1, \dots, v_{n-1}) = f(1, v_1, \dots, v_{n-1}),$$

то окажется, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right). \quad (1.19)$$

Итак, всякая однородная функция нулевой степени представляется в виде функции отношений всех аргументов к одному из них. Обратное, очевидно, также верно, так что равенство (1.19) дает общее выражение однородной функции нулевой степени.

Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть однородная функция  $m$ -ой степени (и только в этом случае), то отношение ее к  $x_1^m$  будет однородной функцией

нулевой степени, так что

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_1^m} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right). \quad (1.20)$$

Таким образом, из (1.20) получаем общий вид однородной функции степени  $m$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^m \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right). \quad (1.21)$$

**3. Формула Эйлера.** Известная теорема Эйлера об однородных функциях формулируется в следующем виде: сумма произведений частных производных однородной функции на соответствующие переменные равна произведению самой этой функции на степень ее однородности.

Предположим, что однородная функция  $f(x, y, z)$  степени  $m$  имеет в области  $\Omega$  непрерывные частные производные по всем аргументам. Фиксируя произвольно точку  $(x_0, y_0, z_0)$  из  $\Omega$ , в силу основного тождества для любого  $t > 0$  будем иметь:

$$f(t \cdot x_0, t \cdot y_0, t \cdot z_0) = t^m \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Продифференцируем теперь приведенное равенство по  $t$ : левую часть равенства – по правилу дифференцирования сложной функции, правую часть – просто как степенную функцию. В результате преобразований получим:

$$\begin{aligned} f'_x(t \cdot x_0, t \cdot y_0, t \cdot z_0) \cdot x_0 + f'_y(t \cdot x_0, t \cdot y_0, t \cdot z_0) \cdot y_0 + f'_z(t \cdot x_0, t \cdot y_0, t \cdot z_0) \cdot z_0 = \\ = m \cdot t^{m-1} f(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Если положить  $t = 1$ , то придем к следующей формуле:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y_0 + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z_0 = m \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, для любой точки  $M(x, y, z)$  имеет место равенство:

$$f'_x(x, y, z) \cdot x + f'_y(x, y, z) \cdot y + f'_z(x, y, z) \cdot z = m \cdot f(x, y, z). \quad (1.22)$$

Этому равенству удовлетворяет любая однородная функция степени  $m$ , имеющая непрерывные частные производные. Верно и обратное утверждение – каждая функция, непрерывная вместе со своими частными производными и удовлетворяющая равенству Эйлера, является однородной функцией степени  $m$ .

## 1.4 Краткие сведения из дифференциальной геометрии

Дифференциальная геометрия является разделом геометрии, в котором геометрические образы изучаются методами математического анализа и, в первую очередь, – методами дифференциального исчисления.

Этот раздел геометрии исследует дифференциальные свойства геометрических образов (кривых, поверхностей и семейств), т.е. свойства, которые присущи сколь угодно малой части геометрических объектов. Основными изучаемыми объектами в дифференциальной геометрии

являются кривые (линии) и поверхности, обычного евклидова пространства, а также семейства (т.е. непрерывные совокупности кривых и поверхностей).

1. *Аналитическое представление кривых и поверхностей.* Кривые, рассматриваемые в дифференциальной геометрии, имеют во всех своих точках, кроме, может быть некоторых «особых» точек, определенную касательную. Исходя из этого, функции, описывающие эти кривые, являются непрерывными и имеют непрерывные производные по своим аргументам. При аналитическом исследовании кривая предполагается заданной уравнениями в какой-нибудь системе координат. Чаще всего кривая задается параметрическими уравнениями в прямоугольных координатах:

$$x = \varphi(\tau), y = \psi(\tau), z = \chi(\tau). \quad (1.23)$$

Здесь  $\tau$  – независимая переменная (параметр), изменяющаяся в некотором конечном или бесконечном интервале;  $\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)$  – заданные функции;  $x, y, z$  – прямоугольные координаты некоторой точки  $M$ . При изменении параметра  $\tau$  изменяются текущие координаты  $x, y, z$  и вместе с этим перемещается и точка  $M$ . Траектория точки  $M$  и является кривой, заданной уравнениями (1.23). Если используются два уравнения, то кривая задается на плоскости, если три уравнения – то в пространстве.

Иногда уравнение кривой задается в неявном виде, например:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{или} \quad F(x, y, z) = 0 \quad (1.24)$$

или в явном виде:

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad z = f(x, y). \quad (1.25)$$

Правые части уравнений (1.23) можно рассматривать как проекции на оси координат радиус-вектора  $\vec{r}$  точки  $M$ , что записывается следующим образом:

$$\vec{r} = \{\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)\}. \quad (1.26)$$

Вектор с проекциями  $\varphi'(\tau), \psi'(\tau), \chi'(\tau)$  называется производной от вектора  $\vec{r}$  и обозначается как

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \{\varphi'(\tau), \psi'(\tau), \chi'(\tau)\}.$$

Аналогичным образом определяются производные высших порядков:

$$\vec{r}^{(n)} = \frac{d^n \vec{r}}{d\tau^n} = \{\varphi^{(n)}(\tau), \psi^{(n)}(\tau), \chi^{(n)}(\tau)\}.$$

Вектор  $\vec{r}'$  лежит на касательной к заданной кривой в точке  $M$ . Следовательно, если  $\vec{r}' \neq 0$ , то касательная определяется точкой  $M$  и вектором  $\vec{r}'$ . В свою очередь, вектор  $\vec{r}''$  лежит в соприкасающейся плоскости. Следовательно, эта плоскость определяется точкой  $M$  и векторами  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}''$  (если только эти векторы не коллинеарные).

Для применения приведенных выше формул необходимо, чтобы правые части уравнений, определяющих кривую, имели производные, по

крайней мере, до 3-го порядка включительно. В дифференциальной геометрии это условие относительно рассматриваемых кривых обычно предполагается выполненным. Кроме того, как правило, предполагается, что  $r' \neq 0$ . В каждой точке, где данные условия соблюдены, кривая имеет касательную и вблизи такой точки простирается вдоль касательной в обе стороны. Вблизи точки, где  $r' = 0$ , кривая может иметь иное строение. В таких случаях данная точка называется нерегулярной или особой.

В частном случае, если параметр  $\tau$  совпадает с длиной дуги  $s$ , пройденной точкой  $M$  по данной кривой, считая от некоторой условной выбранной начальной точки, то  $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$  представляет собой единичный вектор касательной.

Поверхность может быть определена тремя уравнениями:

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), \quad (1.27)$$

где  $u, v$  – независимые переменные, которые называются параметрами;  $x, y, z$  – прямоугольные координаты некоторой точки  $M$ . Параметры  $u, v$  предполагаются меняющимися в какой-нибудь области  $\Omega$  вспомогательной плоскости, на которой введена система прямоугольных координат. При всех возможных значениях параметров  $u, v$  из области  $\Omega$  точка  $M$  находится на поверхности, определяемой уравнениями (1.27) и может занимать на ней любое положение. Функции  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$ ,  $\chi(u, v)$  обычно предполагаются непрерывными и обладающими частными производными по крайней мере до 3-го порядка включительно при всех значениях параметров  $u$  и  $v$ .

Для каждой пары значений  $u$  и  $v$  устанавливают одно определенное положение точки  $M$  на поверхности. Если зафиксирована только величина  $v$ , то при изменении  $u$  точка  $M$  описывает на поверхности некоторую кривую, которую называют координатной линией. Различным значениям  $v$  соответствуют различные координатные линии, которые все вместе составляют координатное семейство линий  $v = const$ . Аналогично определяется координатное семейство линий  $u = const$ . Оба семейства линий составляют координатную сеть. Если координатная сеть задана, то произвольная точка поверхности, определяемая двумя значениями параметров  $u = u_0$  и  $v = v_0$ , может быть найдена как точка пересечения координатных линий  $u = u_0$  и  $v = v_0$ , лежащих на поверхности. Таким образом, при помощи некоторого геометрического построения на поверхности, без обращения пространству прямоугольных декартовых координат  $x, y, z$  может быть задано положение любой точки в пространстве. Ввиду этого, параметры  $u, v$  называются также внутренними или криволинейными координатами точек поверхности.

Помимо задания параметрическими уравнениями вида (1.27), поверхность может быть задана одним неявным уравнением:

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1.28)$$

В этом случае поверхность представляется множеством точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1.28).

Если параметрические уравнения поверхности (1.27) заданы, то исключение параметров  $u, v$  из этих уравнений приводит к одному соотношению между переменными  $x, y, z$ , которое можно и представить уравнением (1.28).

2. *Дифференциальная геометрия кривых.* При изучении плоских и пространственных кривых в дифференциальной геометрии широко используются понятия касательной и нормали.

Касательной к кривой линии называют прямую, представляющую собой предельное положение секущей. Пусть  $M$  – точка кривой  $l$  (рис. 1.1). На кривой  $l$  выбирается вторая точка  $M'$  и проводится прямая  $MM'$ . Точка  $M'$  устремляется к точке  $M$  по кривой  $l$ . Если при неограниченном приближении точки  $M'$  к  $M$  прямая  $MM'$  стремится к определенной предельной секущей  $t$ , то прямая  $t$  называется касательной (рис. 1.1). Не всякая непрерывная кривая имеет в своих точках касательные. В особых точках кривой касательная может быть не определена или кривая может иметь две разные касательные.

Нормалью к кривой в данной ее точке  $M$  называется прямая  $n$ , проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной в этой же точке кривой (рис. 1.1). Нормаль перпендикулярна касательной плоскости  $\gamma$ , в которой лежит касательная  $t$ .

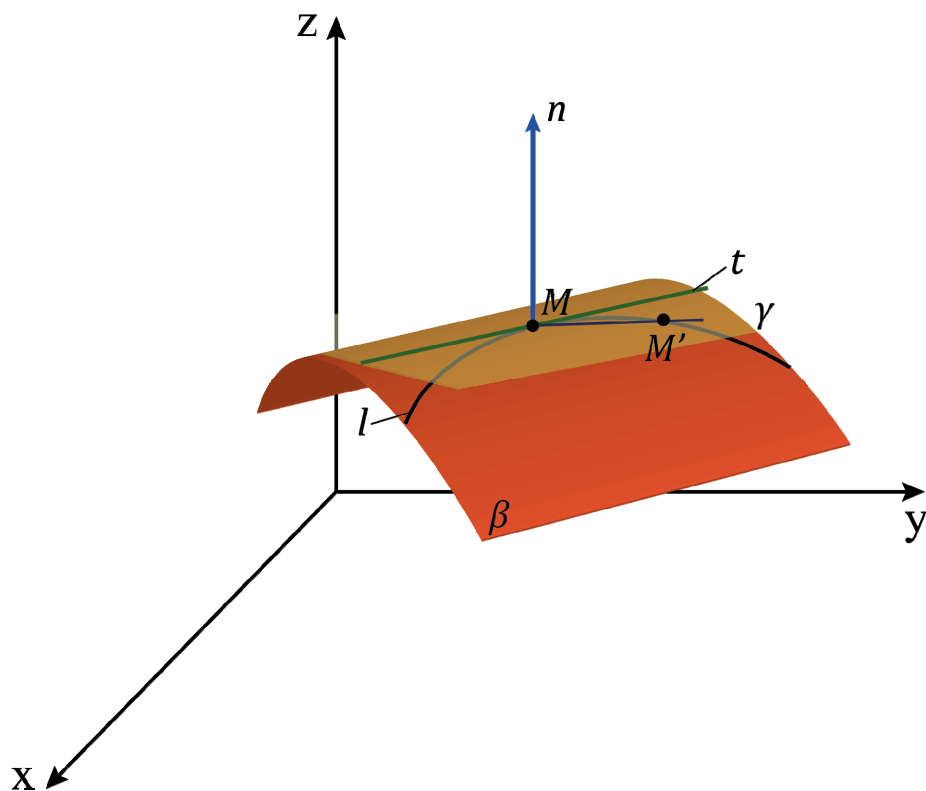


Рис. 1.1. – Касательная  $t$  и нормаль  $n$  к кривой  $l$ , которая лежит на некоторой поверхности  $\beta$

Дифференциальная геометрия дает общие способы для нахождения касательной и нормали. Касательная к кривой определяется, исходя из способа представления кривой:

а) если кривая определена уравнением  $y = f(x)$ , то уравнение касательной к ней в точке  $M$  с координатами  $(x_1, y_1)$  имеет вид:

$$y - y_1 = y'(x_1) \cdot (x - x_1); \quad (1.29)$$

б) если кривая задана уравнением  $F(x, y) = 0$ , то уравнение касательной к ней в точке  $M(x_1, y_1)$  имеет вид:

$$y - y_1 = F'(x_1, y_1) \cdot (x - x_1), \quad (1.30)$$

где  $F'(x_1, y_1)$  – производная неявной функции  $F(x, y) = 0$ , в которой переменные  $x$  и  $y$  имеют значения  $x_1$  и  $y_1$ , представляющие собой координаты точки касания;

в) если плоская кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(\tau), y = \psi(\tau), \quad (1.31)$$

то касательная к этой кривой в точке, соответствующей значению параметра  $\tau = \tau_1$ , определяется уравнением:

$$\frac{x - x_1}{x'_\tau(\tau_1)} = \frac{y - y_1}{y'_\tau(\tau_1)}. \quad (1.32)$$

Координаты  $x_1$  и  $y_1$  находятся из (1.31), при значении  $\tau = \tau_1$ ;

г) если пространственная кривая задается в параметрическом виде

$$x = \varphi(\tau), y = \psi(\tau), z = \chi(\tau), \quad (1.33)$$

то касательная к этой кривой в точке при  $\tau = \tau_1$  определяется уравнением:

$$\frac{x - x_1}{x'_\tau(\tau_1)} = \frac{y - y_1}{y'_\tau(\tau_1)} = \frac{z - z_1}{z'_\tau(\tau_1)}, \quad (1.34)$$

где координаты  $x_1, y_1, z_1$  определены согласно (1.33) при  $\tau = \tau_1$ .

Иногда данные уравнения удобно записать в виде:

$$\frac{x - x_1}{dx} = \frac{y - y_1}{dy} = \frac{z - z_1}{dz}. \quad (1.35)$$

Уравнения (1.35) получают из (1.34) путем умножения всех знаменателей на дифференциал  $d\tau$ .

Если через  $\alpha, \beta, \gamma$  обозначить углы, составленные касательной с осями координат, то направляющие косинусы  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x'_\tau}{\pm \sqrt{x'^2_\tau + y'^2_\tau + z'^2_\tau}}; & \cos \beta &= \frac{y'_\tau}{\pm \sqrt{x'^2_\tau + y'^2_\tau + z'^2_\tau}}; \\ \cos \gamma &= \frac{z'_\tau}{\pm \sqrt{x'^2_\tau + y'^2_\tau + z'^2_\tau}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Выбор определенного знака перед радикалом соответствует выбору определенного направления касательной.

Аналогичным образом определяется и нормаль к кривой:

а) если кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , то нормаль к ней в точке  $M(x_1, y_1)$  определяется уравнением:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1); \quad (1.37)$$

б) если кривая задана уравнением  $F(x, y) = 0$ , то уравнение нормали в точке  $M(x_1, y_1)$  определяется уравнением:

$$F'_x(x_1, y_1) \cdot (x - x_1) + F'_y(x_1, y_1) \cdot (y - y_1) = 0; \quad (1.38)$$

в) если кривая задана параметрическими уравнениями (1.31), то нормаль к ней в точке  $M$  при  $\tau = \tau_1$  характеризуется уравнением:

$$(x - x_1) \cdot \varphi'(\tau_1) + (y - y_1) \cdot \psi'(\tau_1) = 0. \quad (1.39)$$

г) если пространственная кривая задана уравнениями (1.33), то все нормали к этой кривой лежат в нормальной плоскости:

$$(x - x_1) \cdot \varphi'(\tau_1) + (y - y_1) \cdot \psi'(\tau_1) + (z - z_1) \cdot \chi'(\tau_1) = 0. \quad (1.40)$$

Пространственная кривая имеет в каждой своей точке бесчисленное множество нормалей, лежащих в нормальной плоскости.

*3. Дифференциальная геометрия поверхностей.* Данный раздел геометрии позволяет определять свойства поверхности по известным ее дифференциальным свойствам в каждой точке. Ограничимся рассмотрением отдельных положений дифференциальной геометрии в этой области, имея в виду, что существует достаточно обширная литература по этому вопросу.

Проведем на поверхности через принадлежащую ей точку  $M$  всевозможные кривые, и к ним в этой точке построим касательные прямые (они называются касательными к поверхности). В этом случае окажется, что все эти касательные лежат в одной плоскости, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке  $M$ , а перпендикуляр к касательной плоскости, восстановленный к ней в точке касания  $M$ , называется нормалью к поверхности.

Касательная и нормаль к поверхности определяется исходя из способа представления этой поверхности:

а) если поверхность задана явным уравнением  $z = f(x, y)$ , а точка касания  $M$  имеет координаты  $(x_0, y_0, z_0)$ , то уравнение касательной плоскости записывается в виде:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \quad (1.41)$$

а нормаль к поверхности в точке  $M$  определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (1.42)$$

Символы  $z'_x(x_0, y_0)$  и  $z'_y(x_0, y_0)$  означают, что производные функции  $z = f(x, y)$  вычислены при значениях  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ;

б) если поверхность определена неявным уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , а

точка касания имеет координаты  $(x_0, y_0, z_0)$ , то касательная плоскость определяется уравнением

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

а нормаль к поверхности в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$  представляется уравнением:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (1.43)$$

Символы  $F'_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F'_y(x_0, y_0, z_0)$  и  $F'_z(x_0, y_0, z_0)$  означают частные производные функции  $F(x, y, z)$ , вычисленные для значений  $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ ;

в) если поверхность задана в параметрической форме вида (1.27), то уравнение касательной обычно представляют в виде определителя следующей формы:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0, \quad (1.44)$$

а направляющие косинусы нормали к поверхности будут равны:

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, & \cos \mu &= \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Исходя из этого, уравнение для касательной представляется в виде:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \quad (1.46)$$

4. *Длина кривой.* Любая кривая  $l$  на плоскости и в пространстве может быть определена заданием переменного радиуса вектора произвольной точки  $M$  на этой кривой. Предположим, что задан скалярный параметр, который определяет положение переменной точки  $M$  и представляет собой длину дуги  $s$  кривой  $l$  при движении точки  $M$  от точки  $A$  к точке  $B$ . В этом случае производная  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  дает единичный

вектор касательной  $\vec{t}$ , направление которого совпадает с направлением увеличения параметра  $s$  вдоль кривой.

Обычно считают (рис. 1.2), что точка  $A$  отвечает значению параметра  $s = s_a$ , а точка  $B$  – значению  $s = s_b$ , и называют  $A$  начальной, а  $B$  – конечной точкой кривой. Расположим точки  $M$  кривой  $l$  по возрастанию параметра  $s$ , т.е. из двух отличных от  $A$  и  $B$  точек будем считать следующей ту точку, которая отвечает большему значению



параметра. Таким образом, определяется положительное и отрицательное направление на кривой.

Часто представляется удобным взять в качестве начальной точки  $A$  для отсчета дуг не один из концов дуги, а какую-либо внутреннюю точку кривой. В этом случае дуги, откладываемые от нее в направлении возрастания параметра  $s$ , считают положительными, а в противоположном – отрицательными и, соответственно этому, длину дуги в первом случае снабжают знаком плюс, а во втором случае – знаком минус. Обычно направление на кривой определяет положительное направление на касательной, при этом считают положительным то направление касательной, которое идет в сторону возрастания длины дуг.

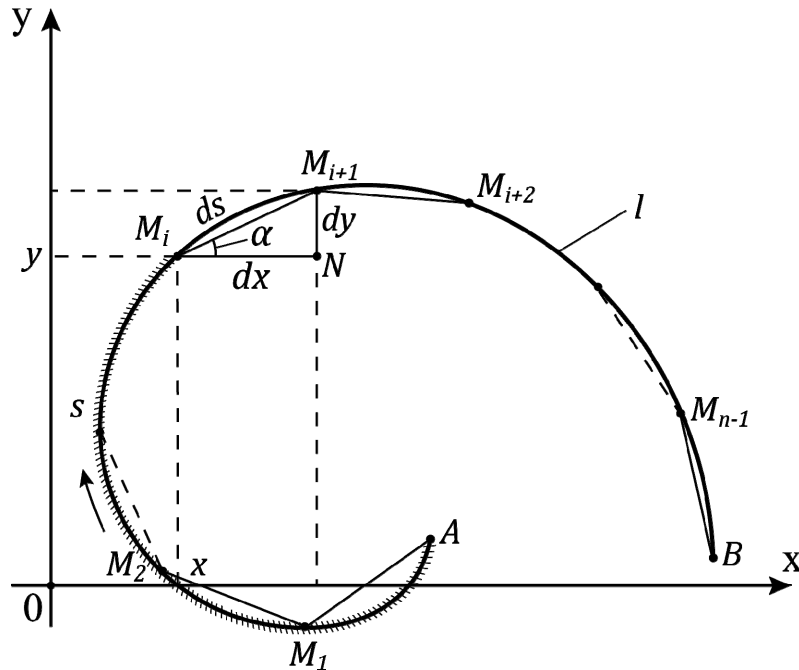


Рис. 1.2. – Представление спрямляемой кривой  $AB$  ломаной линией

Обозначим через  $\alpha$ , представленный на рис. 1.2 угол, который определяет выбранное положительное направление касательной с положительным направлением оси  $x$ , в результате получим:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}. \quad (1.47)$$

Будем исходить из параметрического представления кривой  $AB$  и положительного направления на ней, которое определяется возрастанием параметра  $s$ . Возьмем на кривой ряд точек

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_i, M_{i+1}, \dots, M_n = B,$$

так, чтобы они шли в указанном направлении, отвечая возрастающим значениям параметра  $\tau$ :

$$s_a < s_1 < s_2 < \dots < s_i < s_{i+1} < \dots < s_b.$$

Соединяя эти точки последовательно прямолинейными отрезками, получим ломаную линию, вписанную в кривую  $AB$ . Длиной кривой  $AB$  называется точная верхняя граница  $S$  для множества периметров  $p$

всевозможных ломаных линий, вписанных в кривую  $AB$ :

$$S = \sup \{p\}.$$

Если число  $S$  конечно, то кривая называется спрямляемой кривой. Из этого определения следует, что периметр любой вписанной в кривую  $AB$  ломаной линии не превосходит длины  $S$  данной кривой.

В дифференциальной геометрии допускается, что введенное выше понятие длины дуги кривой обладает свойствами аддитивности.

Предположим, что точка  $M$  перемещается по кривой  $l$  с течением времени  $\tau$ , причем  $x = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$ . В случае, если существуют непрерывные производные  $\varphi'(\tau)$ ,  $\psi'(\tau)$ , то кривая описывается уравнением  $x = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$ ; ( $\tau_0 \leq \tau \leq T$ ), при этом длина переменной дуги  $s = s(\tau)$  оказывается дифференцируемой функцией от времени  $\tau$ , а ее производная по времени выражается формулой:

$$s'(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2} \quad \text{или} \quad s'_\tau = \sqrt{x'_\tau{}^2 + y'_\tau{}^2}. \quad (1.48)$$

Если возвести это равенство в квадрат и умножить почленно на  $d\tau^2$ , то получим известную по своей простоте формулу:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (1.49)$$

В свою очередь, если кривая задана явным уравнением в декартовых координатах  $y = f(x)$ , то в роли параметра оказывается координата  $x$  ( $s = s(x)$ ), и формула принимает вид:

$$s'_x = \sqrt{1 + y'_x{}^2}. \quad (1.50)$$

Так как переменная дуга является непрерывной монотонной возрастающей функцией от времени  $\tau$ , то и время, в свою очередь, можно рассматривать как однозначную и непрерывную функцию от  $s$ : то есть  $\tau = \omega(s)$ , где для кривой длина  $s$  изменяется от нуля до общей длины  $S$ . Подставляя это выражение для  $\tau$  в параметрические уравнения кривой, получим текущие координаты  $x$  и  $y$  в виде функций от величины  $s$ :

$$x = \varphi(\omega(s)) = \Phi(s), \quad y = \psi(\omega(s)) = \Psi(s).$$

Дуга  $s$ , играющая роль криволинейной координаты точки  $M$ , является самым естественным параметром для определения ее положения. Отсюда получаем, что

$$\tau'_s = \omega'(s) = \frac{1}{\sqrt{(x'_\tau)^2 + (y'_\tau)^2}}. \quad (1.51)$$

Если кривая не имеет особых точек, то из (1.49), считая, что все дифференциалы взяты, например, по переменной  $s$ , получим:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \quad (1.52)$$

Все сказанное выше по поводу плоских кривых переносится без существенных изменений на случай пространственной кривой:

$x = \varphi(\tau), y = \psi(\tau), z = \chi(\tau); (\tau_0 \leq \tau \leq T)$ . В этом случае, понятие длины кривой устанавливается в тех же терминах, что и выше. При наличии у функций  $\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)$  непрерывных производных – длина кривой  $s = s(\tau)$  конечна, и кривая спрямляема. Длина переменной дуги (от начальной точки кривой до переменной точки, отвечающей параметру  $\tau$ ) дифференцируема по  $\tau$ , причем ее производная по  $\tau$  выражается формулой:

$$s'_\tau = \sqrt{x'_\tau{}^2 + y'_\tau{}^2 + z'_\tau{}^2}. \quad (1.53)$$

Отсюда получается формула для дифференцирования дуги:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.54)$$

В случае отсутствия особых точек, можно перейти к такому параметрическому представлению кривой, в котором роль параметра играет сама дуга  $s$ . Понятие положительного направления касательной устанавливается, исходя из задания направляющих косинусов, которые определяются формулами:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}. \quad (1.55)$$

5. *Семейства кривых и поверхностей.* В дифференциальной геометрии часто приходится иметь дело не с отдельной кривой или поверхностью, а с бесконечным семейством кривых или поверхностей.

Пусть даны уравнения, которые содержат текущие координаты  $x, y, z$  и произвольные постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Примем условие, что когда эти постоянные получают какие-нибудь численные значения, данные уравнения определяют некоторую кривую или поверхность. Множество всех кривых (или поверхностей), которые определяются данными уравнениями при всех возможных численных значениях постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  называется  $n$ -ным параметрическим семейством кривых (или поверхностей).

При изучении однопараметрических семейств кривых, а также одно- и двухпараметрических семейств поверхностей особую роль играет понятие огибающей.

Огибающей однопараметрического семейства кривых называется кривая (не входящая в состав семейства), которая в каждой своей точке касается какой-нибудь кривой семейства. Огибающей одно- или двухпараметрического семейства поверхностей называется поверхность (не входящая в состав семейства), которая в каждой своей точке касается какой-нибудь поверхности семейства.

Понятие огибающей широко используется в теории дифференциальных уравнений. Так, огибающая семейства интегральных кривых обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка геометрически изображает его особое решение. Построение огибающих одно- и двухпараметрических семейств поверхностей лежит в основе геометрического дифференцирования.

# Глава вторая

## ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

### 2.1 Некоторые сведения из векторной алгебры

В дальнейшем нам придется обращаться к элементам векторного анализа и теории поля, поэтому приведем некоторые основные понятия. Предполагается, что читатель знаком с основами векторной алгебры, в связи с чем ограничимся кратким изложением основных результатов, которые будут использоваться при изложении материала данной книги.

В природе мы часто встречаемся с векторами, т.е. с величинами, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Примерами таких величин могут служить отрезок, соединяющий начало координат с данной точкой (радиус-вектор); скорость движения материальной точки; сила, действующая на тело; вектор потока тепла и т.д. Величины, определяемые числовым значением и направлением, называются векторами. В отличие от векторов, величины, не имеющие направления и полностью определяемые своим числовым значением в выбранной системе единиц, называют скалярами. Примером скаляров служат: масса, энергия, температура тела и т.д.

Векторы можно рассматривать на плоскости, в трехмерном пространстве, а также в многомерном пространстве.

Ниже для справки помещены основные понятия и формулы векторной алгебры, некоторые из которых используются в дальнейшем.

1. *Вектор и его координаты.* В прямоугольной системе координат каждому вектору  $\vec{a}$  ставятся в соответствие три числа – его проекции  $a_x, a_y, a_z$  на координатные оси  $Ox, Oy, Oz$ . Эти числа называются координатами вектора, а вектор записывается в виде  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$ . Если точка  $A(x_1, y_1, z_1)$  – начало вектора, а точка  $B(x_2, y_2, z_2)$  – его конец, то проекции вектора на оси прямоугольной системы координат равны разностям между значениями координат его конца и начала:

$$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1; a_z = z_2 - z_1. \quad (2.1)$$

Учитывая эти формулы, вектор  $\vec{a}$  можно записать в таком виде:

$$\vec{a} \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

2. *Длина вектора.* Длина вектора  $\vec{a}$ , или что то же самое, его модуль, обозначается одним из символов  $|\vec{a}|$  или  $a$  и определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.2)$$

3. *Равенство векторов.* Два вектора одинаковой длины, лежащие на параллельных прямых и одинаково направленные, называются равными векторами.

4. *Произведение вектора на скаляр.* Произведением вектора  $\vec{a}$  на скаляр  $\lambda$  называется вектор  $\vec{b}$ , модуль которого равен произведению числа  $\lambda$  на модуль вектора  $\vec{a}$ , т.е.  $b = \lambda \cdot a$ . Вектор  $\vec{b}$  направлен так же, как и вектор  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и противоположно ему, если  $\lambda < 0$ . Вектор  $-\vec{a}$  называется противоположным вектору  $\vec{a}$ .

5. *Единичный вектор. Орт.* Вектор, по направлению совпадающий с заданным вектором и по модулю равный единице, называется *единичным вектором* данного вектора, или *ортом*. Единичный вектор обозначается той же буквой, что и исходный вектор в виде:  $\vec{a}^0$ . Таким образом, единичный вектор вектора  $\vec{a}$  обозначается  $\vec{a}^0$ , при этом выполняется равенство:  $\vec{a} = a \cdot \vec{a}^0$

6. *Направляющие косинусы вектора.* Косинусы углов, которые вектор составляет с положительными направлениями координатных осей, называются направляющими косинусами вектора. Углы между вектором и координатными осями  $Ox, Oy, Oz$  обозначаются в дальнейшем соответственно через  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Между направляющими косинусами вектора существует соотношение:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.3)$$

7. *Проекция вектора на ось.* Проекция вектора  $\vec{a}$  на некоторую ось есть *скалярная величина*, равная произведению модуля вектора на косинус угла между направлением оси и направлением вектора, например:

$$a_x = n p_x \vec{a} = a \cdot \cos(\vec{i}, \vec{a}).$$

Проекции вектора  $\vec{a}$  на оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  прямоугольной системы координат обозначаются соответственно  $a_x, a_y$  и  $a_z$  и определяются по формулам:

$$a_x = a \cdot \cos \alpha; a_y = a \cdot \cos \beta; a_z = a \cdot \cos \gamma;$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}; \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Если  $\vec{a}^0$  – единичный вектор, то на основании приведенных формул, т.к.  $|\vec{a}^0| = 1$ , его проекции на оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  равны его направляющим косинусам:

$$(\vec{a}^0)_x = \cos \alpha; (\vec{a}^0)_y = \cos \beta; (\vec{a}^0)_z = \cos \gamma.$$

8. *Разложение векторов.* Разложение вектора по трем координатным осям прямоугольной системы координат представляется в виде:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \quad (2.4)$$

где  $a_x, a_y, a_z$  – проекции вектора  $\vec{a}$  на оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  прямоугольной системы координат;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы координатных осей.

9. *Радиус-вектор точки.* Радиусом-вектором точки  $M(x, y, z)$  называется вектор, обозначаемый обыкновенно через  $\vec{r}$  и имеющий начало в начале координат, а конец – в точке  $M$ . Проекции радиуса-вектора на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  равны соответственным координатам его конца:

$$\begin{aligned} r_x = x; r_y = y; r_z = z, \text{ откуда} \\ \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

10. *Скалярное произведение двух векторов.* Скалярным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , которое обозначается символом  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними. Если угол между векторами обозначить буквой  $\varphi$ , то согласно этому определению скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  находят по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b \cdot np_b \vec{a} = a \cdot np_a \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi. \quad (2.6)$$

Скалярное произведение двух векторов является числом и обладает следующими свойствами:

- если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ), то их скалярное произведение равно нулю ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ );

- скалярное произведение двух равных векторов  $\vec{a} = \vec{b}$  равно квадрату модуля ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2$ );

- скалярное произведение векторов обладает коммутативным свойством ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ), дистрибутивным свойством  $[(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}]$ , а также свойством ассоциативности  $[(n \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = n \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})]$ ;

- выражение скалярного произведения  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  через проекции векторов  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$  на оси прямоугольной системы координат имеет вид:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z; \quad (2.7)$$

- если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны, то

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0; \quad (2.8)$$

- косинус угла между двумя векторами  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$  можно определить по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{a \cdot b} \quad \text{или} \\ \cos \varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следствием свойств скалярного произведения является следующее соотношение: если вектор  $\vec{a}$  составляет с координатными осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  углы, соответственно равные  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , а вектор  $\vec{b}$  с этими же осями составляет углы  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\gamma_1$ , то косинус угла  $\varphi$  между этими векторами определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_1 + \cos \beta \cdot \cos \beta_1 + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_1.$$

11. *Векторное произведение двух векторов.* Векторным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , которое обозначается символом  $\vec{a} \times \vec{b}$ , называется вектор, модуль которого равен произведению модулей данных векторов на синус угла между ними. Вектор  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Направление вектора  $\vec{c}$  выбирается таким образом, чтобы наблюдатель, который смотрит с конца вектора  $\vec{c}$  на векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , мог бы по кратчайшему пути совместить первый вектор  $\vec{a}$  со вторым вектором  $\vec{b}$  вращением против движения часовой стрелки.

Векторное произведение двух векторов обладает следующими свойствами:

- модуль векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \varphi; \quad (2.10)$$

- изменение порядка сомножителей в векторном произведении влечет за собой изменение его знака, т.е. векторное произведение не обладает коммутативным свойством:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ;

- векторное произведение обладает дистрибутивным свойством:  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ ;

- векторное произведение обладает свойством ассоциативности:  $(\vec{n} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{n} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ ;

- выражение векторного произведения  $\vec{a} \times \vec{b}$  через проекции векторов  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$  на оси прямоугольной системы координат имеет вид:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}; \quad (2.11)$$

- проекции векторного произведения на координатные оси равны:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_x &= a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y; \\ (\vec{a} \times \vec{b})_y &= a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z; \\ (\vec{a} \times \vec{b})_z &= a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x, \end{aligned} \quad (2.12)$$

поэтому векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b}$  двух векторов  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$  может быть записано в виде определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}; \quad (2.13)$$

• необходимым и достаточным условием параллельности двух векторов  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$  является равенство нулю их векторного произведения  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ , что равносильно выполнению условия пропорциональности их одноименных проекций:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.14)$$

Приведенные уравнения широко используются в векторной алгебре. Сегодня векторная алгебра представляет собой мощный инструмент анализа как в математике, так и в физике, так как на языке векторов формулируются основные законы механики, гидродинамики, электродинамики, оптики и т.д.

## 2.2 Скалярное и векторное поле

Говорят, что в пространстве задано поле некоторой величины, если в каждой точке пространства (или некоторой его области) определено значение этой величины.

Физическим полем называется часть пространства или все пространство, в котором происходит физическое явление. Многомерным полем называется область многомерного пространства аргументов (или все пространство), если в каждой точке этого пространства определено значение некоторой величины. Аргументы поля обычно называют обобщенными координатами.

Приведем основные понятия и формулы теории поля.

### *Скалярное поле*

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, которое формирует это поле, характеризуется функцией  $f = f(x, y, z)$ , зависящей только от координат точек пространства. Скалярное поле полностью определено заданием функции  $f(x, y, z)$  трех независимых переменных. Эта функция, независимо от ее физического смысла, называется потенциалом поля.

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке  $M(x_1, y_1, z_1)$  пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее данное явление в точке  $M$ . Данное число представляет собой частное значение функции  $f(x, y, z)$ , вычисленное в точке  $M$  (примерами скалярного поля являются: поле электростатического потенциала, давление воздуха в атмосфере, температура некоторого тела и т.д.).



1. *Поверхность уровня.* Если однозначная функция  $f(x, y, z)$  соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то поверхностью уровня (или эквипотенциальной поверхностью) этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция  $f(x, y, z)$  сохраняет одно и то же значение. Поверхности уровня определяются уравнением:

$$f(x, y, z) = C, \quad (2.15)$$

где  $C$  – постоянная величина.

Представляя постоянную величину  $C$  различными числовыми значениями, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит только одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку  $M(x_1, y_1, z_1)$ , имеет вид:

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1). \quad (2.16)$$

2. *Производная по направлению.* Производная от функции  $f(x, y, z)$  по направлению  $\vec{l}$  характеризует скорость изменения функции  $f(x, y, z)$  по этому направлению, вычисленную в произвольной точке  $M$  с координатами  $x, y, z$ . Эта производная вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\vec{l}, z). \quad (2.17)$$

Величина производной по направлению зависит от выбора точки  $M$ , в которой она вычисляется, и от выбора направления  $\vec{l}$ , по которому она вычисляется. Направляющие косинусы направления  $\vec{l}$  входят множителями в данную формулу, а координаты точки  $M$  являются аргументами частных производных, входящих в эту формулу.

3. *Градиент функции.* Градиентом скалярной функции  $f(x, y, z)$  называется вектор, проекции которого на координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$

соответственно равны  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  и  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , т. е.:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (2.18)$$

На основании этого определения проекции вектора  $\text{grad } f$  на координатные оси можно представить в виде:

$$(\text{grad } f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}; (\text{grad } f)_y = \frac{\partial f}{\partial y}; (\text{grad } f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.19)$$

При этом предполагается, что  $f(x, y, z)$  – однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные.

Модуль вектора  $\text{grad } f$  вычисляется по формуле:

$$|\mathit{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (2.20)$$

Если  $\vec{l}^0$  – единичный вектор направления  $\vec{l}$ ,

$$\vec{l}^0 = \cos(\vec{l}, x) \cdot \vec{i} + \cos(\vec{l}, y) \cdot \vec{j} + \cos(\vec{l}, z) \cdot \vec{k}, \quad (2.21)$$

то правая часть формулы (2.17) есть скалярное произведение вектора  $\mathit{grad} f$  на единичный вектор  $\vec{l}^0$ , т.е.  $\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l}^0 \cdot \mathit{grad} f$ .

Так как  $|\vec{l}^0| = 1$ , то скалярное произведение

$$\vec{l}^0 \cdot \mathit{grad} f = |\mathit{grad} f| \cdot \cos(\mathit{grad} f, \vec{l}^0), \quad (2.22)$$

поэтому наибольшее значение скалярного произведения  $\vec{l}^0 \cdot \mathit{grad} f$  равно модулю  $\mathit{grad} f$ , т.е.  $|\mathit{grad} f|$ . Это возможно, когда направление  $\vec{l}$  совпадет с вектором  $\mathit{grad} f$ , так как в этом случае  $\cos(\mathit{grad} f, \vec{l}^0) = 1$ .

Поскольку производная функции  $f$  по некоторому направлению  $\vec{l}$  характеризует скорость изменения функции  $f$  по этому направлению, то можно сказать, что величина  $\mathit{grad} f$  есть вектор, в направлении которого скорость изменения функции  $f$  является наибольшей и эта наибольшая скорость  $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max}$  по модулю равна  $|\mathit{grad} f|$ , т. е.:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max} = |\mathit{grad} f| \quad \text{или} \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (2.24)$$

Вектор  $\mathit{grad} f$  в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции. Модуль этого вектора равен скорости изменения функции  $f(x, y, z)$  по этому направлению нормали. Скорость изменения функции  $f(x, y, z)$  по некоторому направлению  $\vec{l}$  равна проекции вектора  $\mathit{grad} f$  на это направление, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = np_{\vec{l}}(\mathit{grad} f). \quad (2.25)$$

В этом состоит основное свойство градиента функции: производная функции  $f(x, y, z)$  по направлению  $\vec{l}$  равна проекции вектора градиента  $\mathit{grad} f(x, y, z)$  на направление  $\vec{l}$ . Величина и направление градиента не зависят от выбора координатной системы.

Приведем следующие основные формулы теории градиента:

$$\mathit{grad}(f + \psi) = \mathit{grad} f + \mathit{grad} \psi;$$

$$\text{grad} (f \cdot \psi) = f \cdot \text{grad} \psi + \psi \cdot \text{grad} f; \quad (2.26)$$

$$\text{grad} F(f) = F'(f) \cdot \text{grad} f;$$

$$\text{grad} (f + C) = \text{grad} f, \text{ если } C = \text{const}.$$

В свою очередь, если  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $M(x, y, z)$ , т.е.  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ , а  $f = f(x, y, z)$  – функция трех переменных, то:

$$df = d\vec{r} \cdot \text{grad} f, \quad (2.27)$$

при этом  $d\vec{r} \cdot \text{grad} f$  представляет собой скалярное произведение векторов  $d\vec{r}$  и  $\text{grad} f$ .

### **Векторное поле**

Физическое поле называется векторным, если образующее его физическое явление в каждой точке поля характеризуется некоторым вектором (например, поле силы тяжести, поле скоростей и т.д.).

В случае векторного поля каждой точке  $M$  пространства, в котором протекает физическое явление, ставится в соответствие определенный вектор  $\vec{a}(M)$ , который является функцией координат точки, т.е.  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ .

Вектор  $\vec{a}(x, y, z)$  можно представить в виде:

$$\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + a_y(x, y, z) \cdot \vec{j} + a_z(x, y, z) \cdot \vec{k}. \quad (2.28)$$

Из этого следует, что для определения векторного поля требуются три скалярные функции трех независимых переменных  $x, y$  и  $z$ , которые являются проекциями вектора  $\vec{a}(x, y, z)$  на оси прямоугольной системы координат:

$$a_x(x, y, z); a_y(x, y, z); a_z(x, y, z). \quad (2.29)$$

Обычно предполагается, что эти функции непрерывны, однозначны и имеют непрерывные частные производные.

1. *Потенциальный вектор.* Вектор  $\vec{a}(x, y, z)$  называется потенциальным, если он является градиентом некоторой скалярной функции  $f(x, y, z)$ . Поле потенциального вектора  $\vec{a} = \text{grad} f$  называется потенциальным, а скалярная функция  $f$  является *потенциалом* этого поля. В дальнейшем предполагается, что функция  $f$  и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны.

Необходимым и достаточным условием потенциальности вектора  $\vec{a}$  является выполнение равенств:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0. \quad (2.30)$$

2. *Циркуляция вектора и линейный интеграл.* Циркуляцией  $\Gamma_L$  вектора  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  по замкнутой линии  $L$  называется интеграл вида

$$\Gamma_L = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz, \quad (2.31)$$

причем обход замкнутого контура  $L$  в правой системе координат должен происходить против движения часовой стрелки.

Если  $L$  – незамкнутая кривая, которую можно обозначить  $AB$ , то интеграл в приведенной формуле называется линейным интегралом вектора  $\vec{a}$  и представляется следующим образом:

$$u = \int_{(AB)} a_x dx + a_y dy + a_z dz \quad (2.32)$$

или в векторной форме:

$$u = \int_{(AB)} \vec{a} \cdot d\vec{r}, \quad (2.33)$$

где  $d\vec{r}$  – дифференциал радиуса-вектора точки, движущейся по кривой  $AB$ :

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}. \quad (2.34)$$

Если вектор  $\vec{a}$  – сила, то формула (2.33) определяет работу этой силы при перемещении точки по кривой  $AB$ .

3. *Векторная линия.* Векторной линией векторного поля  $\vec{a}$  называется кривая, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ . Через каждую точку  $M$  векторного поля вектора  $\vec{a}$  проходит только по одной векторной линии.

Дифференциальные уравнения векторных линий записываются следующим образом:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \quad (2.35)$$

4. *Вихрь вектора.* Вихрем вектора или ротором вектора  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ , который обозначается выражением  $rot \vec{a}$ , называется вектор, определяемый формулой

$$rot \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}. \quad (2.36)$$

Проекция этого вектора на координатные оси равны:

$$rot_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad rot_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad rot_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (2.37)$$

Модуль вектора  $rot \vec{a}$  определяется формулой:

$$|rot \vec{a}| = \sqrt{\left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)^2}. \quad (2.38)$$

Приведем формулы, используемые в теории векторного поля.

Безвихревым векторным полем называется поле, для которого в каждой точке пространства  $rot \vec{a} = 0$ . Из этого уравнения следует, что в каждой точке безвихревого поля:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0. \quad (2.39)$$

Из соотношений (2.30) следует, что выполнение данных тождеств является необходимым и достаточным условием для того, чтобы вектор  $\vec{a}$  был потенциальным.

Линейный интеграл по кривой  $AB$  от потенциального вектора  $\vec{a}$  равен разности потенциала  $f$  на концах кривой, вдоль которой ведется интегрирование.

$$u = \int_{(AB)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{(AB)} df = f(B) - f(A). \quad (2.40)$$

Следствием этого является то, что циркуляция вектора по любой замкнутой кривой  $L$  при наличии однозначного потенциала равна нулю, т.е., если  $\vec{a} = \text{grad } f$  и  $f$  – однозначная функция, то

$$\oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0. \quad (2.41)$$

Данная теория верна только тогда, когда векторное пространство односвязно.

Известно, что для потенциального вектора  $\vec{a}$  вихрь равен нулю, т.е.

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0 \quad (2.42)$$

Для потенциального векторного поля из соотношений:

$$a_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad a_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial f}{\partial z},$$

следует, что выражение  $a_x dx + a_y dy + a_z dz$  есть полный дифференциал некоторой функции. Может случиться, что это выражение не будет полным дифференциалом, однако будет допускать существование интегрирующего множителя. В этом случае будет существовать такая функция точки  $\mu(M)$ , что выражение

$$\mu \cdot (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = dU \quad (2.43)$$

будет полным дифференциалом. Такое векторное поле называют *квазипотенциальным*. Характерной особенностью такого поля является существование семейства поверхностей  $U(M) = C$ , ортогональных к векторным линиям поля, причем из (2.43) следует, что  $\mu \cdot \vec{a} = \text{grad } U$  или

$$\vec{a} = \frac{1}{\mu} \text{grad } U, \quad (2.44)$$

т.е. поле  $\vec{a}$  будет отличаться от потенциального поля множителем  $\frac{1}{\mu}$ , имеющим в различных точках пространства разные значения.

Известно, что в трехмерном пространстве необходимое и достаточное условие квазипотенциальности поля выражается формулой:

$$a_x \cdot \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + a_y \cdot \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + a_z \cdot \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.45)$$

Выражение (2.45) может быть записано в векторном виде:

$$\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{a} = 0. \quad (2.46)$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием существования семейства поверхностей, ортогональных к векторным линиям поля, является условие (2.46), определяющее перпендикулярность векторов  $\vec{a}$  и  $\text{rot } \vec{a}$ .

### 2.3 Основные формулы векторного анализа

Большое значение в теории поля имеют поверхностные интегралы, с которыми связано понятие потока векторного поля и некоторые интегральные формулы.

Пусть  $S$  – гладкая или кусочно гладкая поверхность, ограниченная определенным контуром, который будем считать краем этой поверхности. На поверхности  $S$  будем различать две стороны, понимая под этим следующее: движущаяся по поверхности точка может с одной стороны поверхности перейти на другую не иначе, как пересекая край поверхности.

Одну из этих сторон поверхности примем *внешней* (верхней), другую – *внутренней* (нижней). На нормали к поверхности  $S$  можно рассматривать два возможных направления: одно, совпадающее с положительным направлением единичного вектора  $\vec{k}$  оси  $Oz$ , другое – с отрицательным направлением вектора  $\vec{k}$ .

Внешней стороной считается та часть поверхности, нормаль к которой соответствует положительному направлению оси  $Oz$ , а внутренней стороной считается та часть поверхности, нормаль которой соответствует отрицательному направлению оси  $Oz$ .

Если на нормали выбрано положительное направление, то она называется внешней и связывается с внешней стороной поверхности. Если на нормали выбрано отрицательное направление, то нормаль называется внутренней и ее связывают с внутренней стороной поверхности  $S$ .

1. *Поверхностный интеграл первого типа (поверхностный интеграл по площади поверхности)*. Пусть в каждой точке поверхности  $S$  задана функция  $f(x, y, z)$ . Поверхность  $S$  разобьем на  $n$  площадок, площади которых обозначим через  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . На каждой площадке  $\Delta S_k$  выберем произвольную точку  $A_k(x_k, y_k, z_k)$ . Вычислим в каждой точке  $A_k$  значение заданной функции  $f(x, y, z)$  и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta S_k.$$

Известно, что если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна во всех точках поверхности  $S$ , то предел этой интегральной суммы существует при условии, что максимальный диаметр частей  $\Delta S_k$  стремится к нулю. Данный предел не зависит от способов разбиения поверхности  $S$  на части

и выбора точки  $A_k$  на каждой из площадок данной поверхности. Данный предел называется поверхностным интегралом первого типа от функции  $f(x, y, z)$  и обозначается символом  $\iint_{(S)} f(x, y, z) ds$ .

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left( \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta S_k \right) = \iint_{(S)} f(x, y, z) ds. \quad (2.47)$$

*2. Поверхностный интеграл второго типа (поверхностный интеграл по координатам).* Будем считать, как и в предыдущем случае, что  $f(x, y, z)$  – функция, заданная в каждой точке поверхности  $S$ . Поверхность  $S$  разобьем на  $n$  площадок, площади которых обозначим через  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Построим проекции всех площадок  $\Delta S_k$ , на которые разбита поверхность  $S$ , на плоскость  $xOy$  и обозначим площади этих проекций соответственно через  $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$ . Если выбрана внешняя сторона поверхности  $S$ , то эти проекции будем брать со знаком плюс. Если же выбрана нижняя сторона поверхности  $S$ , то проекции возьмем со знаком минус.

На каждой площадке  $\Delta S_k$  выберем произвольную точку  $A_k(x_k, y_k, z_k)$ . Вычислим в каждой точке  $A_k$  значение заданной функции  $f(x, y, z)$  и составим интегральную сумму  $\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta \sigma_k$ .

Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в каждой точке поверхности  $S$ , то ее предел при условии, что  $\max \Delta S_k \rightarrow 0$ , существует и называется поверхностным интегралом второго типа от функции. Данный интеграл от функции  $f(x, y, z)$  обозначается символом  $\iint_{(S)} f(x, y, z) d\sigma$  или

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\max \Delta S_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left( \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta \sigma_k \right) = \iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy. \quad (2.48)$$

При замене внешней стороны поверхности  $S$  на внутреннюю сторону знак интеграла меняется на противоположный знак, а его абсолютная величина сохраняется прежней.

Если элементы площадок, на которые разбита поверхность  $S$ , спроецировать на плоскости  $xOz$  и  $yOz$ , то получают соответственно два интеграла:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dz \quad \text{и} \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz.$$

Пусть  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$  – некоторые функции, определенные во всех точках поверхности  $S$ , тогда под составным поверхностным интегралом второго типа понимается интеграл вида:

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dx dz . \quad (2.49)$$

Отметим, что поверхность  $S$  является двусторонней, а интеграл (2.49) распространяется как на внешнюю, так и на внутреннюю стороны, причем вид выбранной стороны всякий раз оговаривается.

Поверхностный интеграл второго типа вычисляется по формуле:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)] dx dy \quad (2.50)$$

где  $z = \varphi(x, y)$  – уравнение поверхности  $S$ , а  $\sigma$  – проекция поверхности  $S$  на плоскость  $xOy$ .

Общая формула, по которой поверхностный интеграл второго типа преобразуется к поверхностному интегралу первого типа записывается в виде:

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{(S)} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] ds . \quad (2.51)$$

Здесь  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$  – ограниченные функции, определенные во всех точках поверхности  $S$ , а  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  – направляющие косинусы нормали, направление которой соответствует выбранной стороне поверхности.

3. *Поток вектора.* Поток вектора  $\vec{a}$  через поверхность  $S$  называется скаляр, определяемый формулой:

$$\Pi = \iint_{(S)} a_n ds , \quad (2.52)$$

где  $a_n$  – проекция вектора  $\vec{a}$  на нормаль к поверхности  $S$ , причем нормаль берется или к внешней или к внутренней поверхности.

Проекцию вектора  $\vec{a}$  на нормаль к поверхности находят по формуле:

$$a_n = a_x \cos(\vec{n}, x) + a_y \cos(\vec{n}, y) + a_z \cos(\vec{n}, z), \quad (2.53)$$

где  $\cos(\vec{n}, x)$ ,  $\cos(\vec{n}, y)$ ,  $\cos(\vec{n}, z)$  – направляющие косинусы нормали к поверхности  $S$ , поэтому (2.52) можно записать в виде:

$$\Pi = \iint_{(S)} [a_x \cos(\vec{n}, x) + a_y \cos(\vec{n}, y) + a_z \cos(\vec{n}, z)] ds . \quad (2.54)$$

Учитывая, что  $\cos(\vec{n}, x) ds = dy dz$ ,  $\cos(\vec{n}, y) ds = dz dx$ ,  $\cos(\vec{n}, z) ds = dx dy$ , формулу (2.54) запишем в виде:

$$\Pi = \iint_{(S)} a_x dy dz + a_y dz dx + a_z dx dy \quad (2.55)$$

или в векторной форме:

$$\Pi = \iint_{(S)} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds , \quad (2.56)$$



где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали, направленный от внутренней стороны поверхности к внешней. В случае замкнутой поверхности вектор  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали.

Определение «поток вектора» имеет физический смысл. Можно привести несколько примеров физических величин, которые вычисляются при помощи формулы (2.55):

- если векторное поле рассматривать как поле скоростей движущейся жидкости, то поток жидкости  $\Pi$  через поверхность  $S$  равен количеству жидкости, протекающей через эту поверхность в единицу времени в направлении нормали  $\vec{n}$  к поверхности. В случае, если поток через замкнутую поверхность  $S$  положителен, то это значит, что из части пространства, ограниченной поверхностью  $S$ , вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. Это объясняется наличием в замкнутой поверхности  $S$  источников, выделяющих жидкость. Если поток отрицателен, то во внутрь поверхности  $S$  втекает больше жидкости, чем вытекает из нее. Это означает, что внутри замкнутой поверхности имеются стоки, поглощающие жидкость;

- поток тепла имеет заданное направление и является векторной величиной. Если обозначить вектор потока тепла через  $\vec{q}$ , то его модуль будет равен количеству тепла, которое протекает через единицу площади в единицу времени. Полный тепловой поток через поверхность  $S$  определяется также согласно формуле (2.55).

4. *Дивергенция поля.* Дивергенцией (расхождением) поля вектора  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  называется величина, которая определяется формулой:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (2.57)$$

Из уравнения (2.57) видно, что дивергенция вектора  $\vec{a}$  является скалярной величиной и ее определение связано с выбором координатной системы.

Приведем основные свойства дивергенции поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (n \cdot \vec{a}) &= n \cdot \operatorname{div} \vec{a}; \\ \operatorname{div} (\vec{a} + \vec{b}) &= \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}; \\ \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) &= \nabla^2 u, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где  $\vec{a}$  является векторной функцией  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ ,  $u$  – скалярной функцией  $u = u(x, y, z)$ , а  $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$  – называется оператором Лапласа.

4. *Формула Остроградского.* Большое значение в теории поля имеет формула Остроградского, которая представляется в виде:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_{(S)} P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (2.59)$$

Здесь  $V$  – некоторый объем, ограниченный поверхностью  $S$ ;  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – некоторые функции, которые заданы в объеме  $V$  и являются непрерывными вместе с их частными производными первого порядка.

Формула (2.59) позволяет преобразовать интеграл, распространенный на некоторый объем  $V$ , в интеграл по поверхности  $S$ , которая ограничивает этот объем.

Если  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  – вектор, проекции которого на координатные оси равны  $a_x = P(x, y, z)$ ,  $a_y = Q(x, y, z)$  и  $a_z = R(x, y, z)$ , то формула (2.59) запишется следующим образом:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_{(S)} [a_x \cos(\vec{n}, x) + a_y \cos(\vec{n}, y) + a_z \cos(\vec{n}, z)] ds, \quad (2.60)$$

где  $\cos(\vec{n}, x)$ ,  $\cos(\vec{n}, y)$ ,  $\cos(\vec{n}, z)$  – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ .

Формула Остроградского (2.60) может быть представлена в векторной форме:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iint_{(S)} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds. \quad (2.61)$$

Согласно (2.61) поток вектора  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью. Формула (2.61) выражает поток вектора  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность с учетом значения дивергенции этого вектора в точках, лежащих внутри поверхности.

В теории векторного поля формулы (2.60) и (2.61) имеют исключительно важное значение. Кроме этих формул можно дать определение дивергенции вектора в точке  $M$  объема  $V$ , которое не зависит от выбора координатной системы.

Поток векторного поля через замкнутую поверхность  $S$  называют также производительностью той части пространства  $V$ , которая ограничена поверхностью. Если найти отношение потока  $\Pi$  через поверхность  $S$  к величине объема  $V$ , ограниченного этой поверхностью, то получим среднюю производительность во всей области  $V$ . Чтобы оценить производительность в точке  $M$  объема  $V$ , необходимо вычислить среднюю производительность в окрестности точки  $M$ . Переходя к пределу, получим число, характеризующее производительность векторного поля в окрестности точки  $M$ . Это число и называется дивергенцией векторного поля в точке  $M$ .

Таким образом, дивергенцией векторного поля вектора  $\vec{a}$  в точке  $M$  называется предел, к которому стремится отношение потока через замкнутую поверхность, окружающую точку  $M$ , к объему области, ограниченной этой поверхностью. Этот предел вычисляется при стягивании объема  $V$  в точку  $M$ :

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\iint_{(S)} (\vec{a} \cdot \vec{n}) ds}{V} \quad (2.62)$$

В этой форме значение дивергенции не зависит от выбора координатной системы. Те точки векторного поля, в которых дивергенция положительна, называются *источниками*, а те точки, в которых она отрицательна, – *стоками*. Эти определения связаны с гидродинамическим представлением векторного поля. Если около точки, являющейся источником, описать достаточно малую поверхность, то поток через эту поверхность будет положительным и жидкость будет вытекать наружу.

Векторное поле  $\vec{a}$ , у которого расходимость равна нулю, т.е. выполнено тождественное условие  $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ , называется *соленоидальным*. В силу формулы (2.52) для такого поля имеем:

$$\iint_{(S)} a_n ds = 0, \quad (2.63)$$

где  $S$  – произвольная замкнутая поверхность, внутри которой векторное поле существует везде.

6. *Формула Стокса*. Эта формула связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру  $L$  с интегралом по поверхности, ограниченной данным контуром. Формула Стокса записывается так:

$$\oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_{(S)} \left[ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}, x) + \dots \right. \\ \left. \dots + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}, y) + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}, z) \right] ds. \quad (2.64)$$

Здесь  $L$  – замкнутый контур, ограничивающий поверхность  $S$ . Направление нормали к поверхности  $S$  выбирается так: для наблюдателя, стоящего на поверхности и смотрящего на нее с конца нормали, обход контура  $L$  в правой системе координат должен происходить против движения часовой стрелки.

Формула (2.64) на основании формул (2.37) может быть записана следующим образом:

$$\oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \\ = \iint_{(S)} \left[ \operatorname{rot}_x \vec{a} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \operatorname{rot}_y \vec{a} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \operatorname{rot}_z \vec{a} \cdot \cos(\vec{n}, z) \right] ds. \quad (2.65)$$

7. *Формула Стокса в векторной форме*. Учитывая, что выражение в квадратных скобках под интегралом в (2.65) представляет собой проекции вектора  $\operatorname{rot} \vec{a}$  на нормаль к поверхности  $S$ , т.е.  $(\operatorname{rot} \vec{a})_n$ , формулу (2.65) можно представить в векторной форме:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} (\operatorname{rot} \vec{a})_n ds, \quad (2.66)$$

где  $d\vec{l}$  – элемент дуги кривой  $L$ , рассматриваемый как малый вектор, проекции которого на координатные оси равны  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ .

Из формулы Стокса (2.65) можно сделать вывод, что циркуляция произвольного вектора  $\vec{a}$  по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, опирающуюся на этот контур (направление обхода контура  $L$  и направление нормали к поверхности  $S$  должны быть согласованы между собой).

Формула Стокса широко применяется в физике в областях, где возможно описание явлений векторными полями величин, которые характеризуют те или иные свойства физических систем.

## 2.4 Уравнения в частных производных первого порядка

Очень многие явления в природе описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых неизвестные функции являются функциями более чем одной независимой переменной.

В данном разделе рассмотрены методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, к которым будем часто обращаться в дальнейшем. Теория этих уравнений тесно связана с интегрированием систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Линейным неоднородным уравнением или квазилинейным уравнением первого порядка в частных производных называется уравнение вида:

$$\begin{aligned} Z_1(z_1, z_2, \dots, z_n, w) \frac{\partial w}{\partial z_1} + Z_2(z_1, z_2, \dots, z_n, w) \frac{\partial w}{\partial z_2} + \dots \\ \dots + Z_n(z_1, z_2, \dots, z_n, w) \frac{\partial w}{\partial z_n} = W(z_1, z_2, \dots, z_n, w). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Это уравнение линейно относительно производных, но может быть нелинейным относительно неизвестной функции  $w$ .

Если правая часть уравнения (2.67) тождественно равна нулю, а коэффициенты  $Z_k$  не зависят от  $w$ , то уравнение называется *линейным однородным* уравнением.

Для большей наглядности геометрической интерпретации рассмотрим вначале квазилинейное уравнение с двумя независимыми переменными  $x$ ,  $y$  и неизвестной функцией  $z$ :

$$P(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (2.68)$$

Функции  $P$ ,  $Q$ , и  $R$  будем считать непрерывными в рассматриваемой области изменения переменных и не обращающимися в нуль одновременно.

Рассмотрим непрерывное векторное поле

$$\vec{F} = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}, \quad (2.69)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные векторы, направленные по осям координат.

Векторные линии этого поля (т.е. линии, касательные которым в каждой точке имеют направление, совпадающее с направлением вектора  $\vec{F}$  в той же точке) определяются из условия коллинеарности вектора  $d\vec{r} = \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz$ , направленного по касательной к искомым линиям, и вектора поля  $\vec{F}$ :

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (2.70)$$

Поверхности, составленные из векторных линий, точнее, поверхности, целиком содержащие векторные линии и имеющие хотя бы одну общую точку с поверхностью, называются *векторными поверхностями* (рис. 2.1).

Векторные поверхности можно получить, рассматривая множество точек, лежащих на произвольно выбранном, непрерывно зависящем от параметра, однопараметрическом семействе векторных линий. Векторная поверхность характеризуется тем, что вектор  $\vec{n}$ , направленный по нормали к ней, в любой точке этой поверхности ортогонален вектору поля  $\vec{F}$ , т.е. скалярное произведение равно нулю:  $(\vec{F} \cdot \vec{n}) = 0$ .

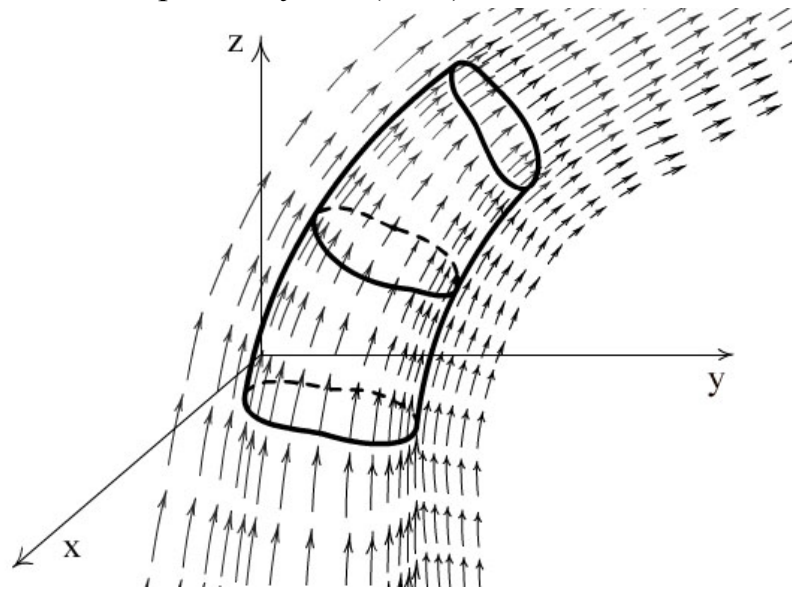


Рис. 2.1. – Векторные поверхности, составленные из векторных линий

Если векторная поверхность определяется уравнением  $z = f(x, y)$ , то вектор  $\vec{n}$  можно представить в виде:

$$\vec{n} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j} - \vec{k}$$

и условие  $(\vec{F} \cdot \vec{n}) = 0$  преобразуется следующим образом:

$$P(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \quad (2.71)$$

Если векторная поверхность задается уравнением  $u(x, y, z) = 0$  и, следовательно, вектор  $\vec{n}$  имеет вид  $\vec{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}$ , то условие  $(\vec{F} \cdot \vec{n}) = 0$  преобразуется следующим образом:

$$P(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.72)$$

Следовательно, для нахождения векторных поверхностей надо проинтегрировать квазилинейное уравнение (2.71) или линейное однородное уравнение (2.72) в зависимости от того, ищется ли уравнение искомого векторных поверхностей в явном или неявном виде. Так как векторные поверхности могут быть составлены из *векторных линий*, то интегрирование уравнений (2.71) или (2.72) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений векторных линий.

Рассмотрим методы решения квазилинейных уравнений первого порядка в частных производных. Пусть задано уравнение (2.71), где  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  – заданные функции от переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые в рассматриваемой области имеют непрерывные частные производные первого порядка и удовлетворяют условию  $P^2 + Q^2 \neq 0$ .

Решение  $z = z(x, y)$  уравнения (2.71) геометрически представляет собой векторную поверхность в пространстве координат  $\{x, y, z\}$ . Эту поверхность называют интегральной поверхностью.

Функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$  определяют некоторое поле направлений в пространстве  $\{x, y, u\}$ , а именно в каждой фиксированной точке этого пространства существует направление, направляющие косинусы которого пропорциональны коэффициентам  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Кривые, соответствующие этому полю направлений, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.70) и называются характеристическими кривыми (характеристиками) уравнения (2.71) или векторными линиями векторного поля (2.69). Если ввести параметр  $s$ , изменяющийся вдоль характеристической кривой, то уравнения (2.70) примут вид:

$$\frac{dx}{ds} = P(x, y, z); \quad \frac{dy}{ds} = Q(x, y, z); \quad \frac{dz}{ds} = R(x, y, z). \quad (2.73)$$

Величины  $P$ ,  $Q$  и  $[-1]$  пропорциональны направляющим косинусам нормали к интегральной поверхности  $z = z(x, y)$  и уравнение (2.71) выражает условие перпендикулярности нормали к интегральной поверхности с направлением поля:

$$P(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y, z) \cdot [-1] = 0$$

Таким образом, уравнение (2.71) сводится к требованию, чтобы в каждой точке интегральной поверхности  $z = z(x, y)$  направление,

определяемое указанным выше полем направлений, находилось в касательной плоскости к поверхности. Если некоторая поверхность  $z = z(x, y)$  образована характеристиками уравнения (2.71), то в каждой точке этой поверхности касательная к характеристике, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности и, следовательно, эта поверхность является интегральной поверхностью уравнения (2.71). Обратно, если  $z = z(x, y)$  есть интегральная поверхность уравнения (2.71), то ее можно покрыть семейством характеристик [54].

Так как решения системы дифференциальных уравнений (2.73) однозначно определяются начальными значениями  $x, y, z$  при  $s = 0$ , получаем следующий результат: *любая характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой интегральной поверхности.*

Исходя из этого существует множество методов решения уравнения (2.71). Один из методов предполагает [54], что если пространственная кривая  $l$  задана в параметрической форме  $x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)$ , причем  $x_\tau^2 + y_\tau^2 \neq 0$  и функции  $x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)$  непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области, то через каждую точку кривой  $l$  проводят характеристику. В результате получают семейство характеристических кривых, которые зависят как от параметра  $s$ , так и от параметра  $\tau$ .

Для решения задачи Коши проведем через каждую точку кривой  $l$  характеристику, т.е. интегральную кривую системы (2.70). Это можно сделать в некоторой окрестности кривой  $l$ , причем единственным образом. В результате получим семейство характеристических кривых, зависящих от параметров  $s$  и  $\tau$ :

$$x = x(s, \tau); y = y(s, \tau); z = z(s, \tau). \quad (2.74)$$

В силу сделанных ранее предположений, функции (2.74) имеют непрерывные производные первого порядка по переменным  $s$  и  $\tau$ . Кривые (2.74) образуют поверхность  $z = z(x, y)$ , если из первых двух уравнений (2.74) можно выразить параметры  $s$  и  $\tau$  через переменные  $x$  и  $y$ . Для этого достаточно, чтобы на кривой  $l$  не обращался в нуль якобиан

$$\Delta = x'_s \cdot y'_\tau - x'_\tau \cdot y'_s = P \cdot y'_\tau - Q \cdot x'_\tau. \quad (2.75)$$

Если на кривой  $l$  выполняется условие  $\Delta \neq 0$ , то искомая поверхность представляется функцией переменных  $x$  и  $y$  и является решением уравнения (2.71). Единственность решения задачи Коши следует из того, что характеристическая кривая, имеющая одну общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности. Это значит, что любая интегральная поверхность, проходящая через кривую  $l$ , целиком содержит семейство характеристик, проходящих через кривую  $l$  и, следовательно, совпадает с решением  $z = z(x, y)$ .

В свою очередь, если  $\Delta = 0$  всюду на кривой  $l$  и если существует интегральная поверхность  $z = z(x, y)$  с непрерывными производными первого порядка, проходящая через  $l$ , то эта кривая должна быть характеристикой.

Через характеристику проходит не одна, а бесконечно много интегральных поверхностей. Таким образом, характеристики являются линиями пересечения интегральных поверхностей (*линиями ветвления*), тогда как через кривую, которая не является характеристикой, не может проходить более одной интегральной поверхности.

Другой метод интегрирования уравнения (2.71) предполагает, что интеграл этого квазилинейного уравнения, зависящий от произвольной функции, может быть получен следующим методом: интегрируем вспомогательную систему уравнений (2.70) и, найдя два независимых первых интеграла этой системы:

$$\Psi_1(x, y, z) = C_1, \quad \Psi_2(x, y, z) = C_2,$$

получаем искомый интеграл в виде  $\Phi[\Psi_1(x, y, z), \Psi_2(x, y, z)] = 0$ , где  $\Phi$  – произвольная функция.

Уравнение интегральной поверхности квазилинейного уравнения (2.71), проходящей через заданную линию, определяемую уравнениями  $\Phi_1(x, y, z) = 0$  и  $\Phi_2(x, y, z) = 0$ , можно найти, взяв упомянутую выше функцию  $\Phi$  не произвольно, а определив функцию  $\Phi(C_1, C_2)$  путем исключения  $x, y, z$  из уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0, \\ \Psi_1(x, y, z) = 0, \quad \Psi_2(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

в результате чего получим, уравнение  $\Phi(C_1, C_2) = 0$ , и искомым интегралом будет функция  $\Phi[\Psi_1(x, y, z), \Psi_2(x, y, z)] = 0$ .

Перейдем теперь к случаю  $n$  независимых переменных. Естественно ожидать, что указанная выше для трехмерного случая схема решения может быть распространена и на  $n$ -мерный случай.

Начнем с исследования однородного линейного уравнения

$$Z_1(z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial w}{\partial z_1} + Z_2(z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial w}{\partial z_2} + \dots + Z_n(z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial w}{\partial z_n} = 0, \quad (2.76)$$

где непрерывные функции  $Z_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$  не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке рассматриваемой области и имеют в той же области ограниченные частные производные.

Составляем вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dz_1}{Z_1(z_1, z_2, \dots, z_n)} = \frac{dz_2}{Z_2(z_1, z_2, \dots, z_n)} = \dots = \frac{dz_n}{Z_n(z_1, z_2, \dots, z_n)}, \quad (2.77)$$

которая при указанных выше ограничениях удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности.

Находим  $(n - 1)$  независимый первый интеграл системы (2.77):



$$\begin{cases} \Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n) = C_1, \\ \Psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n) = C_2, \\ \dots\dots\dots \\ \Psi_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

В пространстве с координатами  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  эта система интегралов определяет  $(n-1)$ -параметрическое семейство линий, называемых характеристиками уравнения (2.76). Известно [54, 104], что левая часть любого первого интеграла  $\Psi_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$  системы (2.77) является решением исходного линейного однородного уравнения в частных производных (2.76).

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что функция  $w = \Phi(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n-1})$  является общим решением уравнения

$$\sum_{k=1}^n Z_k(z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial w}{\partial z_k} = 0, \quad (2.78)$$

где  $\Phi$  – произвольная функция, а  $\Psi_k$  – независимые первые интегралы системы (2.77).

В свою очередь, неоднородное линейное уравнение первого порядка

$$\sum_{k=1}^n Z_k(z_1, z_2, \dots, z_n, w) \frac{\partial w}{\partial z_k} = W(z_1, z_2, \dots, z_n, w), \quad (2.79)$$

где все функции  $Z_k$  и  $W$  – непрерывно дифференцируемые и не обращающиеся в нуль одновременно в рассматриваемой области изменения переменных  $z_1, z_2, \dots, z_n, w$ , интегрируется путем сведения к линейному однородному уравнению вида:

$$\sum_{k=1}^n Z_k(z_1, z_2, \dots, z_n, w) \frac{\partial Z}{\partial x_i} + W(z_1, z_2, \dots, z_n, w) \frac{\partial Z}{\partial w} = 0. \quad (2.80)$$

Решение ищут в предположении, что функция  $Z$  является функцией переменных  $z_1, z_2, \dots, z_n, w$ , определяемой неявным уравнением  $Z(z_1, z_2, \dots, z_n, w) = 0$ . Для этой цели, так же как и в случае трех переменных, ищут решение  $w$  уравнения (2.79) в неявном виде:

$$Z(z_1, z_2, \dots, z_n, w) = 0, \quad (2.81)$$

где  $\frac{\partial Z}{\partial w} \neq 0$ . Для решения уравнения (2.79) надо найти функции  $Z$ , обращающие линейное однородное уравнение (2.80) в тождество в силу уравнения (2.81).

Найдем вначале функции  $Z$ , обращающие уравнение (2.80) в тождество при независимо меняющихся  $x_1, x_2, \dots, x_n, w$ . Такие функции  $Z$  являются решениями однородного уравнения (2.80) и могут быть найдены известным способом. Для этого составляем систему уравнений, определяющую характеристики уравнения:

$$\frac{dz_1}{Z_1(z_1, z_2, \dots, z_n, w)} = \frac{dz_2}{Z_2(z_1, z_2, \dots, z_n, w)} = \dots = \frac{dz_n}{Z_n(z_1, z_2, \dots, z_n, w)} = \frac{dw}{W(z_1, z_2, \dots, z_n, w)}$$

и находим  $n$  независимых первых интегралов этой системы:

$$\begin{cases} \Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n, w) = C_1 \\ \Psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n, w) = C_2 \\ \dots \\ \Psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n, w) = C_n. \end{cases}$$

Тогда общее решение уравнения (2.80) имеет вид:

$$Z = \Phi[\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n] = 0,$$

где  $\Phi$  – произвольная функция.

Решение  $Z$  уравнения (2.80), зависящее от произвольной функции, определяется из уравнения.

$$Z(z_1, z_2, \dots, z_n, w) = 0 \text{ или } \Phi[\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n] = 0.$$

Однако, кроме найденных этим способом решений, могут быть решения  $Z$ , которые определяются из уравнений  $Z(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = 0$ , где функция  $Z$  не является решением уравнения (2.87), а обращает это уравнение в тождество лишь в силу уравнения  $Z(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = 0$ . Такие решения называются *специальными*. Специальных решений обычно не много и они не могут образовывать даже однопараметрических семейств.

В конкретных задачах часто требуется найти решение уравнения (2.79), удовлетворяющее еще каким-нибудь начальным условиям, а так как специальных решений в указанном выше смысле сравнительно мало, то они лишь в исключительных случаях будут удовлетворять поставленным начальным условиям и поэтому их редко принимают во внимание.

В дальнейшем нам придется обращаться к решениям уравнений в частных производных первого порядка, поэтому приведенный материал позволяет в справочном виде ознакомиться с основными методами решений этих уравнений.

При изучении непрерывного векторного поля

$$\vec{F} = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}, \quad (2.82)$$

часто возникает задача о нахождении семейства поверхностей  $U(x, y, z) = C$ , ортогональных к векторным линиям. Уравнение таких поверхностей имеет вид  $(\vec{F} \cdot \vec{r}) = 0$ , где  $\vec{r}$  – вектор, лежащий в касательной плоскости к искомым поверхностям:

$$\vec{dr} = \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz$$

или в развернутом виде

$$P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz = 0 \quad (2.83)$$

Уравнения вида (2.83) называются *уравнениями Пфаффа*. Если поле  $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$  потенциально, то:

$$\vec{F} = \text{grad } U, \quad \text{т.е.} \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

и искомыми поверхностями являются поверхности уровня  $U(x, y, z) = C$  потенциальной функции  $U$ .

В этом случае нахождение искомым поверхностей не представляет затруднений, так как

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz,$$

где криволинейный интеграл берется по любому пути между выбранной фиксированной точкой  $(x_0, y_0, z_0)$  и точкой с переменными координатами  $(x, y, z)$ , например, по ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, параллельных осям координат.

Если же поле  $\vec{F}$  не потенциально, то в некоторых случаях можно подобрать скалярный множитель  $\mu(x, y, z)$  после умножения на который поле вектора  $\vec{F}$  становится потенциальным. Если такой множитель существует, то  $\mu \vec{F} = \text{grad } U$  или

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} \quad \text{откуда} \\ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left( Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \left( R \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \left( P \frac{\partial \mu}{\partial z} - R \frac{\partial \mu}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Умножая первое из этих тождеств на  $R$ , второе на  $P$ , третье на  $Q$  и складывая почленно все три тождества, получим необходимое условие существования интегрирующего множителя  $\mu$ :

$$P \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.84)$$

или  $(\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{F}) = 0$ , где вектор  $\text{rot } \vec{F}$  – вихрь поля, который определяется равенством:

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}.$$

Если это условие, называемое условием *полной интегрируемости* уравнения (2.83), не выполнено, то не существует семейства поверхностей  $U(x, y, z) = C$ , ортогональных векторным линиям поля  $\vec{F}(x, y, z)$ .

Итак, для существования семейства поверхностей  $U(x, y, z) = C$ , ортогональных векторным линиям векторного поля  $\vec{F}$ , необходимо, чтобы векторы  $\vec{F}$  и  $rot \vec{F}$  были бы ортогональными, т.е.  $(\vec{F} \cdot rot \vec{F}) = 0$ .

Многомерные дифференциальные соотношения, используемые в системодинамике и термодинамике, структурно сходны между собой и имеют вид уравнений Пфаффа:

$$dw = A_1(z_1, z_2, \dots, z_n) dx_1 + A_2(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_2 + \dots + A_n(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_n, \quad (2.85)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  – переменные. Как указывалось ранее, стоящее в правой части выражение  $\sum_{k=1}^n A_k(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_k$ , называется выражением Пфаффа или пфаффовой формой.

Для многомерных систем существует три класса пфаффовых форм. Пфаффовы формы, являющиеся полным дифференциалом; пфаффовы формы, которые не являются полным дифференциалом, но пропорциональны полному дифференциалу, т.е. имеют интегрирующий множитель, умножение на который превращает пфаффову форму в полный дифференциал некоторой функции. Кроме того, существует третий класс пфаффовых форм – пфаффовы формы, которые не являются полными дифференциалами и не имеют интегрирующего множителя.

Принято называть пфаффовы формы второго класса (имеющие интегрирующий множитель) голономными, пфаффовы формы третьего класса (не имеющие интегрирующего множителя) – неголономными.

Можно показать (теорема Коши), что пфаффова форма двух переменных всегда голономна. Это следует из приведенных выше соотношений. Что же касается пфаффовых форм (трех и более переменных), то одни из них голономны, другие – неголономны. В частности, пфаффова форма трех переменных вида (2.85), для которой  $n = 3$ , в одних случаях может быть голономной, в других может быть не голономной. Пфаффова форма трех переменных голономна, если выполняется условие (2.84).

Пфаффовы формы приводятся к многомерным уравнениям Пфаффа

$$\sum_{k=1}^n A_k(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_k = 0. \text{ Если пфаффова форма, стоящая в левой части}$$

этого уравнения голономна, то это уравнение может быть преобразовано к виду  $dU = 0$  или  $U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$ , где  $C$  – константа (число такого рода констант бесконечно велико). Это уравнение поверхности в  $n$ -мерном пространстве и, следовательно, решениям уравнения соответствует семейство некоторых поверхностей.

## Глава третья

# КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

### 3.1 Основные понятия теории вероятности

В окружающем нас мире господствует случайность, однако при этом все явления, наблюдаемые в природе, происходят в своем большинстве закономерно. Условиями их появления являются действующие причины или последовательности инициирующих событий. В теории вероятности *событием* (или явлением) называется любой факт, который может произойти или не произойти в результате испытания. Под *испытанием* (опытом) обычно понимают осуществление определенного комплекса условий (с участием человека или нет), обеспечивающего появление интересующего события или явления. Факты регистрации события или явления неразрывно связаны с проведением эксперимента или наблюдения. Понятие испытания, таким образом, затрагивает способы получения интересующей информации. Если эксперимент представляет собой научно поставленный опыт, в процессе которого происходит активное воздействие на объект исследования, то наблюдение предполагает пассивный сбор опытного материала для научного исследования. В науке понятие *явления* в своей сути является более общим нежели события, т.к. явлением принято считать совокупность конкретных событий, свойств или процессов, выражающих внешние стороны действительности в природе и обществе. Поэтому далее будем вести речь о событиях, если только иное не оговорено особо.

Большинство событий формируются в условиях, когда взаимодействует множество факторов – это основная особенность окружающей нас действительности. Поэтому предметом теории вероятности являются закономерности, объективно существующие в природе при возникновении массовых однородных случайных событий, и которые могут регистрироваться в процессе наблюдения или эксперимента. Такие закономерности при возникновении массовых событий называются статистическими. Одна из основных задач теории вероятности состоит в выявлении закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов. В настоящее время теория вероятности и статистические методы находят применение во всех науках, где используются те или иные опытные данные или обрабатывается статистическая информация.

Таким образом, события регистрируются в процессе испытания, при этом основными характеристиками является место и время совершения события. Факт возникновения события может быть случайным или закономерным. В теории вероятности *достоверным* называют событие, которое в результате испытания обязательно произойдет. Событие называется *невозможным*, если в результате данного испытания оно

произойти не может. В свою очередь, событие называется *случайным*, если в результате испытания оно может произойти, но может и не произойти.

Чтобы количественно оценить появление событий используется понятие *вероятности* события, которое представляет собой численную меру возможности появления события в определенных условиях. Вероятность характеризует объективно существующую связь между событиями и условиями, определяющими их появление.

Принято, что вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события – единице. Вероятность случайного события лежит в пределах  $0 < p < 1$  и тем больше, чем больше возможность появления события в определенных условиях. Наиболее просто определяются основные понятия теории вероятности как математической дисциплины в рамках так называемой *элементарной теории вероятности*. Данный раздел теории вероятности имеет дело с вероятностями только конечного числа событий.

В элементарной теории вероятности принято, что любое испытание заканчивается одним и только одним из возможных исходов, или, как принято говорить, одним из *элементарных* событий  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Элементарные события не могут быть разложены на более простые события. Например, выпадение герба или цифры при бросках монеты, попадание или промах при выстреле, принадлежность измеренной величины некоторому диапазону этой величины и т.д. С каждым исходом  $\omega_k$  связывается неотрицательное число  $p_k$ , которое является вероятностью этого исхода. При этом сумма чисел  $p_k$  должна быть равна единице. В случае, если событие может быть разложено на элементарные события, то такое событие называют *сложным*.

Рассмотрим событие  $A$ , заключающееся в том, что «наступает или  $\omega_i$ , или  $\omega_j$ , ..., или  $\omega_k$ ». Исходы  $\omega_i, \omega_j, \dots, \omega_k$  называют событиями, благоприятствующими событию  $A$ , и, по определению, полагают вероятность  $P(A)$  события  $A$ , равной сумме вероятностей благоприятствующих ему исходов:

$$P(A) = p_i + p_j + \dots + p_k. \quad (3.1)$$

Существуют различные подходы к определению вероятности события, при этом каждое определение имеет свою область применения. Обычно исходят из классического, геометрического и статистического определения вероятности. Классическое определение вероятности относится к равновозможным и несовместным исходам испытания, образующим полную группу.

Два события являются *несовместными*, если в одном и том же испытании они произойти не могут. В противном случае события называются *совместными*. В случае более двух событий вводится понятие попарно несовместных событий. События  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  ( $n > 2$ ) называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий несовместны.

В свою очередь события называются *равновозможными*, если по условиям испытания нет никаких оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другие.

Для определения классической вероятности вводят понятие полной группы событий. Говорят, что события в данном испытании образуют *полную группу*, если в результате испытания обязательно появится хотя бы одно из них. Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными*.

Важным в теории вероятности является понятие независимости событий. Событие  $A$  является *независимым* от события  $B$ , если вероятность его появления не зависит от того произошло событие  $B$  или нет. Иначе события  $A$  и  $B$  называются *зависимыми*.

*Классической вероятностью* события  $A$  называется отношение числа ( $m$ ) исходов, благоприятствующих событию  $A$ , к общему числу ( $n$ ) всех возможных исходов, если эти исходы равновозможны, несовместны и образуют полную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.2)$$

Определение классической вероятности вытекает из (3.1) в случае, если исходы  $\omega_k$  равновозможны, т.е.  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ .

В теории вероятности существует также понятие геометрической вероятности. Пусть имеется область  $G$ , которая содержит в себе другую область  $g$  (рис. 3.1). Область  $G$  может быть одномерной, плоской или пространственной (в том числе и  $n$ -мерной). Соответственно, в качестве меры (*mes*) областей  $G$  и  $g$  могут быть приняты длины, площади или пространственные объемы. Если из области  $G$  случайным образом выбирается точка, то вероятность попадания точки в область  $g$  (событие  $A$ ) определяется формулой:

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}. \quad (3.3)$$

При этом полагают, что вероятность попадания точки в любую часть области  $G$  пропорциональна мере этой области и не зависит от ее формы и места расположения в области  $G$ .

Если классическая вероятность применима лишь в случае конечного числа исходов испытаний, причем исходы должны образовывать полную группу и быть несовместными, то геометрическая вероятность допускает бесконечное множество исходов. Однако требование равновозможности событий присутствует в обоих случаях.

Определение понятия вероятности в естественных, экономических и социальных науках основано, в своем большинстве, на статистическом подходе. Статистическое определение вероятности тесно связано с понятием относительных частот событий, которые находят непосредственно в результате опыта. Относительной частотой события  $A$

называют отношение числа ( $m$ ) исходов, в которых появилось событие  $A$ , к общему числу ( $n$ ) проведенных испытаний:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.4)$$

Из практического опыта известно, что для многих явлений в природе и обществе, которые сводятся к изучению случайных событий, наблюдается свойство устойчивости относительных частот. Данное свойство – это проявление одной из наиболее характерных вероятностных закономерностей окружающей действительности.

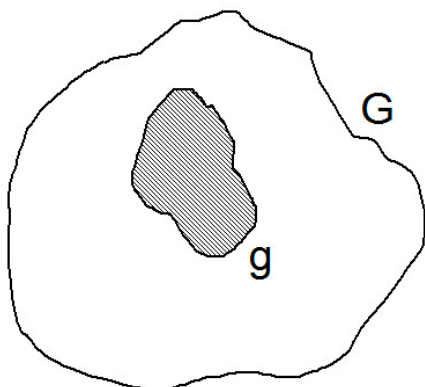


Рис. 3.1. – К вопросу геометрического определения вероятности

Обычно свойство *устойчивости частот* формулируют в виде: если проводить серии испытаний, в каждой из которых число однотипных опытов достаточно велико, то, как правило,

относительные частоты появления интересующего события в различных сериях мало отличаются друг от друга, причем это отличие тем меньше, чем больше испытаний в сериях.

Частоту события при достаточно большом числе опытов принимают за приближенную оценку вероятности. Таким образом, для многих случайных событий при увеличении числа опытов относительная частота события  $P^*(A) = \frac{m}{n}$  сходится по вероятности к вероятности события  $P(A)$ ,

т.е. вероятность неравенства  $|P^*(A) - P(A)| < \varepsilon$  с увеличением числа опытов неограниченно приближается к единице.

Таким образом, статистическая вероятность применяется при изучении событий, обладающих свойством устойчивости частот, при этом число испытаний может быть бесконечно, а исходы в опытах – не равновозможны.

В современной теории вероятностей свойства вероятности формулируются в виде аксиом [52]. В основу определений положены три понятия: пространство  $\Omega$  элементарных событий, класс событий  $A$  (подмножество  $\Omega$ ) и определенная на этом классе функция множеств  $P$  – вероятностная мера. Значение  $P(A)$  функции  $P$  для события  $A$  называется в этом случае вероятностью события  $A$ .

Это понятие вероятности определяется на основании следующих аксиом: каждому случайному событию  $A$  может быть поставлено в соответствие число  $0 < P(A) \leq 1$ , которое и называется его вероятностью;



вероятность достоверного события равна единице  $P(U)=1$ ; если события попарно несовместны, а сложное событие  $A$  – это их сумма, то справедливо соотношение, которое называется свойством аддитивности вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (3.5)$$

Таким образом, всякое сложное событие описывается множеством благоприятствующих ему элементарных событий и поэтому рассматривается как некоторое подмножество элементарных событий. Аксиоматика в теории вероятности вводится чисто формально, но аксиоматическое построение теории основывается на свойствах классической и статистической вероятности. Математическая вероятность служит оценкой вероятности события для реальных процессов в природе и обществе, причем существование такой оценки в каждом отдельном случае является гипотезой, которая проверяется опытом.

### 3.2 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Основные теоремы теории вероятности тесно связаны с понятиями суммы событий и произведения событий.

Событие  $B$  называется объединением (или суммой) событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , если оно имеет вид: «наступает или  $A_1$ , или  $A_2, \dots$ , или  $A_n$ ». Событие  $C$  называется совмещением (или произведением) событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , если оно имеет вид: «наступает и  $A_1$ , и  $A_2, \dots$ , и  $A_n$ ». Объединение событий обозначают знаком  $\cup$ , а совмещение событий знаком  $\cap$ . Таким образом, для событий  $B$  и  $C$  можно записать

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n; \quad C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n. \quad (3.6)$$

Исходя из представления сложных событий множеством благоприятствующих ему элементарных событий, понятие суммы и произведения событий можно проиллюстрировать графически (рис. 3.2).

Если событие  $A$  – попадание точки в область  $A$ , а событие  $B$  – попадание в область  $B$ , то событие  $A + B$  – это попадание точки во всю заштрихованную область  $A$  и  $B$ , как показано на рис. 3.2 (б). На рисунке 3.2 (а) представлены несовместные, а на рисунке 3.2 (б) – совместные события. В свою очередь, на рисунке 3.2 (в) представлено произведение событий  $A$  и  $B$  в виде области  $AB$ . В понятиях теории множеств сумма событий есть объединение, а произведение – пересечение множеств.

В основе теории вероятности лежат в основном методы, которые позволяют аналитически определять вероятности сложных событий. Это дает возможности во многих случаях исключить дорогостоящие опыты и получать вероятностные оценки на основе теоретических выводов. В основу этих выводов положены теоремы сложения и умножения вероятностей, а также ряд следствий, вытекающих из этих теорем.

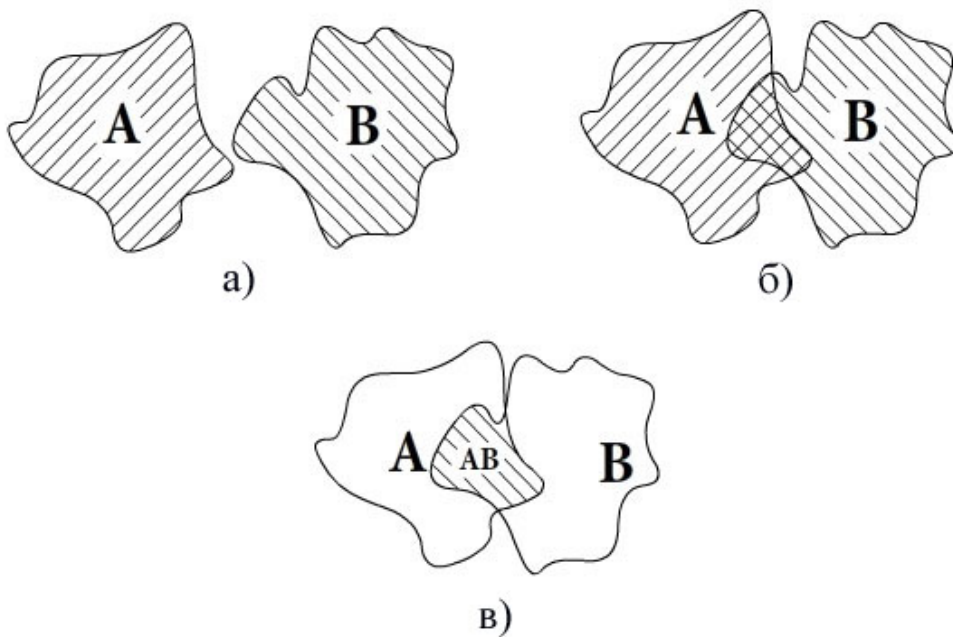


Рис. 3.2. – Совмещение и объединение событий

Первая теорема сложения вероятностей формулируется в следующем виде: вероятность суммы  $n$  попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (3.7)$$

Следствием этой теоремы является вывод, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (3.8)$$

Часто противоположные события обозначают символом  $\bar{A}$ , исходя из чего соотношение (3.8) может быть записано в виде:  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .

Вторая теорема сложения вероятностей формулируется в виде: вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (3.9)$$

Для трех совместных событий вероятность появления хотя бы одного из них определяется по формуле:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - \dots \\ \dots - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C). \quad (3.10)$$

В свою очередь, для  $n$  совместных событий формула для появления хотя бы одного из них приведена в источниках [22, 37].

Теоремы умножения вероятностей построены на понятии независимости событий. Статистический смысл определения независимости событий можно пояснить, переходя от вероятности события к относительной частоте, определяемой опытным путем. Если проводится большое число испытаний, то между частотой появления

события  $B$  во всех испытаниях и частотой его появления в тех испытаниях, в которых наступает также некоторое событие  $A$ , должно иметь место приближенное равенство относительных частот. Независимость событий  $A$  и  $B$  указывает таким образом либо на отсутствие связи между наступлением этих событий в определенных условиях, либо на несущественный характер такой связи.

Мерой зависимости событий является условная вероятность. Пусть  $A$  и  $B$  – два случайных события, а  $P(A)$  и  $P(B)$  – их вероятности. Условную вероятность  $P(B|A)$  события  $B$  при условии осуществления события  $A$  (с вероятностью  $P(A) > 0$ ) определяют формулой:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad (3.11)$$

где  $P(A \cap B)$  – вероятность совместного осуществления событий  $A$  и  $B$ . Событие  $B$  называется независимым от события  $A$ , если  $P(B|A) = P(B)$ . Это равенство может быть записано в виде, симметричном относительно  $A$  и  $B$ :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad (3.12)$$

откуда видно, что если событие  $B$  не зависит от  $A$ , то и событие  $A$  не зависит от  $B$ .

При определении независимости нескольких событий (более двух) различают попарную и взаимную независимость. События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *попарно* независимыми, если любые два из них независимы в смысле данного выше определения (3.12). События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются независимыми в *совокупности*, если они попарно независимы, независимы также каждое из них и любое произведение остальных событий. Например, если события  $A_1, A_2, A_3$  независимы в совокупности, то являются также независимыми следующие события:  $A_1$  и  $A_2$ ,  $A_1$  и  $A_3$ ,  $A_2$  и  $A_3$ ,  $A_1$  и  $A_2A_3$ ,  $A_2$  и  $A_1A_3$ ,  $A_3$  и  $A_1A_2$ . Различие между попарной независимостью и независимостью в совокупности имеет в основном теоретический, нежели практический интерес. При большом количестве событий проверка независимости в совокупности событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  является достаточно сложным процессом.

Событие  $B$  называют зависимым от события  $A$ , если осуществление события  $A$  изменяет вероятность события  $B$ , т.е.  $P(B|A) \neq P(B)$ . Понятия зависимости и независимости событий широко используются в теоремах умножения вероятностей.

Первая теорема умножения вероятностей формулируется в виде: вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло. Исходя из соотношения (3.11) эта теорема записывается в виде:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B), \quad (3.13)$$

Следствием данной теоремы является утверждение, что вероятность совместного появления  $n$  событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех других, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \quad (3.14)$$

В случае двух независимых событий  $A$  и  $B$  теорема умножения вероятностей формулируется в виде:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (3.15)$$

В свою очередь, в случае  $n$  событий  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$  независимых в совокупности теорема умножения вероятностей записывается в виде:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (3.16)$$

Следующая теорема умножения противоположных событий формулируется в виде: вероятность появления хотя бы одного из событий  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий  $q_i$ . Это утверждение представляется в виде:

$$P = 1 - q_1(\bar{A}_1) \cdot q_2(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot q_n(\bar{A}_n). \quad (3.17)$$

В частном случае, если  $P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = \dots = P(\bar{A}_n) = q$ , то  $P = 1 - q^n$ .

Теорема умножения противоположных событий применяется в случае, если противоположные события распадаются на меньшее количество вариантов (более простых событий), чем основные события.

Важное значение в теории вероятности имеет формула полной вероятности, которая является следствием теорем сложения и умножения вероятностей.

Пусть событие  $A$  может наступить с одним из событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу несовместных событий. Тогда вероятность события  $A$  равна сумме произведений вероятностей каждого из событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$  на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n). \quad (3.18)$$

Как видно из приведенного материала, в теории вероятности основной теоретический подход определения вероятности сложного события основан на представлении этого события в виде комбинации более простых составляющих событий. Вероятность сложного события находят, применяя теоремы сложения и умножения вероятностей, в зависимости от того объединяются или совмещаются более простые составляющие события. Этот подход широко применяется на практике. Например, в теории безопасности систем для вероятностной оценки событий используют понятие риска. В классическом определении риск представляет собой вероятность реализации сложного события,

приведшего к определенному ущербу или негативным последствиям. Риск определяется по следующему уравнению:

$$R(j) = \sum_{i=1}^n W_j(I_i) \cdot P_j(I_i), \quad (3.19)$$

где  $W_j(I_i)$  – условная вероятность нанесения вреда человеку (биосистеме, объекту) в случае реализации опасности величиной  $I_i$  при наступлении негативных событий  $j$ ;  $P_j(I_i)$  – вероятность реализации опасности  $I_i$  при наступлении негативных событий  $j$ ;  $n$  – число возможных опасностей одного класса.

Из зависимости (3.19) видно, что вероятности состояний систем, как результат реализации сложных опасных событий, представляются аддитивно-мультипликативными соотношениями относительно вероятностей более простых событий. При этом события классифицируются по уровню сложности и в основе подсчета вероятностей лежат теоремы о сложении и умножении вероятностей событий, что позволяет теоретически определять риск реализации опасного события. Однако, основной недостаток такого подхода связан с тем, что во многих практических случаях невозможно достоверно представить дерево последовательных событий, которые инициируют возникновение опасности. Кроме того на практике существуют сложные события, которые не могут быть представлены только путем совмещения или объединения более простых событий. Тем не менее, теоремы сложения и умножения вероятностей при совмещении и объединении событий являются основополагающими в теории вероятности.

### 3.3 Случайные величины и их законы распределения

Во всех явлениях природы и общества ярко проявляется диалектическое единство случайного и необходимого. В нашем мире случайности создают новые возможности, порождают альтернативы и обеспечивают процессы изменения, развития и эволюции. Именно здесь проявляется фундаментальность вероятностных закономерностей и принципиальная роль случайности, обусловленной свойствами материи, которые нам полностью не известны.

Как и все математические науки, теория вероятности и статистика родились из практики. В данных науках для изучения случайностей используется ряд понятий и определений, причем одно из наиболее важных понятий – это представление о случайной величине. В теории вероятности и математической статистике *случайной величиной* называется переменная величина, которая в зависимости от случая принимает те или иные значения с определенными вероятностями. Случайная величина полностью характеризуется соответствующим распределением вероятностей. Если некоторая переменная в процессе эксперимента или наблюдения принимает значения случайным образом, то суть

вероятностных рассуждений состоит в получении данных, позволяющих установить с какими вероятностями эта переменная принимает определенные значения. Совокупность значений случайной величины и соответствующих им вероятностей и представляет собой распределение вероятностей. Поэтому *законом распределения* случайной величины называется всякое соотношение, которое устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и, поставленными им в соответствие, вероятностями. В случае существования такого соотношения, говорят, что случайная величина подчинена данному закону распределения.

Случайные величины бывают дискретными и непрерывными. В первом случае величина принимает только значения, которые могут быть представлены отдельными числами. Во втором случае значения величины могут непрерывно заполнять некоторый промежуток. Принято случайные величины обозначать большими буквами:  $X, Y, Z, \dots$ , а их возможные значения – малыми буквами, например,  $X = x_1, X = x_2, X = x_n$ .

Для представления дискретного распределения строят ряд распределений дискретной случайной величины  $X$  в виде таблицы значений величины и соответствующих вероятностей, которую графически можно представить многоугольником распределений (рис. 3.3).

Для непрерывной случайной величины пользуются не вероятностью события при  $X = x$ , а вероятностью события  $X < x$ , где  $x$  – текущая переменная. Функцию распределения случайной величины  $X$  вида

$$F(x) = P(X < x) \quad (3.20)$$

называют интегральной функцией (законом) распределения. Данная функция существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин.

Основные свойства функции распределения: функция  $F(x)$  является неубывающей функцией; при  $x \rightarrow -\infty$   $F(x) \rightarrow 0$ ; при  $x \rightarrow \infty$   $F(x) \rightarrow 1$ . Таким образом, график функции  $F(x)$  представляет собой неубывающую функцию, значения которой лежат в пределах от нуля до единицы.

На рис. 3.4 представлена типичная эмпирическая функция распределения некоторой случайной величины  $X$ , построенная по опытными данным. По мере увеличения количества данных о значениях случайной величины  $X$  и уменьшения интервалов  $\Delta x$  функция распределения величины  $X$  приближается к непрерывной функции. Относительная частота (статистическая вероятность) события  $X < x$  равна:

$$w = \frac{i_x}{n}, \quad (3.21)$$

где  $i_x$  – количество опытов (испытаний), при которых наблюдалось значение величины  $X$  меньше  $x$ ;  $n$  – общее число опытов (объем выборки, число объектов).

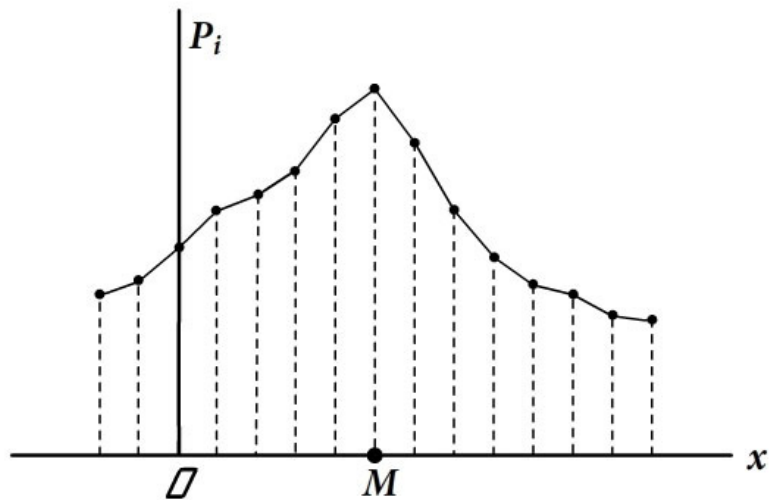
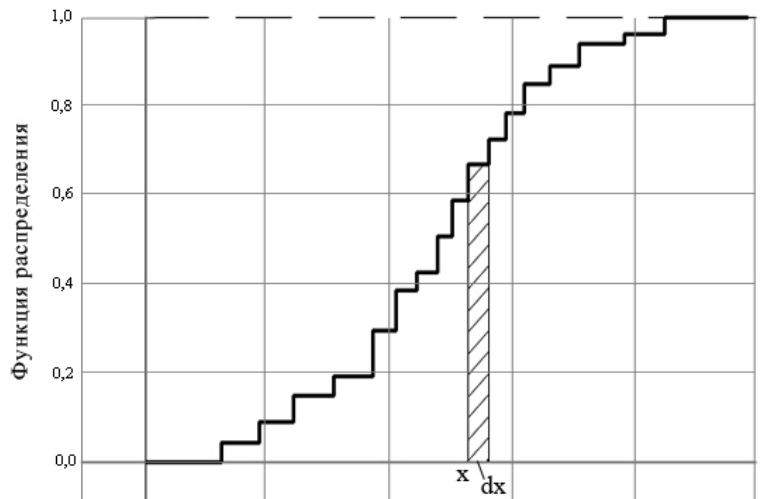


Рис. 3.3. – Многоугольник распределений дискретной случайной величины  $X$

При нахождении эмпирической функции распределения текущие кумулятивные частоты  $w$  обычно определяются согласно (3.21), при этом наблюдаемый диапазон величины  $X$  разбивается на несколько одинаковых интервалов  $\Delta x$  и для каждого интервала подсчитывается количество вариант  $\Delta i_q$  величины  $X$ , попавших в  $q$ -й интервал. Результаты наблюдений, оформленные в виде статистических рядов, графически представляют гистограммами относительных частот. После построения гистограмм находят кумулятивные относительные частоты события  $X < x$ , суммируя величины  $\Delta i_q$  для всех интервалов, которые лежат левее значения  $x$ , как это видно из рис. 3.4. В общем случае, непрерывное распределение характеризуется абсолютно непрерывной функцией  $F(x)$ , поэтому она имеет производную  $F'(x) = f(x)$  и может быть представлена в виде:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (3.22)$$

Рис. 3.4. – График эмпирической функции распределения случайной величины  $X$



Производная  $f(x)$  называется *плотностью вероятности*, и множество значений  $x$ , для которых  $f(x) > 0$ , образует область

значений случайной величины  $X$ . Гистограммы частот для плотности вероятности  $f(x)$  графически представляются диаграммами как это показано на рис. 3.5.

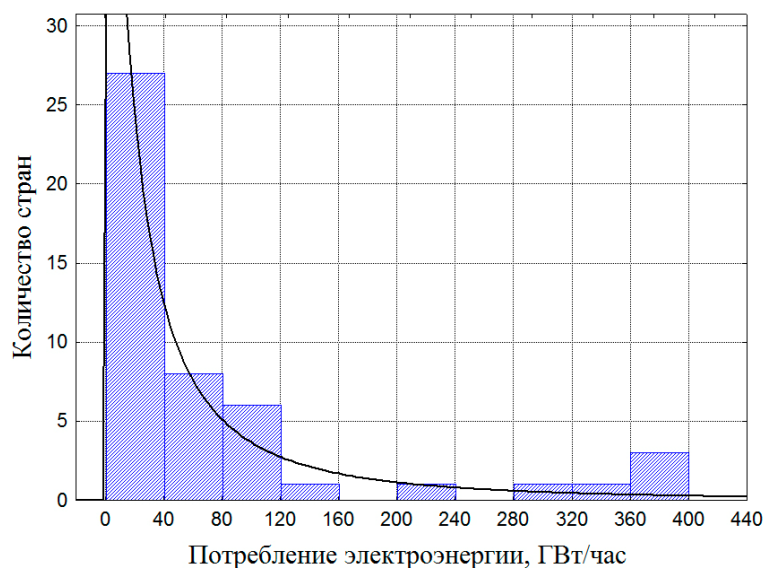


Рис. 3.5. – Гистограмма плотности вероятности эмпирического распределения случайной величины  $X$ , которая представляет собой потребление электроэнергии странами Европы

Любой закон распределения дает полную вероятностную характеристику случайной величины. Однако, на практике не всегда можно найти вид распределения из-за недостаточности опытных данных или сложности случайного процесса. Поэтому часто пользуются числовыми характеристиками распределения – математическим ожиданием, дисперсией, модой, моментами случайной величины и т.д. По отношению к выборке данных эти числовые характеристики называют статистиками случайной величины.

*Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку  $[a, b]$  и которая имеет плотность вероятности  $f(x)$ , называется интеграл вида:

$$m(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx. \quad (3.23)$$

Если случайная величина  $X$  распределена по всей оси численных значений  $x$ , то (3.23) представляется в виде:

$$m(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx. \quad (3.24)$$

Основные свойства математического ожидания следующие:

- математическое ожидание постоянной величины  $C$  равно значению этой постоянной;
- математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин;
- математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

В теории вероятности доказывается, что при достаточно большом числе опытов математическое ожидание приближенно равно среднему



арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. Поэтому математическое ожидание дает оценку для среднего случайной величины, около которого сгруппированы ее значения.

*Дисперсией* непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Если все значения случайной величины принадлежат отрезку  $[a, b]$  и она имеет плотность вероятности  $f(x)$ , то дисперсия равна:

$$\sigma^2 = D(X) = \int_a^b (m - x)^2 f(x) dx. \quad (3.25)$$

Если случайная величина  $X$  распределена по всей оси численных значений  $x$ , то (3.25) представляется в виде:

$$\sigma^2 = D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (m - x)^2 f(x) dx. \quad (3.26)$$

Основные свойства дисперсии случайной величины формулируются следующим образом:

- дисперсия является положительной величиной, т.е.  $\sigma^2 \geq 0$ ;
- дисперсия постоянной величины равна нулю;
- дисперсия двух случайных величин равна сумме дисперсий этих величин;
- дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания, т.е.  $\sigma^2 = D(X) = m(X^2) - m^2(X)$ .

Дисперсия дает вероятностную оценку рассеивания значений случайной величины около ее математического ожидания.

Очень часто для изучения свойств случайных величин, не зависящих от выбора единицы измерения и положения центра группирования, случайную величину с помощью математического ожидания и дисперсии приводят к стандартному виду. Случайную величину  $Y$  называют нормированной, если  $m(Y) = 0$  и  $D(X) = 1$ , то есть:

$$Y = \frac{X - m(X)}{\sigma(X)}. \quad (3.27)$$

*Модой* ( $Mo$ ) непрерывной случайной величины называется точка максимума плотности вероятности, в свою очередь, *медиана* ( $Me$ ) – это равновероятное значение случайной величины, т.е.  $P(X < Me) = P(X > Me)$ . Таким образом, мода представляет собой максимально часто встречающееся значение случайной величины, а медиана разбивает выборку на две равные части.

Существует также множество других статистик, определения и свойства которых приводятся в широко распространенной литературе. Идея применения статистик проста: чтобы не рассматривать все значения случайной величины, в начале изучают описательные статистики, которые дают общее представление о значениях и характере изменения величины.

Очень часто на основе изучения статистик можно получить достаточно полную информацию о характере и особенностях случайной величины.

Зная распределение величины  $X$  можно получить представление о виде распределения другой величины, которая является функцией  $X$ . Например, если существует функция  $Y = \varphi(X)$  случайного аргумента  $X$ , который имеет известную плотность вероятности  $f(x)$ , то математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $Y$  находятся в виде:

$$m(Y) = m(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx, \quad (3.28)$$

$$D(Y) = D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \cdot f(x) dx - m^2(X). \quad (3.29)$$

На практике чаще всего характер и особенности величин исследуют на модельных распределениях, которые досконально изучены. С этой целью используются статистические методы и критерии, которые по численным опытным данным позволяют подобрать наиболее подходящий вид вероятностного распределения. Среди множества одномерных непрерывных распределений выделяют более 20 наиболее часто встречающихся на практике вероятностных законов. Некоторые из вероятностных распределений представлены в таблице 3.1.

Приведенные выше понятия относятся к одномерным функциям распределения. Существуют также и многомерные функции распределения. Действительная непрерывная функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется  $n$ -мерной функцией распределения:

- если  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не убывает по каждой переменной  $x_k$ ;
- $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , если какое-нибудь значение  $x_k = -\infty$ ;
- $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ , если  $x_1 = \infty, x_2 = \infty, \dots, x_n = \infty$ .

Функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  равна вероятности события  $\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$ , где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  –  $n$ -мерное множество случайных величин.

Два основных типа  $n$ -мерных распределений, дискретное и непрерывное определяются аналогично тому, как это делается для случая одномерных распределений. В литературе приводятся формулы для определения статистик многомерных случайных величин.

В заключение данного подраздела попытаемся раскрыть суть исследования вероятностных распределений случайных величин. Из практики применения вероятностных рассуждений следует, что многие случайные величины на всем диапазоне изменения своих значений могут иметь различные статистические частоты. Это обусловлено тем, что изменение случайной величины является следствием изменения условий, которые оказывают влияние, как на саму величину, так и на частоту событий, связанных с наблюдением ее значений. Причины, а также

Таблица 3.1. – Вероятностные распределения и их свойства

Вид распределения	Формулы и характеристики распределения		
	Плотность распределения, $f(x)$	Среднее	Дисперсия
Равномерное	$0$ при $x < a$ и $x > b$ ; $\frac{1}{b-a}$ при $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$ , $-\infty < x < \infty$	$a$	$\sigma^2$
Экспоненциальное	$\lambda_0 \exp(-\lambda_0 \cdot x)$ , $x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda_0}$	$\frac{1}{\lambda_0^2}$
Лапласа	$\frac{1}{2} \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot  x )$ , $-\infty < x < \infty$	$0$	$\frac{2}{\lambda^2}$
Гамма-распределение	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \cdot \exp(-b \cdot x)$ ; $0 \leq x < \infty$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$
Логнормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}\right)$ , $x > 0$	$a \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}}$	$a^2 \cdot e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$
Арксинуса	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x \cdot (1-x)}}$ при $0 < x < 1$	–	–
Пуассона	$\frac{\lambda^x \cdot \exp(-\lambda)}{x!}$	$\lambda$	$\lambda$
Релея	$\frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) \cdot \exp\left(-e^{-\frac{x-a}{b}}\right)$ ; $-\infty < x < \infty$	–	–
Вейбулла	$\lambda_0 \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} \exp(-\lambda_0 \cdot x^\alpha)$ , $x \geq 0$	$\lambda_0^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)$	$\lambda_0^{-\frac{2}{\alpha}} \cdot \beta$
Парето	$\frac{\alpha}{c_0} \left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha+1}$	$\frac{\alpha}{\alpha-1} c_0$	$\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)} c_0^2$
Логистическое	$\frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) \cdot \left(1 + e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^{-2}$	–	–
Максвелла	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ ; $0 \leq x < \infty$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma$	$\frac{3\pi-8}{\pi} \sigma^2$
Эрланга	$\frac{(n \cdot \mu)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \exp(-n \cdot \mu \cdot x)$ $0 < x < 1$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{n \cdot \mu^2}$
Хи-квадрат	$\frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ ; $x > 0$	$m$	$2m$
Коши	$\frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + (x-a)^2}$ , $-\infty < x < \infty$	–	–

влияющие факторы, обеспечивающие различие в относительных частотах, нам чаще всего не известны, однако именно с ними связано то, что некоторые значения случайных величин наблюдаются чаще, чем другие.

При равновозможных событиях существует равномерное распределение плотности вероятности и линейная функция закона распределения случайной величины. В этом случае значения величины на всей области ее определения наблюдаются с одинаковой вероятностью.

Если принцип равновозможности не выполняется (что чаще всего и встречается на практике), то вероятностное распределение отличается от равномерного распределения и обычно представляется *S*-образной нелинейной функцией (рис. 3.4). При этом значения величины на всей области ее определения наблюдаются с различной вероятностью, которая зависит от того, в какой наблюдаемый диапазон изменения этой величины попали опытные данные.

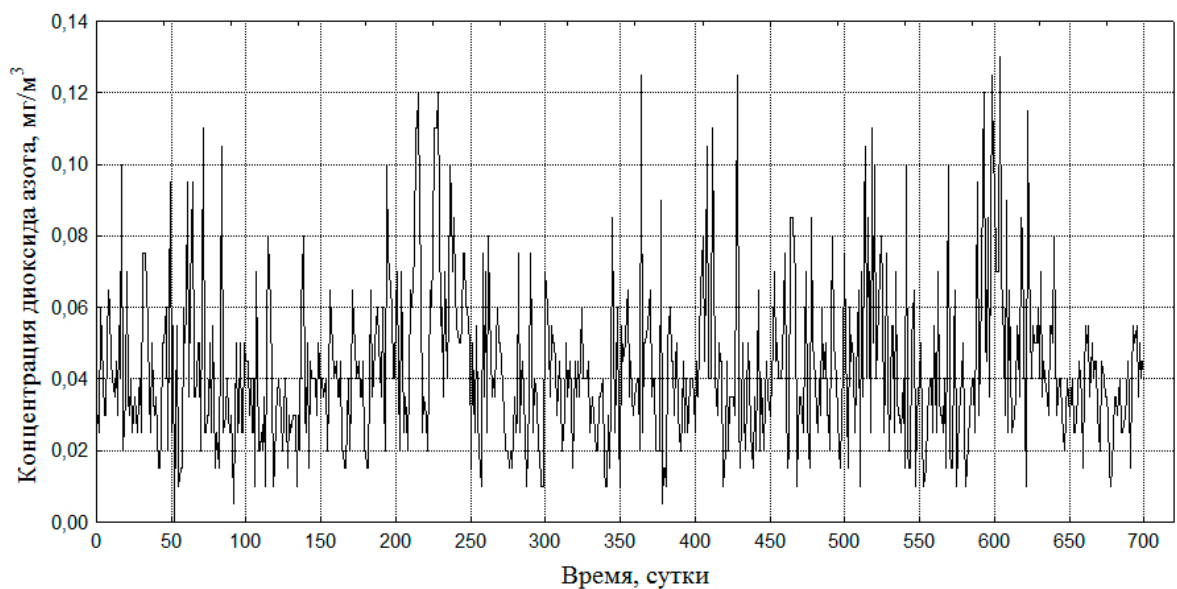
Среди множества вероятностных распределений случайных величин особое место занимает нормальное распределение. На практике многие непрерывные случайные величины подчиняются нормальному закону распределения. Причина широкого распространения нормального закона распределения связана с тем, что многие случайные явления и процессы формируются под действием большого числа факторов, каждый из которых оказывает очень малое влияние на формирование явления или течение процесса в целом. В теории вероятности доказывается центральная предельная теорема, суть которой состоит в следующем: если случайная величина представляет собой сумму *n* взаимно независимых случайных величин, каждая из которых мало влияет на общую сумму, то при достаточно больших *n* закон распределения суммы как угодно близок к нормальному вне зависимости от законов распределения слагаемых. Этим и объясняется фундаментальность нормального закона распределения случайных величин.

### 3.4 Элементы теории случайных процессов

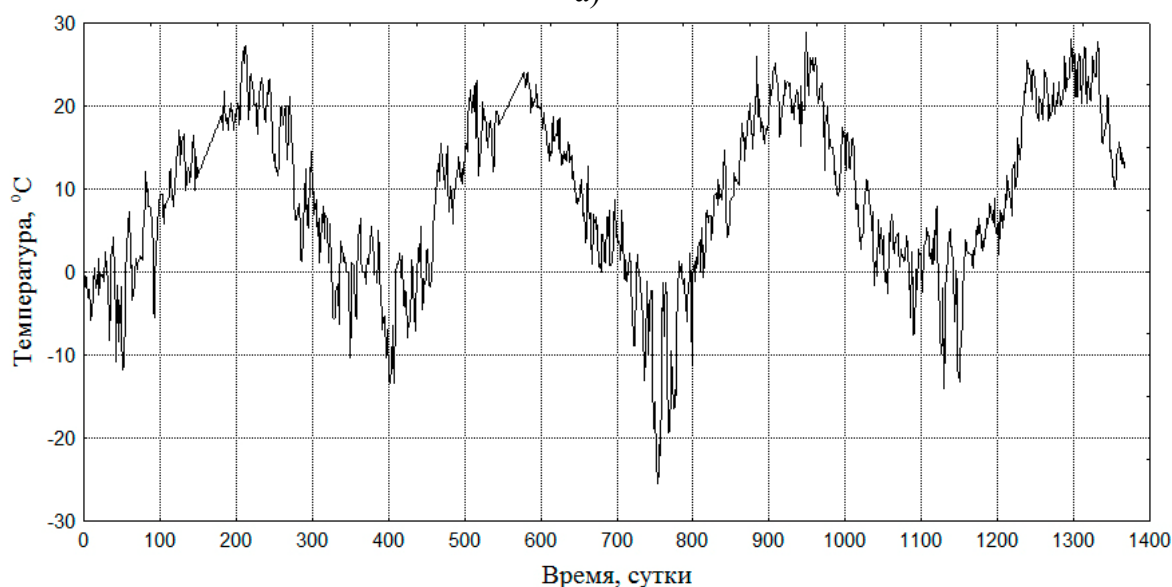
В большинстве случаев на практике явления, процессы и эффекты наблюдаются во времени и пространстве при непрерывном действии различных случайных и закономерных причин. *Случайным процессом* является изменение во времени мгновенного состояния некоторой системы, которое характеризуется множеством случайных величин с определенными распределениями вероятностей. Данное определение случайного процесса рассматривается также как определение стохастического процесса, вероятностного процесса или случайной функции времени. Часто многомерный случайный процесс рассматривают как множество случайных величин, зависящих от времени  $X(\tau) = \{X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_n(\tau)\}$ . Иногда определение случайного процесса дают в более простой формулировке: случайным процессом  $X(\tau)$

называется процесс, значение которого при любом фиксированном  $\tau = \tau_0$  является случайной величиной  $X(\tau_0)$ . Случайная величина  $X(\tau_0)$ , в которую обращается случайный процесс  $X(\tau)$  при  $\tau = \tau_0$ , называется сечением случайного процесса.

В результате опыта случайный процесс (случайная функция) принимает конкретный вид, который называется реализацией (траекторией) этого процесса. На рис. 3.6 (а) и (б) показан временной ряд загрязнения атмосферного воздуха примесью и временной ряд изменения температуры воздуха. Первый ряд отличается отсутствием характерного тренда, второй ряд имеет явно выраженный сезонный тренд.



а)



б)

Рис. 3.6. – Случайные процессы изменения состояния атмосферного воздуха: а) загрязнение атмосферного воздуха в городе диоксидом азота; б) изменение температуры атмосферного воздуха в течении нескольких лет

Любой случайный процесс совмещает в себе отличительные особенности случайной величины и неслучайной функции. С одной стороны, случайный процесс – это множество всех возможных реализаций, т.е. множество неслучайных функций, с другой стороны – это множество случайных величин. Если произведена серия опытов, в результате которых наблюдалось  $n$  различных реализаций случайного процесса  $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)$ , то говорят, что в опыте получено семейство реализаций случайного процесса. Опытные данные, характеризующие семейство реализаций любого случайного процесса, позволяют определить все основные его статистические характеристики.

Изучение многомерного случайного процесса можно свести к изучению одномерного случайного процесса с помощью перехода от векторной функции  $X(\tau) = \{X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_n(\tau)\}$  к вспомогательному

процессу  $X_a(\tau) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot X_k(\tau)$ , где  $a_k$  – произвольный  $n$ -мерный вектор

[64]. Поэтому центральное место в теории случайных процессов занимает исследование одномерных случайных процессов  $X(\tau)$ .

Наиболее простая классификация случайных процессов осуществляется, исходя из особенностей изменения времени и состояний системы при осуществлении процессов. Если время принимает значения из некоторого интервала, то говорят о случайном процессе с непрерывным временем, если время принимает целочисленные значения, то говорят о случайном процессе с дискретным временем (речь может идти также о временном ряде или случайной последовательности). Сечения одномерного случайного процесса с дискретным временем образуют конечную последовательность случайных величин  $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)$ . Для случайного процесса с непрерывным временем можно построить бесконечную последовательность случайных величин, т.к. процессы перехода системы из одного состояния в другое могут происходить в любой момент времени  $\tau$ .

Одномерный процесс  $X(\tau)$  называется процессом с непрерывными состояниями, если его сечение в любой момент времени  $\tau$  представляет собой непрерывную случайную величину. Случайный процесс с дискретными состояниями отличается тем, что его сечение в любой момент времени  $\tau$  представляет собой дискретную случайную величину.

Для различных значений времени  $\tau = \tau_k$ , где  $k = (1, 2, \dots, n)$  случайный процесс является случайной величиной – сечением  $X(\tau_k)$ . Основной вероятностной характеристикой случайной величины, как дискретной, так и непрерывной, является функция распределений, а также ее производная – плотность вероятности. В сечениях процесса случайные величины характеризуют плотностями вероятности, которые зависят от двух переменных – самой величины  $x$  и времени  $\tau$ , т.е.  $f(x, \tau_k)$ . Если случайные величины  $X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_n(\tau)$  независимы, то совокупность

функций плотности вероятностей  $f(x, \tau_k)$  полностью описывает случайный процесс. На практике чаще всего наблюдаются случаи, когда случайные величины  $X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_n(\tau)$  зависимы между собой, что приводит к тому, что совокупность  $f(x, \tau_k)$  не является полной характеристикой случайного процесса. Поэтому при изучении процесса используют различные статистические характеристики, среди которых наиболее распространенными являются математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция.

*Математическим ожиданием* случайного процесса  $X(\tau)$  называется неслучайная функция  $m_X(\tau)$ , значения которой для различных моментов времени  $\tau$  равны математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса, т.е.:

$$m_X(\tau) = m[X(\tau)]. \quad (3.30)$$

Пусть  $X(\tau), Y(\tau)$  – случайные процессы,  $\varphi(\tau)$  – неслучайная функция, тогда основные свойства математического ожидания случайного процесса следующие:

- математическое ожидание от неслучайной функции равно значению этой функции:  $m[\varphi(\tau)] = \varphi(\tau)$ ;
- математическое ожидание суммы двух случайных процессов равно сумме математических ожиданий этих процессов:  $m[X(\tau) + Y(\tau)] = m[X(\tau)] + m[Y(\tau)]$ ;
- математическое ожидание произведения двух случайных процессов равно произведению математических ожиданий этих процессов:  $m[X(\tau) \cdot Y(\tau)] = m[X(\tau)] \cdot m[Y(\tau)]$ ;
- математическое ожидание произведения случайного процесса на неслучайную функцию равно произведению этой функции на математическое ожидание случайного процесса:  $m[X(\tau) \cdot \varphi(\tau)] = m[X(\tau)] \cdot \varphi(\tau)$ .

Математическое ожидание дает оценку для некоторой средней функции, около которой группируются реализации случайного процесса.

*Дисперсией* случайного процесса  $X(\tau)$  называется неслучайная функция  $D_X(\tau)$ , значения которой для различных моментов времени  $\tau$  равны дисперсии соответствующего сечения случайного процесса, т.е.:

$$D_X(\tau) = \sigma_X^2(\tau) = D[X(\tau)], \quad (3.31)$$

где  $\sigma_X(\tau)$  – среднеквадратичное отклонение случайного процесса.

Основные свойства дисперсии формулируются следующим образом:

- дисперсия случайного процесса является положительной величиной, т.е.  $D_X(\tau) \geq 0$ ;
- дисперсия от неслучайной функции равна нулю:  $D[\varphi(\tau)] = 0$ ;
- дисперсия произведения случайного процесса на неслучайную функцию равна произведению квадрата этой функции на дисперсию

случайного процесса:  $D[X(\tau) \cdot \varphi(\tau)] = D[X(\tau)] \cdot \varphi^2(\tau)$ .

- дисперсия суммы случайного процесса и неслучайной функции равна дисперсии случайного процесса:  $D[X(\tau) + \varphi(\tau)] = D[X(\tau)]$ ;

- дисперсия суммы двух случайных процессов равна сумме дисперсий этих процессов, если случайные процессы некоррелированы между собой:  $D[X(\tau) + Y(\tau)] = D[X(\tau)] + D[Y(\tau)]$ ;

Дисперсия дает вероятностную оценку рассеивания реализаций случайного процесса около ее функции математического ожидания.

Взаимосвязь случайных величин, которые образуют случайный процесс, определяется корреляционной функцией.

*Корреляционной функцией* случайного процесса  $X(\tau)$  называется неслучайная функция двух аргументов вида:

$$K_X(\tau_1, \tau_2) = m[\mathfrak{X}(\tau_1) \cdot \mathfrak{X}(\tau_2)], \quad (3.32)$$

где  $\mathfrak{X}(\tau) = X(\tau) - m[X(\tau)]$  – центрированный случайный процесс. Если значения аргументов совпадают ( $\tau = \tau_1 = \tau_2$ ), то корреляционная функция становится равной дисперсии случайного процесса.

*Нормированной корреляционной функцией* случайного процесса  $X(\tau)$  называется неслучайная функция вида:

$$\rho_X(\tau_1, \tau_2) = \frac{K_X(\tau_1, \tau_2)}{\sigma_X(\tau_1) \cdot \sigma_X(\tau_2)}. \quad (3.33)$$

Пусть  $X(\tau)$  – случайный процесс,  $U$  – случайная величина,  $\varphi(\tau)$  – неслучайная функция, тогда основные свойства корреляционной функции формулируются следующим образом:

- корреляционная функция обладает свойством коммутативности:  $K_X(\tau_1, \tau_2) = K_X(\tau_2, \tau_1)$ ;

- корреляционная функция от суммы случайного процесса и неслучайной функции  $Y(\tau) = X(\tau) + \varphi(\tau)$  равна корреляционной функции случайного процесса:  $K_Y(\tau_1, \tau_2) = K_X(\tau_1, \tau_2)$ ;

- корреляционная функция от произведения случайного процесса и неслучайной функции  $Y(\tau) = \varphi(\tau) \cdot X(\tau)$  равна произведению корреляционной функции случайного процесса на неслучайные функции:  $K_Y(\tau_1, \tau_2) = K_X(\tau_1, \tau_2) \cdot \varphi(\tau_1) \cdot \varphi(\tau_2)$ ;

- нормированная корреляционная функция представляет собой коэффициент корреляции сечений  $X(\tau_1)$  и  $X(\tau_2)$ ;

- корреляционная функция случайной величины равна дисперсии этой величины:  $K_U(\tau_1, \tau_2) = D[U]$ ;

- корреляционная функция равна разности между математическим ожиданием произведения сечений случайного процесса  $X(\tau_1)$  и  $X(\tau_2)$  и произведением математических ожиданий этих сечений:  $K_X(\tau_1, \tau_2) = m[X(\tau_1) \cdot X(\tau_2)] - m_X(\tau_1) \cdot m_X(\tau_2)$ ;



- если случайные процессы  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  некоррелированы, то для случайного процесса  $Z(\tau) = X(\tau) + Y(\tau)$  справедливо соотношение  $K_Z(\tau_1, \tau_2) = K_X(\tau_1, \tau_2) + K_Y(\tau_1, \tau_2)$ . Это же утверждение справедливо и для суммы  $n$  случайных процессов, если они попарно некоррелированы;

Корреляционная функция характеризует корреляцию (статистическую взаимосвязь) в системах со случайными процессами.

*Взаимной корреляционной функцией* случайных процессов  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  называется неслучайная функция от двух аргументов  $\tau_1$  и  $\tau_2$  вида:

$$K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2) = m[\mathcal{E}(X(\tau_1), \mathcal{E}(Y(\tau_2))]. \quad (3.34)$$

Два случайных процесса являются некоррелированными, если  $K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2) \equiv 0$ .

Пусть  $X(\tau)$ ,  $Y(\tau)$  – случайные процессы,  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  – неслучайные функции, тогда основные свойства взаимной корреляционной функции формулируются следующим образом:

- взаимная корреляционная функция обладает свойством коммутативности:  $K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2) = K_{Y,X}(\tau_2, \tau_1)$ ;

- взаимная корреляционная функция от суммы случайных процессов и неслучайных функций равна взаимной корреляционной функции случайных процессов:  $K_{X+\varphi, Y+\psi}(\tau_1, \tau_2) = K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2)$ ;

- взаимная корреляционная функция от произведения случайных процессов и неслучайных функций равна произведению взаимной корреляционной функции случайных процессов на неслучайные функции:  $K_{\varphi \cdot X, \psi \cdot Y}(\tau_1, \tau_2) = K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2) \cdot \varphi(\tau_1) \cdot \psi(\tau_2)$ ;

- взаимная корреляционная функция равна разности между математическим ожиданием произведения случайных процессов  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  и произведением математических ожиданий этих процессов:  $K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2) = m[X(\tau_1) \cdot Y(\tau_2)] - m_X(\tau_1) \cdot m_Y(\tau_2)$ ;

- если случайные процессы  $X(\tau)$  и  $Y(\tau)$  коррелированы между собой, т.е.  $K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2) \neq 0$ , то для случайного процесса  $Z(\tau) = X(\tau) + Y(\tau)$  справедливо соотношение:

$$K_Z(\tau_1, \tau_2) = K_X(\tau_1, \tau_2) + K_Y(\tau_1, \tau_2) + K_{X,Y}(\tau_1, \tau_2) + K_{X,Y}(\tau_2, \tau_1).$$

Большое значение в теории случайных процессов занимают стационарные случайные процессы.

Случайный процесс  $X(\tau)$  называется *стационарным*, если его статистические характеристики не меняются с течением времени, т.е. являются инвариантными относительно преобразований:  $\tau \rightarrow \tau + a$   $X(\tau) \rightarrow X(\tau + a)$  при любом значении временного сдвига  $a$ .

Стационарные случайные процессы с хорошей точностью описывают многие реальные явления и процессы: турбулентные пульсации давления и скорости в установившемся гидравлическом течении,

пульсации напряжения и тока при стационарном режиме работы электрических сетей, помехи радиоприема, многие случаи изменения концентраций загрязняющих веществ в атмосферном воздухе и т.д.

Для стационарного случайного процесса математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит только от разности  $\mathcal{G} = \tau_2 - \tau_1$ , т.е.  $K_X(\tau_1, \tau_2) = K_X(\mathcal{G})$ , при этом корреляционная функция  $K_X(\mathcal{G})$  является четной функцией, для которой  $K_X(\mathcal{G}) = K_X(-\mathcal{G})$ . Нормированная корреляционная функция стационарного случайного процесса равна коэффициенту корреляции между сечениями случайной функции, которые разделены интервалом  $\tau$  по времени:

$$\rho_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{D_X(\tau)}. \quad (3.35)$$

Стационарные случайные функции предусматривают возможность спектральных и линейных разложений на конечных и бесконечных участках времени. Соответствующие методы доступно изложены, например, в работе [22].

*Потоки событий.* Важное значение в теории случайных процессов имеет понятие потока событий, под которым понимается последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Классическими примерами могут служить: поток вызовов на телефонной станции; поток включений приборов в бытовой электросети; поток электронных писем, поступающих на сервер; поток сбоев (неисправностей) персонального компьютера; поток выстрелов, направляемых на цель во время стрельб и т.п. События, образующие поток, в общем случае могут быть различными, но чаще всего рассматривают потоки однородных событий, различающихся только моментами появления во времени. В роли события может выступать любое простое или сложное событие, например, появление пассажира в билетной кассе, возникновение неисправности в устройстве, приход судна в порт, появление частицы в счетчике Гейгера Мюллера и т.д. Поток событий обычно включает предопределенные массовые события, которые происходят в случайные моменты времени. Потоки событий различаются между собой по законам распределения интервалов времени между событиями, степени взаимосвязи событий и возможности их одновременного появления.

Рассмотрим потоки событий, обладающие некоторыми особенно простыми свойствами. Среди таких потоков следует выделить стационарные потоки событий.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени протяженностью  $\Delta\tau$  зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси времени расположен этот участок. Поток событий называется потоком *без последствия*, если для любых непересекающихся участков времени число событий, попадающих на один

из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие участки. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный участок  $\Delta\tau$  двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Если поток событий обладает всеми тремя свойствами (т.е. стационарен, ординарен и не имеет последствий), то он называется простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком. Название “пуассоновский” связано с тем, что при соблюдении выше приведенных условий число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона.

*Простейший (пуассоновский) поток*. Плотность распределения временного интервала  $\tau$  между событиями в простейшем пуассоновском потоке соответствует экспоненциальному закону распределения. Вероятность наступления  $k$  событий за время  $\tau$  для закона распределения Пуассона определяется по следующей формуле:

$$P_k(\tau) = \frac{(\lambda \cdot \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot \tau}, \quad (3.36)$$

где  $\lambda$  – интенсивность случайного потока, т.е. среднее число событий в единицу времени. Интенсивность потока имеет размерность 1/сек, 1/мин и т.д. Плотность распределения временного интервала  $\tau$  между событиями в простейшем пуассоновском потоке соответствует экспоненциальному закону распределения:  $P(\tau) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}$ ,  $\tau > 0$ . В свою очередь функция распределения имеет вид:  $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda \cdot \tau}$ .

Если поток обладает свойствами ординарности и отсутствия последствия, но не является стационарным, то он называется нестационарным пуассоновским потоком. Можно показать, что для такого потока за время от  $\tau_0$  до  $\tau_0 + \Delta\tau$  вероятность появления ровно  $k$  событий

равна:  $P_k(\tau) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ , где  $a = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \lambda(t) dt$ .

Таким образом,  $a$  является математическим ожиданием числа событий на участке от  $\tau_0$  до  $\tau_0 + \Delta\tau$ , а само это число событий подчиняется закону Пуассона. Плотность распределения временного интервала  $\tau$  между событиями в нестационарном пуассоновском потоке

соответствует закону распределения:  $P(\tau) = \lambda(\tau_0 + \tau) \cdot \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau} \lambda(\tau) d\tau\right)$ ,

$\tau > 0$ . В свою очередь функция распределения имеет вид:

$$F(\tau) = 1 - \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau} \lambda(\tau) d\tau\right).$$

Таким образом, нестационарный пуассоновский поток сводится к стационарному пуассоновскому потоку.

*Поток Пальма.* Ординарный поток называется потоком Пальма (потоком с ограниченным последствием), если промежутки времени между любыми двумя последовательными событиями являются независимыми случайными величинами. Примером потока Пальма может служить поток деталей, обрабатываемых токарем, если время изготовления каждой очередной детали не зависит от времени изготовления всех предыдущих деталей. В простейшем потоке вследствие отсутствия последствия все интервалы между двумя соседними событиями представляют собой независимые случайные величины, поэтому этот поток является частным случаем стационарного потока Пальма.

Существуют также и другие виды потоков событий (потоки Эрланга, гамма-потоки, марковские потоки, регулярные потоки событий и т.д.) [22, 23]. Например, регулярным потоком называется поток событий, которые следуют одно за другим в строго определенные промежутки времени. Типичный регулярный поток – это ход часов, отсчитывающих время.

Важное значение при анализе потоков событий имеет предельная теорема, которая формулируется в виде: сумма независимых, ординарных и стационарных потоков событий сводится к простейшему стационарному пуассоновскому потоку. Данная теорема выполняется уже при сложении 5 – 7 потоков, если интенсивности этих потоков имеют одинаковый порядок и потоки независимы. На практике при суммировании (взаимном наложении) большого числа ординарных и стационарных потоков с любым последствием получается поток, сколь угодно близкий к простейшему потоку.

Сегодня существует множество методов моделирования случайных процессов. В основе моделирования случайных функций, величин и потоков событий лежат методы имитации случайных чисел с помощью генераторов. Чаще всего для генерации случайных чисел используют различные алгоритмы. Эти алгоритмы заранее определены и, следовательно, генерируют последовательность чисел, которая теоретически не может быть статистически случайной. В то же время, если выбрать хороший алгоритм, полученная численная последовательность будет удовлетворять большинству тестов на случайность. Числа, генерируемые алгоритмами и удовлетворяющие статистическим критериям, называют псевдослучайными числами. Впервые способы создания псевдослучайных чисел предложил Джон фон Нейман в 1946 г.

*Генератор псевдослучайных чисел* (ГПСЧ) представляет собой алгоритм, генерирующий некоторую последовательность чисел, которые почти независимы друг от друга и подчиняются заданному вероятностному распределению (обычно равномерному). Детерминированный алгоритм не может генерировать абсолютно случайные числа, он может только генерировать последовательность с некоторыми случайными свойствами. Для создания таких алгоритмов используют различные методы, например, линейный конгруэнтный метод, метод Фибоначчи с запаздываниями, регистр сдвига с линейной обратной

связью, регистр сдвига с обобщенной обратной связью. Широкое распространение также получил алгоритм «вихрь Мерсенна», основанный на свойствах простых чисел Мерсенна. Подобные алгоритмы позволяют легко воспроизводить псевдослучайные числа с равномерным распределением, однако последовательности таких чисел не всегда удовлетворяют всем тестам на случайность.

*Генераторы случайных чисел.* Наравне с существующей необходимостью генерировать легко воспроизводимые последовательности псевдослучайных чисел, также существует необходимость генерировать абсолютно случайные числа. Такие генераторы называются генераторами случайных чисел (ГСЧ) и они чаще всего строятся из комбинации ГПСЧ и внешнего источника энтропии (именно такую комбинацию сейчас и принято считать ГСЧ). Под источником энтропии понимают некоторые устройства (счетчики) случайных событий.

Почти все крупные производители микрочипов поставляют аппаратные ГСЧ с различными источниками энтропии. В персональных компьютерах авторы программных ГСЧ используют такие источники энтропии, как шум звуковой карты или счётчик тактов процессора. Сбор энтропии является наиболее уязвимым местом ГСЧ. Эта проблема до сих пор полностью не разрешена во многих устройствах. Тем не менее, многие ГСЧ позволяют генерировать случайные числа с равномерным распределением, которые удовлетворяют тестам на случайность.

На основе ГСЧ, генерирующего последовательность случайных чисел, которая имеет равномерное распределение, алгоритмическими методами легко создаются источники случайных чисел с различными законами распределения. Например, широко распространенные вероятностные распределения алгоритмически можно моделировать на основе следующих зависимостей:

- показательный закон распределения:  $y(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$ , где  $x_1^2(t)$  и  $x_2^2(t)$  – гауссовские случайные процессы со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице;

- нормальный (гауссовский) закон распределения:  $y(t) = \sqrt{-2 \cdot \ln(x_1(t))} \cdot \cos(2\pi \cdot x_2(t))$ , где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – случайные процессы с равномерным распределением в диапазоне  $[0, 1]$ ;

- распределение Вейбулла:  $y(t) = \left( \frac{1}{c} \ln \frac{1}{1 - x(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ , где  $x(t)$  – случайный процесс с равномерным распределением в диапазоне  $[0, 1]$ ,  $\alpha = 3$ ,  $c = 1$  и т.д.

Теория случайных процессов имеет широкое поле научных и инженерных приложений. Методы прогнозирования временных рядов, использующие генераторы случайных чисел, применяются во многих областях практической деятельности и позволяют анализировать процессы

в системах различной природы. Обзор основных методов и средств прогнозирования случайных процессов приведен, например, в работе [20].

Благодаря тому, что случайность является важным элементом природы для всего многообразия явлений, теория вероятности и математическая статистика широко используются во многих науках. Это универсальный метод анализа данных, позволяющий находить статистические закономерности даже там, где применение других математических методов невозможно.

## Глава четвертая

# СОДЕРЖАНИЕ ОСНОВ ТЕРМОДИНАМИКИ

### 4.1 Метод термодинамики

В области термодинамики сегодня написаны тысячи книг. Общепринято считается, что это наука о закономерностях превращения энергии. Применение термодинамики необъятно – она фундамент множества прикладных наук. Термодинамические методы и идеи лежат в основе физики, глубоко проникают в химию и биологию. Последнее время появилось много работ, где термодинамические идеи формально переносятся в область социологии, экономики, экологии и т.д. Обоснование этих подходов встречает серьезные идейные и логические трудности. Во многих нефизических науках объем экспериментальных данных не дает возможности провести обобщения на феноменологическом уровне, а построение математических теорий «буксует» еще на этапе выработки общих понятий, выводов и закономерностей. Однако процесс конвергенции наук уже идет и это требует от термодинамики непрерывного развития, т.к. термодинамический метод является одним из основных универсальных методов построения теорий.

Во многих источниках отмечается, что название «термодинамика» не совсем точно передает цель и предмет исследования этой науки. Область ее применения существенно шире, чем следует из названия, которое можно понимать как наука о процессах переноса тепла [81]. В современном определении термодинамика трактуется как наука о закономерностях превращения энергии [50] или наука о явлениях, связанных с тепловой формой движения материи [16].

Классическая термодинамика изучает свойства равновесных физических систем. В основу термодинамики положены три основных закона (*начала термодинамики*), установленные опытным и практическим путем. Первый закон термодинамики представляет собой качественное и количественное выражение закона сохранения энергии. Хотя закон сохранения и превращения энергии применим только к физическим формам движения и не применим к другим высшим формам движения материи, считается, что этот закон имеет всеобщий естественнонаучный характер. Второй закон устанавливает качественную сторону (направленность) процессов, происходящих в физических системах, и отражает весь опыт человечества, связанный с изучением различных явлений и процессов в природе. Третье начало термодинамики определяет, что при температурах, стремящихся к абсолютному нулю, равновесные изотермические процессы происходят без изменения энтропии. Используя эти законы, уравнения состояния и другие эмпирические соотношения, можно получить все основные выводы термодинамики. В отличие от многих областей физики и химии, термодинамика не связана с

представлением о структуре вещества. Однако она построена так, что применение термодинамического метода в виде некоторой общей методологии моделирования позволяет учесть все феноменологические закономерности и макроскопические свойства вещества.

Однако на фоне значительного количества опубликованных книг, в термодинамике сравнительно мало работ, посвященных изучению ее методологии и основных теоретических основ. С одной стороны, эти основы у многих ученых считаются незыблемыми, с другой стороны, опыт человечества говорит о том, что любая теория со временем в процессе своего развития подвержена изменениям [57]. Классической термодинамике пока что удалось избежать серьезных изменений в теории. Процесс формирования основ термодинамики, ее первоначального становления, как особой системы научных знаний, находит полное отражение в работах Карно, Клаузиуса и Томсона. Своим последующим развитием термодинамика обязана многим другим выдающимся ученым, и в первую очередь, Гиббсу [29]. Превратившись в систему научных знаний, термодинамика стала фундаментальной, но в то же время в чем-то и консервативной наукой. В ее истории имеются и впечатляющие достижения и до сих пор до конца не проясненные парадоксы [16, 21, 74]. Иногда наблюдаются дискуссии, в которых именно основы термодинамики становятся предметом глубоких обсуждений, т.к. у многих ученых возникают вопросы, связанные с неполной логической ясностью изложения некоторых основных положений ее теории. Особенно это касается неравновесной термодинамики [13, 16, 19, 21, 28, 51, 72, 74, 81, 103, 113, 120, 125, 126, 131, 133, 134]. В свое время Фальк отмечал, что продуктивное исследование логической структуры термодинамики не в том, чтобы привести обычное построение теории в более строгую форму, а в отыскании новых путей и расширении понятий [120].

В этом плане одним из наиболее важных направлений развития термодинамики считается задача аксиоматизации учения об энтропии [100]. Следует отметить основополагающий труд Каратеодори [49] в этой области и последующие работы Борна и Ланде [19], а также известную работу [13]. В свете данной темы интересными являются также работы [16, 28, 29, 31, 74, 103, 113, 125, 126, 131, 133], посвященные изучению логической структуры термодинамики и обсуждению исходных идей и основных принципов. Однако следует признать, что сегодня в термодинамике отсутствует полная, замкнутая и логически ясная система аксиоматизации учения об энтропии.

Другая, пока не разрешимая проблема, формулируется как *время и классическая термодинамика*. Данной теме уделялось и уделяется много внимания, но из-за отсутствия продуктивных идей ее решения, эту проблему теоретического фундамента термодинамики пока не удалось снять с повестки дня. Дуализм других серьезных проблем термодинамической науки, которые можно сформулировать в виде: «равновесность – неравновесность», «энтропия – время», «обратимость –



необратимость», «классическая вероятность – термодинамическая вероятность» и т.д., определяет необратимый процесс генезиса термодинамики [16, 21, 28, 72, 74, 76, 77, 80, 81, 102, 103, 134]. До решения этих проблем нельзя говорить о существовании единой непротиворечивой парадигмы термодинамики.

Если рассматривать возможности применения методологии термодинамики к процессам нефизической природы, то важным является максимальная формализация подходов и аппарата термодинамики, а также обобщение идей, формирующих систему основных понятий этой науки. В этом плане попытаемся выстроить структурно-логическую схему моделирования в термодинамике, выделяя наиболее важные этапы и элементы и, по возможности, отвлекаясь от физической сути процессов, при этом вполне понимая сложность данной задачи.

На первом этапе в термодинамике выделяется смысловое содержание основных элементов понятийно-категорийного аппарата, подлежащих в дальнейшем формализации в процессе построения моделей. Наиболее важные определения, имеющие значение в рамках данного анализа, приведены ниже.

Так как термодинамика изучает макроскопические системы – физические тела конечных размеров, состоящие из большого числа частиц, то базовым понятием является определение термодинамической системы.

*Термодинамическая система* – это совокупность макроскопических тел и полей физической природы, которые могут представлять собой целостный объект и обмениваться энергией и веществом, как между собой, так и с внешней средой.

В термодинамическую систему обычно не включается внешняя среда (*окружающая среда*), которая лежит за пределами границ рассматриваемой системы.

*Состояние системы* – это мгновенная оценка совокупности значений свойств, характерных для данной системы и называемых *термодинамическими параметрами* –  $z_k$ . Параметром может быть любое свойство системы, если оно количественно определено и рассматривается как независимая переменная, определяющая вместе с другими переменными состояние системы.

Состояния термодинамических систем могут быть *равновесными* и *неравновесными*. Если состояние системы не изменяется во времени, то считают, что система находится в равновесном состоянии. В этом случае все параметры системы постоянны во времени и нет никаких стационарных потоков за счет действия внешних факторов. В термодинамике имеются явные отличия между понятиями равновесия и стационарности [31, 16], однако останавливаться подробно на этом не будем, отсылая за пояснениями к указанным книгам.

Переходы из одного состояния в другое определяют поведение системы и именуются *процессами*. Если хотя бы один из параметров состояния изменяется во времени, то меняется в целом и состояние

системы. Переход из одного равновесного состояния в другое в случае, если система выведена из состояния равновесия, является *неравновесным* процессом. Определенный период времени, за который осуществляется данный переход, называется временем *релаксации*. Условно считают, что если время релаксации бесконечно большое и в процессе перехода система проходит последовательный ряд равновесных состояний, то в системе протекает *равновесный* процесс. В этом процессе параметры системы меняются бесконечно медленно. Введение понятия равновесного процесса является определенной умышленной «идеализацией» действительности, чтобы изначально отойти от сложности нестационарных процессов и не оперировать полями термодинамических величин, имеющими пространственное и временное распределение. Следует отметить, что, скорее всего, именно здесь заложен корень проблем, связанный с последующим противоречивым введением времени в неравновесную термодинамику. С использованием понятия равновесного процесса на этапе становления термодинамики была исключена необходимость экспериментального изучения особенностей протекания термодинамических процессов во времени. А многие экспериментальные положения классической термодинамики получены при проведении опытов с явно выраженной нестационарностью процессов [84]. Изучение равновесных процессов в термодинамике имеет большое значение, т.к. при этих процессах многие термодинамические величины имеют максимально возможные (предельные) значения.

Далее, термодинамические процессы могут быть *обратимыми* и *необратимыми*. Процесс перехода системы из состояния 1 в состояние 2 называется обратимым, если возвращение этой системы в исходное положение из состояния 2 в состояние 1 можно осуществить без каких бы то ни было изменений в окружающей среде. Для необратимых процессов это утверждение неверно. Все естественные самопроизвольные процессы необратимы, обратимых процессов в природе не существует. С понятием обратимости в термодинамике связан ряд парадоксов, для знакомства с которыми отсылаем к работе [21].

Достаточно важным для наших дальнейших сопоставлений и обобщений является понятие фазы и компонента в термодинамике. Термодинамическая система называется *гетерогенной*, если она состоит из качественно различных по своим свойствам частей, разграниченных поверхностями раздела. Система, в которой нет поверхностей раздела, называется *гомогенной*. Гомогенные системы однородны, но иногда бывают и неоднородными, что обусловлено непрерывным изменением свойств в пространстве. Части гетерогенной системы, разделенные поверхностями раздела и характеризующиеся одинаковыми свойствами, называются *фазами*. При переходе через поверхность раздела хотя бы одно термодинамическое свойство изменяется скачкообразно: лед – вода, вода – пар и т.д. В общем, гетерогенная система может состоять из гомогенных частей. Фазам присущи существенные, чаще всего качественные различия.

Наиболее сильные и отчетливо выраженные фазовые различия характерны для агрегатных состояний вещества – твердого, жидкого и газообразного. Практически все вещества могут находиться в этих агрегатных состояниях. Таким образом, понятие фазы тесно связано с качественными признаками состояния систем, которые обладают существенными отличиями и могут меняться под действием внешних условий. Кроме фазы особое значение имеет понятие *компонента*, представляющего собой такую часть системы, содержание которой не зависит от содержания других частей. Например, смесь газов является однофазной, но многокомпонентной системой.

Термодинамические величины бывают двух видов. Если изменение величины в каком-либо процессе не зависит от характера процесса и однозначно определяется начальным и конечным состоянием системы, то говорят, что данная величина является *функцией состояния* (функцией точки). Дифференциал любой функции состояния является полным дифференциалом. Если изменение термодинамической величины зависит от пути, по которому осуществляется термодинамический процесс, то говорят, что величина является *функцией процесса* (функцией линии). Дифференциал такой функции не является полным дифференциалом.

Наиболее важным в термодинамике является понятие энергии. В большинстве источников это понятие вводится параллельно с трактовкой первого закона термодинамики. Считается, что при взаимодействии системы с окружающей средой происходит обмен энергией. Обычно в термодинамике энергия трактуется через понятия видов энергии или ее форм. Типичные утверждения сводятся к следующим формулировкам:

- энергия – общая мера физических и химических форм движения материи и их превращений из одной формы в другую;
- теплота и работа являются формами передачи энергии;
- внутренняя энергия системы является суммой кинетической и потенциальной энергий микрочастиц (атомов и молекул);
- взаимодействие окружающей среды и термодинамической системы осуществляется путем подвода (отвода) к последней энергии в форме теплоты или работы;
- обмен энергией в результате макроскопического, упорядоченного, направленного движения обеспечивается совершением работы, а в результате обмена хаотическим, ненаправленным движением микрочастиц – теплообменом;
- энергия является однозначной функцией состояния системы;
- любое взаимодействие имеет своим необходимым следствием изменение внутренней энергии системы на величину, равную количеству воздействия.

В термодинамике изучаются два различных способа передачи энергии между системой и окружающей средой. Первый способ передачи энергии называется *работой*, второй способ – *теплотой* (теплообменом). Количество энергии, переданное системой при первом способе, имеет

название работы процесса  $A$ , а при втором способе – количества теплоты  $Q$ . Работа  $A$  и количество теплоты  $Q$  имеют размерность энергии. Таким образом, работа и теплота не являются видами энергии, а представляют собой два различных (причем не равноценных) способа (формы) передачи энергии и характеризуют процесс энергетического обмена между окружающей средой и термодинамической системой. Именно по этому в большинстве учебников по термодинамике понятие энергии связано с теплотой и работой. При этом четко отличают понятие вид энергии (кинетическая, потенциальная, электрическая, тепловая и т.д.) от понятия формы передачи энергии (работа, теплообмен). Если не требуется указывать форму передачи энергии, то количество энергии, передаваемое в акте взаимодействия системы и окружающей среды, называют *количеством воздействия*. В общем виде конкретный способ или форму передачи энергии характеризуют *родом взаимодействия*, а количество различающихся между собой родов взаимодействия, к которым по своей физической структуре способна данная система, называют числом термодинамических *степеней свободы*. Каждому роду взаимодействия соответствует один определяющий параметр состояния системы, который дает возможность отличить данный вид взаимодействия от остальных. Параметры состояния, обязательно изменяющиеся при наличии взаимодействия данного рода, которые определяют разные формы обмена энергией и не изменяются под влиянием взаимодействия иных родов, называются *координатами* состояния системы. Другую важную для термодинамического анализа группу параметров, характеризующих состояние системы, составляют *потенциалы* взаимодействий. Потенциалом взаимодействия некоторого рода называют параметр состояния, различие значений которого между системой и окружающей средой приводит к возникновению взаимодействия данного рода, т.е. к передаче энергии в данной форме между системой и окружающей средой. Например, координатой деформационного состояния является объем (потенциалом – давление), координатой магнитного состояния – индукция поля (потенциалом – напряженность), координатой при реализации сил поверхностного натяжения – поверхность тела (потенциалом – поверхностное напряжение) и т.д.

Таким образом, общий термодинамический метод, лежащий в основе исследования взаимодействий системы с окружающей средой [31], логически предполагает, что каждому взаимодействию особого рода приводится в соответствие некоторая физическая величина – координата состояния  $z_k$ . Общему покою системы (равновесию) отвечает постоянство координат состояния. Соответствующей координате отвечает одна степень свободы системы. Каждому воздействию данного рода и, следовательно, каждой координате, устанавливают в соответствие потенциал взаимодействия  $P_k$ . Равенство потенциалов внешней среды и системы является необходимым и достаточным условием для равновесия. В

условиях неравновесного взаимодействия потенциалы внешней среды и системы имеют различные значения. Исходя из этого, изменение координаты при воздействии возможно только при наличии разности потенциалов. В каждом термодинамическом состоянии система обладает строго определенными свойствами и этому состоянию отвечает совокупность вполне определенных значений потенциалов и координат, которые являются, в свою очередь, также параметрами состояния системы.

Соответствующие координаты и потенциалы в виде уравнения  $dE_k = P_k \cdot dz_k$  определяют конкретный вид переносимой энергии и входят в закон сохранения и превращения энергии в качестве параметров.

Полная энергия системы разделяется на внешнюю и внутреннюю. Часть энергии, состоящая из движения системы как целого и потенциальной энергии системы в поле внешних сил, называется *внешней энергией*. Остальная часть энергии системы называется *внутренней энергией*.

Исходя из обмена энергией и веществом, существует классификация термодинамических систем, которая определяет особенности взаимодействия систем и окружающей среды. Если система не обменивается с окружающей средой ни энергией, ни веществом, то такая система называется *изолированной* или *замкнутой*, иначе система называется *открытой*. Система, не обменивающаяся с окружающей средой веществом, но обменивающаяся энергией, носит название *закрытой*. Система, которая не обменивается энергией со средой в форме теплоты, называется *адиабатно изолированной* или *адиабатной* системой. Понятие адиабатной системы имеет особое значение в термодинамике.

Базовым принципом в термодинамике является принятие гипотезы о существовании *энтропии*. Удивительно, но общепринятого определения энтропии в термодинамике нет. Можно привести более десятка определений, которые даны классиками термодинамики и различными авторами, о чем подробнее будет сказано далее. Гипотеза о существовании энтропии в термодинамике – неоспоримый факт, тесно связанный со вторым началом, это один из «китов», на котором стоит «здание» этой науки. Объем опытных данных, которыми располагает термодинамика, оказывается достаточным для того, чтобы при их анализе на основе закона сохранения энергии сформировалась отчетливо выраженная гипотеза существования энтропии. Физический смысл понятия энтропии состоит в том, что изменение энтропии является мерой необратимости процессов в замкнутой системе и характеризует направление естественных процессов в такой системе (второй закон термодинамики).

С энтропией тесно связано понятие *термодинамической вероятности*, которая определяет возможность существования равновесных состояний, и смысл которой раскрывается в статистической физике. Считается, что термодинамическая вероятность состояния определяется числом микросостояний, которые реализуют данное макросостояние термодинамической системы.

Одним из основных постулатов термодинамики является следующий принцип – у изолированной системы существует состояние термодинамического равновесия, в которое она приходит с течением времени и никогда самопроизвольно выйти из него не может (*первый постулат* термодинамики). Данный постулат является обобщением множества опытных данных и является основой всей термодинамики.

*Второй постулат* термодинамики определяет принцип, согласно которому – если две равновесные системы привести в тепловой контакт и тем самым вывести из состояния равновесия, то спустя некоторое время, независимо от условий, обе системы в процессе теплообмена приходят в другое равновесное состояние. Данное положение приводит к понятию *температуры*. Положение о существовании температуры как особой функции равновесной системы, определяющей ее состояние, часто представляют в виде другой формулировки второго постулата термодинамики. Температура является термодинамическим равновесным параметром, который выражает состояние внутреннего движения системы, имеет одно и то же значение для частей системы и определяется внешними условиями и энергией системы.

И первый и второй постулаты термодинамики отражают опытные факты и тесно связаны со свойством транзитивности термодинамических систем, о чем подробнее будет сказано в следующем разделе. Обобщение сущности данных постулатов с позиций системного анализа позволяет сделать вывод о том, что идентичные термодинамические объекты ведут себя одинаково в одних и тех же условиях окружающей среды. Это является основополагающим, т.к. определяет эмпирический факт воспроизводимости опытов по термическим взаимодействиям.

Однако, несмотря на общепринятое понятие температуры, в учебных пособиях оно в основном приводится как данность; научное, простое и четкое определение температуры чаще всего отсутствует. Не ясно с какими свойствами вещества связана эта физическая величина и от чего она зависит. Еще более запутаны общие представления об энтропии. Многие понятия исторически приняты научным сообществом и положены в основания термодинамики, однако существуют фундаментальные вопросы, связанные с тем, что аксиоматизация термодинамики так и не была завершена, хотя этот процесс длится уже сотню лет.

Кроме указанных выше основных понятий и исходных положений, в термодинамике имеется также значительное количество других определений и понятий, однако описывать их не будем, т.к. они подробно раскрыты в известной литературе [16, 31, 50, 81, 95].

## **4.2 Эмпирические закономерности в термодинамике**

К исходным эмпирическим закономерностям, определяющим состояние термодинамической системы, относятся опытные факты существования для любой равновесной системы уравнений состояний и

тесной связи калорических и термических свойств веществ в термодинамических процессах. Термическими свойствами системы являются температура, удельный объем, давление, а к калорическим свойствам (величинам) относят, прежде всего, теплоемкости.

Количество параметров, присущих термодинамической системе в некотором ее равновесном состоянии, может быть весьма большим. Однако число *независимых* параметров, значения которых полностью и однозначно определяют данное равновесное состояние, обычно меньше или равно числу термодинамических степеней свободы системы.

Для каждой степени свободы системы существует свое характерное уравнение, которым потенциал взаимодействия  $P_k$  определяется как однозначная функция координат состояния  $z_k$  вида

$$P_k = P_k(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

где  $n$  – число степеней свободы системы. Соотношения вида (4.1) называют *уравнениями состояния*.

Иногда уравнения состояния, которые связывают между собой термодинамические параметры системы  $z_k$  в равновесном состоянии, записываются в неявном виде:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0. \quad (4.2)$$

Для определения состояния системы и, следовательно, всех ее параметров, достаточно указать определенное число независимых параметров, равное числу степеней свободы системы. При этом каждый параметр равновесного состояния системы является однозначной функцией всех координат состояния. Основываясь на экспериментальных данных, во многих случаях для различных веществ удается установить функциональные зависимости вида (4.1) или (4.2).

В термодинамике операция определения температуры посредством термометрического прибора (термометра) дала возможность заменять одним измерением всю совокупность измерений всех величин, характеризующих равновесное состояние термодинамической системы. Если температура термодинамического тела меняется, то должен изменяться помимо температуры еще хотя бы один параметр состояния системы. Это приводит к теореме о существовании уравнения состояния, т.е. к утверждению, что для любой физической системы всегда существует некоторая функциональная зависимость между температурой и остальными параметрами, характеризующими состояние этой системы.

Основой для понятия температуры является эмпирический факт того, что когда две системы находятся в термическом равновесии с третьей, то они состоят в термическом равновесии и друг с другом. Это так называемое свойство *транзитивности* термодинамического равновесия. При этом условие равновесия для двух систем можно представить в виде:

$$F_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_n) = F_2(z''_1, z''_2, \dots, z''_n), \quad (4.3)$$

где  $z'_k$  и  $z''_k$  – соответственно параметры первой и второй систем.

Одну из двух систем (тел) можно использовать как термометр и рассматривать значение функции  $\theta = F_2(z''_1, z''_2, \dots, z''_n)$  как эмпирическую температуру. Тогда условие равновесия означает, что первая система находится в равновесии с термометром, если существует следующая зависимость:

$$\theta = F_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_n). \quad (4.4)$$

В термодинамике факт существования уравнения вида (4.4) подтверждается всеми имеющимися опытными данными. Исходя из этого, *эмпирической температурой* называют установленную опытным путем меру отклонения состояния изучаемой термодинамической системы от состояния теплового равновесия эталонного тела, которое находится при стандартизированных условиях. Соответствующее эталонное тело называется *термометром*.

Таким образом, из применения понятия температуры следует, что все термодинамические воздействия системно оцениваются по уровню нагрева тела с помощью относительной величины, которая называется температурой. Эта величина комплексно определяет существование воздействий на систему и их уровень. В равновесном состоянии постоянное значение температуры указывает на отсутствие любых некомпенсируемых воздействий и постоянство всех других параметров системы.

Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод, что эмпирическая температура представляет собой комплексный показатель, который позволяет оценить воздействия окружающей среды на систему в сравнении с уровнем воздействия среды на термометр. При этом измерение температуры основано на принципе замещения ее как объекта измерения некоторой другой физической величиной. Непременное условие достоверности и воспроизводимости результатов измерений: величина, зависящая от некоторого свойства вещества, и температура вещества должны быть связаны между собой как взаимно однозначные функции.

В зависимости от того, какое *термометрическое вещество* используется в термометре и какое *термометрическое свойство* выбирается, может быть построено множество уравнений вида (4.3) – (4.4). Как следствие имеется достаточно много эмпирических шкал температур – Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ), Фаренгейта ( $^{\circ}\text{F}$ ), Ренкина ( $^{\circ}\text{Ra}$ ), Реомюра ( $^{\circ}\text{R}$ ), абсолютная шкала температур Кельвина (К). Эти шкалы отличаются друг от друга. Причины различия заключаются в выборе начала и единицы отсчета, а также в использовании различных термометрических веществ. Построение линейных температурных шкал основано на применении метода двух точек. Например, в стоградусной шкале (шкале Цельсия) точка кипения воды при атмосферном давлении принимается за  $100^{\circ}\text{C}$ , а точка плавления льда – за  $0^{\circ}\text{C}$ . Опорные точки выбираются, исходя из факта изменения фазового состояния (преимущественно агрегатного состояния вещества). Реомюр использовал в качестве опорных точек шкалы те же температуры,



что и Цельсий, но промежуток между ними разбил не на 100, а на 80 делений. Фаренгейт полагал за нулевую точку температурной шкалы температуру таяния смеси льда с нашатырем.

Считается, что наиболее подходящим термометрическим веществом является идеальный газ, отличающийся исключительно простой физической структурой. Термометры, использующие реальные газы в качестве термометрического вещества, которые близки по свойствам к идеальному газу, отличаются простотой, высокой чувствительностью и точностью воспроизведения результатов измерений.

После введения Международной системы единиц (СИ) применению подлежат две температурные шкалы:

- основная термодинамическая шкала;
- международная температурная шкала (МТШ).

В первом случае принятая шкала не зависит от рода термометрического вещества и имеет одну реперную точку – тройную точку воды, которой присвоено значение  $273,16\text{ K}$ . Единица измерения термодинамической температуры в СИ – *кельвин* ( $K$ ). Наравне с единицей измерения кельвин допускается применение внесистемной единицы измерения температуры – градуса Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ). По размеру  $1\text{ K}=1^{\circ}\text{C}$  (достигнутая точность –  $3\cdot 10^{-4}$ ), при этом  $\theta = T - T_0$ , где  $\theta$  – температура в  $^{\circ}\text{C}$ ,  $T$  – термодинамическая температура в кельвинах,  $T_0 = 273,15\text{ K}$ .

В свою очередь, международная температурная шкала основана на 11 реперных точках – температурах фазовых переходов некоторых чистых веществ. По МТШ температура тройной точки воды равна  $0,01^{\circ}\text{C}$ , а температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении –  $100^{\circ}\text{C}$ . Реперным точкам международной температурной шкалы присвоены такие значения, чтобы температура по этой шкале была близка к термодинамической температуре и разности между ними оставались в пределах достигнутой точности измерений.

Необходимость применения двух шкал связана с тем, что в термодинамике доказывается, что наряду с эмпирической температурой  $\theta$ , существует понятие *абсолютной температуры*  $T$ , которую сейчас также называют термодинамической температурой. Для того, чтобы разобраться в содержании этого понятия, необходимо вернуться к истории вопроса. Достаточно не просто в классической термодинамике найти ответ на вопрос: что мы измеряем, используя шкалы температур? На субъективном уровне представление более высокой температуры связано с ощущением, что данное тело более горячее, чем другое. Температура тела есть мера «уровня нагретости тел», и качественное представление о температуре вполне привычно для нас. С молекулярно-кинетической точки зрения температура равновесной системы комплексно характеризует интенсивность теплового движения атомов, молекул и других частиц, образующих термодинамическую систему. Известно, что для системы, описываемой законами классической статистической физики, средняя

кинетическая энергия теплового движения частиц прямо пропорциональна термодинамической температуре системы. Поэтому, измерение температуры позволяет суммарно оценивать внутреннюю энергию системы. Более коротко часто говорят, что температура характеризует тепловое состояние тела. Однако при таком уровне обобщения и существующем многообразии представлений о «тепловом состоянии тела», очень сложно ответить на вопрос: с какими свойствами, явлениями или событиями в различных термодинамических системах непосредственно связано измерение температуры? Исторически так сложилось, что этому вопросу уделялось значительно меньше внимания, чем построению системы измерения температуры. При этом можно утверждать, что множество методов измерения температуры позволяет количественно оценивать некоторые параметры (состояния) термодинамических систем, которые однозначно связаны с параметрами эталонных систем, в данном случае – термометрами.

Изначально в основу измерения температур были положены два закона – закон Шарля и закон Гей-Люссака, которые представляются соответственно в виде:

$$p = p_0(1 + \alpha_v \cdot \theta) \Big|_{V=const}; \quad (4.5)$$

$$V = V_0(1 + \alpha_p \cdot \theta) \Big|_{p=const}, \quad (4.6)$$

где  $V$  – объем газа при постоянном давлении;  $p$  – давление газа при постоянном объеме,  $\alpha_p$  – температурный коэффициент объемного расширения;  $\alpha_v$  – температурный коэффициент термической упругости.

Закон Шарля формулируется в виде: если данная масса газа нагревается или охлаждается в данном интервале температур (от 0 до  $\theta^\circ\text{C}$ ), причем объем газа остается постоянным, то температурный коэффициент термической упругости не зависит от природы газа.

Также можно представить и закон Гей-Люссака: если данная масса газа нагревается или охлаждается в данном интервале температур (от 0 до  $\theta^\circ\text{C}$ ), причем давление газа остается постоянным, то температурный коэффициент объемного расширения не зависит от природы газа.

Математически данные законы выражаются зависимостями (4.5) – (4.6) и рассматриваются как совершенно точные по отношению к веществам, находящимся в идеально-газовом состоянии, т.е. при условии, что давление газа очень мало ( $p \rightarrow 0$ ). Причем на практике для простых газов давление в одну атмосферу и ниже уже считается достаточно низким. Экспериментально установлено, что для идеальных газов

$$\alpha = \alpha_v = \alpha_p = \frac{1}{273,15} = 0,003661^\circ\text{C}.$$

Уравнения состояния имеют исключительно эмпирический характер. Законы Шарля и Гей-Люссака, объединенные с гипотезой Авогадро, дали известный газовый закон, который явился, возможно, первой важной

зависимостью для свойств веществ в термодинамике. Данный закон для такой простой системы, как идеальный газ, представляется известным уравнением Клапейрона, которое установлено опытным путем:

$$p \cdot \nu = R_i \cdot T, \quad (4.7)$$

где  $R_i$  – индивидуальная газовая постоянная. Данная зависимость может быть представлена также в виде:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\nu}{\nu_0}. \quad (4.8)$$

Здесь  $\nu_0$  – значение удельного объема газа в опорной точке (точке таяния льда);  $p_0$  – стандартизированное значение давления, равное  $10^5$  Па;

$$T_0 = 273,15 \text{ K}; \quad R_i = \frac{p_0 \cdot \nu_0}{T_0}.$$

Наблюдаемые отклонения состояний реальных газов от закона идеального газа обычно достаточно малы и связаны с природой молекул. Уравнение Ван-дер-Ваальса, вириальное уравнение, а также другие уравнения состояния, которые количественно выражают эти отклонения, сильно повлияли на прогресс в развитии термодинамики и процесс построения шкал температур [83].

В начале температурные шкалы устанавливались по различным термометрическим веществам, но затем было определено, что благодаря своим свойствам одним из наиболее удобных термометрических веществ является идеальный газ. При этом температура может быть определена из соотношения  $T = p \cdot \nu / R_i$ .

Первой стандартизированной шкалой эмпирической температуры (1877 год) была выбрана нормальная шкала, где в качестве термометрического вещества использовался водород, в качестве измеряемого термометрического свойства – давление газа, а за единицу измерения принимался градус Цельсия. В таком термометре объем газа поддерживался строго постоянным, а масса газа принималась при температуре таяния льда такой, чтобы давление водорода было равным 1000 мм рт ст. Такая шкала получила название идеально-газовой шкалы, при этом согласно (4.5) давление газа при  $V = const$  линейно изменяется с температурой.

Идеально-газовая шкала применяется в интервале температур от 10 до 1336 К (точка плавления золота). В этом интервале данная шкала полностью совпадает с термодинамической шкалой. При температурах ниже 10 К и выше 1336 К газы уже не подчиняются уравнению (4.7).

Газовые термометры, в связи с низким давлением газа в термометрах, крайне неудобны для использования в экспериментальной практике. В 1927 г. Международной конференцией мер и весов была принята легко реализуемая в практике экспериментов так называемая международная практическая шкала температур (МПШТ-27). В интервале температур от  $-182,97^\circ\text{C}$  (точка кипения жидкого кислорода,  $T = 90,18 \text{ K}$ )

до  $660\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $T = 933,15\text{ K}$ ) эта шкала основана на показаниях стандартного платинового термометра сопротивления. В 1968 году Международным комитетом мер и весов принята новая Международная практическая шкала температур – МПШТ-68. Эта шкала реализуется с помощью платинового термометра сопротивления в интервале температур от  $-259,34\text{ }^{\circ}\text{C}$  (тройная точка водорода,  $T = 13,81\text{ K}$ ) до  $630,74\text{ }^{\circ}\text{C}$ . При температурах от  $630,74\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $1064,43\text{ }^{\circ}\text{C}$  (точка затвердевания золота,  $T = 1337,58\text{ K}$ ) шкала основана на показаниях платинородий-платиновой термодомпары, а при более высоких температурах эта шкала экстраполируется посредством пирометра.

Подобные шкалы представляют собой систему реперных точек (точки плавления льда и кипения воды, тройная точка воды, точки затвердевания сурьмы, серы, золота и т.д.) и интерполяционных формул, дающих значение температуры по показанию термометра. Шкалы строятся таким образом, чтобы температура, измеренная по шкале, была близка к термодинамической температуре, и разности между ними оставались в пределах достигнутой погрешности на современном уровне развития измерительной техники. В последние годы значения этих погрешностей несколько уточнены, а интерполяционные формулы улучшены, однако порядок величин не претерпел существенных изменений. В настоящее время действующей является Международная температурная шкала (МТШ-90), в которой сохраняется значение температуры тройной точки воды в качестве основной реперной, а значения других реперных точек уточнены и приближены к истинным термодинамическим температурам. При этом  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  меньше  $1\text{ K}$  примерно на  $3 \cdot 10^{-4}$ .

Теперь видно, что исторически построение термодинамической шкалы температур было связано с идеальным газом и понятием идеального газа. В термодинамике *идеальным газом* считается газ, параметры состояния которого строго подчиняются уравнению Клапейрона вида (4.7). В идеальном газе молекулы рассматриваются как материальные точки, силами притяжения и отталкивания между которыми можно пренебречь, а все взаимодействие молекул ограничено соударениями. Идеальный газ отличается низкой плотностью вещества, многие простые газы (водород, гелий, кислород, азот, неон и т.д.) при низких давлениях ведут себя как идеальный газ, т.е. строго подчиняются уравнению (4.7).

Таким образом, идеальный газ и законы идеального газа являются абстрактной моделью в термодинамике, связь которой с реальностью видна в том, что состояния простых реальных газов стремятся к предельному состоянию идеального газа. Основное необходимое условие, при котором справедливо уравнение Клапейрона – это давление реального газа должно быть не велико, в идеальном случае считается, что давление должно стремиться к нулю ( $p \rightarrow 0$ ).

Построение шкал температур очень тесно связано с уравнением состояния идеального газа. Однако, вопрос установления класса функций,

которые позволяют реализовать уравнения состояния термодинамических систем, сегодня остается открытым. В свое время Борн отмечал исключительный произвол в выборе шкал температур и уравнений состояния в термодинамике [19]. Им было подчеркнуто, что на данном этапе развития термодинамической теории нельзя логически обосновать то, что температурой газа считают как раз произведение  $T = p \cdot v$ , а не какую-нибудь функцию этой величины, хотя бы  $T = (p \cdot v)^2$  или  $T = \sqrt{p \cdot v}$ . Факт вида уравнения состояния идеального газа  $p \cdot v = R_i \cdot T$  основан на эмпирических данных и закономерностях, установленных методами молекулярно-кинетической теории. Логическое обоснование выбора вида зависимости  $T = p \cdot v$  крайне важно для оснований термодинамики, так как с этим связана некоторая, пока еще не раскрытая, фундаментальная закономерность.

Теперь постараемся обобщить идеи и принципы, которые применяются при построении шкал температур. Для большей наглядности будем использовать геометрические представления для простых термодинамических систем, состояния которых могут быть описаны явными трехмерными уравнениями вида  $T = F(p, v)$  или неявными уравнениями вида  $F(p, v, T) = 0$ .

При построении уравнений состояний термодинамических систем первоначально вводится параметризация – пространство состояний представляется областью числового пространства. Это дает возможность описать каждое состояние набором чисел – параметрами основных свойств термодинамической системы. Далее используется координатный метод, когда параметры задаются в виде независимых координат точек, которые, в свою очередь, формализуют геометрическое представление каждого состояния системы. Уравнения состояния определяют некоторую фундаментальную связь, существующую между основными свойствами (атрибутами) системы. Известно, что имеется множество способов измерения удельного объема и давления. Для термодинамических систем соответствующие параметры  $v$  и  $p$  определяют количественные соотношения одинаковых свойств, которые характеризуются числами в специально созданных для этого шкалах. Шкалы удельного объема и давления являются так называемыми шкалами отношений. Каждая из этих шкал имеет абсолютную точку отсчета и единицу измерений. Для этих атрибутов: нуль давления – отсутствие действия внешних сил со стороны окружающей среды, нуль удельного объема – отсутствие материального объекта, на который осуществляется воздействие.

Опыт показывает, что привнесение параметров свойств простой термодинамической системы в виде удельного объема и давления не может однозначно характеризовать состояние системы в виде точки трехмерного пространства. На всей области определения параметров (давления  $p$  и удельного объема  $v$ ) многие вещества находятся в

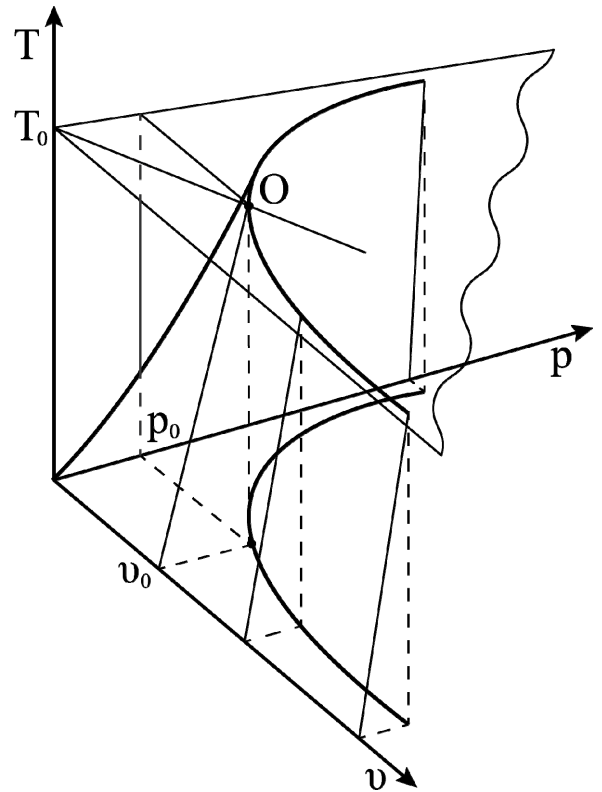
различных агрегатных состояниях, которые качественно отличаются по энергетическому состоянию. Для того, чтобы построить уравнения состояния для всей области определения свойств необходимо ввести дополнительный параметр, который бы однозначно определял состояние термодинамической системы. Таким третьим параметром является температура, комплексно характеризующая свойство системы (или комплекс свойств), которое связано с интенсивностью теплового движения молекул и их энергией.

Шкалы температур как раз и созданы для измерения этого свойства системы. Причем для измерения эмпирических температур вводятся различные шкалы, которые являются так называемыми шкалами интервалов. Данные шкалы не имеют абсолютной точки отсчета, привязанной к определенному свойству вещества, например, кинетической энергии молекул. В этом случае основой построения численной шкалы являются некоторые наблюдаемые и легко воспроизводимые явления, например, процессы кипения и плавления, поэтому реперными точками шкал температур приняты точки кипения и плавления веществ, т.к. они легко наблюдаемы. В свою очередь, шкала термодинамической температуры имеет абсолютную точку отсчета. Это начало отсчета для шкалы Кельвина (абсолютный ноль) выбрано из условия нулевой кинетической энергии частиц вещества. Таким образом, шкала Кельвина является более совершенной шкалой отношений.

Все три параметра  $p$ ,  $v$  и  $T$  выступают в качестве независимых переменных – параметров пространства состояний термодинамических систем и образуют декартовую систему координат. Таким образом, зависимость  $T = F(p, v)$  или  $F(p, v, T) = 0$  является уравнением поверхности, построенной относительно взаимно перпендикулярных осей, каждая из которых соответствует характерному параметру  $p$ ,  $v$  и  $T$ .

Любое состояние системы, определяемое совокупностью трех числовых значений параметров, изобразится точкой, лежащей на полученной поверхности. Такая точка называется фигуративной, а поверхность – характеристической. Например, поверхность состояния  $T = T(p, v)$  идеального газа имеет вид, показанный на рисунке 4.1. В свою очередь, поверхность состояния  $T = T(p, v)$  для воды в различных агрегатных состояниях показана на рисунке 4.2. При изменении состояния системы фигуративная точка перемещается по поверхности, описывая некоторую кривую протекающего процесса. Характеристическая поверхность, в общем случае многомерная гиперповерхность, которая называется *поверхностью состояний*, представляет собой геометрическое место точек, отображающих состояния системы в зависимости от характерных параметров. Такие поверхности обобщают весь имеющийся массив экспериментальных данных по тепловым взаимодействиям.

Рис. 4.1. – Геометрическая поверхность термодинамических состояний идеального газа  $T = T(p, \nu)$



Известно, что одно вещество со всеми его термодинамическими состояниями характеризует одна поверхность. Таким образом, в пространстве  $\{p, \nu, T\}$  существует семейство поверхностей для различных веществ. В этом пространстве состояний размещены также и поверхности идеальных газов вида  $T = p \cdot \nu / R_i$ . Форма этих поверхностей зависит от вида газа через коэффициент  $R_i$ , причем все поверхности простых реальных газов при низких давлениях асимптотически выходят на поверхности идеальных газов, которая описывается уравнением (4.8). В координатах  $\xi_1 = \nu/\nu_0$ ,  $\xi_2 = p/p_0$  и  $\xi_3 = T/T_0$  уравнение (4.8) имеет один и тот же вид для всех простых газов.

Таким образом, поверхность состояний идеального газа  $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$  является модельной поверхностью, по которой и строится шкала температур. Другими словами осуществляется параметризация множества состояний – каждому термодинамическому состоянию кроме параметров  $p$  и  $\nu$  присваивается значение температуры  $T$  в виде числа. Координата  $T$  в виде термодинамической шкалы градуируется с учетом уравнения состояния идеального газа  $p \cdot \nu = R_i \cdot T$  по реперной точке, в качестве которой берется тройная точка воды ( $T_0 = 273,16 K$ ), а давление принимается равным атмосферному ( $p = p_0$ ).

Таким образом, поверхность состояний идеального газа  $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$  является модельной поверхностью, по которой и строится шкала температур. Другими словами осуществляется параметризация множества состояний – каждому термодинамическому состоянию кроме параметров  $p$  и  $\nu$  присваивается значение температуры  $T$  в виде числа. Координата  $T$  в виде термодинамической шкалы градуируется с учетом уравнения состояния идеального газа  $p \cdot \nu = R_i \cdot T$  по реперной точке, в качестве которой берется тройная точка воды ( $T_0 = 273,16 K$ ), а давление принимается равным атмосферному ( $p = p_0$ ).

Это позволяет построить пространство состояний веществ в виде координатной системы  $\{p, \nu, T\}$ . Далее, используя шкалу температур и соответствующие термометры, по экспериментальным данным строится семейство поверхностей состояний различных веществ.

На рисунке 4.3 показана система построения термодинамической шкалы температур на основе использования уравнения состояния идеального газа, а также приведен принципиальный подход, который используется при измерении температуры. Температурная ось строится (рис. 4.3) путем проецирования на ось аппликат линии, которая является

термодинамической шкалой температур и проходит через точку  $O(p_0, \nu_0, T_0)$  и начало координат. В результате образуется прямая линия, уравнение которой представляется в виде  $\frac{p}{p_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{T}{T_0}$  и которая лежит на поверхности идеального газа  $T = p \cdot \nu / R_i$ .

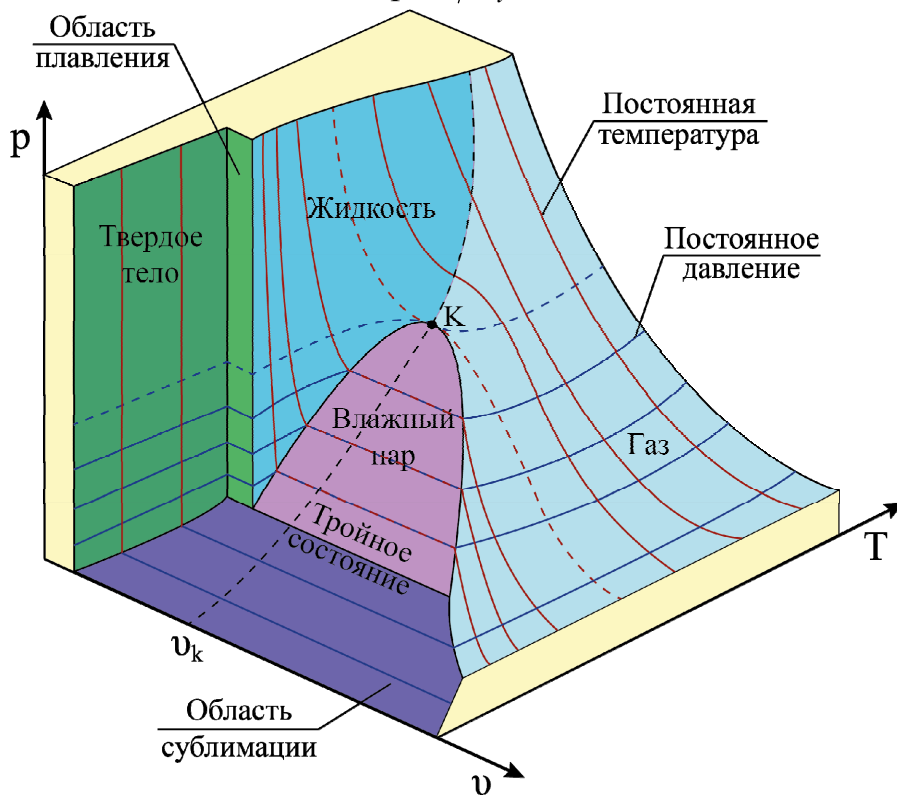


Рис. 4.2.— Термодинамическая поверхность состояний воды  $F(p, \nu, T) = 0$

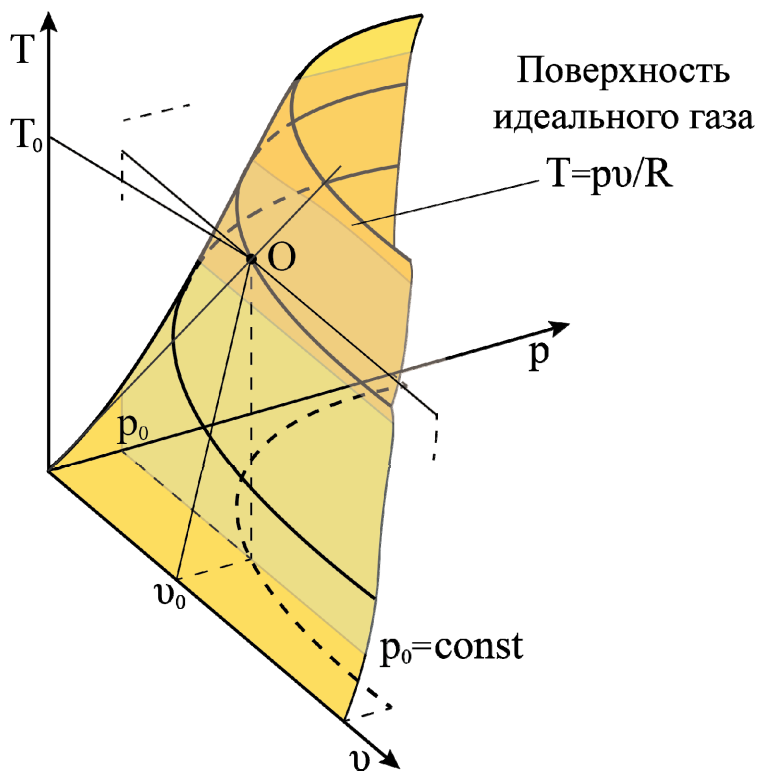


Рис. 4.3. — Система построения термодинамической шкалы температур

В свою очередь, при измерении температур используется подход, суть которого заключается в том, что идеально-газовый термометр приводят в соприкосновение с объектом измерения температуры и на координатной оси  $T$  находят значение измеренной температуры



$T_a$ . При использовании платиновой термопары для измерения температур создается своего рода физическая модель идеально-газового термометра. Данная физическая модель при помещении в среду выдает сигнал, который легко градуируется по значениям температуры идеально-газового термометра.

Таким образом, термометры, использующие различные принципы работы, являются физическими моделями идеально-газового термометра, которые моделируют сигнал в виде термодинамической температуры или температуры, легко преобразуемой в термодинамическую. По значению этой температуры оценивают внутреннюю энергию тела.

Сегодня в термодинамике используется два вида уравнений состояний. Если состояние системы описывается уравнением, содержащим удельный объем, давление и температуру, то такое уравнение называют термическим уравнением состояния. В случае, если в уравнении (4.1) параметр системы  $P_k$  представляет собой энергию системы  $u$ , то такое уравнение называется калорическим уравнением.

Уравнения состояния обобщают опытные данные и являются в термодинамике связывающим звеном между теорией и экспериментом, причем эта связь осуществляется на уровне использования эмпирических закономерностей. Сегодня методы построения уравнений состояний достаточно проработаны, при этом известно более 150 видов уравнений, предложенных различными исследователями. Здесь следует отметить уравнение состояния идеального газа, уравнение Ван-дер-Ваальса, вириальное уравнение и т.д. Наиболее полное изложение существующих уравнений дано в работах [81, 83]. Суть построения уравнений для некоторого класса термодинамических систем заключается в приближении одной зависимостью всей поверхности состояний термодинамической системы (или ее областей), которая, в общем случае, может представлять достаточно сложный вид и для каждого вещества иметь свои особенности. Практически для всех известных веществ методы термодинамики при наличии достаточного объема опытных данных позволяют построить уравнения состояния, которые могут отличаться степенью точности, областью определения параметров и уровнем сложности.

В основу построения уравнений состояний реальных веществ положен принцип *соответственных состояний*. В термодинамике этот принцип является обобщением того положения, что те свойства, которые зависят от межмолекулярных сил, связаны с некоторыми характерными (опорными) свойствами для всех веществ одинаково. При реализации этого принципа в процессе построения уравнений состояний параметры критической точки выбираются в качестве опорных и все остальные свойства соотносятся с этой точкой. Опытные данные подтверждают, что единое выражение для приведенного свойства относительно параметров критической точки хорошо описывает экспериментальные данные для целого ряда веществ. Теория соответственных состояний – это теория

подобия в термодинамике. Гиббс считал, что эта теория имеет важное значение и хотел дать строгое развитие учения о подобии, так как это учение широко используется в термодинамике.

Для такой простой системы, как идеальный газ, термическим уравнением состояния является уравнение Клапейрона-Менделеева, которое вытекает из уравнения Клапейрона

$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T, \quad (4.9)$$

где  $\nu = m/\mu$  – число молей газа массой  $m$ ;  $\mu$  – молярная масса газа;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

При описании поведения реальных газов широко используется уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) \cdot (V - b) = R \cdot T, \quad (4.10)$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные коэффициенты, характерные для определенного газа.

Для реальных газов известна также вириальная форма уравнения состояния вида:

$$p \cdot V = R \cdot T \cdot \left( 1 + \frac{B_2(T)}{V} + \frac{B_3(T)}{V^2} + \frac{B_4(T)}{V^3} + \dots \right), \quad (4.11)$$

где  $B_i(T)$  – вириальные коэффициенты.

Существуют также уравнения состояния, которые в разное время были предложены Диттеричи, Бертелло, Камерлинг-Оннесом, Майером, Боголюбовым и т.д. Обзор этих уравнений дан в работах [50, 81, 83].

Для реальных веществ, находящихся в твердом, жидком и газообразном состояниях нет достаточно надежных эмпирических уравнений состояний, характерных для всей области определения параметров. Поэтому данные о термических и калорических свойствах веществ представляются в численном виде на основе формирования таблиц или различных графических диаграмм. Для примера на рисунке 4.4 приведена  $T - s$  диаграмма для двуокиси углерода.

Сегодня в термодинамике принято, что уравнения состояния присоединяются извне, как известные эмпирические знания о свойствах системы. Таким образом, при моделировании протекающих процессов через уравнения состояния вносятся эмпирические закономерности реальных систем. В термодинамике, например, применяемый математический аппарат позволяет ассоциировать такие соотношения с первым и вторым законом, благодаря чему могут быть получены феноменологические закономерности и следствия.

Особое место в экспериментальной термодинамике занимает калорическая характеристика – *теплоемкость*. Понятие теплоемкости было привлечено в термодинамику из калориметрии. Для твердых тел и жидкостей теплоемкость определяется в виде

$$c = \frac{dQ}{dT} \quad (4.12)$$

и представляет собой количество теплоты, необходимое для изменения температуры термодинамической системы на один градус Кельвина (1 K).

Для газов уравнение (4.12) обычно представляется в виде

$$c_n = \frac{dQ_n}{dT}, \quad (4.13)$$

показывая тем самым зависимость теплоемкости от вида протекающего процесса. В общем случае теплоемкость является функцией процесса и может численно изменяться от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Наибольшее применение имеют теплоемкости при постоянных объеме  $c_v$  и давлении  $c_p$ .

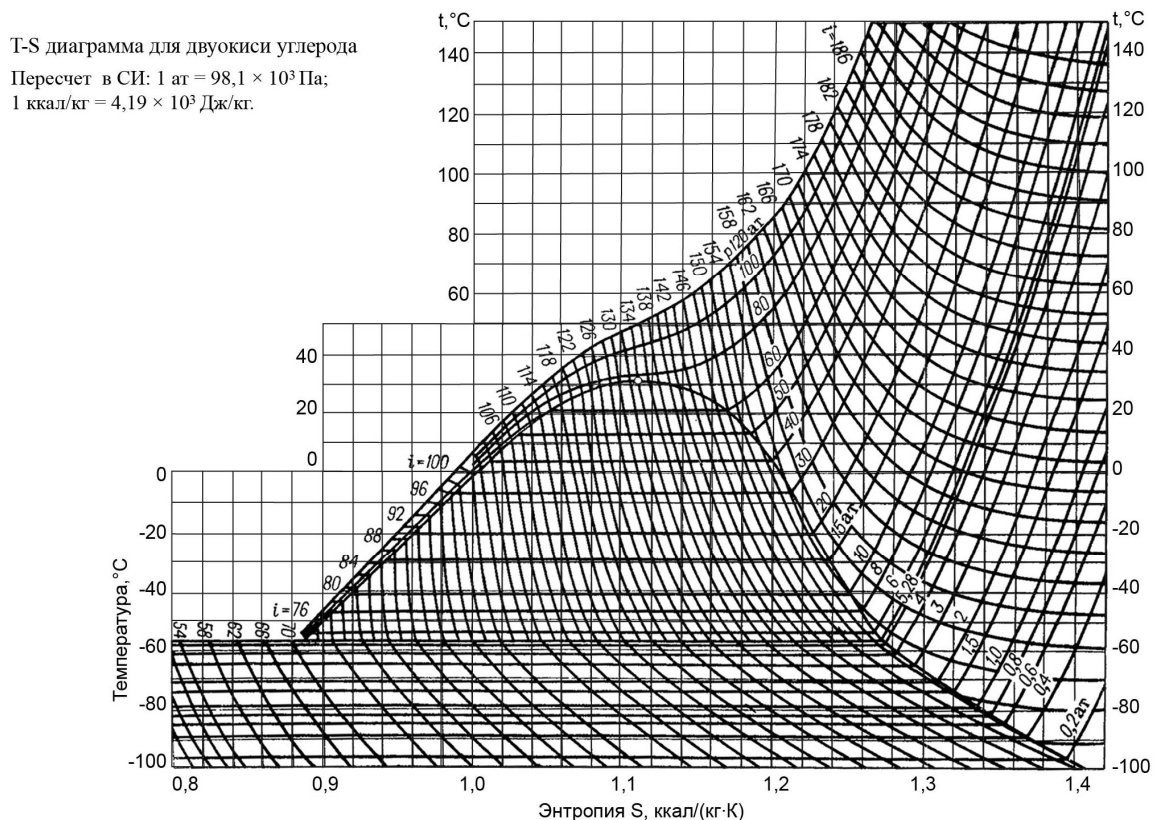


Рис. 4.4. – Диаграмма «температура – энтропия» для двуокиси углерода

Опытный материал, относящийся к теплоемкостям веществ чрезвычайно обширен. Разработаны десятки методов определения теплоемкостей для газов, твердых тел и жидкостей [84]. Однако, вследствие разнообразия методов измерения и различной степени точности, которая достигалась экспериментаторами, существующие численные данные могут несколько отличаться. Особенно это выражено для данных по теплоемкостям при высоких давлениях и температурах. Чаще всего данные по теплоемкостям представляются в виде разнообразных справочных таблиц [10, 111].

Теплоемкости определяют взаимодействие вещества с окружающей средой в различных термодинамических процессах, причем теплоемкость

зависит от свойств вещества, состояния системы и характера термодинамического процесса, который совершается системой.

Геометрически это может быть представлено следующим образом. В трехмерном пространстве независимых переменных  $v$ ,  $p$  и  $T$ , образующих систему декартовых координат, размещено множество характеристических поверхностей, которые определяют поверхности состояний различных термодинамических систем. Каждое состояние определенной термодинамической системы представляется некоторой точкой  $M(v, p, T)$  на соответствующей характеристической поверхности. Через данную точку  $M$  может быть проведено бесконечное количество кривых  $l$ , целиком принадлежащих характеристической поверхности и представляющих собой различные термодинамические процессы. В окрестности точки  $M$  каждому направлению  $\vec{n}$ , которое задается касательной к кривой процесса  $l$  в точке  $M$ , будет соответствовать определенное значение теплоемкости  $c_n$ , которая при этом может быть экспериментально определена в соответствии с уравнением (4.13). Особо отметим, что не все процессы для данного вещества в окрестности точки  $M$  могут быть осуществлены. Реально возможны только процессы, принадлежащие характеристической поверхности.

Таким образом, в термодинамическую теорию через уравнения состояния, теплоемкости и некоторые другие величины (теплоты испарения, кипения, сублимации, различные коэффициенты и т.д.) привлекаются эмпирические данные, которые позволяют учесть различные особенности и закономерности, характерные для реальных веществ и термодинамических процессов.

В нефизических науках подобной систематизированной под теорию опытной базы обычно нет. В этом плане многие методические положения, принятые в термодинамике, могут быть привлечены в другие науки.

### 4.3 Первое начало термодинамики

Термодинамический метод основан на использовании комплекса эмпирических и теоретических соотношений и закономерностей, имеющих существенный характер для методологии и последующей разработки математического аппарата термодинамики.

На первое место в этом плане выходит закон сохранения и превращения энергии (первое начало термодинамики). Этот универсальный закон является одним из краеугольных камней всего естествознания. В своей простой формулировке в виде уравнения, представленного в дифференциальной форме, закон сохранения энергии имеет вид:

$$dQ = du + dA. \quad (4.14)$$

Данный закон в своем первоначальном виде имеет эмпирическое происхождение. В дальнейшем основные положения закона получили

логическое развитие, и в настоящее время первое начало формулируется в обобщенном виде:

$$dQ = du + \sum_{k=1}^n P_k dz_k . \quad (4.15)$$

В ряде случаев основное уравнение для определения изменения внутренней энергии системы ( $u$ ) в качестве фундаментального закона через потенциалы и координаты представляются в следующем виде:

$$du = \sum_{k=1}^{n+1} P_k dz_k , \quad (4.16)$$

где  $dQ = P_{n+1} dz_{n+1} = T \cdot ds$ , при этом особо оговаривают выбор знаков потенциалов при изменении координат [31].

Принятое в термодинамике определение энергии носит всеобщий характер, при этом понятие внутренней энергии имеет глубокий физический и математический смысл. Следствием этого является факт того, что существует однозначная функция координат состояния, дифференциал которой равен сумме всех элементарных количеств воздействий разного рода. Если внутренняя энергия известна как функция координат состояния, т.е. определен вид зависимости  $u = u(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , то потенциалы могут быть выражены через уравнения состояния:

$$P_k = P_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left( \frac{\partial u}{\partial z_k} \right)_{z_k} . \quad (4.17)$$

При выводе термодинамических уравнений в качестве координат используются объем, масса, энтропия, а в качестве потенциалов – давление, химический потенциал, температура. Координаты обычно являются аддитивными величинами. Потенциалы в такой трактовке, в отличие от обычных термодинамических потенциалов (энергии, энтальпии, свободной энергии), не являются аддитивными величинами. В общем виде уравнение сохранения и превращения энергии в термодинамике записывается также в дифференциальной форме, где составляющую деформационного взаимодействия выделяют:

$$\delta Q = du + p \cdot dv + \sum_{k=1}^n P_k dz_k , \quad (4.18)$$

где  $\delta Q$  – элементарное изменение количества теплоты, поступившего в процессе изменения состояния системы;  $du$  – полный дифференциал энергии системы;  $\delta A = p \cdot dv$  – элементарная работа, совершенная в процессе изменения состояния системы;  $dE_k = P_k dz_k$  – составляющие других определенных видов переносимой энергии.

Первое начало задают в виде различных формулировок, среди которых можно выделить следующие варианты изложения закона:

- энергия не исчезает и не возникает вновь, она лишь переходит из одного вида в другой в различных физических и химических процессах;

- осуществление вечного двигателя первого рода невозможно;
- энергия изолированной системы тел сохраняется при всех процессах, происходящих в системе: она может лишь передаваться от одних тел другим (с сохранением или изменением формы движения материи);
  - в термодинамическом процессе подведенная теплота в общем случае расходуется на изменение его энергии и совершение работы;
  - любое взаимодействие имеет своим необходимым следствием изменение внутренней энергии системы на величину, равную количеству воздействия;
  - энергия является однозначной функцией состояния и не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;
  - бесконечно малое изменение внутренней энергии является полным дифференциалом.

В современном представлении, несмотря на простоту, глубокое содержание первого закона термодинамики нелегко сформулировать ясно и кратко [120]. Это основная причина того, что различные авторы по-разному формулируют первое начало. Более того, если математическая формулировка закона в классическом виде (4.14), связывающая теплоту, энергию и работу, является непосредственным обобщением опытных данных по термическим и деформационным взаимодействиям, то в принятом современном виде (4.18) – это уже результат логического обобщения всех имеющихся в физике экспериментальных данных и накопленного практического опыта. В связи с этим в физике по мере накопления опытных фактов периодически возникают дискуссии о границах применимости закона сохранения энергии. Однако всегда проверка опытных фактов указывает на справедливость этого закона.

#### 4.4 Второе начало термодинамики

Следующим фундаментальным законом термодинамики является ее второе начало. В общем виде второе начало содержит несколько утверждений, из которых большинство имеет качественный характер. Этот закон устанавливает существование у всякой равновесной системы однозначной функции состояния – энтропии. Также как и первое начало, второе начало термодинамики является обобщением данных опыта.

Содержание второго начала также невозможно определить сжатой формулировкой, так как их слишком много. В работе [81] дается анализ 18 важнейших формулировок этого закона, в работе [101] – 16 формулировок. Среди них выделим следующие наиболее распространенные изложения второго начала:

- невозможен процесс, имеющий единственным своим результатом превращение тепла в работу;

- теплота не может сама собой переходить от более холодного тела к более нагретому (Клаузиус);
- осуществление вечного двигателя второго рода не возможно (Оствальд);
- наибольший коэффициент полезного действия тепловой машины не зависит от природы рабочего тела и вполне определяется предельными температурами, между которыми машина работает (Карно);
- любой реальный самопроизвольный процесс является необратимым процессом;
- энтропия всякой изолированной системы стремится в максимуму (Клаузиус);
- природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным (Больцман);
- энтропия является однозначной функцией состояния и не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;
- у всякой равновесной системы существует функция состояния – энтропия, которая не убывает при любых процессах в изолированных и адиабатно изолированных системах;
- бесконечно малое изменение тепла при равновесном процессе, деленное на абсолютную температуру тела, является полным дифференциалом энтропии;
- в любой окрестности произвольно заданного начального состояния имеются состояния, которые нельзя как угодно точно аппроксимировать адиабатическими изменениями состояния (аксиома Каратеодори).
- уравнение для бесконечно малого изменения тепла в равновесных процессах вида (4.18) при любом числе независимых параметров состояния всегда голономно, причем интегрирующим делителем является абсолютная температура.

Очевидно, что второе начало допускает существенную множественность формулировок. Именно этот факт и приводит к вопросам, связанным с неполной ясностью в этой области, которая является следствием нечеткости определений и необъятности области применения этого закона.

Понятие энтропии и второе начало тесно связаны между собой. Второе начало накладывает запрет на осуществление многих процессов, следствием которого является то, что среди множества всех термодинамических процессов не все переходы из одного состояния системы в другие возможны. Часто второе начало представляют как закон об энтропии. Для равновесных процессов второе начало термодинамики математически выражается уравнением энтропии:

$$ds = \frac{\delta Q}{T}, \quad (4.19)$$

при этом для любого равновесного термодинамического процесса справедливо соотношение:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (4.20)$$

Для неравновесных процессов содержание второго начала определяется неравенствами:

$$ds > \frac{\delta Q}{T} \text{ и } \oint \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad (4.21)$$

На основе объединения первого и второго законов термодинамики формулируется основное уравнение термодинамики, которое для равновесных процессов имеет вид:

$$T \cdot ds = du + p \cdot dv + \sum_{k=1}^n P_k dz_k, \quad (4.22)$$

а для неравновесных процессов записывается в форме неравенства:

$$T \cdot ds \geq du + p \cdot dv + \sum_{k=1}^n P_k dz_k. \quad (4.23)$$

Смысл энтропии раскрывается также в статистической физике. Одно из основных соотношений термодинамики, связывающее термодинамическую вероятность  $W$  с энтропией системы  $s$  имеет вид:

$$s = k_* \cdot \ln W \quad (4.24)$$

и носит фундаментальное значение. Данное соотношение указывает на то, что существует некоторая однозначная аддитивная функция состояния, получаемая с помощью нелинейного преобразования распределения вероятности состояний системы. В частном случае для идеального газа подобное преобразование имеет вид уравнения (4.24). Данное уравнение выражает математически второе начало в формулировке Больцмана.

Понятие термодинамической вероятности системы основано на целом ряде гипотез и тесно увязано с методами оценки и подсчета этой величины. Для ее определения вводятся понятия макросостояний и микросостояний. Вероятность макросостояния (некоторого состояния системы) определяется по числу тех микросостояний, которые реализуют данное макросостояние. Термодинамическая вероятность в состоянии равновесия системы достигает максимальных значений.

Обычно за термодинамическую вероятность принимают относительную вероятность  $W = P/P_0$ , указывающую во сколько раз математическая вероятность  $P$  рассматриваемого макросостояния больше, чем математическая вероятность  $P_0$  другого стандартного макросостояния. Принципом, позволяющим обосновать понятие термодинамической вероятности, является положение, что все микросостояния являются *равновероятными* с математической точки зрения. Это приводит к *эргодической гипотезе* – с течением времени система должна пройти через все микросостояния, отвечающие заданным макроскопическим условиям.



Для подсчета термодинамической вероятности существуют разные подходы. Известны способы определения этой величины по методам Больцмана, Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака, основанные на комбинаторной статистике [81, 120]. Например, по методу Больцмана, если в системе  $N$  элементов (молекул), то число всех возможных перестановок как внутри групп элементов, так и между группами по теории сочетаний равно  $N!$ . Для определения вероятности  $W$  необходимо исключить все перестановки, которые происходят внутри групп элементов:

$$W = \frac{N!}{\prod_i N_i!}, \quad (4.25)$$

где  $N$  – общее число элементов системы;  $i$  – количество групп элементов в системе;  $N_i$  – количество элементов в  $i$ -той группе.

Однако главное место в статистической физике занимает метод ансамблей, предложенный Гиббсом. При использовании этого метода одновременно рассматривают большое число тождественных термодинамических систем, состояния которых отображаются в гиббсовом фазовом пространстве точками, а термодинамическую вероятность связывают с элементарным объемом фазового пространства и дифференциалом энергии.

В свое время Эйнштейн предложил метод определения термодинамической вероятности, использующий общепринятые основы статистики. По его предложению под термодинамической вероятностью можно понимать отношение длительности осуществления данного макросостояния  $\tau_i$  к общей длительности наблюдения  $\tau$ , при условии, что общая длительность наблюдения чрезвычайно велика. Определение Эйнштейна в термодинамике не получило развития, так как оказалось, что без дополнительных гипотез, исходя из обычной механической характеристики системы, невозможно вычислить термодинамическую вероятность по Эйнштейну. Такая оценка вероятностей широко используется в случаях, когда существует возможность длительного наблюдения за поведением системы. Подобный подход нашел распространение в социальных, экологических и экономических науках, а также в промышленной и экологической безопасности, где вероятность состояния системы оценивается по характерным событиям в опыте.

Методы определения термодинамической вероятности основаны на умозрительных гипотезах распределения молекул по фазовому пространству, которые отвечают основным термодинамическим представлениям о существовании и поведении вещества.

Однако в основе подсчета термодинамической вероятности состояния лежит допущение о равновозможности состояний термодинамических систем, что, естественно, маловероятно для большинства случаев. Другими словами, исходное допущение о

равновозможности состояний уж явно идеализировано и не привязано к конкретным событиям опыта.

В свое время Ф. Верле [134] отмечал явные недостатки понятия термодинамической вероятности. Практически термодинамическая вероятность сводится к определению числа благоприятных случаев, в то время как классическая вероятность представляет собой отношение наблюдаемых в опыте благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов. Исключение числа возможных случаев оправдано только, если это число постоянно, что как раз и имеет место в равновесном идеальном газе. Поэтому при использовании понятия термодинамической вероятности нет явно выраженной связи с наблюдаемыми событиями, как это принято в теории вероятности.

Критические замечания Ф. Верле затрагивают одну из самых серьезных проблем термодинамики и указывают на то, что понятие состояния термодинамической системы и вероятности состояния теоретически недостаточно проработано.

Необходимость теоретического определения термодинамической вероятности состояния систем в равновесных условиях вызвана отсутствием возможности непосредственной опытной оценки этой величины. В экспериментальной термодинамике ее можно косвенно оценить вычислением энтропии по температурному ходу теплоемкости на основе теплового закона Нернста, однако сложно сказать, что в этом случае определяется и к какому событию можно отнести вычисленную вероятность. Справедливость соотношения Больцмана  $s = k_* \cdot \ln W$  для других термодинамических систем, кроме идеального газа, остается открытым вопросом, который без привлечения эмпирических данных не может быть решенным.

Существование энтропии является фундаментальным принципом, определяющим изменение свойств и состояний системы в различных термодинамических процессах. Следует отметить, что между множеством формулировок второго начала нет принципиальных различий и противоречий. Скорее всего, все это – различные попытки изложения некоторого фундаментального закона природы.

Однако при современном уровне знаний принцип существования энтропии рассматривается как отдаленное логическое следствие закона сохранения энергии и результат обобщения опытных данных, которыми располагает термодинамика. Сегодня в термодинамике существование энтропии не постулируется в качестве самостоятельного принципа (если не рассматривать некоторые аксиоматические направления теории, о чем будет сказано далее). Здесь согласимся с утверждением автора работы [31, с.371], что такое решение проблемы в общепринятой системе изложения основ термодинамики ни в какой мере не подготовлено и не оправдано. Эта система даже не располагает понятиями и терминами, в которых можно было бы кратко и ясно сформулировать самостоятельный принцип

существования энтропии, при этом однозначно отразив физический или статистический смысл этой величины.

Если выходить за рамки термодинамики, то видно, что применение понятия энтропии необъятно [51, 103, 128]. Анализ состояния исследований в этой области указывает на то, что природа энтропии до конца пока не ясна, так как нет однозначного мнения по этому вопросу.

#### 4.5 Дифференциальные уравнения термодинамики

Теоретической базой большинства дифференциальных уравнений термодинамики является теория дифференциальных пфаффовых форм и соотношения дифференцирования для уравнений нескольких переменных [92]. Термодинамические соотношения, устанавливающие связи между различными свойствами вещества, получают из основного уравнения термодинамики (4.22). Число этих формул велико, но методика их вывода крайне проста [92].

Из уравнений  $du = T \cdot ds - p \cdot dv$ ,  $dh = T \cdot ds + p \cdot dv$  можно получить уравнения Максвелла, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s &= -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v; & \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s &= \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p; \\ \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v &= \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T; & \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p &= -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь  $h = u + p \cdot v$  – энтальпия.

Из этих же уравнений получают частные производные для энергии и энтальпии:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v &= T; & \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s &= -p; \\ \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p &= T; & \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s &= v \end{aligned} \quad (4.27)$$

Уравнения для теплоемкостей имеют вид:

$$c_v = T \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v; \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v; \quad (4.28)$$

$$c_p = T \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p; \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p, \quad (4.29)$$

$$c_p - c_v = T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_v. \quad (4.30)$$

Изменение энтропии в термодинамических процессах характеризуется уравнениями Максвелла и соотношениями (4.28) и (4.29). Достаточно часто используются также соотношения для энтропии, которые получаются из уравнения сохранения энергии:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_u = \frac{p}{T}; \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_h = \frac{v}{T}. \quad (4.31)$$

В свою очередь показатель изоэнтропы определяется по формулам:

$$k = \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)_s = -\frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T. \quad (4.32)$$

Выше приведены только некоторые дифференциальные уравнения термодинамики. Из шести важнейших термодинамических величин ( $v, p, T, s, u, h$ ) можно составить 120 частных производных первого порядка вида  $(\partial y / \partial x)_z$ . Каждую из них можно представить как функцию различных аргументов. Для их вывода пользуются вспомогательными таблицами формул, например, таблицами Бриджмента [81], которые позволяют установить наиболее существенные соотношения.

Законы термодинамики, а также приведенные выше соотношения, дополненные методами определения термодинамической вероятности и целым рядом эмпирических закономерностей и уравнений состояний, образуют математический аппарат термодинамики. Данный аппарат является основным инструментом термодинамического анализа. Как указывалось, в основе многих дифференциальных уравнений термодинамики лежит закон сохранения энергии в своем современном виде (4.22), поэтому эти уравнения являются следствием существования данной фундаментальной закономерности. На основе закона сохранения энергии в термодинамике удалось построить особую методологию моделирования физических процессов при термических взаимодействиях.

Применение подобной общей методологии моделирования в других областях знаний является актуальной задачей при изучении сложных систем, так как это может дать инструмент для анализа свойств и описания процессов изменения состояния различных систем.

#### 4.6 Аксиоматическое направление в термодинамике

Аксиоматический метод является одним из способов дедуктивного построения научных теорий. Методология метода предполагает, что выбирается некоторое множество принимаемых без доказательств предложений – аксиом (или постулатов). Входящие в аксиомы понятия явно не определяются в рамках разрабатываемой теории. Далее формулируются основные приемы исследования, логические формы и правила вывода положений теории (методы), позволяющие последовательно выводить одни предложения из других. На основе аксиом и принятых методов все остальные положения теории выводятся путем доказательства теорем и развития исходных положений.

Считается, что аксиоматизация осуществляется обычно после того, как содержательно теория уже в достаточной мере развита и построена, и основные положения которой подтверждены сопоставлением с опытными

фактами. Процесс аксиоматизации теории обычно протекает сравнительно быстро, если объем исходного знания достигает необходимого уровня.

В термодинамике процесс аксиоматизации науки длится уже более ста лет. Все работы в этой области в том или ином виде преследовали одну цель – придать учению об энтропии логическую строгость. Со времени опубликования К. Каратеодори первой работы по аксиоматике [49], появилось значительное количество публикаций, посвященных данной проблеме [13, 19, 74, 100, 113, 120, 125, 126, 131, 133]. Существенный вклад в анализ классических формулировок термодинамики внесла Афанасьева-Эренфест [13]. Она раскрыла логическую противоречивость формулировок второго закона, данных Клаузиусом и Кельвином. Основным выводом исследования – существование энтропии и абсолютной температуры не зависит от необратимости реальных процессов и само существование энтропии как функции состояния недостаточно для обоснования ее возрастания. Необратимость является особым понятием, определяющим направление процессов. Это достаточно важные выводы, затрагивающие самую суть второго начала. В данной книге формулируются такие же выводы, однако иным путем, нежели это сделала Афанасьева-Эренфест.

Подход Каратеодори привлек большое число последователей, его развитию и критическому анализу посвящен целый ряд работ [113, 120, 125, 126, 131, 133]. Многие авторы пытались развить аксиоматическое направление в термодинамике путями, которые отличались от подхода Каратеодори [13, 31, 44, 74, 81, 101, 103, 113, 120, 125]. Например, А. Зоммерфельд формулирует второе начало термодинамики в следующем виде: «Каждая термодинамическая система обладает функцией состояния, называемой энтропией. Энтропия вычисляется следующим образом. /Дается способ определения энтропии через дифференциал количества тепла и абсолютную температуру/. При реальных (не идеальных) процессах энтропия замкнутой системы возрастает». Данное обоснование энтропии, как и многие другие, не содержит системы аксиом, так как явно не опирается на данные опыта и вводит определения, которые обосновываются в рамках дальнейшей теории (например, абсолютная температура).

Множество подходов в области аксиоматизации термодинамики указывает на то, что аксиоматическое направление в этой науке, несмотря на сто лет научных поисков, находится пока на этапе становления. В качестве примера для сравнения можно сослаться на известные аксиомы, предложенные А.Н. Колмогоровым, которые дают обоснование теории вероятности [52]. Самое главное, что аксиомы должны отражать действительный мир опыта, и здесь необходимо отметить, что энтропия, в отличие от вероятности событий, явно в опыте не определяема и не измеряема. Обратим внимание на то, что термодинамика располагает двумя множествами опытных фактов:

- для многих термодинамических систем могут быть построены уравнения состояния или установлены зависимости между свойствами системы хотя бы в численном виде;
- практически для всех веществ в различных условиях опыта могут быть найдены теплоемкости.

Поэтому при аксиоматизации термодинамики можно оперировать понятиями и терминами, уже определенными в рамках этих эмпирических фактов. Однако, это не касается энтропии – ее дальнейшее определение должно обосновываться из системы аксиом или полученных следствий. Другими словами, необходимо постулировать не существование энтропии, а самоочевидные исходные принципы, вытекающие из опыта, которым с помощью методов формализации и обобщения дается более широкое содержание.

Аксиоматизация термодинамики может быть проведена различными способами, как в отношении формулировки аксиом, так и выбора основных понятий и определений. Один из таких подходов был предложен Каратеодори. Справедливости ради необходимо отметить, что этот подход не обладает явной простотой. Однако нас интересует формализм данного теоретического метода, и на этом хотелось бы акцентировать внимание. Предположим, что некоторая величина может быть представлена в виде:

$$dQ = Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n, \quad (4.33)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  – параметры состояния системы;  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  – функции этих параметров.

В термодинамике величина  $dQ$  – это количество теплоты. Возможность представления этой величины в виде (4.33) обеспечена объемом предварительных знаний, связанных с эмпирическими данными.

Во многих случаях можно задаться предположением, что некая аддитивная величина вида (4.33) может существовать. Выражение (4.33) понимается как уравнение, которое служит для определения величины  $dQ$  через параметры системы в условиях квазистатического процесса.

Каратеодори поставил вопрос об условиях, при которых возможно представление  $dQ$  в форме  $dQ = T \cdot ds$ , где  $T$  является интегрирующим делителем, а величина  $ds$  – полным дифференциалом.

Для этого им была доказана лемма из теории пфаффовых уравнений: если в окрестности любой точки  $n$ -мерного пространства есть точки, не достижимые вдоль кривых, удовлетворяющих уравнению

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n = 0, \quad (4.34)$$

то уравнение вида (4.33) голономно, и для левой части уравнения обязательно существует множитель, обращающий его в полный дифференциал.

Далее, как универсальное свойство всех физических систем постулируется «адиабатическая недостижимость». Вместе с доказанной леммой, это эквивалентно утверждению, что уравнение (4.33) безусловно голономно и для него существует интегрирующий делитель.

В результате была сформулирована вторая аксиома Каратеодори: «В любой окрестности произвольно заданного начального состояния имеются состояния, которые нельзя как угодно точно аппроксимировать адиабатическими изменениями состояния». Данная аксиома является одной из формулировок второго начала термодинамики.

Из самого факта голономности уравнения (4.33) Каратеодори выводит, что интегрирующим делителем для выражения элементарного количества теплоты является абсолютная температура [49].

В аксиоматическом направлении учения об энтропии задача обоснования существования энтропии в принципе решена. При этом к соответствующему математическому доказательству никакие физические гипотезы, кроме постулата адиабатической недостижимости, не привлекаются. Считается, что формальный аппарат доказательства отличается строгостью. Однако, в чем физическая суть принципа адиабатической недостижимости Каратеодори не раскрывается. Принцип Каратеодори постулирует положение о том, что пфаффова форма вида (4.33) от  $n$  переменных всегда голономна. При этом в основе построения всей теории лежит постулат адиабатической недостижимости и теорема об интегрируемости пфаффовых форм. Известно, что при наличии более двух переменных существование интегрирующего делителя является исключительной особенностью коэффициентов  $Z_k$  в выражении (4.33). Второй закон определяет, что именно такой особенностью обладают дифференциальные пфаффовы формы количества теплоты  $\delta Q$  для макроскопических квазистационарных физических систем, однако при этом нет ответа на вопрос – какая физическая закономерность лежит в основе этого факта. Наиболее слабым местом аксиоматики Каратеодори, как отмечал Планк, является принцип адиабатической недостижимости. По его словам проблема адиабатической недостижимости никогда не была предметом специального изучения, и никто не проводил соответствующих экспериментов. В настоящее время объем опытных данных недостаточен для признания постулата адиабатической недостижимости универсальным физическим принципом. На это указывал в свое время А.А. Гухман. Однако, как справедливо утверждается в [31], система Каратеодори содержит интересную идею. В общем виде она формулируется следующим образом. Если некоторая величина, которая определена как количество воздействия  $dQ$ , о природе которой мы ничего не утверждаем, может быть представлена в виде (4.33), то присоединение постулата «недостижимости» приводит к заключению, что для величины  $dQ$  существует интегрирующий делитель. Другими словами, величина  $dQ$  может быть представлена в виде  $dQ = Z \cdot dz$ , где  $Z$  является интегрирующим делителем, а величина  $dz$  – полным дифференциалом. В этом случае постулат «недостижимости» излагается согласно [31] следующим образом: если при переходе системы из данного состояния в

смежное удовлетворяется требование  $dQ \neq 0$ , то восстановление первоначального состояния, без нарушения условия  $dQ = 0$ , невозможно.

Разработанная Каратеодори система обоснования математической структуры количества воздействия может быть непосредственно распространена на воздействия любого рода и любые сложные системы. Единственным ограничением является условие квазистационарности, при котором в ходе процесса во времени внешние воздействия должны изменяться достаточно медленно. В этом случае состояниям системы присуща определенная однородность и непрерывность параметров. В дальнейшем мы будем обращаться к основным выводам работы Каратеодори. Эти выводы содержат общий принцип, который можно распространить на нефизические системы, благодаря чему можно сформулировать методы моделирования систем различной природы. Однако, это возможно будет только после раскрытия математической сути принципа «адиабатической недостижимости» и получения ответа на вопрос: почему многие сложные системы имеют функциональные ограничения на осуществление процессов, которые ведут к изменению их состояния.



## Глава пятая

# У ИСТОКОВ КОНВЕРГЕНЦИИ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО И ГУМАНИТАРНОГО ЗНАНИЯ

В настоящее время существует явное разделение областей человеческого знания, которые свойственны естественным и общественным (гуманитарным, социальным) наукам. Суть различий затрагивает основания данных наук и определяет процесс формирования парадигм этих двух областей знаний. Тем не менее, следует отметить, что сама граница разделения является относительно условной; многие методы, разработанные в естественных науках, используются в обществоведении. В свою очередь, часть идей и принципов общественных наук вошла в систему мировоззрения естествознания.

Постановка любой задачи заключается в том, чтобы перевести ее словесное (вербальное) описание в формальное, т.е. провести формализацию задачи. Естественные науки предполагают обязательную формализацию основных закономерностей, характеризующих природные явления, а также их количественное описание за счет формулировки исходных фундаментальных гипотез, теорий и моделей. Все современные естественнонаучные теории, так или иначе, при формализации используют как мысленное (абстрактное), так и реальное модельное описание, в частности, макетное, физическое, математическое или компьютерное моделирование рассматриваемых процессов или явлений. При этом под моделью обычно понимают некоторое упрощенное представление о реальном объекте, которое, отображая или воспроизводя объект исследования, заменяет его и предоставляет о нем новую информацию, которая очень часто не является очевидной.

В свою очередь, общественные науки ориентируются в основном на мысленное модельное описание основных закономерностей общественных процессов за счет построения гипотетических, образных, вербальных и подобных им модельных представлений, которые позволяют давать преимущественно качественные характеристики изучаемых явлений. Количественные модели (например, знаковые математические модели) используются в этих науках значительно реже, что указывает на сложности в построении формализованных языков моделирования в данных областях знаний и формулировки на их основе количественных закономерностей.

Создание формализованных языков моделирования является закономерным процессом развития любой науки, так как это позволяет систематизировать эмпирические знания и лучше понимать сущность наблюдаемых явлений и процессов.

Методология моделирования природных явлений изначально вышла из физики. Еще в 1884 году в своих «Балтиморских лекциях» У. Томсон (лорд Кельвин) отмечал, что понять явление – значит построить его

модель. С течением времени интерес к процессу моделирования стал всеобщим, и в настоящее время нет ни одной науки, ни одной области знаний, где бы не применялись модели. В каждой науке имеется собственная методология и теория, а разные формы и виды моделей (от вербальных и образных до физических, математических и компьютерных) являются предметом этой теории и позволяют в наглядной и упрощенной форме отражать объект исследования и его закономерности.

Будущее систем модельных описаний связано с тенденцией перехода от качественных к количественным моделям. Другими словами развитие моделирования идет по пути усложнения процесса формализации от вербального и образного описания, позволяющего давать качественную характеристику процессов, до знакового описания (математического, алгоритмического), которое позволяет давать количественную характеристику объектов и явлений. Лучше всего о значимости моделирования сказал К. Маркс – «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой».

Естественные науки повсеместно используют знаковые модели. В свою очередь, в общественных науках не всегда возможна высокая степень формализации в области предмета исследования. Если в экономике достаточно широко применяются математические и компьютерные модели, то, к примеру, в философии и истории применение формализованных моделей достаточно редкое явление. Возможность использования математических методов в философии очень часто вызывает формальные сомнения и возражения у многих исследователей даже на уровне обсуждения вопроса. Доводом к этому служит то, что философия, как и математика во многом определяет облик современной науки и является инструментом изучения всеобщих закономерностей в природе и обществе. Однако, идея конвергенции наук постоянно обсуждается в научной среде. Например, И. Пригожин, который много времени и сил потратил на изучение феномена времени [75, 77], отмечал, что его мечтой было способствовать унификации естественных наук и философии через решение загадки времени.

Далее отметим, что большинство работ, связанных с использованием математических моделей в исторических исследованиях, основано на статистической обработке данных исторических источников и применении некоторых видов аналитических и имитационных моделей [118, 119]. Последнее время наблюдаются предпосылки к расширению области применения количественных моделей (в том числе и математических) в исторических исследованиях. Тенденции, которые наблюдаются в современной науке указывают на то, что конвергенция естественнонаучного и гуманитарного знания неизбежна, т.к.: «Высшим достижением человеческого гения является то, что человек может понять вещи, которые он уже не может вообразить» (Л.Д. Ландау).

Таким образом, различие парадигм естественнонаучного и гуманитарного знания во многом связано со степенью формализации

изучаемых объектов и явлений и, как следствие, с формой представления модельных описаний в соответствующих науках.

В следующем разделе книги делается попытка ответить на вопрос: возможна ли высокая степень формализации при описании объектов и явлений в науках, где пока слабо применяется математическое моделирование и создаются преимущественно качественные модели? При этом основным инструментом изучения явлений и процессов выступают методы системного анализа и общей теории систем. В данном исследовании крайне актуально наметить пути решения основных задач ОТС, т.е. попытаться сформулировать ответы на следующие вопросы: существуют ли системные связи в физических, биологических и социальных явлениях и в чем их суть; как использовать естественнонаучные методы в общественных науках? Каким путем можно построить общесистемные теории, применимые как в естественных, так и в гуманитарных науках? Вполне возможно поставить и другие задачи из области предмета исследования ОТС, например, можно ли “математизировать” некоторые основополагающие области философии или истории; возможно ли модельное описание развития человеческого общества за счет обобщения исторических данных и событий и построения количественных моделей общественных процессов?

Суть ответов на данные вопросы затрагивает основания многих наук и тесно связана с общими представлениями, которые свойственны всем областям знаний. Исходные принципы научного знания (детерминизм явлений; истинность теорий и моделей, подтвержденных практикой; относительность знания) изначально основываются на повсеместном наблюдении событий, которые лежат в основе получения любых данных, фактов и закономерностей объективной реальности [61]. В свою очередь, многообразие всех наблюдаемых событий – это сущность феномена времени – «белого пятна» современной науки. Содержание понятий индетерминизма и детерминизма, случайности и предопределенности, случайного и достоверного события, объективной закономерности и ее модельного представления, вероятности как меры возможности осуществления событий и вероятности как меры проявления закономерностей, входит в основу методологии научного познания. Детерминизм представляет собой учение о всеобщей и закономерной связи явлений и процессов в окружающем мире. Индетерминизм исходит из отсутствия какой-либо связи между явлениями во времени. Оба принципа дают противоположные точки зрения на характер взаимосвязи событий, процессов и явлений во времени. Естественно, что в природе всеобщая связь явлений не может быть выражена простыми случаями и крайностями, должно наблюдаться органическое единство этих противоположных точек зрения.

Тем не менее, до недавнего времени в науке преобладали мнения, что случайность и предопределенность (необходимость), по своей сути понятия противоположные. Философ К. Поппер утверждал, что

объективная вероятность не совместима с детерминизмом. В данном вопросе очень много неясностей и крайностей даже на уровне философских воззрений, не говоря уже об уровне модельных описаний, где следует применять ясные и понятные методологические принципы. В последующих разделах книги попытаемся показать, что это не совсем так. Статистический подход – это один из способов построения моделей явлений и процессов, который применяется при описании как вероятностных, так и детерминированных закономерностей. Так как все изменения, наблюдаемые в системах, которые нас окружают, познаются во времени, то понимание сути случайности и предопределенности, статистической и динамической закономерности лежит в раскрытии феномена времени, а это один из основных нерешенных вопросов современной науки. Не получив научный ответ на этот вопрос, невозможно раскрыть содержание многих понятий, связанных с процессами развития и изменения систем.

В процессе исследования будем исходить из единства и взаимосвязи понятий предопределенности и случайности, детерминированных и вероятностных причинных связей, динамической и статистической закономерности явлений и процессов. При изучении данной проблемы применительно к процессу моделирования исходим из принципа детерминизма в модельных описаниях. То, что детерминизм органично присущ моделированию является признанным фактом – любая достоверная физическая или математическая модель описывает закономерные связи изучаемых явлений и процессов, в основе которых вполне могут лежать как детерминированные, так и вероятностные особенности. Использование стохастических средств в моделях дает возможность ввести элементы неопределенности и тем самым расширить область применения динамических моделей на некоторые классы случайных процессов. При таком подходе, модель любой степени формализации описывает (в целом) динамику некоторого процесса или явления, которое происходит закономерно, в результате действия определенных причин. При этом изучение на модели процесса перехода изучаемой системы из одного состояния в другое обеспечивается за счет регистрации характерного множества событий, которые отражают наблюдаемые с течением времени изменения в системе.

В свою очередь, в окружающем нас мире при отображении всего многообразия явлений не может быть крайностей, закономерные связи во времени могут формироваться исходя из существования как детерминированных, так и вероятностных особенностей. Поэтому, следуя воззрениям М. Каца и Э. Нельсона, любое развитие природного или общественного процесса во времени (неважно, детерминированное, детерминировано-вероятностное или явно вероятностное) при анализе в терминах вероятностей будем считать стохастическим процессом [124, 129]. Это позволяет рассматривать оба принципа, которые определяют характер явлений во времени, во взаимосвязи, причем вероятность, как

количественная мера проявления закономерностей, будет указывать на то, какие особенности процессов преобладают в явлении: детерминированные или вероятностные. В зависимости от характера этих особенностей при описании систем выделяют два типа проявления причинной связи, связанных с динамическими (однозначными) и статистическими (вероятностными) закономерностями.

Согласно известным определениям динамическая и статистическая закономерности – это формы проявления закономерной связи между предшествующими и последующими состояниями систем. Динамическая закономерность представляет собой форму причинной связи, при которой данное состояние системы однозначно определяет все ее последующие состояния, в силу чего знание начальных условий дает возможность точно предсказать дальнейшее изменение и развитие системы. Статистическая закономерность – это форма причинной связи, при которой данное состояние системы определяет все ее последующие состояния не однозначно, а лишь с определенной вероятностью, являющейся объективной мерой возможности реализации заложенных в прошлом тенденций изменения и развития. Так как в основе факта установления динамической или статистической закономерности всегда лежит событие, то различие между этими закономерностями относительно. Это связано с тем, что любое событие в строгом смысле слова всегда случайно, при этом множество достоверных событий (детерминированных событий, происходящих обязательно, или, как еще говорят, происходящих с вероятностью, равной или близкой к единице) будет определять динамическую закономерность, которая свойственна предопределенности. В свою очередь, множество случайных событий (событий, которые могут произойти или не произойти) будет определять статистическую закономерность, которая свойственна случайности.

Случайность и предопределенность событий определяются особенностями и видами процессов или явлений, протекающих в природе и обществе. С другой стороны, случайность и предопределенность событий в большой степени является следствием, связанным с временным диапазоном, в котором наблюдается явление. Например, в пределах средней продолжительности жизни смерть человека случайна, так как в любой момент может произойти или нет. В свою очередь, в пределах нескольких веков она предопределена, так как произойдет обязательно. Другими словами, то, что для конкретного объекта случайно, для класса этих объектов может быть закономерным явлением.

Решение о том, динамические или статистические закономерности, преобладают в явлении, принимается на основе практики. Предположим, что состояние некоторой системы на заданный момент времени было определено. Это значит, что изучаемые параметры или характеристики системы были измерены, оценены или получены в процессе наблюдения или эксперимента. Соответствующие события мы можем считать достоверными, так как на момент анализа состояния системы они уже

произошли. Предположим далее, что система постепенно переходит в новое состояние и соответствующие параметры и характеристики этого состояния были спрогнозированы, т.е. оценены с помощью применения некоторой модели (например, математической). После этого был проведен опыт по определению тех же величин, причем для нового момента времени соответствующие события также являются достоверными. Если при изучении многих состояний реальной системы величины, наблюдаемые в опыте, с высокой точностью совпадают с их прогнозными значениями, то считают, что системе присущи детерминированные закономерности и поведение системы описывается динамической моделью. Если на основе динамических моделей не удастся описать явление, то считают, что система обладает статистическими закономерностями. Принятие решения о выборе модели достаточной точности длительно вырабатывается практикой, а именно путем перебора множества разных моделей, пока опыт не подтвердит оптимальный вариант выбора. В этом случае формулируются общие представления, которые принимаются научным сообществом.

На данном примере видна определенная условность принятия гипотезы о виде закономерности, так как в основе утверждения всегда лежит некоторая модель, отражающая уровень наших знаний о явлении. Причем, на вопрос о том, можно ли построить точную динамическую модель любого явления, сегодня пока нет однозначного ответа. Все это указывает на тесную связь между статистической и динамической закономерностями, которые определяют характер изменения состояний систем во времени.

Именно поэтому многие известные ученые новую концептуальную парадигму в развитии современной науки видят в синтезе динамических и статистических закономерностей объективной реальности. Если в терминах вероятностей статистическая и динамическая закономерности могут быть сведены к более общей стохастической закономерности, то необходимо определить критерий, который бы отражал это сходство. Следует также сформулировать единое представление о стохастической закономерности, при этом статистическая и динамическая закономерности должны органически вписываться в это представление и являться частными случаями общей закономерности. В свою очередь отметим, что достоверная модель в наглядной и упрощенной форме отражает основные закономерности процесса или явления. Поэтому общее представление о стохастической закономерности должно охватывать как реальные процессы и явления, так и их модели. Исходя из этого, если сформулированная проблема будет решена на уровне моделей, то она тем самым будет решена и на уровне объективных закономерностей, которые моделируются этими моделями.

В данном вопросе будем исходить из известного факта, что динамические модели хорошо описывают детерминированные процессы в природе и обществе. Другими словами, эти модели, несмотря на

упрощенную форму, достоверно отражают поведение целых классов объектов и явлений, которым свойственны детерминированные закономерные связи. Поэтому, установив особенности процесса моделирования при построении таких моделей, можно попытаться сформулировать общие особенности, которые свойственны как динамическим, так и статистическим закономерностям, исходя из факта совершения тех или иных событий.

Сложность данной задачи связана с тем, что в науке пока нет основополагающей систематики (таксономии) наблюдаемых событий, исходя из общепринятых критериев, учитывающих причинно-следственные, временные, статистические и динамические особенности событий. Существующая классификация событий по области наблюдения (экономические, природные, социальные, политические и т.д.) крайне ограничена и однобока, тоже можно сказать и об принятой классификации событий в теории рисков. Теория вероятностей также не дает ответа на этот вопрос, хотя оперирует событиями и их вероятностями.

В работах [7, 8] ученые И. Кохэн и И. Пригожин обращают внимание на революцию в области теории вероятности, связанную с повсеместным внедрением вероятностных идей, которую можно охарактеризовать как революцию в приложениях. Однако, несмотря на то, что «революция, способствующая внедрению вероятностных идей» [8], продолжается и по ныне, в теории вероятности и статистике – нет общенаучных результатов, которые бы привели к систематизации и классификации наблюдаемых событий; не разработаны критерии для таксономии событий. Развитие биологии получило качественный скачок после создания систематики животного и растительного мира. Недаром биологическую систематику называют математикой биологии. Подобная революция в области теории вероятности еще впереди.

Если исходить из решения задач, поставленных в данной работе, то следует постараться найти общие особенности в формировании характерных событий, которые отражают эволюционные процессы в различных системах. Сделаем следующие предположения. Во первых, так как динамические и статистические закономерности суть более общей стохастической закономерности, то критерий их сходства должен быть определен исходя из вероятностных представлений о возможности осуществления событий. Во вторых, в основе всех динамических и статистических моделей лежит основополагающее понятие математического анализа – понятие функции. Таким образом, изучаемый вопрос связан с использованием вероятностных принципов в процессе представления функциональных зависимостей.

В простейшем случае понятие функции дается в виде: если величина  $x$  может принимать произвольные значения, и указано какое-либо правило, посредством которого приводятся в соответствии с этими значениями определенные значения другой величины  $y$ , то говорят, что  $y$  является функцией от  $x$  и эту связь записывают символически следующим образом:

$y = f(x)$ . В свою очередь, определение функции по Дирихле:  $y$  есть функция переменной  $x$ , определенная на отрезке  $[a \leq x \leq b]$ , если *всякому* значению переменной  $x$ , содержащемуся на этом отрезке, соответствует вполне определенная величина переменной  $y$ , причем совершенно неважно, каким именно способом установлено это соответствие. Современное определение функции в терминах множеств имеет вид: пусть каждому *произвольному* числу  $x$  из заданного множества  $E$  поставлено в соответствие число  $y$ , обозначаемое  $y = f(x)$ , тогда говорят, что на множестве  $E$  задана функция  $y = f(x)$ .

Если представить задание величины  $x$  как некоторое событие, то исходя из выделенных словосочетаний, в приведенных выше определениях: «произвольные значения», «всякому значению», «произвольному числу», данное событие можно рассматривать как *равновероятное*. Это говорит о том, что распределение величины  $x$ , как вероятностный принцип и исходная предпосылка при построении функциональной зависимости, будет соответствовать равномерному закону распределения. Следовательно, *равновероятность* – это основное свойство динамической закономерности при ее исходной формулировке. Исходя из этого, в заданном пространстве переменных множество выработанных практикой моделей (тех или иных функциональных зависимостей) можно рассматривать как определенную среду моделирования реального стохастического процесса. Основным свойством данной среды является равновероятный выбор значений исходных независимых переменных. В такой среде моделирования возможно представление как обычных функциональных зависимостей, так и статистических зависимостей. Однако, в последнем случае, исходя из опытных данных, принцип равновероятности выбора значений исходных переменных чаще всего нарушается, а сами переменные являются зависимыми.

Таким образом, мы приходим к идее вероятностного пространства для многих переменных, где элементарным равновероятным событиям выбора значений из исходного множества некоторых независимых величин ставятся в соответствие неравновероятные события для множества других зависимых величин и связь между этими величинами задается путем определения функции на исходном множестве. В этом случае вероятностное пространство представляет собой некоторую совокупность  $(Z, A, W)$ , состоящую из множества  $Z$  (равновероятных элементарных событий), класса  $A$  подмножеств множества  $Z$  (случайных сложных событий статистического опыта) и вероятностной меры  $W$ , которая представляет собой действительную функцию и определяет связь между распределениями на множествах  $Z$  и  $A$ . При этом вероятностная мера  $W$  может быть определена в терминах статистических или динамических закономерностей, так как, исходя из определения функции, совершенно не важно каким образом установлено соответствие между



величинами. Если это соответствие выражается в функциональном виде и детерминировано, то можно говорить о существовании динамических закономерностей. Если это соответствие выражается в виде распределений и отражает случайность явления, то следует говорить о статистической закономерности. В свою очередь, если установить соответствие невозможно, то будем говорить об отсутствии связей между величинами. Отсюда следует, что в терминах понятий вероятностного пространства и функции можно сформулировать общую стохастическую закономерность, которая в качестве частных случаев включает как динамическую, так и статистическую закономерности.

Таким образом, если рассматривать вероятность как меру существования общей закономерности стохастического характера в процессе или явлении, то при отсутствии связей между значениями вероятности характерных событий из множеств  $Z$  и  $A$ , построение достоверных моделей любого вида становится невозможным. С другой стороны, если существует некоторая закономерность (что будет отражаться в наличии связей между вероятностями), то возможно построение как качественных, так и количественных моделей.

Создание качественной модели является первым шагом в процессе моделирования любого явления. При накоплении достаточного количества опытных данных следующим шагом является построение количественной модели явления. События свойственны любым процессам, которые наблюдаются в природе и обществе. Именно поэтому расширение области применения количественных моделей в различных областях знаний закономерно и неизбежно.

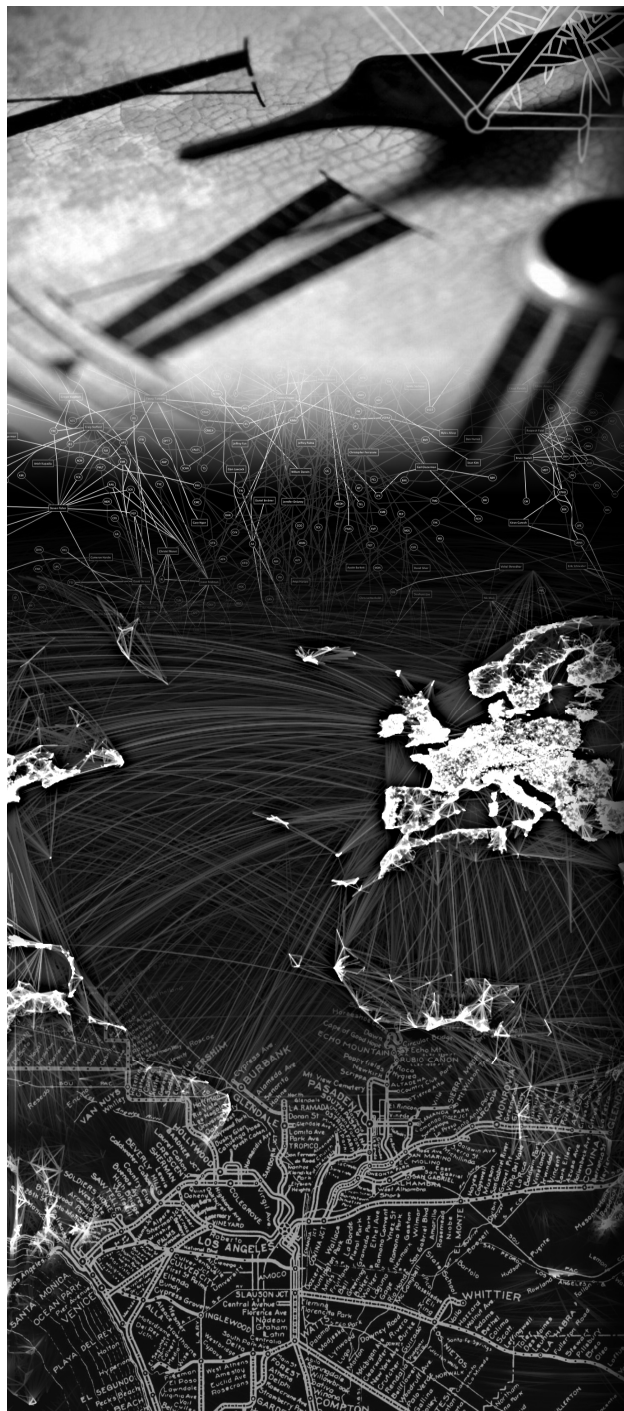
Из вышесказанного следует, что критерием сходства динамических и статистических закономерностей может выступать вероятность событий, наблюдаемых при возникновении различных явлений и процессов в природе и обществе, а также их вероятностные распределения. Обоснованию высказанных выше предположений посвящен следующий раздел данной книги.

Истинная логика нашего мира –  
правильный подсчет вероятностей

Дж. К. Максвелл

## ЧАСТЬ II

### Фундаментальные основы системодинамики



**ГЛАВА 6**  
**Общие эмпирические**  
**закономерности**  
**процессов развития**  
**природы и общества**

**ГЛАВА 7**  
**Основные**  
**определения,**  
**принципы и постулаты**  
**системодинамики**

**ГЛАВА 8**  
**Время в**  
**системодинамике**

**ГЛАВА 9**  
**Математический**  
**аппарат и законы**  
**системодинамики**

**ГЛАВА 10**  
**Мера пространства**  
**состояний и вектор**  
**эволюции системы**

**ГЛАВА 11**  
**Актуальные задачи**  
**системодинамики**

## Глава шестая

# ОБЩИЕ ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРОЦЕССОВ РАЗВИТИЯ ПРИРОДЫ И ОБЩЕСТВА

### 6.1 Основные общесистемные закономерности

В последующих главах данной монографии ставится актуальная цель – установить изоморфизм отдельных эмпирических закономерностей развития природы и общества, и на их основе сформулировать несколько общесистемных принципов, позволяющих разработать теорию, которая могла бы охватить разные классы объектов и явлений. В связи с этим акцент исследования делается на анализе эмпирического материала из различных наук, выделении системных связей в физических, биологических и социальных явлениях и использовании для их описания естественнонаучных методов. Предлагаемый метод системодинамики является результатом синтеза методов естественных наук, в первую очередь, теории вероятности, математической статистики и термодинамики и представляется одним из возможных путей разработки теорий для нефизических областей знаний. Ценность метода заключается также и в том, что он позволяет подойти к изучению временных особенностей в изменении и развитии систем, исходя из вероятностных закономерностей процессов и явлений.

Сегодня математизация общественных и гуманитарных наук не затрагивает их исходных положений, методологий и закономерностей, т.е. оснований данных наук. Именно поэтому для иллюстрации применения метода системодинамики выбран закон перехода количественных изменений в качественные. Данный закон имеет место во всех процессах развития природы и общества и является одним из основополагающих законов диалектики. Построение фундаментальной модели, формализующей этот всеобщий закон развития, является наглядным примером возможностей общей теории систем, методология которой претендует на универсальность.

Исходя из того, что идеи познания проверяются опытом и практикой, любое новое исследование должно начинаться с систематизации и обобщения фактов. Известно, что развитие опытной базы научных дисциплин формируется различными темпами. По всем направлениям науки идет процесс создания обширных баз данных и накопления опытных фактов. Однако, сравнительно незначительному количеству наук за годы своего существования удалось собрать достаточный объем систематизированных фактов, позволяющих выйти на уровень постулирования или аксиоматизации исходных положений и феноменологических закономерностей. Даже в естествознании перечень таких наук относительно не велик, однако они в своем развитии ушли существенно дальше, нежели ОТС.

В свое время академик П.К. Анохин отмечал, что общая теория систем может претендовать на универсальность только в том случае, когда ее метод будет отнесен к самым разнообразным классам явлений [11]. Именно поэтому исходные положения ОТС должны затрагивать общесистемные закономерности природы и общества. В эмпирических знаниях человечества существует не так уж и много закономерностей подобного рода. Среди них одним из основных законов природы и общества является закон перехода количественных изменений в качественные. Согласно этого закона диалектики изменение качества объекта происходит тогда, когда накопление постепенных количественных изменений достигает определенного уровня. Сегодня в науке данный закон сформулирован в вербальной (словесной) форме, количественных моделей формализации закона не существует. Однако, несмотря на это, закон перехода количественных изменений в качественные вскрывает наиболее общий механизм развития природы, общества и мышления [98]. В свою очередь, свойство устойчивости относительных частот событий – основная особенность проявления этого закона, одна из наиболее характерных вероятностных закономерностей реальной действительности. Данное свойство связано с фундаментальной закономерностью, которая на основе эмпирического опыта человечества формулируется в следующем виде: во многих случаях при многократном повторении одного и того же опыта в одних и тех же условиях относительная частота появления некоторого характерного события остается все время примерно одинаковой, близкой к некоторому постоянному числу  $p$ . Это число называют вероятностью события; к нему стремится средняя частота появления события в длительной серии опытов. Таково статистическое определение понятия вероятности возникновения события, имеющее общесистемное значение.

Например, известно, что относительная частота рождений младенцев мужского пола заметно не отличается от значения 0,515, если учтено достаточно большое число рождений. Эта частота не зависит от местности, где проводятся наблюдения, или от этнического состава населения. В свою очередь, если определять относительную частоту распада изотопа радия  $Ra^{226}$  за 100 лет, то всегда будет получаться величина 0,04184. Здесь количеством испытаний в серии является число находящихся под наблюдением атомов радия.

В теории вероятностей принято, что статистической вероятностью события является предел, к которому стремится относительная частота появления события при неограниченном увеличении числа испытаний. При статистической оценке вероятности события необходимо, чтобы условия испытаний не изменялись, т.е. параметры внешней среды и объекта были относительно постоянными, а условия опыта одинаковыми. Определение относительных частот событий при проведении различных опытов чаще всего не представляет значительных сложностей, однако установление причин, вызывающих те или иные события, а тем более

влияющих факторов и условий, является далеко не тривиальной задачей.

Для всего дальнейшего исследования важен ответ на вопрос: в чем сущность факта наблюдения устойчивости относительных частот событий или случайных величин в опыте? На это следует сказать, что любая система всегда мыслится в совокупности с окружающей средой. При заданных условиях окружающей среды в системе формируются отношения и связи, которые приводят к ее ответной реакции на воздействие среды. Эта реакция выражается в определенных событиях, значениях измеряемых величин или характеристиках процессов, которые наблюдаются в условиях опыта и для которых могут быть найдены вероятности. Это позволяет наблюдать или оценивать качества и свойства системы и судить о процессах изменения системы во времени. Смена условий среды или параметров системы приводит к изменению значений вероятностей, однако свойство устойчивости частот сохраняется повсеместно.

Здесь возникают определенные логические аналогии между свойством устойчивости относительных частот в неизменных условиях окружающей среды и свойством транзитивности термического равновесия в термодинамике (подраздел 4.2). В общем случае получается, что идентичные системы одного класса в одних и тех же условиях ведут себя приблизительно одинаково. Естественно, что разброс в данных наблюдений определяется видом (классом) системы. Для физических систем он обычно не велик, а для биологических систем может быть значительным, так как сложно представить себе два абсолютно идентичных биологических объекта. Например, в токсикологии факторы неопределенности (коэффициенты запаса при установлении безопасных уровней), используемые при оценке негативных воздействий на биологические объекты, принимаются для внутривидовой экстраполяции от 1 до 3, а для межвидовой экстраполяции – от 1 до 10 [71].

Определим свойство *транзитивности состояния* систем как логическое отношение между объектами, из которого следует, что идентичные объекты ведут себя приблизительно одинаково в одних и тех же условиях окружающей среды. Естественно, что не для всех классов систем данное логическое утверждение будет верно, но учитывая, что мы не требуем абсолютно точного соблюдения этого условия и предполагаем достаточно существенную неопределенность в данных, очень многие системы будут обладать свойством транзитивности состояния. Если предположить, что устойчивость относительных частот непосредственно связана с логическим принципом транзитивности состояния систем, то можно сформулировать подходы к моделированию систем различных классов, исходя из логических принципов, принятых в термодинамике.

Отметим, что свойство устойчивости частот по отношению к различным классам явлений как в природе, так и обществе, является общесистемной закономерностью. Примем данное свойство в качестве *первой* закономерности, которая может быть положена в основу моделей описания объектов и явлений различных классов.

Свойство устойчивости частот предопределяет существование законов распределения вероятностей случайных величин, которые в каждом конкретном случае отражают наличие связи влияющих факторов с вероятностями появления некоторых характерных событий. Законы распределения вероятностей основываются на опытных фактах, связанных с изменениями в состояниях систем. На практике при наблюдении параметров и характеристик объектов одного класса в большинстве случаев невозможно обеспечить идентичность внешних условий и состояний систем. Объекты отличаются временем своего существования, параметрами состояний, условиями, в которых они находятся, особенностями взаимодействия с внешней средой и т.д. Время наблюдений или опыта также чаще всего отличается для разных объектов. Все это приводит к тому, что относительные частоты наблюдаемых событий при изменении состояний систем также закономерно изменяются в диапазонах изменения влияющих факторов. Существование законов распределения является *второй* общесистемной закономерностью реальной действительности, причем чаще всего эта закономерность предопределена временными особенностями в изменении и развитии систем.

Вероятностные распределения для сложных событий в природе и обществе находятся путем статистического анализа, для чего существует множество методик обработки опытных данных применительно к конкретным явлениям. В некоторых науках анализ опытных фактов и поиск закономерностей построены исключительно на статистической обработке информации об изучаемых событиях, которая собирается в процессе наблюдения или проведения экспериментов по изучению системы. Для примера рассмотрим типовую методику оценки вероятности сложных событий по результатам экспериментов, которая широко применяется в биологических науках. В основе данной методики лежат методы пробит-анализа, разработанные в XX веке известным энтомологом Ч. Блиссом [109]. Многочисленные опытные данные, полученные в токсикологии, радиобиологии, энтомологии, микробиологии, фармакологии, экологии и т.д. показывают, что зависимость между долей особей, у которых наблюдаются некоторые эффекты, к примеру, негативные, и количеством воздействия, например, дозой, выражается вероятностной кривой, имеющей S-образную форму. Обычно для трансформации этой кривой в прямую линию на оси абсцисс откладывают логарифмы доз или времени, а по оси ординат – вероятностные единицы, так называемые пробиты. Такой же подход при обработке опытных данных, связанных с ростом биологических организмов (растений, низших и высших животных, людей), использовался Г. Бакманом, который ввел понятие органического времени в виде логарифма прожитого организмом времени при определении функции кривой роста [65]. В дальнейшем подобные методы были распространены в области безопасности систем, страховании жизни, эконометрии и т.д.

Теоретического обоснования для подобной процедуры

статистической обработки данных пока нет, данная методика – это междисциплинарный научный факт, когда используется универсальный метод построения зависимости “доза-эффект”.

Например, в токсикологических экспериментах оценку вероятностей событий, свойственных биологическим организмам, проводят путем установления связи между относительными частотами появления характерных событий и влияющими негативными факторами [26, 71]. При этом обычно изучают поведение ряда одинаковых по общим показателям живых объектов в искусственно созданных опасных условиях окружающей среды и сравнивают это поведение с поведением группы таких же объектов в обычных условиях (сравнение с контрольной группой или фоном). В процессе опыта эмпирическим путем определяют статистическую вероятность изучаемого неблагоприятного события:

$$w = \frac{i}{n}, \quad (6.1)$$

где  $i$  – число объектов, у которых наблюдаются негативные эффекты в заданных опасных условиях;  $n$  – общее число объектов в опыте, связанном с изучением действия опасности.

При оценке ингаляционных токсических воздействий подобный опыт проводится следующим образом [26]. Выбираются определенные концентрации вредного вещества  $C_1, C_2, \dots, C_p$ . В боксах создаются условия для поддержания воздушной среды с такими концентрациями вещества. В каждый из боксов помещается группа однотипных живых объектов, которые отбираются исходя из биологического вида, рода, возраста, веса и т.д., и периодически во времени оценивается количество объектов, у которых возникают устойчивые негативные эффекты определенной степени тяжести. Параллельно для сравнения степени воздействия среды на объекты и оценки фоновых уровней или спонтанных эффектов проводится опыт с контрольной группой животных в нормальных условиях окружающей среды. Это позволяет при различных внешних условиях оценить вероятности состояния системы по целой группе объектов путем регистрации характерных событий, например, связанных с возникновением болезни или смертности. При этом появление негативных эффектов не является равновероятным и обычно оценивается по комплексу параметров и характеристик организма.

Опасность воздействия чаще всего характеризуется одним свойством среды (например, концентрацией вещества) и временем действия среды на объект. Время, как опасный фактор воздействия, присутствует во всех случаях реализации опасности. Обработка опытных данных опасных воздействий на живые организмы осуществляется для различных категорий токсических эффектов, имеющих разную степень тяжести последствий (события разного уровня риска). Чаще всего – это хроническое, острое несмертельное или смертельное воздействие (соответственно, хронический, подострый или острый эксперимент). При

этом тяжесть и частота эффектов тесным образом связана с параметрами действующих опасных факторов, в данном случае – концентрацией и временем [26, 71].

Опыт практической деятельности и анализа данных, характеризующих опасные воздействия, позволил выработать общую методику оценки риска как вероятностной меры опасности (рис. 6.1). Построение вероятностных моделей риска обычно проводится на основе пробит-регрессии в координатах *пробит*- $\ln(C)$  или *пробит*- $\ln(\tau)$ . Инверсное преобразование рисков в пробит-функции  $Pr$  выполняется с учетом уравнения (6.2), которое определяет функцию нормального распределения:

$$w(Pr) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Pr} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (6.2)$$

Использование данной методики при обработке опытных данных позволяет получить линейные уравнения в преобразованной системе координат, где по оси ординат откладывается значение пробит-функции  $Pr$ , определенное через значение статистической вероятности  $w$ , а по оси абсцисс – логарифм времени воздействия  $\lg \tau$ . Линейные зависимости строятся для разных значений концентрации вредных веществ (рис. 6.1).

Обычно пробит связывают с параметрами факторов опасности в виде:

$$Pr = \alpha + \beta_{\tau} \cdot \ln C + \beta_c \cdot \ln \tau, \quad (6.3)$$

где  $C$  – параметр опасности (например, концентрация);  $\tau$  – время действия опасности (например, опасного химического вещества);  $\alpha$ ,  $\beta_{\tau}$  и  $\beta_c$  – константы [26]. Построение зависимостей вида (6.3) при воздействии вредных веществ на живые организмы осуществляется отдельно для каждой категории тяжести эффекта. Это связано с регистрацией качественно разных событий (хроническое заболевание, острое заболевание, смерть) и различиями в методах обработки данных по рискам воздействий в хроническом, подостром и остром опыте [26, 59].

Методика подобной обработки данных учитывает эмпирическую закономерность, свойственную опасным процессам при воздействии химических веществ на биологические объекты, которая имеет логарифмически-нормальное распределение вероятностей возникновения неблагоприятных событий, в частности, хронической и острой заболеваемости и смертности. Используются также и другие инверсные преобразования для распределения вероятностей, например, на основе логистического распределения. В этом случае говорят о логит-анализе данных. В токсикологии благодаря специальным методикам и масштабным опытам по анализу воздействий на животных накоплен обширный эмпирический материал по оценке рисков опасных событий.



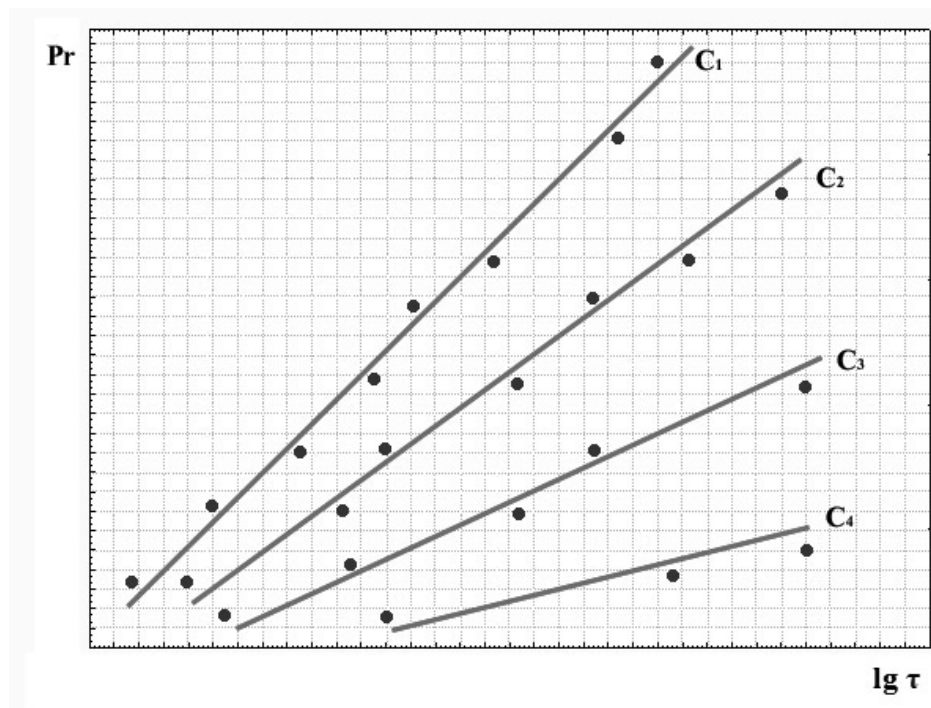


Рис. 6.1. – Распределение опытных данных по вероятностям событий при оценке рисков негативных воздействий в токсикологии

Подобные методики в том или ином виде широко применяются в науках, связанных с оценкой опасностей и рисков в природе и обществе. При этом суть обработки данных заключается в установлении связей в виде эмпирических зависимостей между вероятностями характерных событий (случайных величин) и различными влияющими факторами. Практически всегда получаемые зависимости являются нелинейными, имеют определенную область применения и относятся к характерному виду событий, которые свойственны изучаемому процессу или явлению.

Такая же обработка данных широко применяется в науках, где результаты опыта представляются в виде статистических закономерностей – в биологии, радиобиологии, энтомологии, фармакологии, экологии, охране труда, промышленной и экологической безопасности, изучении стихийных явлений и чрезвычайных ситуаций и т.д. Факты установления различных законов распределения вероятностей применительно ко многим процессам и явлениям говорят о существовании глубокой общесистемной закономерности. Если в диапазоне некоторых внешних условий система обладает свойством устойчивости относительных частот, то на соответствующей области определения параметров практически всегда существуют зависимости, связывающие вероятности характерных событий или характеристических случайных величин с параметрами свойств системы или окружающей среды.

Здесь возникают определенные логические аналогии с применением уравнений состояния веществ в термодинамике, причем в большинстве случаев для различных классов систем такие зависимости будут иметь преимущественно вероятностный вид. Данный вывод приводит к

положению о существовании особых функций состояния систем, логически подобных понятию температуры в термодинамике. Опытным фактам существования законов распределения вероятностей для различных процессов и явлений и посвящен следующий раздел.

## 6.2 Вероятностные распределения событий и величин в природе и обществе

Базы данных, которые накоплены в течении десятилетий в различных областях знаний, очень часто позволяют найти вероятностные закономерности в формировании различных событий и явлений. Существование для множества событий и случайных величин  $S$ -образных распределений является важным общенаучным фактом и фундаментальной вероятностной закономерностью природы и общества. В будущем систематизация и классификация вероятностных распределений может представлять собой целый раздел новой науки, связанной с таксономией событий. Причем подобная классификация должна строиться не только на ограниченном перечне модельных распределений (табл. 3.1), но и на системных особенностях и вероятностных критериях для множества эмпирических распределений событий различных классов. Для решения этой проблемы надо обладать энциклопедическими знаниями, а это, надо признать, редкое явление. Поэтому, далее приведем только отдельные типичные примеры из области биологии, климатологии, оценки биоразнообразия, безопасности жизнедеятельности, статистики общества, а также физики и астрономии.

Например, с использованием методов пробит-анализа обработана информация о естественной смертности различных биологических видов. На рисунке 6.2 представлены данные вероятности смертности мышей от возраста, в свою очередь, на рисунке 6.3 – распределения смертности мужчин и женщин, построенные по таблицам смертности населения России за 2008 г. Как видно из рисунков, полученные зависимости достаточно хорошо описывают опытные данные простым степенным уравнением, которое зависит от возраста  $\tau_s$ :

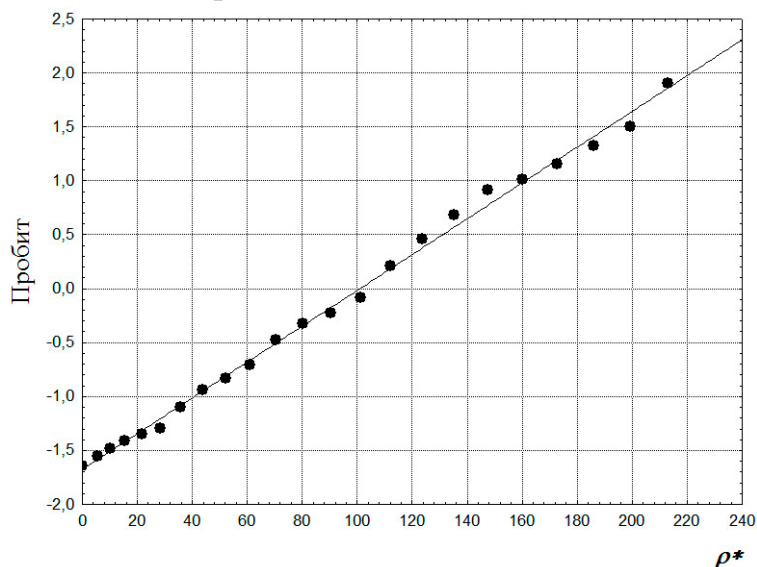
$$\text{Pr} = \alpha + \beta \cdot \tau_s^\nu. \quad (6.4)$$

Данное вероятностное распределение тесно связано с нормальным распределением, хотя и отличается наличием степени у фактора времени. Обратим внимание на то, что это распределение, в частном случае, переходит в нормальное при  $\nu = 1$ . Таким же образом обработаны данные по рождаемости младенцев. На рисунке 6.4 приведена зависимость пробита от веса новорожденных младенцев.

Из информации рисунков 6.1-6.4 следует, что для каждого биологического процесса существуют свои особенности, выражающие индивидуальные свойства зависимости вероятности характерных событий от влияющих факторов  $z_i$ , например, вида  $\text{Pr} = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Если на

рисунках 6.1 и 6.4 данные описываются логарифмически-нормальным и нормальным законами распределения, то на рисунках 6.2 и 6.3 данные описываются распределением, которое близко к нормальному при степенном преобразовании фактора времени вида (6.4). Следует отметить, что последнее распределение при описании данных дает более адекватный результат на всем периоде жизни самцов мышей, нежели известное уравнение смертности Мейкхама. Данный способ установления статистических закономерностей широко используется в науках, где объем эмпирического знания сегодня является преобладающим.

Рис. 6.2. – Распределение опытных данных о естественной смертности самцов мышей от возраста  $\tau_s$ , ( $\rho^* = \tau_s^{1,5} / 10^7$ )



Графики на рисунках 6.2-6.4 построены по эмпирическим данным, при этом пробит определяется в соответствии с (6.2), время  $\tau$  задается в минутах, а масса  $m$  – в килограммах.

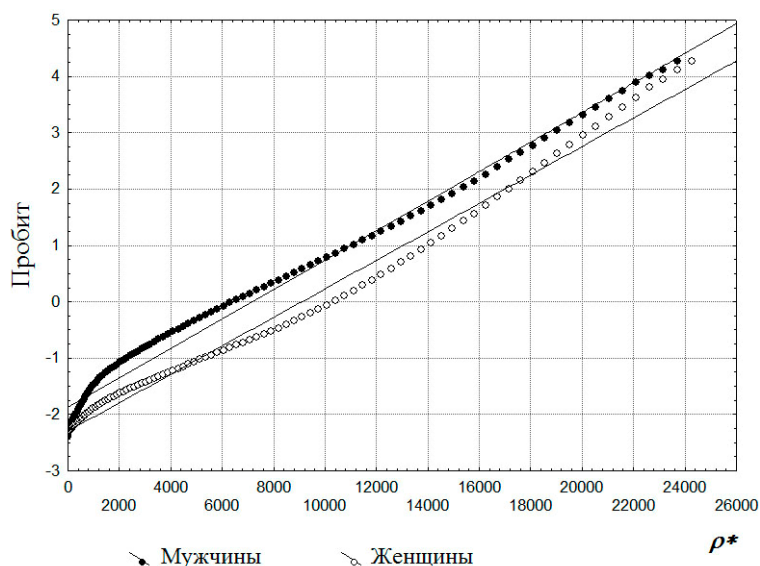


Рис. 6.3. – Распределение статистических данных по смертности населения России в зависимости от возраста  $\tau_s$ , ( $\rho^* = \tau_s^{2,5} / 10^{15}$ )

Таким образом, данные примеры указывают на

возможность установления связей между статистическими вероятностями некоторых характерных событий, которые свойственны состояниям систем, и параметрами окружающей среды или характеристиками биологических объектов. Во многих случаях для решения такой задачи необходим только достаточный объем достоверных опытных данных.

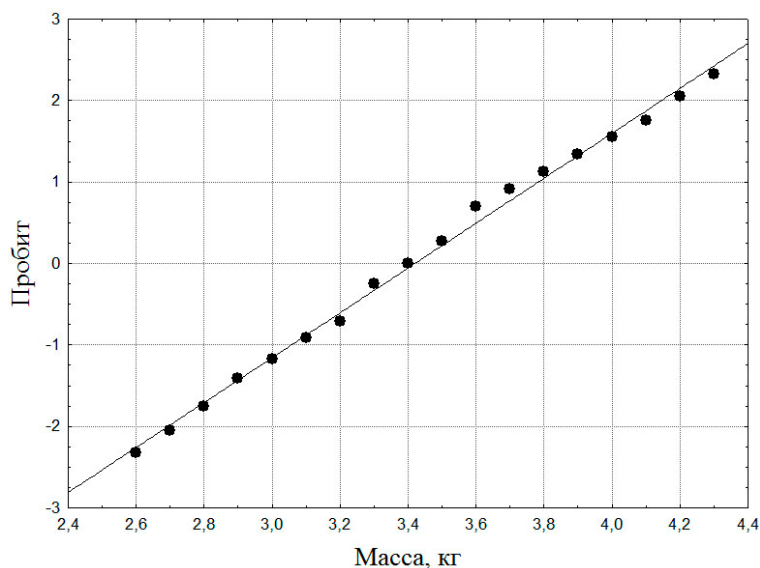
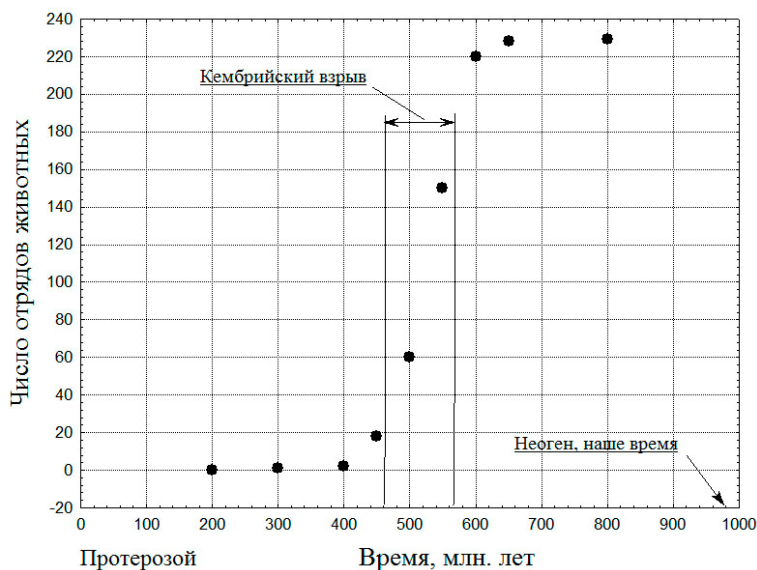


Рис. 6.4. – Распределение статистических данных по весу новорожденных младенцев

Следующие два примера возьмем из области эволюции животного мира на Земле. На рисунке 6.5 приведены данные об изменении числа отрядов животных за последний один млрд. лет (простейшие, моллюски, членистоногие, насекомые, рыбы, земноводные, пресмыкающиеся, птицы, млекопитающие). Видно, что распределение вероятностей возникновения отрядов имеет вид так называемой S-образной функции, которая вышла на насыщение в наше время.

Рис. 6.5. – Распределение числа отрядов животных в процессе биологической эволюции за последний один миллиард лет



В Кембрийский период наблюдался экспоненциальный рост количества отрядов. Данные по эволюции животных в преобразованных координатах приведены на рисунке 6.6. Полученная функция имеет вид, близкий к нормальному распределению, если по оси абсцисс откладывается эволюционное время, которое возведено в степень  $\nu = 2,5$ .

Аналогично на рисунке 6.7 (а) показан процесс филогенеза приматов, который происходит в виде увеличения числа семейств приматов [108]. В нашем времени из известных за 70 млн. лет 45 семейств приматов существует 13 семейств.

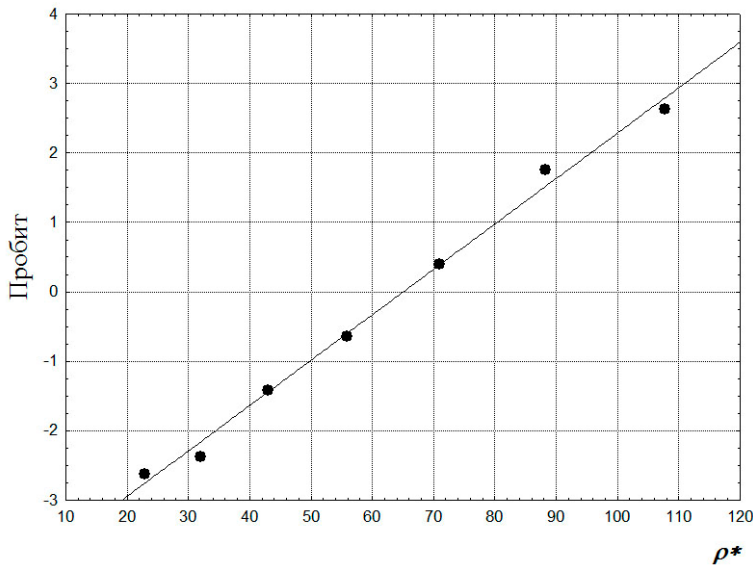


Рис. 6.6. – Распределение числа отрядов животных в процессе эволюции в координатах *Пробит* –  $\rho^*$ , которые преобразованы относительно вероятностей и времени, ( $\rho^* = \tau_s^{2.5} / 10^5$ )

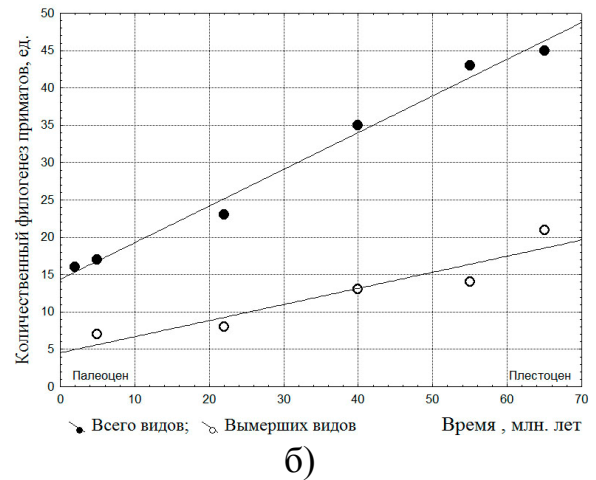
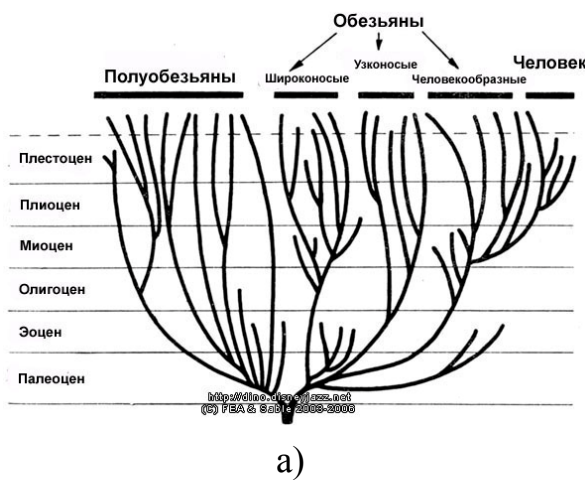


Рис. 6.7. – Представление данных по эволюции приматов: а) процесс филогенеза приматов; б) распределение данных

На рисунке 6.7 (б) приведена простая обработка данных по эволюции приматов, откуда видна линейность количественного филогенеза приматов во времени в диапазоне 1÷65 млн. лет. В свою очередь, относительная частота численности видов также линейно изменяется во времени, что указывает на равномерное распределение случайной величины. Известно, что одна из ветвей дерева филогенеза приматов привела в процессе эволюции к появлению современного человека. Из вышеприведенных данных следует, что эволюционные процессы, связанные с изменением численности видов, обладают различными вероятностными закономерностями.

Одной из основных задач общей теории систем является установление закономерностей развития общества. Сегодня много внимания уделяется изучению опасностей в жизнедеятельности человека. В этой области накоплен обширный статистический материал, который систематизирован в радиологии, промышленной и экологической безопасности, охране труда, в целом ряде наук о Земле и т.д. При этом

многие события разных классов являются индикаторами развития общества. На следующем рисунке 6.8 (а) представлены графики распределения различных опасных событий, связанных с гибелью людей [62]. В свою очередь, на рисунке 6.8 (б) представлены распределения характерных событий в техносфере [27]. Из рисунков видно, что распределения событий имеют вид S-образных функций, которые закономерно с течением времени выходят на насыщение.

Сегодня для очень многих событий и величин установлены те или иные законы распределения вероятностей, которые определяют статистические закономерности в изменении и развитии систем. Например, распределение Пуассона применяют при исследовании рисков отказов оборудования, возникновения пожаров, производственных аварий, природных катастроф типа тайфунов, смерчей; распределения Вейбулла, Парето – при исследовании землетрясений, наводнений, извержений вулканов, крупных техногенных катастроф, катастрофических пожаров; гамма-распределение – при изучении риска смертельного травматизма, числа промышленных аварий и т.д.

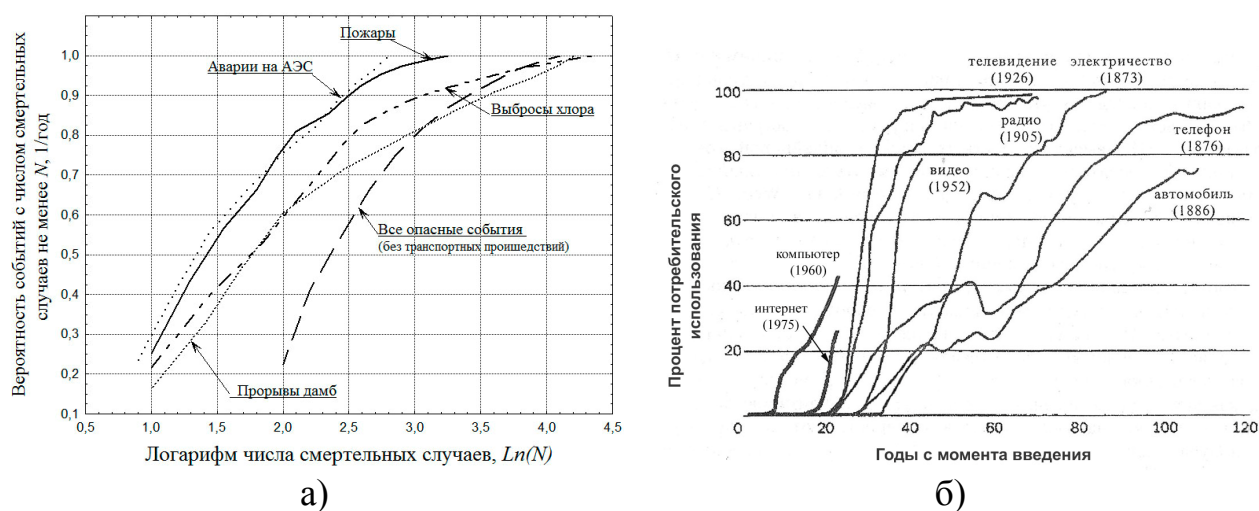


Рис. 6.8. – Вероятностные распределения событий, происходящих в обществе:  
 а) события, связанные с гибелью людей; б) события в техносфере

Основные виды вероятностных распределений согласно литературных источников для разных видов природных и техногенных опасностей, даны в таблице 6.1.

На практике часто приходится выбирать вид модельного распределения не имея достаточного объема опытных данных, чтобы можно было бы проверить его адекватность. Следует также отметить, что выбор осуществляется из достаточно малочисленного перечня модельных распределений. Принятие гипотезы о виде распределения обычно основывается на прошлом опыте, на знании механизма конкретного явления или на теоретических предпосылках. При ограниченном объеме данных сложность данной задачи резко возрастает, в связи с чем не всегда



можно установить взаимосвязь между параметрами системы и распределениями характерных событий, появление которых связано с изменениями в состояниях системы. Тем не менее, существует множество процессов и явлений, где объем опытных данных достаточен для решения этой задачи даже на эмпирическом уровне.

Таблица 6.1. – Опасные события и виды их распределений

Виды опасностей	Вероятностные распределения	
	опасного события	последствий реализации опасности
Землетрясения, цунами, наводнения	Логарифмически-нормальное, Вейбулла, степенное	Парето, распределения с “тяжелыми хвостами”
Ураганы	Пуассона, степенное	Парето, распределения с “тяжелыми хвостами”
Извержения вулканов	Логарифмически-нормальное, Вейбулла	Парето, распределения с “тяжелыми хвостами”
Взрывы	Пуассона, логарифмически-нормальное	Парето, Вейбулла, гамма-распределение
Пожары	Пуассона, логарифмически-нормальное, Вейбулла	Парето, гамма-распределение
Крупные аварии	Пуассона, Вейбулла, гамма-распределение	Логарифмически-нормальное, гамма-распределение, Вейбулла
Химическая опасность	Логарифмически-нормальное	Логарифмически-нормальное, логистическое, Вейбулла
Биологическая опасность	Логарифмически-нормальное	Парето, логарифмически-нормальное
Радиационная опасность	Логарифмически-нормальное	Логарифмически-нормальное

В настоящее время исследования, связанные с глобалистикой, оценкой развития человеческого потенциала и анализом социально-экономического развития стран и регионов мира, занимают в системном анализе важное место. Обширные базы данных (<http://hdr.undp.org>; [data.worldbank.org](http://data.worldbank.org); [www.yale.edu](http://www.yale.edu); [www.weforum.org](http://www.weforum.org); [www.heritage.org](http://www.heritage.org); [www.kof.ch](http://www.kof.ch); [www.atkerney.com](http://www.atkerney.com), [www.wwf.ru/resources](http://www.wwf.ru/resources); [russian.doingbusiness.org/rankings](http://russian.doingbusiness.org/rankings) и др.) и высокая актуальность вопроса определяют необходимость построения теории, которая не использовала бы при получении выводов экспертные методы анализа информации.

Существующие базы данных позволяют найти основные статистические закономерности в событиях, которые индикативно отражают состояние общества и тенденции в его развитии. Например, в таблице 6.2 представлены виды распределений индикаторов развития общества, полученные в результате обработки существующих статистических данных [34, 40].

Таблица 6.2. – Распределения индикаторов развития человеческого общества

Индикаторы	Вероятностные распределения	Индикаторы	Вероятностные распределения
Социально-экономические показатели стран мира <sup>1</sup>			
Площадь стран	Логарифмически-нормальное	Младенческая смертность	Пуассона
Население стран	Логарифмически-нормальное	ВВП на душу населения	Пуассона
Доля городского населения	Нормальное	Пользователи Интернет	Логарифмически-нормальное
Удельное потребление энергии	Гамма-распределение	Коэффициент Джини	Логарифмически-нормальное
Случаи заболевания туберкулезом	Гамма-распределение	Численность вооруженных сил	Гамма-распределение
Экспорт товаров	Логарифмически-нормальное	Обслуживание государственного долга	Логарифмически-нормальное
Экологические показатели стран Европы <sup>2</sup>			
Потребление электроэнергии	Логарифмически-нормальное	Доля охраняемых территорий	Гамма-распределение
Выбросы прекурсоров твердых частиц	Логарифмически-нормальное	Доля лесопокрытых территорий	Нормальное
Удельные выбросы парниковых газов	Нормальное	Добыча ископаемых на душу населения	Логарифмически-нормальное
Доля сельскохозяйственных земель	Нормальное	Сбор бытовых отходов	Логарифмически-нормальное
Использование удобрений на 1 га с/х земель	Нормальное	Использование пестицидов на 1 га с/х земель	Логарифмически-нормальное
Доля возобновляемых энергоресурсов	Пуассона	Доля орошаемых земель	Пуассона

1 – согласно данным источника [34]; 2 – согласно данным источника [40].

Следует отметить, что список индикаторов для оценки изменений состояния общественных систем может быть очень большим. Анализ показывает, что статистические базы данных обычно позволяют в подавляющем большинстве случаев определить законы распределения тех или иных показателей в виде известных модельных или эмпирических распределений. Существование распределений для социально-экономических и экологических показателей указывает на возможность оценки качественных характеристик систем на основе определения частоты появления характерных событий, которые индикативно отражают уровень развития общества или биосферы. Учет этих закономерностей позволяет разработать модели социально-экономического развития стран и регионов мира или биосферы в целом.



Покажем возможности применения методов пробит-анализа для более сложных явлений. Например, при изучении биоразнообразия планеты накоплен значительный объем опытных фактов, который представлен в виде баз данных и всемирно известных энциклопедий [108, 38]. На рисунке 6.9 приведены данные по биоразнообразию приматов в виде диаграммы рассеивания, которая дает представление о зависимости средней массы особей ( $m_l$ ) от их средней продолжительности жизни в неволе ( $\tau_l$ ). Как видно из рисунка, распределение точек, характеризующих положение конкретного вида приматов на диаграмме рассеивания, не является равновероятным, а подчинено некоторой вероятностной закономерности. Определим статистическую вероятность существования видов с определенными характеристиками как:

$$w = P(\tau_l < \tau, m_l < m) = \frac{i}{n}, \quad (6.5)$$

где  $i$  – число всех видов, для которых выполняется приведенное неравенство  $\tau_l < \tau$  и  $m_l < m$ ,  $\tau$  и  $m$  – произвольные значения продолжительности жизни и массы особей, а  $n$  – общее число существующих видов приматов.

На данном примере хотелось бы несколько раскрыть суть метода пробит-анализа или других подобных ему методов, которые связаны с непосредственной оценкой вероятностей событий, исходя из статистического анализа опытных данных.

Алгоритм численного определения статистической вероятности существования видов согласно (6.5) достаточно простой и сводится просто к группировке данных и перебору вариантов на диаграмме рассеивания (6.9). Исходя из расчетов, на рис. 6.10 показана функциональная зависимость вероятности существования видов в координатах *вероятность – продолжительность жизни – масса особей*. Из рисунка видно, что функция вероятности  $w$  представлена нелинейной S-образной поверхностью, которую можно приближенно описать некоторой функцией двух переменных. Например, применяя методику обработки данных (6.1) – (6.3), получим связь статистической вероятности существования видов в зависимости от средней продолжительности жизни ( $\tau_l$ ) и средней массы ( $m_l$ ) особей в виде:

$$Pr = -9,440 + 0,178 \cdot \ln m_l + 2,603 \cdot \ln \tau_l. \quad (6.6)$$

Если обратить внимание на диаграмму рассеивания рисунка 6.9, то видно, что в двумерном пространстве переменных *масса – продолжительность жизни* не наблюдается явно выраженных закономерностей. Однако, если учесть третью координату – вероятность существования видов с заданными биологическими параметрами, то как видно из рисунка 6.10 все опытные точки в трехмерном пространстве принадлежат одной поверхности, что естественно, т.к. алгоритм оценки вероятности однозначен. Данная поверхность в преобразованных

координатах  $\{Pr, \ln m_l, \ln \tau_l\}$  может быть приближена плоскостью, которая представлена уравнением (6.6). Коэффициент множественной корреляции зависимости (6.6) достаточно высокий, так как равен значению 0,99.

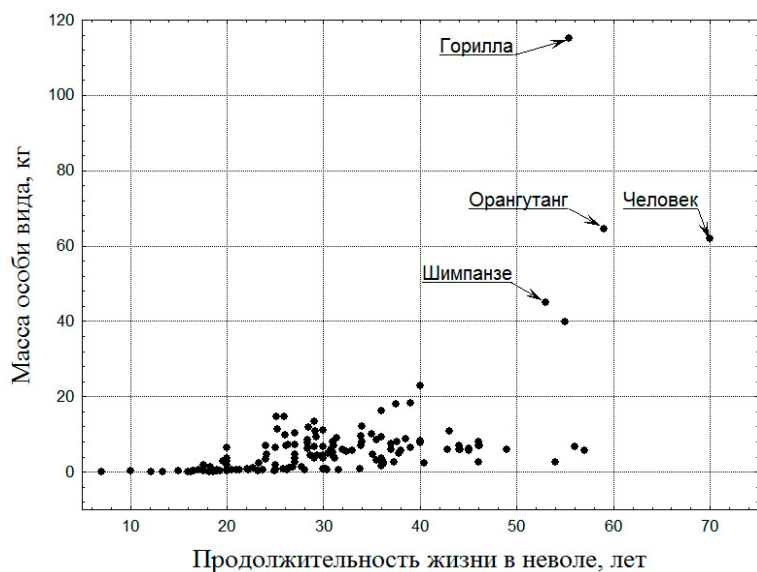


Рис. 6.9. – Диаграмма рассеивания для 150 видов приматов с известной продолжительностью жизни и массой особей

Таким образом, опытные данные для приматов хорошо ложатся на линейное уравнение относительно пробитов. Только для очень больших приматов ошибки отклонения от вероятностного распределения (6.6) начинают возрастать.

Исходя из данного примера, можно сказать, что суть метода пробит-анализа состоит в установлении связей между вероятностями сложных событий и причинно-связанных с ними более простых событий. Для любой диаграммы рассеивания опытных данных всегда может быть найдена зависимость функции вероятности от исходных переменных, как это показано на рис. 6.10. Если вероятность некоторого сложного события имеет причинно-следственную и однозначную связь с данной вероятностью, то на основе данных опыта можно установить зависимость такой связи. Например, если вероятность заболеваемости или смертности биообъекта тесно связана с функцией распределения двумерной случайной величины для каждой пары значений концентрации и времени действия вредного вещества, то возможно построение уравнений, отражающих закономерности между соответствующими вероятностями. Причем, как видно из рисунка 6.1 эта закономерность изначально устанавливается не между вероятностями сложного и более простыми событиями, а между вероятностью сложного события и исходными параметрами воздействия – концентрацией и временем действия вещества. Рассмотрим теперь функции распределения одномерных случайных величин – массы особей и продолжительности жизни. Статистическая вероятность в этом случае определена с учетом уравнения (6.5), исходя из ее представления функцией одного аргумента. Как видно из рисунков 6.11 функции распределения данных величин имеют вид практически функциональных зависимостей. Это естественно, так как мы используем однозначный алгоритм для оценки статистической вероятности. Эмпирическое

распределение может быть получено для любого статистического ряда опытных данных, а подогнать под него известное модельное распределение удастся не всегда.

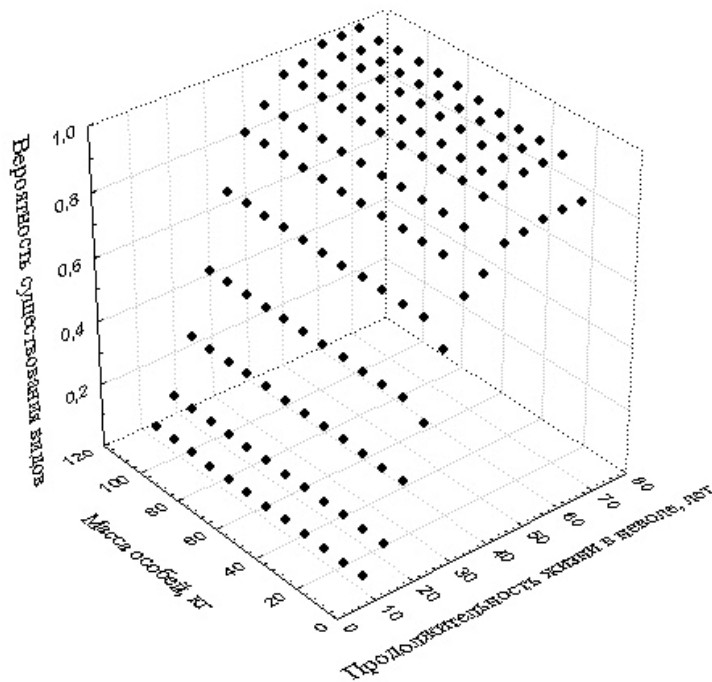
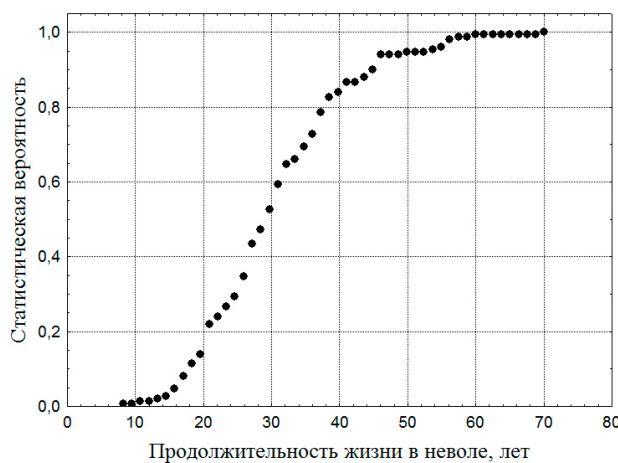
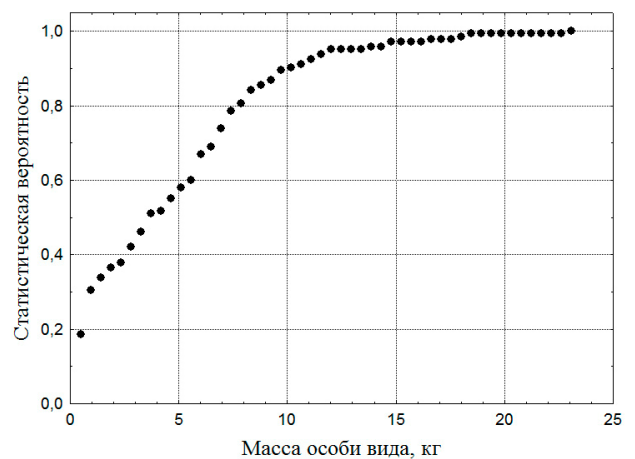


Рис. 6.10. – Вероятность существования видов приматов с заданными характеристиками.



а)



б)

Рис. 6.11. – Функции распределения одномерных случайных величин для различных видов приматов: а) продолжительность жизни; б) масса особей

В дальнейшем при анализе будем использовать оценки статистических и геометрических вероятностей, так как более удобно в процессе определения вероятностей пользоваться безразмерными величинами. Можно показать, что при группировке опытных данных геометрическая вероятность случайных величин имеет равномерное распределение, так как функции распределения определяются на равномерной сетке изменения этих величин. В свою очередь, статистическая вероятность не удовлетворяет требованию равновозможности и ее распределение не является равномерным.

Например, соответствующие функции распределения вероятностей для продолжительности жизни приматов и их взаимосвязь представлены на рис. 6.12. Данное утверждение справедливо для всех случайных величин, которые обладают свойством устойчивости относительных частот: геометрическая вероятность величины будет соответствовать требованию равновозможности, а статистическая вероятность этой величины чаще всего этому условию удовлетворять не будет.

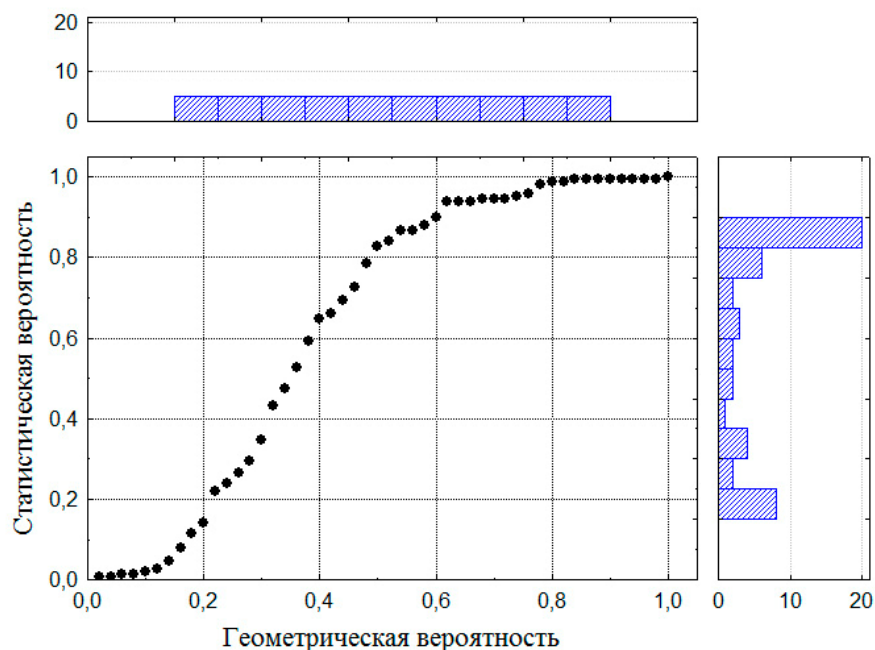


Рис. 6.12. – Функции распределения и плотности статистической и геометрической вероятности продолжительности жизни приматов

Перед тем как сделать выводы по данному подразделу, изучим два физических явления. В первом случае рассмотрим класс макрообъектов из астрономии – ближайшие звездные системы, во втором случае изучим погодные явления в метеорологии.

В 1989 году Европейское Космическое Агентство (ESA) осуществило запуск космического аппарата HIPPARCOS (High Precision PARallax Collecting Satellite – "спутник для сбора высокоточных параллаксов"). Космический аппарат проработал на орбите 37 месяцев, в результате чего был собран обширный экспериментальный материал. Обработка этого материала привела к созданию каталога Hipparcos, содержащего информацию о 118218 звездах [12]. На рисунке 6.13 (а) по данным каталога приведена диаграмма Герцшпрунга-Рессела для звезд, удаленных от Солнца на расстояние до 500 парсек. Построим распределение статистической вероятности состояния звезд вида

$$Pr = \alpha_0 + \alpha_b \cdot \ln(\rho_{bv}) + \alpha_m \cdot \ln(\rho_{mag}), \quad (6.7)$$

где  $\rho_{bv}$  и  $\rho_{mag}$  – соответственно геометрические вероятности показателя цвета  $B - V$  и звездной величины  $mag$ ;  $\alpha$  – константы.

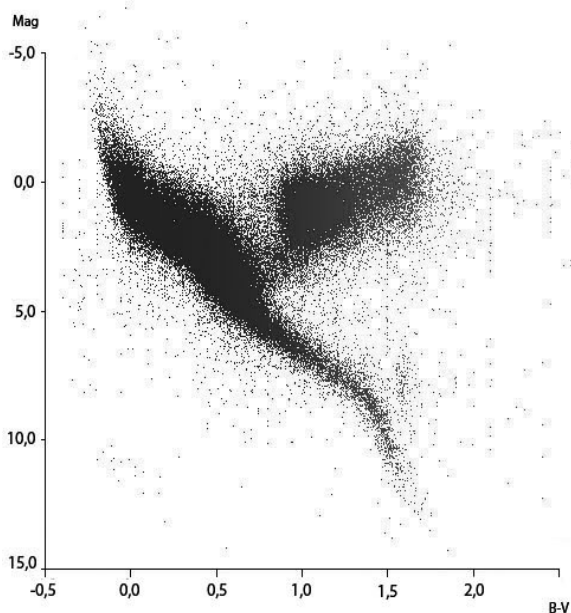
В уравнении (6.7) величина  $Pr$  может определяться исходя из вероятностной оценки различных случайных величин или наблюдаемых

событий. Например, можно оценить статистическую вероятность распределения звезд по их массе, температуре поверхности, спектральному классу, удалению от Солнца или положению в пространстве и т.д. Если вероятности этих событий имеют причинно-следственную зависимость от вероятности состояния звездной системы, то можно установить связь между вероятностями различных событий для данного класса объектов.

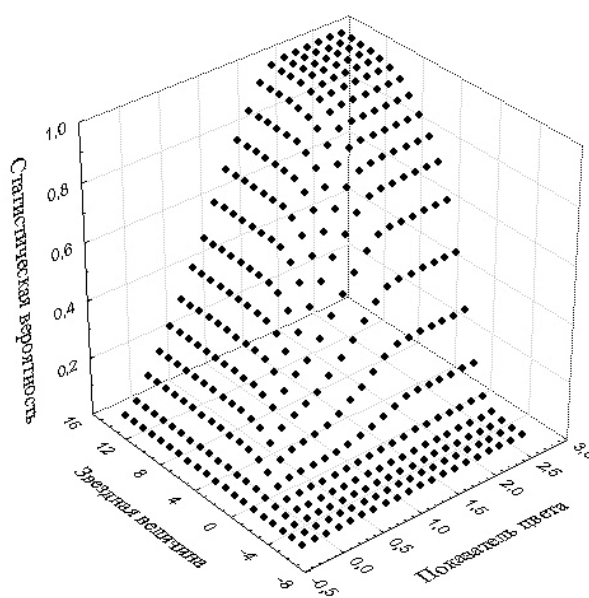
Определим статистическую вероятность состояния звездной системы для диаграммы Герцшпрунга-Рессела в виде функции распределения двумерной случайной величины для каждой пары совместно наблюдаемых значений звездной величины ( $mag$ ) и показателя цвета ( $bv$ ) звезд:

$$w = P(mag < mag_k, bv < bv_k) = \frac{i}{n}, \quad (6.8)$$

где  $i$  – число звезд, для которых выполняется приведенное неравенство  $mag < mag_k$  и  $bv < bv_k$ ;  $k$  – индекс выбранной на диаграмме произвольной  $k$ -точки;  $n$  – общее число звезд.



а)



б)

Рис. 6.13. – Распределение вероятностей событий в астрономии: а) диаграмма Герцшпрунга-Рессела для звезд Hipparcos, находящихся ближе 500 парсек; б) вероятность состояния звездных систем

На рисунке 6.13 (б) приведены результаты оценки вероятности состояния звездных систем Hipparcos. Дальнейшая обработка данных была связана с приближением поверхности, представленной на рис. 6.13 (б), зависимостью вида (6.7). Идея обработки заключается в поиске связей между статистическими и геометрическими вероятностями случайных величин. В процессе анализа данных устанавливалась зависимость пробита согласно уравнений (6.2) и (6.7) с вероятностями попадания равномерно распределенных случайных величин  $mag$  и  $bv$  в наблюдаемые в опыте

интервалы  $l_m = mag_{\max} - mag_{\min}$  и  $l_{bv} = bv_{\max} - bv_{\min}$ . Так как функции плотности вероятности в первом и втором случае равны

$$f(mag) = \begin{cases} 1/(mag_{\max} - mag_{\min}) & \text{внутри } l_m; \\ 0 & \text{вне } l_m \end{cases};$$

$$f(bv) = \begin{cases} 1/(bv_{\max} - bv_{\min}) & \text{внутри } l_{bv}; \\ 0 & \text{вне } l_{bv} \end{cases},$$

то в обоих случаях функция распределения геометрической вероятности  $\rho(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$  имеет вид:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_{\min} \\ \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & \text{при } x_{\min} < x \leq x_{\max} \\ 1 & \text{при } x > x_{\max} \end{cases}. \quad (6.9)$$

В результате обработки данных была получена зависимость в виде:

$$Pr = 1,912 + 1,188 \cdot \ln(\rho_{bv}) + 1,725 \cdot \ln(\rho_{mag}), \quad (6.10)$$

коэффициент корреляции которой составил 0,93. Здесь геометрические вероятности равны  $\rho_{bv} = (bv_* + 0,4)/3,09$  и  $\rho_{ag} = (mag + 6,63)/20,93$ . Видно, что и в этом случае опытные данные хорошо ложатся на линейное уравнение относительно пробитов.

Теперь рассмотрим второе физическое явление – метеорологические процессы, определяющие состояние атмосферы над обширной территорией. В настоящее время ДонНТУ создана автоматизированная система экологического мониторинга Донецкого региона (АКИАМ, [www.akiam.org.ua](http://www.akiam.org.ua)). Система содержит информацию о состоянии атмосферы с 2000 по 2013 годы, которая охватывает более 1 млн. наблюдений, полученных с периодичностью в 6 часов. К перечню параметров, которые хранятся в базе данных, относятся: направление и скорость ветра, температура, относительная влажность и давление атмосферного воздуха, парциальное давление водяного пара, атмосферные явления и т.д. Результаты обработки данных наблюдений по оценке вероятностей событий, связанных с формированием метеорологических параметров в 2010 году, приведены на рисунках 6.14 (а) – 6.14 (г). В процессе анализа оценивалось существование связи между статистическими и геометрическими вероятностями для наблюдаемых случайных величин. Вероятности находились путем группировки данных для опытных точек имеющих временных рядов показателей. При этом геометрические вероятности оценивались исходя из попадания наблюдаемой равномерно-распределенной величины в заданный диапазон согласно уравнения (6.9), а статистические вероятности находились с учетом распределения опытных точек в заданном диапазоне.

Приведенные на рисунке 6.14 распределения указывают на тесную связь между статистическими и геометрическими вероятностями для основных метеорологических параметров.

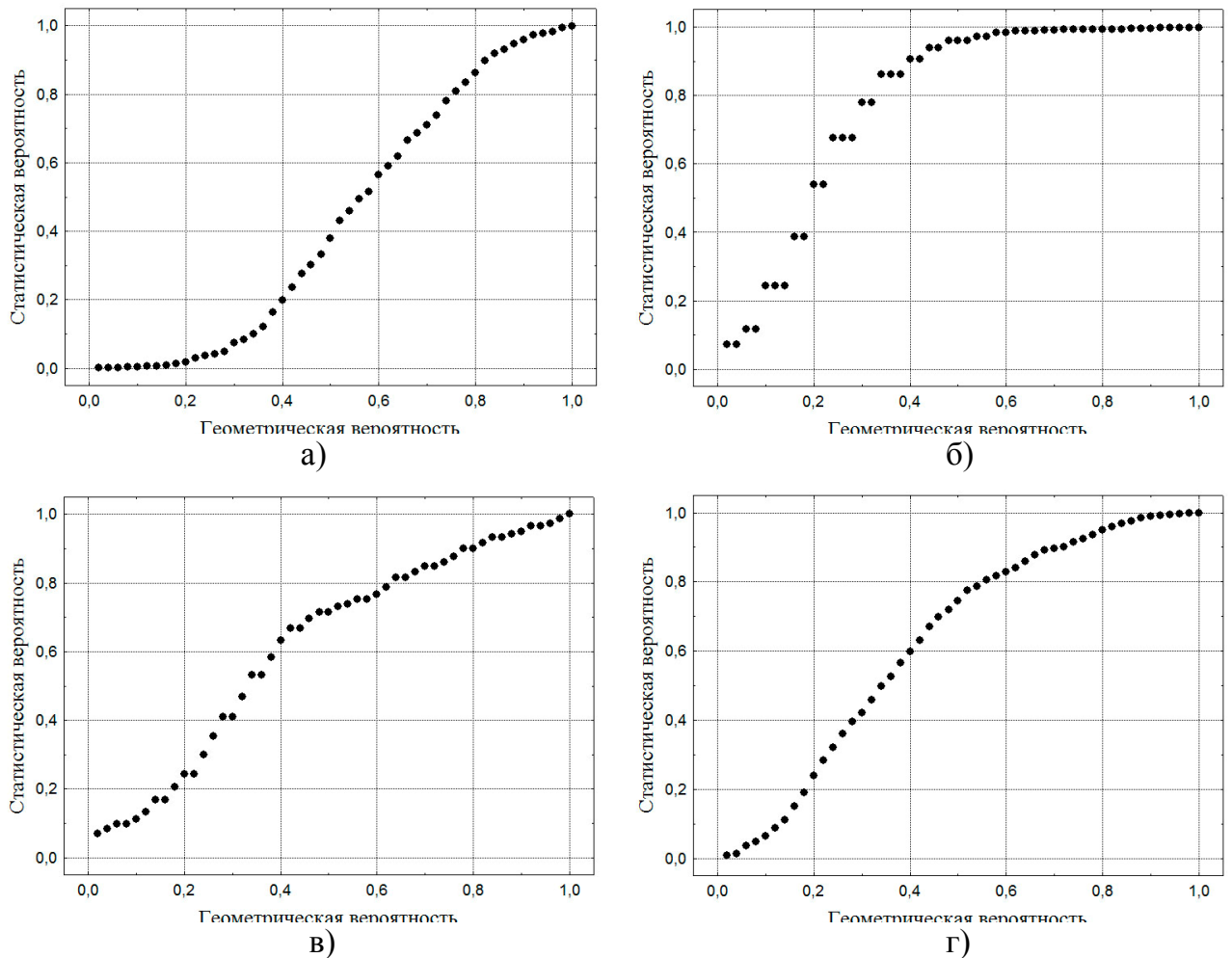


Рис. 6.14. – Распределения вероятностей событий при формировании погоды в Донецко-Макеевском регионе: а) температура воздуха; б) скорость ветра; в) направление ветра; г) парциальное давление водяного пара

Следует отметить, что в процессе формирования погоды метеопараметры атмосферы меняются во времени достаточно быстро в сравнении, например, с характеристиками процессов, которые происходят в биосфере или человеческом обществе. Однако и для параметров общественных систем, которые очень медленно меняются во времени, тесная связь между статистической и геометрической вероятностями также справедлива. Например, на рис. 6.15 приведены зависимости для индикаторов, которые используются при оценках социально-экономического развития стран мира. Все это говорит об универсальности связи между вероятностями случайных величин для многих процессов и явлений в природе и обществе.

Теперь можно обобщить результаты и сформулировать выводы по данному подразделу, исходя из существующих статистических методов обработки опытных данных.



В системном анализе общепринято, что состояния систем формируются под действием внешних условий окружающей среды. Причем считается, что состояния однозначно определяются наблюдаемыми свойствами, которые количественно выражаются через измеряемые параметры. При моделировании принимается, что некоторые исходные параметры являются входными переменными моделей процессов и явлений, которые описывают реакции систем на воздействие. Обычно такие параметры принимаются независимыми и равномерно распределенными величинами. Соответствующие реакции систем на воздействие могут представляться в виде характерных событий или их характеристических случайных величин, которые также несут информацию о состояниях систем. Практика показывает, что вероятность таких событий тесно связана с условиями, в которых ведется наблюдение за поведением систем, и как следствие, наблюдается также связь этих вероятностей с исходными параметрами систем или факторами окружающей среды.

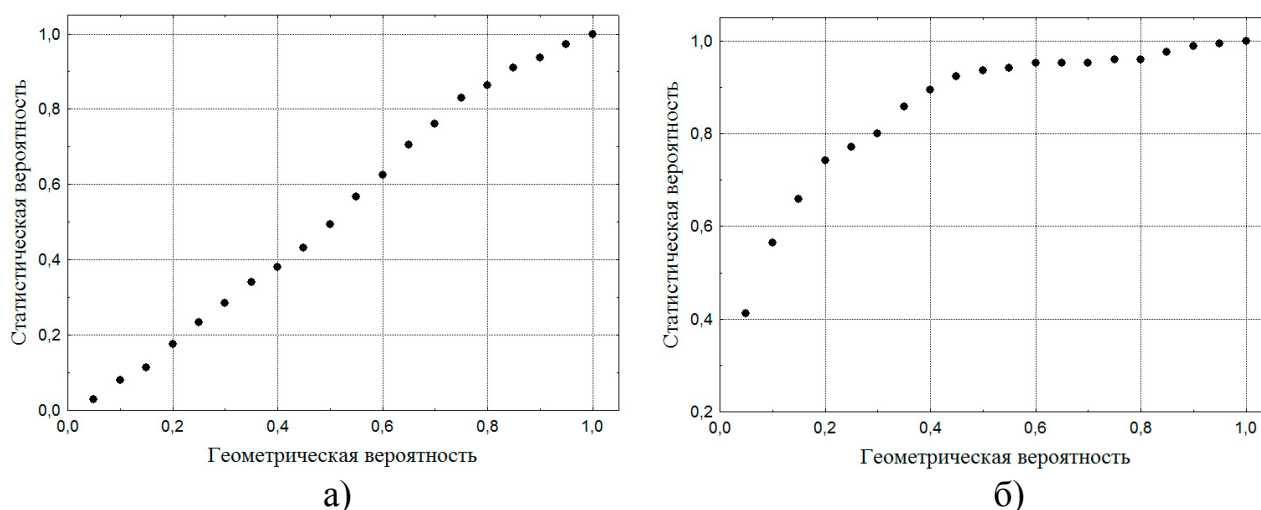


Рис. 6.15. – Вероятности событий в процессе развития стран мира: а) доля городского населения стран; б) удельное потребление энергии странами

Таким образом, реакции систем на внешние воздействия, которые отражаются в наблюдаемых изменениях их состояний, могут выражаться как в изменении параметров отдельных свойств систем, так и в появлении некоторых характерных событий. При этом существующие законы распределения случайных величин могут служить эмпирическими моделями для характеристики состояний систем.

Функции распределения событий и величин для многих процессов и явлений в природе и обществе определяются по экспериментальным данным. В математической статистике считается, что теоретически при достаточном количестве опытов свойственные этим процессам и явлениям закономерности могут быть установлены сколь угодно точно. Суть определения законов распределения случайных величин на основе опыта сводится к построению гистограмм, когда на равновозможной координатной оси изучаемой величины выделяется равномерная сетка и на ней представляются относительные частоты наблюдаемых данных,



которые чаще всего не удовлетворяют свойству равномерности. По большому счету данный метод позволяет установить связь между геометрическими и статистическими вероятностями случайной величины.

Многие случайные события часто свидетельствуют о качественных изменениях в состояниях систем, причем имеющиеся данные указывают на существование во множестве случаев тесной взаимосвязи между распределениями вероятностей этих событий и параметрами состояния систем. Все это позволяет сделать общесистемное предположение, что количественные свойства систем однозначно характеризуются измеряемыми параметрами, а статистические вероятности событий, которые часто являются результатом опыта, позволяют судить о качественных характеристиках систем. Причем при определении состояния системы необходимо учитывать как количественную, так и качественную стороны.

Обобщая результаты всех приведенных выше примеров, можно сказать, что на практике во многих науках при обработке опытных данных широко используются эмпирические методы построения моделей, когда связывают функции статистических распределений случайных величин с параметрами систем. Такие модели во многих науках находятся преимущественно опытным путем и дают основание говорить о взаимосвязи между качествами и свойствами систем.

### **6.3 Вероятностные принципы в термодинамике**

Установление общих закономерностей в ОТС немыслимо без анализа информации в области естествознания, где существуют самые обширные базы систематизированных опытных фактов. В физике имеется много примеров, связанных с оценкой состояния физических систем на основе определения вероятности событий, свойственных состояниям этих систем. Известно, что скорости молекул подчиняются распределению Максвелла, ошибки наблюдений в опыте – нормальному закону распределения, случайные блуждания частиц – распределению арксинуса, сила притяжения (отталкивания), действующая на частицу газа, который представляет собой совокупность заряженных ионов – распределению Хольцмарка и т.д.

Основу подавляющего большинства явлений в природе составляют случайные процессы, поэтому распределения различных величин достаточно широко используются в физике. Несмотря на это, применение вероятностных принципов в большинстве теоретических разделов физики не столь очевидно. Сущность большинства физических законов выражается в динамических закономерностях, которые представляют собой форму детерминированной причинной связи, когда данное состояние системы однозначно определяет все ее последующие состояния. На первый взгляд и классическая термодинамика является ярким примером детерминированной физической теории, где нет места случайности. Однако это не совсем так. Случайность в термодинамику, кстати как и в некоторые другие разделы

физики, вносится в узком смысле – как равновозможность. Для простейших систем подобное допустимо, так как теория дает хорошее совпадение расчетных зависимостей с опытными данными. В сложных физических системах, где принцип равновозможности нарушается, в исходные зависимости и закономерности вносятся поправки и корректирующие члены, которые позволяют получить приемлемую точность.

В качестве одного важного примера покажем, что некоторые основополагающие положения классической термодинамики могут быть получены с использованием вероятностных принципов, в частности, путем применения при моделировании генераторов случайных чисел.

Используя метод Монте-Карло, проведем следующий простой и легко воспроизводимый статистический эксперимент. Предположим, что состояние системы характеризуется двумя измеряемыми и независимыми параметрами  $x$  и  $y$ . В наблюдаемой области определения этих переменных  $\Omega_2 \{0 \leq x \leq x_{\max}; 0 \leq y \leq y_{\max}\}$  параметр  $x$  может изменяться от нуля до  $x_{\max}$ , а параметр  $y$  – от нуля до  $y_{\max}$ .

Известно [22, стр. 400], что вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 6.16), у которого правая вершина располагается в точке  $A\{x, y\}$ , равна:

$$\rho = P(0 \leq X < x; 0 \leq Y < y) = [F(x, y) - F(0, y)] - [F(x, 0) - F(0, 0)], \quad (6.11)$$

где  $F(x, y)$  – функция распределения двумерной случайной величины, которая для независимых случайных величин  $x$  и  $y$  равна  $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ . Из теории вероятности следует, что если на плоскости дана равномерно распределенная двумерная случайная величина, то в этом случае применимо геометрическое определение вероятности. При этом вероятность попадания случайной точки в прямоугольник определяют в виде отношения площади прямоугольника, образованного координатными линиями  $x$  и  $y$  к точке  $A\{x, y\}$ , к площади всей прямоугольной области  $\Omega_2$  [22].

Предположим, что координаты точки  $A\{x, y\}$  в процессе проведения статистических экспериментов на плоскости  $xOy$  в области  $\Omega_2$  (рис. 6.16) могут быть выбраны на отрезках  $[0, x_{\max}]$  и  $[0, y_{\max}]$  каждый раз абсолютно случайно с учетом равномерного распределения независимых величин  $x$  и  $y$ . Определим вероятность расположения точки  $A\{x, y\}$  как

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \text{ при } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ \rho &= \frac{x \cdot y}{x_{\max} \cdot y_{\max}} \text{ при } 0 < x \leq x_{\max} \text{ и } 0 < y \leq y_{\max}; \\ \rho &= 1 \text{ при } x > x_{\max} \text{ и } y > y_{\max}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

При определении геометрической вероятности  $\rho$  области  $(x > x_{\max}; 0 < y \leq y_{\max})$  и  $(0 < x \leq x_{\max}; y > y_{\max})$  не рассматриваются, так как в опыте точки из этих областей не наблюдаемы.

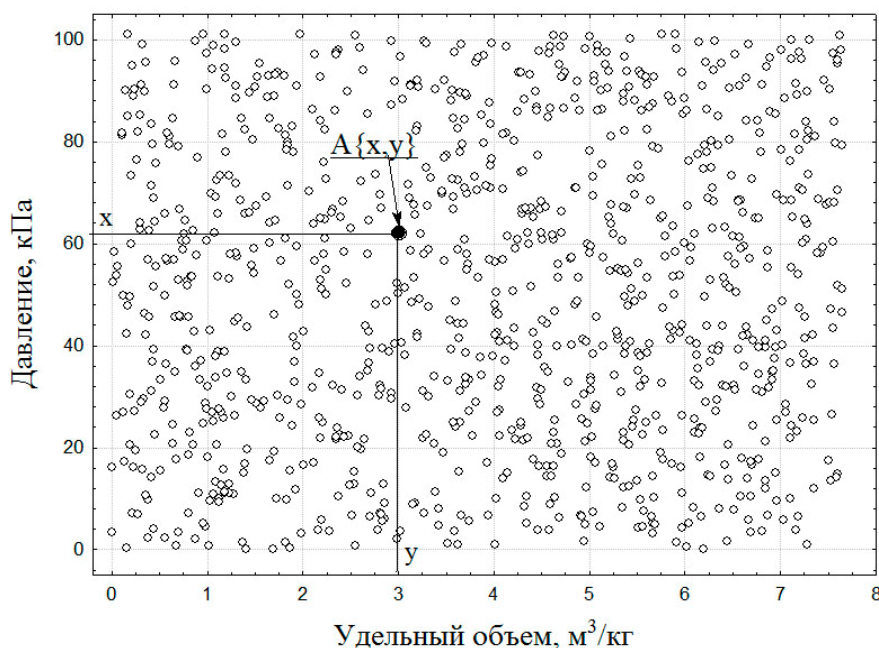


Рис. 6.16. – Диаграмма рассеивания физических свойств гелия при равномерном распределении данных (число статистических экспериментов – 1000)

Выберем на плоскости в области  $\Omega_2$  некоторую опорную точку  $A_0\{x_0, y_0\}$ , для которой  $\rho = \rho_0$ , и проведем линейное шкалирование геометрической вероятности. Для этого точке  $A_0\{x_0, y_0\}$  присвоим значение равное, например, 0 (градусов, пунктов или баллов), а точке  $A_1\{x_{\max}, y_{\max}\}$  – значение равное 100 (градусов, пунктов или баллов). Построим линейную шкалу интервалов в виде некоторого индекса  $t$ :

$$t = 100 \cdot \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0} = 100 \cdot \frac{(x \cdot y)_t - x_0 \cdot y_0}{x_{\max} \cdot y_{\max} - x_0 \cdot y_0}. \quad (6.13)$$

Далее методами статистики будем устанавливать связь между геометрической вероятностью  $\rho$  и индексом  $t$ .

После пояснения общей методики статистического моделирования проведем вычислительный эксперимент применительно к имеющимся физическим данным, которые определяют состояние различных газов.

Предположим, что параметр  $x$  – это удельный объем газа  $v$ , а параметр  $y$  – это давление газа  $p$ . Возьмем всего две опытные точки для произвольного газа, например, гелия. Известно, что при давлении среды, равном  $p_0 = 101325 \text{ Па}$ , и физических условиях, когда вода переходит в лед, удельный объем гелия равен  $v_0 = 5,60320 \text{ м}^3 / \text{кг}$ . При том же давлении и физических условиях, когда вода кипит, удельный объем гелия равен  $v_{100} = 7,65453 \text{ м}^3 / \text{кг}$ . Будем считать состоянием газа некоторое событие, для которого пары значений давления и удельного объема

выбраны случайно. Генерируя равномерно распределенным генератором случайных чисел значение параметра  $\nu$  от нуля до  $\nu_{100}$  и значение параметра  $\rho$  от нуля до  $\rho_0$ , получим в области  $\Omega_2$  диаграмму рассеивания физических свойств гелия, которая представлена на рисунке 6.16.

На рисунке 6.17 представлена функция распределения геометрической вероятности для равномерно распределенных величин  $\nu$  и  $\rho$ , которые соответственно заданы на отрезках  $[0; 7,65453]$  и  $[0; 101325]$ . Геометрическое место точек  $\rho = const$  будет представлять собой гиперболы в плоскостях, параллельных плоскости  $xOy$ .

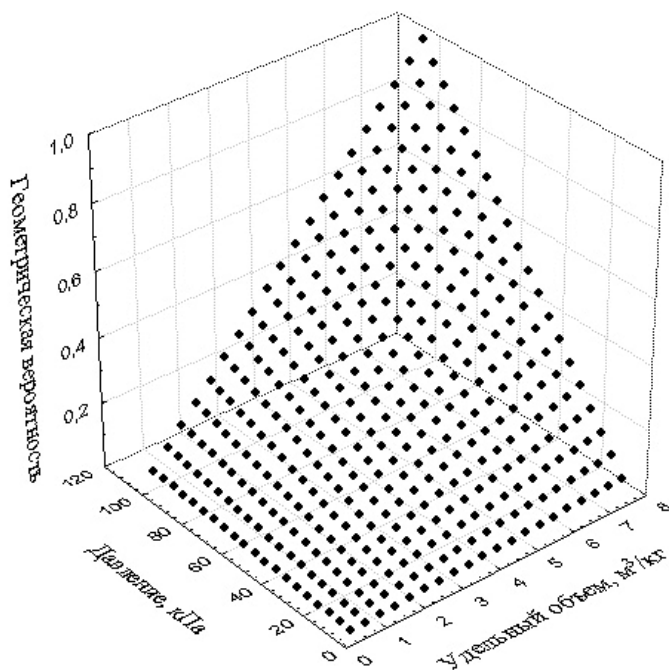


Рис. 6.17. – Геометрическая вероятность для равномерно распределенных на плоскости величин  $\nu$  и  $\rho$

Статистическая обработка этих вычислительных экспериментов дает для зависимости индекса  $t$  от величины вероятности  $\rho$  следующую линейную

зависимость для гелия (рис. 6.18):

$$t = a + b \cdot \rho = -273,1496 + 373,1496 \cdot \rho. \quad (6.14)$$

В случае, если взять опытные данные для водорода ( $\nu_0 = 11,12720 \text{ м}^3 / \text{кг}$ ;  $\nu_{100} = 15,20087 \text{ м}^3 / \text{кг}$ ), то уравнение (6.14) будет получено в виде:  $t = -273,1493 + 373,1493 \cdot \rho$ .

Аналогичным образом получим, для кислорода:

$$t = -273,1492 + 373,1492 \cdot \rho;$$

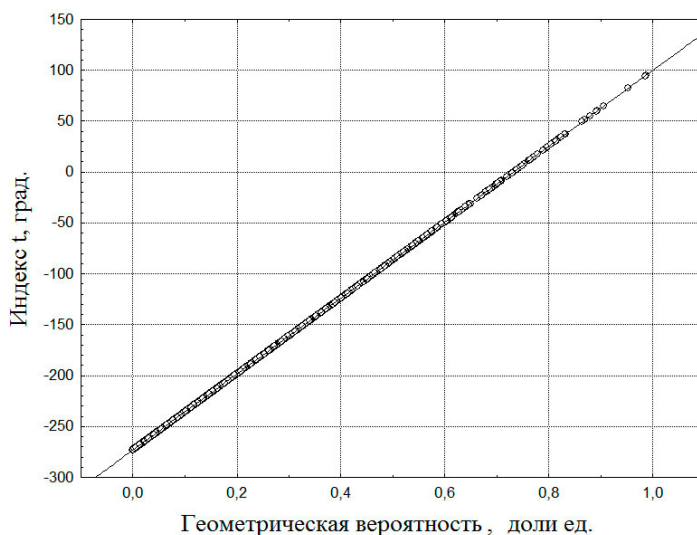
для азота:

$$t = -273,1527 + 373,1527 \cdot \rho;$$

для неона:

$$t = -273,1519 + 373,1519 \cdot \rho.$$

Рис. 6.18. – Зависимость индекса  $t$  согласно (6.13) от геометрической вероятности  $\rho$



Введем с учетом (6.14) понятие абсолютного индекса  $T = T_0 + t$ , где  $T_0 = -a$ , тогда имеем простую линейную связь этого индекса с геометрической вероятностью в виде  $T = const \cdot \rho$ . Можно показать, что коэффициент  $T_0$  связан с геометрической вероятностью системы в опорной точке  $A_0$  и равен  $T_0 = 100 \cdot \rho_0 / (1 - \rho_0) = 273,1494$ .

Легко также показать, что константы  $a$  и  $b$  линейного уравнения (6.14) практически не зависят от выбора опорной точки  $A_0$  на прямой линии  $p_0 = 101325 \text{ Па}$ , т.е. не зависят от значения удельного объема  $\nu_0$ . Главное, чтобы на этой прямой выполнялось условие  $\rho_0 = (\nu_0 / \nu_{100}) = 0,732011$ , которое определяется опытными данными нагревания идеальных газов при невысоких давлениях. Таким образом, полученные результаты носят универсальный характер и могут не привязываться к физическим свойствам конкретных газов. Например, идеального газа с параметрами  $\nu_0 = 25,00 \text{ м}^3 / \text{кг}$  и  $\nu_{100} = 34,1525 \text{ м}^3 / \text{кг}$  при давлении  $p = p_0$  в природе не существует, тем не менее, для этого случая уравнение (6.14) можно получить в виде:  $t = -273,1494 + 373,1494 \cdot \rho$ .

Таким образом, нами на основе статистических экспериментов найдено значение абсолютного нуля, равное по шкале  $t$  значению  $t_z = -273,1494$  град, при этом практически не использованы опытные данные термометрии за исключением данных о значениях давления и удельного объема в опорных точках. Из приведенных результатов видны явные аналогии с процессами построения шкал температур в термодинамике – шкалой Цельсия  $t$  и шкалой Кельвина  $T$ . Все вышесказанное позволяет сделать следующие выводы:

- проводя измерения температур по шкале Кельвина, мы тем самым определяем внутри шкалы  $0 < T \leq 373,15$  геометрическую вероятность состояния некоторой абстрактной термодинамической системы, которую называют идеальной. Вне шкалы обычно проводится распространение функции температуры на всю числовую ось  $T(0, +\infty)$ , т.к. известно, что любую непрерывную функцию, имеющую непрерывные производные в замкнутой области, можно распространить на всю числовую ось [99]. Основной особенностью идеальной термодинамической системы является равновозможный выбор значений параметров газа при низких давлениях;

- значение абсолютного нуля по шкале Кельвина ( $T = 0 \text{ К}$ ,  $t_z = -273,1494 \text{ °С}$ ) определяется исключительно выбранным опорным состоянием (нормальные условия:  $p_0 = 101325 \text{ Па}$  и  $t_0 = 0 \text{ °С}$ ), причем единица измерения температуры находится из условия, что  $\rho_0 = \frac{p_0 \nu_0}{p_0 \nu_{100}} = \frac{\nu_0}{\nu_{100}}$ ;  $T_0 = 100 \cdot \rho_0 / (1 - \rho_0)$ . При этом условно принимается,

что  $1^{\circ}\text{C} = 1\text{K}$ . Из уравнения (6.14) следует, что шкала Кельвина является положительной шкалой, т.к. геометрическая вероятность  $\rho \geq 0$ ;

- уравнение Менделеева-Клапейрона вытекает как следствие из уравнения (6.14). Из данного уравнения имеем:

$$T = 373,1494 \cdot \rho = 373,1494 \cdot \frac{p \cdot \nu}{p_0 \cdot \nu_{100}} = \frac{373,1494}{1,3661} \cdot \frac{p \cdot \nu}{p_0 \cdot \nu_0},$$

откуда получаем уравнение в виде:  $p \cdot \nu = R \cdot T$ , где индивидуальная газовая постоянная равна  $R = 0,003661 \cdot p_0 \cdot \nu_0$ , что полностью соответствует опытным термодинамическим данным [50];

- устанавливая взаимосвязь абсолютной температуры  $T$  со значениями эмпирических температур  $t$ , которые, в свою очередь, связаны с некоторыми термометрическими свойствами реальных веществ, мы тем самым определяем связь геометрической вероятности состояния идеальной термодинамической системы и термометрических свойств веществ в аналогичных условиях. Причем в термодинамике доказывается, что в качестве идеальной системы может выступать идеальный газ, состояния которого в области  $\Omega_2$  подчиняются закономерности (6.12), а некоторые реальные газы при низких давлениях ведут себя как идеальный газ, причем в опыте над газами мы можем реализовать равновозможный выбор параметров  $\nu$  и  $p$ .

Таким образом, вся термометрия науки термодинамики построена на принципе многомерного шкалирования, т.е. установлении опытным путем для одних и тех же внешних условий соответствия между вероятностным распределением состояния идеальной термодинамической системы и эмпирическими распределениями состояний реальных термодинамических систем, оцениваемых по термометрическим свойствам веществ. Причем идеальная система предполагает, что ее параметры состояния  $\nu$  и  $p$  подчинены равномерному вероятностному распределению, что не является характерным для реальных систем. Установление соответствия между состояниями проводится с помощью приборов – термометров, построенных на принципе определения различных термометрических свойств веществ и градуированных в шкалах эмпирических температур. Между абсолютной и эмпирическими шкалами температур устанавливаются количественные связи в виде функциональных зависимостей.

Обратим внимание на то, что для представленного на рисунке 6.16 распределения точек, между статистической вероятностью  $w$  и геометрической вероятностью  $\rho$  существует практически функциональная линейная зависимость (рис. 6.19). Статистическая вероятность определяется по уравнению  $w = i/n$ , исходя из отношения числа точек  $i$ , лежащих в прямоугольнике  $OxAy$  (на рисунке 6.16 он ограничен координатными осями и линиями, проходящими через точку  $A\{x, y\}$

параллельно этим осям) к общему числу точек  $n$ . Линейная связь характерна только для случая, когда точки равномерно распределены на плоскости  $xOy$ .

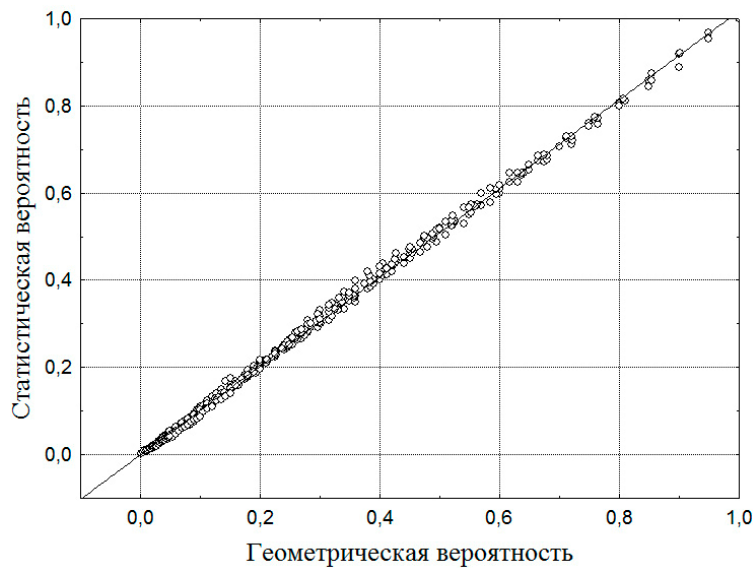


Рис. 6.19. – Зависимость статистической вероятности  $w$  от геометрической вероятности  $\rho$  для точек равномерно распределенных на плоскости

Если статистические распределения наблюдаемых в опыте параметров не являются равномерно распределенными, то зависимость между величинами  $w$  и  $\rho$  будет иметь выраженный нелинейный характер. В каждом конкретном опыте нелинейность зависимости между статистической вероятностью  $w$  и геометрической вероятностью  $\rho$  связана с особенностями тех или иных явлений, в основе которых лежат случайные процессы.

В подтверждение этого вывода на рисунке 6.20 для области  $\Omega_2(0 \leq p \leq p_0; 0 \leq v \leq v_{100})$  представлена диаграмма рассеивания физических свойств гелия при нормальном распределении точек на плоскости, а на рисунке 6.21 для этого случая по результатам вычислительных экспериментов показана зависимость статистической вероятности  $w$  от геометрической вероятности  $\rho$ . На данном рисунке видно семейство S-образных линий, которые соответствуют определенным сгруппированным данным.

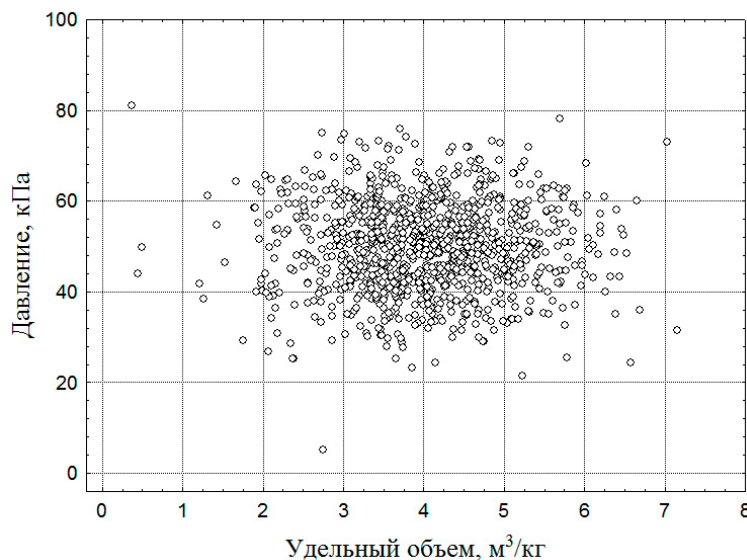
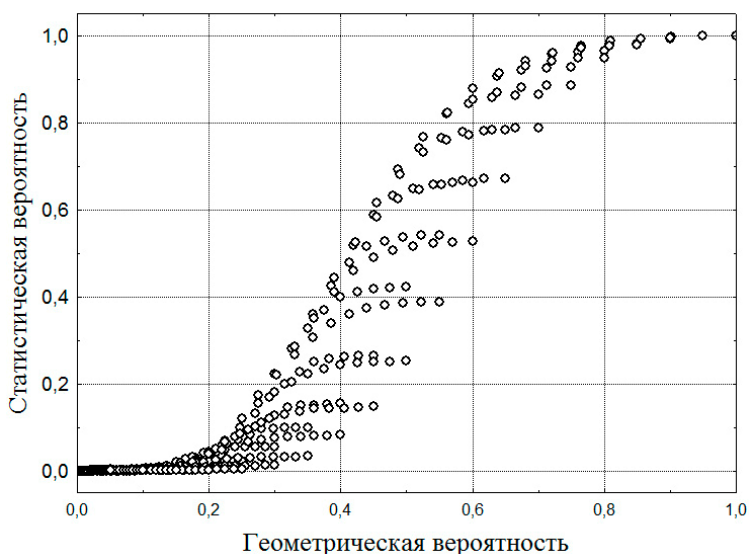


Рис. 6.20. – Диаграмма рассеивания физических свойств гелия при нормальном распределении опытных данных (число экспериментов – 1000)



Таким образом, если наблюдаемые события, например, опытные значения величины  $X$ , не являются равновероятными, то между статистической вероятностью  $w$  и геометрической вероятностью  $\rho$  появления события существуют нелинейные  $S$ -образные зависимости, связанные с особенностями данного реального процесса или явления.

Рис. 6.21. – Зависимость статистической вероятности  $w$  от геометрической вероятности  $\rho$  для точек нормально распределенных на плоскости



Теперь покажем для примера, как в статистической физике находят связь параметров состояния идеального газа непосредственно с вероятностями характерных событий, которые отражают особенности в движении молекул.

Известно, что в термодинамике в процессе оценки воздействия окружающей среды на молекулы как объекты наблюдения в качестве характерного события для оценки вероятности выступает факт существования молекул, обладающих различными скоростями движения или различными запасами кинетической энергии.

Закон распределения скоростей Максвелла гласит, что в общем числе молекул  $N$ , находящихся в устойчивом состоянии, количество молекул, которые обладают результирующими скоростями в диапазоне значений  $c$  и  $c + dc$ , будет составлять  $dn$ , при этом известно, что  $dn = N \cdot f(c)dc$ . Поэтому в процессе моделирования состояния идеального газа возможно использование закона Максвелла, согласно которому вероятность состояния, определенная по характерным событиям, может быть найдена из уравнения [84]:

$$w(c) = \frac{n}{N} = 4\pi \cdot A \cdot \int_0^c c^2 \exp(-h \cdot m \cdot c^2) dc, \quad (6.15)$$

где  $m$  – масса одной молекулы, а  $A$  и  $h$  – постоянные.

В статистической физике постоянные  $A$  и  $h$  определяют исходя из нормировки распределения (6.15). Естественно, что в случае, если  $c \rightarrow \infty$  вероятность  $w(c)$  равна единице. Из этого условия определяется первая константа, которая равна  $A = (h \cdot m / \pi)^{3/2}$ .

Вторая постоянная  $h$  определяется из условия равенства средней



кинетической энергии молекул, которая находится по средней квадратичной скорости молекул  $C^2$  с учетом распределения (6.15), и кинетической энергии, определяемой из основного постулата кинетической теории для идеальных газов.

Согласно этому постулату средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул равна  $\frac{m \cdot C^2}{2} = \frac{3}{2} k \cdot T$ , где  $k$  – постоянная Больцмана. Из закона Максвелла следует, что средняя квадратичная скорость молекул будет иметь вид [84]:

$$C^2 = 4\pi \cdot A \int_0^{\infty} c^4 \exp(-h \cdot m \cdot c^2) dc. \quad (6.16)$$

Откуда получают, что постоянная  $h$  равна  $h = 1/(2 \cdot k \cdot T)$ , и уравнение (6.15) представляют в виде:

$$w(c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{m}{k \cdot T}\right)^{3/2} \int_0^c c^2 \exp\left(-\frac{m \cdot c^2}{2 \cdot k \cdot T}\right) dc. \quad (6.17)$$

Таким образом, данный подход позволяет установить связь статистической вероятности состояния термодинамической системы, которая определяется по сложным событиям, характеризующим отличия в состоянии молекул по кинетической энергии, с абсолютной температурой или, как было показано ранее, с геометрической вероятностью состояния системы. Следовательно, законы кинетической теории газов позволяют построить зависимости, которые связывают вероятности возникновения характерных событий с параметрами состояния идеальных термодинамических систем. Отметим, что параметры зависимости (6.15) могут быть найдены непосредственно из физического опыта, целью которого является экспериментальная проверка закона Максвелла. Методики и схемы подобных опытов достаточно отработаны, хотя и трудоемки [84].

Естественно, что поведение реальных термодинамических систем отличается от поведения идеальной системы, которая является просто абстрактной математической моделью, адекватно отражающей поведение некоторых газов при низких давлениях. Обратим внимание на то, что для моделирования состояний реальных газов в термодинамике используется понятие энтропии, для связи которой с параметрами состояния находятся зависимости вида:

$$s = s_0 + c_v \cdot \ln p + c_p \cdot \ln v \quad \text{или} \\ s = s_1 + c_v \cdot \ln T + R \cdot \ln v, \quad (6.18)$$

где  $c_v$  и  $c_p$  – теплоемкости. Видно, что между зависимостями (6.3) и (6.18) существуют явные аналогии, суть которых будет раскрыта далее. Основная идея построения зависимостей вида (6.3) и (6.18) состоит в установлении связей между оценками статистической вероятности события, определяемой из опыта, и геометрической вероятностью распределения параметров

влияющих факторов, которая является исходной моделью при равновозможных исходах испытаний.

Таким образом, в данном и предыдущем подразделах рассмотрены два способа построения вероятностных моделей. В науках, связанных с оценкой опасностей и рисков, а также в биологии, отработаны методики построения моделей на основе опыта, которые позволяют непосредственно устанавливать связь между статистической вероятностью состояния системы, определяемой по характерным событиям, и параметрами состояния этой системы или параметрами окружающей среды.

В этом случае единая шкала для оценки статистических вероятностей  $w$  строится как модель инверсного статистического распределения. Основой данного подхода является предположение о виде распределения события или случайной величины, например, в виде нормального закона распределения. Для построения шкалы используют функцию вероятности в инверсном виде с известными характеристиками распределения. Например, для нормально распределенных величин этим способом строится шкала пробита в интервале  $\text{Pr}\{-\infty, +\infty\}$  для инверсного преобразования со средним, равным нулю и дисперсией, равной единице. На основе опытных данных пробит связывают со свойствами системы путем определения уравнения регрессии относительно логарифмов параметров свойств.

При таком построении вероятностных моделей обычно используется принцип взаимосвязи статистического и геометрического определения вероятности. Исходные допущения предполагают, что статистическая вероятность событий определяется только на основе опыта и обладает свойством устойчивости относительных частот, причем статистические распределения существуют и не являются равномерно распределенными. Также считается, что параметры свойств систем измеряемы, причем для описания шкал измерений параметров для каждого свойства может использоваться геометрическая вероятность, так как абсолютному процессу измерения в общем случае свойственно понятие равновозможности.

Второй способ построения вероятностных моделей наиболее развит в термодинамике. На основе его проводится шкалирование геометрической вероятности состояния идеальной термодинамической системы, т.е. создается шкала температур  $T$  для всего класса термодинамических объектов, как линейная функция геометрической вероятности  $\rho$ , т.е.  $T = a \cdot \rho$ . Для создания шкалы и определения постоянной  $a$  выбирается некоторое характерное состояние  $M_0$  с известными параметрами свойств системы, которое является опорным состоянием для всего изучаемого класса объектов и для которого принимается, что  $T(M_0) = T_0$ . Для определения единицы измерения линейной шкалы абсолютной температуры и построения модели состояния системы дополнительно строится некоторая шкала эмпирического индекса. С этой целью кроме точки  $M_0$  выбирается

второе опорное состояние, например, определенное легко воспроизводимое состояние эталонного объекта.

Вариантов выбора опорных состояний может быть множество. В термодинамике опорные состояния для эмпирических шкал температур привязываются к фазовым точкам замерзания и кипения воды. Опорные точки для фондовых индексов привязывают к определенным моментам времени (например, индекс Уилшир-5000 имеет базисное значение, установленное на 31 декабря 1980 года). Шкала бальной оценки землетрясений сортирует весь исторически наблюдаемый массив этих стихийных явлений в двенадцатибальной шкале порядка и т.д. Так формируются различные эмпирические индексы, которые могут иметь связь с абсолютным индексом системы – некоторой величиной, линейно зависящей от геометрической вероятности. Эта связь устанавливается на основе опытных данных, в результате чего определяется уравнение состояния системы. В термодинамике абсолютный индекс называют температурой. Следует отметить, что правильно заданная шкала абсолютного индекса системы должна являться шкалой отношений, т.е. иметь абсолютное начало отсчета, единицу измерения и бесконечную числовую ось. В термодинамике после построения шкалы температур находится связь между параметрами и вероятностями состояния системы в виде уравнения  $f(v, p, T) = 0$  или зависимости для энтропии вида (6.18). Особенность данного способа состоит в том, что вероятности состояния системы вводятся через абсолютную температуру и энтропию неявно, причем в термодинамике сущность этой связи никак не раскрывается.

Первый способ обработки данных проще, однако часто он не позволяет провести обобщение метода на весь класс объектов или явлений. Например, в токсикологии для различных категорий воздействий (хроническое, острое, смертельное) определяют различные зависимости вида (6.3), так как оценивают вероятности возникновения качественно разных событий. Точно также в примере обработки данных по биоразнообразию результаты, полученные для приматов, нельзя распространить на всех животных, т.к. каждый отряд животных будет иметь свою область изменения параметров и свое уравнение состояния, причем изначально неизвестно, можно ли в одном пространстве переменных обобщить все полученные уравнения состояний. Эту задачу можно решить только в случае, если будет разработано множество уравнений состояния для таксонов основных рангов животных.

Способ шкалирования, принятый в термодинамике, позволяет решить эту проблему и построить единые шкалы измерений при различных видах воздействий для обширного класса физических объектов. Однако, такая система измерений ориентирована только на одно характерное «событие», причем в термодинамике его суть не раскрывается: абсолютно не ясно идет ли речь о событиях, связанных с изменением кинетической энергии молекул, энергии их колебаний, всей внутренней энергии и т.п. В связи с тем, что вероятность состояния термодинамической системы вводится

неявно и гипотетически (ее нельзя оценить в опыте), очень сложно сказать, что мы измеряем, используя шкалы температур.

Оба способа дополняют друг друга и позволяют в опытных данных выявлять закономерности, которые можно использовать при построении моделей систем. Существующие способы построения вероятностных моделей, как будет показано далее, имеют теоретическое обоснование.

Исходя из сказанного выше, можно сформулировать следующую задачу всего дальнейшего исследования: если допустить, что установленные вероятностные закономерности обладают некоторым изоморфизмом, то возможно ли на их основе развить теорию системодинамики применительно к самым разным классам систем? Опытные факты и статистические закономерности лежат у истоков создания практически всех наук, поэтому универсальность данных вероятностных принципов очевидна, т.к. они свойственны как естественнонаучным, так и гуманитарным областям знаний.

Установление функций вероятностных распределений и их связи с влияющими факторами, т.е. условиями, при которых формируются события или наблюдаются случайные величины, позволяет с новых позиций определить понятие состояния системы. При любом построении теории роль состояния системы всегда является основным объектом теории. Сегодня ряд авторов, начиная изложение материала в книгах по системному анализу или термодинамике, изначально вводят понятие состояния системы, которое определяется совокупностью значений величин, характерных для данной системы и называемых параметрами состояния. Другие авторы используют понятие параметров, которые являются характерными свойствами, определяющими состояние системы. Более четкого определения состояния системы нет. В лучшем случае в термодинамике даются пояснения на примере: вещества обычно пребывают в одном из трех основных состояний: в виде газа, жидкости или твердого тела [50, 81]. Уже из этого пояснения видно, что состояния систем связаны с определенными качествами.

Общую теорию системодинамики можно построить различными способами. Первый путь – это применение логического метода термодинамики к описанию процессов, явлений и систем нефизической природы, заключающийся в том, что положения теории обосновываются на основе использования гипотез, которые проверяются экспериментальным путем, причем гипотезы относятся к классу вероятностных закономерностей.

Второй путь – построение аксиоматики общей теории систем применительно к процессам как физической, так нефизической природы. В данном случае постулаты или аксиомы должны носить общесистемный характер и иметь отношение к любым классам объектов и систем. Оба пути являются важными для понимания общей системы построения системодинамики как универсальной науки моделирования явлений и процессов в природе и обществе.

В любом случае изначально необходимо четкое определение основных понятий, исходя из методологии общей теории систем. В этом плане нам предстоит переосмыслить содержание таких понятий как состояние системы, качества и свойства системы, вероятность состояния и энтропия, а также некоторых других величин, которые используются как в термодинамике, так и в целом ряде других наук.

Таким образом, как видно из данной главы, между процессами физической и нефизической природы имеются аналогии, указывающие на существование глубоких общесистемных закономерностей. Устойчивость относительных частот и существование законов распределения для случайных величин относятся именно к таким закономерностям. Далее покажем, что на основе использования статистических закономерностей и относительно простого математического аппарата системодинамики, который по сути является аналогом математического аппарата термодинамики, можно разработать фундаментальные модели, свойственные разнообразным классам явлений.

## Глава седьмая

# ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИНЦИПЫ И ПОСТУЛАТЫ СИСТЕМОДИНАМИКИ

### 7.1 Основные понятия и определения

Определим *системодинамику* как науку о закономерностях процессов изменения и развития систем во времени. Исходя из этого объектом исследования системодинамики является множество различных классов систем. В свою очередь, предметом изучения системодинамики служат все наблюдаемые факты изменения состояния систем, которые представляют собой статистически закономерный результат различных видов взаимодействий в природе и обществе.

Любое исследование и изучение систем начинается с эмпирических процедур измерения и наблюдения. С помощью измерения дается количественная характеристика свойств объектов путем определения значений параметров в той или иной системе единиц; наблюдение преимущественно позволяет устанавливать факты (события, эффекты, явления) количественных и качественных изменений в состоянии систем. Будем считать, что любое изменение системы во времени как единого целого, а тем более ее развитие, связано с качествами и свойствами и может быть оценено только на основе опыта путем установления общих статистических закономерностей, которые свойственны совокупному процессу изменения состояния. Любое изменение отдельного свойства системы в любом процессе изменения состояния также оценивается на основе опыта, однако может быть выделено отдельно и представлено в виде более простой статистической закономерности. Этим мы предполагаем существование как одномерных, так и многомерных вероятностных распределений для изучаемых систем. В свою очередь, для описания множества состояний любой системы может быть построена некоторая среда моделирования, обладающая заданными свойствами и позволяющая представлять динамические закономерности в виде математических зависимостей как для каждого свойства, так и для всей системы в целом. Статистические закономерности, которые свойственны системе, могут быть описаны с некоторой точностью и представлены в виде семейства зависимостей в данной среде моделирования.

В литературе, посвященной системным исследованиям, существует множество подходов к определению понятия «система» [86]. Учитывая специфику данной задачи, будем использовать понятие системы, которое принято в философии [98]. Исходя из этого, дадим следующие определения. *Система* – совокупность взаимосвязанных элементов, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих некоторую целостность, единство. *Класс систем (объектов)* – множество однотипных объектов, обладающих общими свойствами и качественными признаками. *Свойство* –

атрибутивная характеристика, которая отражает некоторый существенный и неотъемлемый признак или отличительную особенность объекта или явления. *Параметр* свойства – количественная величина, характеризующая свойство объекта или явления и имеющая числовое значение. *Окружающая среда* – совокупность физических, биологических, природных, социальных, техногенных и других условий, в которых находится изучаемая система или объект. *Взаимодействие* – процесс взаимного влияния системы и окружающей среды, который приводит к изменению состояния системы. *Воздействие* – действие некоторого фактора окружающей среды на уровне, при котором у объекта с течением времени появляются устойчиво наблюдаемые изменения. *Объект воздействия* – система или ее элементы, на которые воздействуют факторы окружающей среды.

Исходя из этого можно сказать, что системодинамика будет рассматривать систему только в концептуальной совокупности окружающей среды и объектов воздействия, находящихся под действием факторов среды. Понятие абсолютно изолированной системы, которое часто применяется в науке, будем рассматривать как относительно грубое допущение, считая, что подобное наблюдается редко и может применяться только как гипотетическое приближение реальности в отдельных случаях и при особых условиях.

Изначально не делаем предположений о том, является ли изучаемая система живой или не живой. Нет ограничений на количество объектов и элементов, входящих в систему, а также условия их взаимодействия между собой и с окружающей средой. Накладываем только ограничение на то, что система подвержена медленным и непрерывным (эволюционным) изменениям во времени, в связи с чем исключены любые скачкообразные (революционные) изменения. При этом особо отметим, что эволюционные изменения в системе должны быть наблюдаемы и представлены в виде фактов (событий, явлений, эффектов). В свою очередь, меняющиеся во времени параметры свойств системы должны быть измеряемы. Такая постановка задачи требует от метода системодинамики при описании и анализе опытных данных необходимости учета общих закономерностей процессов изменения и развития систем. Сформулируем основы системодинамики, исходя из объективных закономерностей природы и общества, которые можно представить в виде трех принципов.

*Первый принцип* – это относительность количественных свойств объектов и абсолютность принятых процедур их измерения. *Второй принцип* – эмпирические факты устойчивости относительных частот и существования функций распределения статистических вероятностей для большинства наблюдаемых в природе и обществе событий. *Третий принцип* – взаимосвязь совокупности качественных и количественных характеристик систем, которая с течением времени проявляется в наблюдаемых изменениях в состоянии систем под действием внешних условий окружающей среды. Данные принципы для большинства объектов, процессов и явлений подтверждены практическим опытом человечества.

Отсюда следует основная логическая идея построения теории системодинамики, которая заключается в определении общесистемных связей между предшествующими, текущими и последующими состояниями систем различных классов. Этого можно достигнуть путем установления соответствия между статистическими и динамическими закономерностями, определяющими процессы изменения и развития систем во времени. В свою очередь, методология системодинамики будет вытекать из применения теории вероятности и математической статистики, логических подходов, использующихся в термодинамике, и алгоритмических методов анализа информации применительно к базам данных опытных фактов, которые накоплены при наблюдениях за различными системами и явлениями.

Исходя из сказанного выше, под *статистической* закономерностью будем понимать любую устойчивую тенденцию в изменении системы, которая установлена на основе статистических данных, полученных опытным путем. В свою очередь, под *динамической* закономерностью будем понимать приближенное описание тенденций изменения системы, представленное в виде зависимостей с помощью некоторой среды моделирования.

Известно, что каждый предмет (объект) обладает определенным количеством основных свойств, единство которых и является его качеством. Поэтому под *состоянием* системы будем подразумевать совокупность ее качественных и количественных характеристик, которые формируются под действием условий окружающей среды в конкретный момент времени.

Таким образом, *первой основой* для характеристики состояния является количественная определенность системы, связанная с ее свойствами. Изменение во времени количественной определенности системы будем связывать преимущественно с динамическими закономерностями ее развития. Количественная определенность – это та сторона системы, которая является основой для построения множества моделей ее изменения и развития. Совокупность свойств определяет количественную сторону системы через параметры ее состояния, которые могут быть измерены. Изначально, в основе построения любых моделей систем лежат процедуры измерения, которые позволяют количественно описать свойства объектов, определить параметры и построить шкалы отношений для их измерения. Процедуры измерения свойств являются составной частью любой системы моделирования. Поэтому динамическое моделирование систем будем трактовать в широком смысле, включая процедуры анализа систем, выделение свойств, установление системы единиц для их определения, измерение параметров и накопление опытных данных, построение среды моделирования и установление динамических закономерностей для описания изменений параметров свойств во времени.

Отметим, что не все переменные, характеризующие количественные изменения в системе, могут быть представлены в виде параметров свойств. Для упрощения будем считать *параметром* (индикатором) некоторую переменную величину, которая удовлетворяет следующим требованиям:



а) является атрибутивной переменной для данной системы (класса систем) и количественно характеризует какое-либо ее объективное свойство, которое может быть численно определено за счет применения общепринятой процедуры определения (измерения) данной величины;

б) полностью соответствует понятию системы положительных скалярных величин, т.е. обладает свойствами транзитивности, коммутативности и монотонности сложения, возможности реализации деления и т.д. [64];

в) имеет шкалу измерения в виде шкалы отношений, которая содержит абсолютное начало отсчета, единицу измерения величины и бесконечную положительную числовую ось;

г) вся процедура определения параметра свойства основана на использовании некоторой системы измерений, принятой по соглашению, в которой универсальной шкалой охватывают различные классы изучаемых систем и объектов. При этом в абсолютном смысле система измерений строится по принципу произвольного выбора значения величины из непрерывного множества точек шкалы отношений, в связи с чем факты случайного выбора (измерения) параметра свойства на любом интервале шкалы являются несовместным и равновероятными событиями.

Определение абсолютного начала отсчета требует установления определенной связи в процессе измерения с атрибутами системы и отказа от произвольного выбора начала отсчета. Для этого жестко связывают начало шкалы измерений данной атрибутивной переменной с качественными атрибутами, например, ноль массы – отсутствие вещества, ноль длины – отсутствие объекта, ноль давления – отсутствие силового воздействия на объект, ноль численности – отсутствие элементов системы и, как следствие, всей системы в целом и т.д.

Каждое измерение по отношению к конкретному объекту или явлению является *относительным* (релятивным), так как дает возможность определить в данный момент значение параметра свойства во взаимосвязи с изменениями других свойств системы, однако любой процесс измерения как единое целое содержит в себе элементы *абсолютного*. В этом смысле построение сред моделирования систем и шкал измерения величин абсолютно, так как абстрактно направлено на определение параметров свойств любых объектов и систем вне взаимосвязи их с другими свойствами и вне отношения к конкретным объектам. Будем связывать установление статистических закономерностей, свойственных системе, с относительным измерением, а установление динамических (моделируемых) закономерностей в ее изменении и развитии – с абсолютным измерением. В качестве основной *модельной* закономерности абсолютного процесса измерения каждого свойства принимаем условие случайного *равновероятного* выбора любого значения параметра свойства на определенном интервале шкалы измерения величины. Естественно, что опытные данные, связанные с измерениями значений параметров свойств

конкретного объекта или системы в принятых шкалах отношений, уже не будут иметь равномерное распределение.

Таким образом, для динамической закономерности принимаем равновозможную вероятностную модель событий, а для статистической закономерности – неравновозможную вероятностную модель.

Свойство, для которого может быть определен параметр, удовлетворяющий приведенным выше требованиям (а) – (г), будем называть *абсолютным*. В свою очередь, абсолютным будем называть также пространство свойств, образованное совокупностью всех абсолютных свойств системы. Исходя из этого, в понятиях математики абсолютное пространство свойств будет представлять собой логически мыслимую форму, которая служит средой для построения моделей. Другими словами в абсолютном пространстве могут быть построены конструкции (модели), отражающие уже относительность полученных в опыте количественных и качественных характеристик конкретных объектов и систем.

В этом плане время, в том виде, в котором оно сегодня используется в системах измерений, не может быть представлено свойством, так как принятая хронологическая шкала времени является шкалой интервалов без абсолютного начала отсчета. В математическом выражении измеряемое время по отношению к свойствам является общим параметром, так как возможно представление всех параметров свойств через параметрические уравнения относительно времени. Для того, чтобы время было представлено как свойство системы, в каждой задаче необходимо задание начала отсчета времени (задание начальных условий). Например, абсолютное время может выступать абсолютным свойством, когда изучается старение организма по отношению к моменту рождения, отказы системы с момента ее создания и т.д. В этих случаях время отражает некоторую важную особенность системы. Вопросу о представлении времени в системодинамике мы особо уделим внимание в следующей и последней главах данной книги. В свою очередь, длины, объемы, массы элементов и всей системы, численности элементов, многие физические, химические и биологические величины и т.д. будут выступать параметрами свойств, так как соответствующие шкалы измерений величин имеют абсолютные начала отсчетов.

*Второй основой* для характеристики состояния является качественная определенность системы, которая может меняться с течением времени в процессе изменения внешних условий окружающей среды. Изменение качественной определенности системы во времени вызвано статистическими закономерностями ее развития, и определяется взаимосвязью всех ее процессов и отношений. Качественная определенность – это та сторона системы, которая является основой для идентификации моделей системы, проверки на практике их адекватности и точности, оценки соответствия наблюдаемых закономерностей их модельным описаниям и т.д. При воздействии изменение качественных признаков системы обычно связано с наблюдаемыми событиями (явлениями, эффектами) и их характеристическими случайными

величинами (опытными данными). Исходя из классического определения, будем считать наблюдаемыми в системе *событиями* любые факты, которые могут произойти или не произойти. Вероятность наблюдаемых событий будет непосредственно зависеть от условий, в которых находится данная система. Именно регистрация событий позволяет характеризовать качественную сторону системы. При этом будем говорить о существовании пространства событий, которое характерно для каждой системы как единого целого. Естественно, что пространство событий системы – это результат опыта, поэтому оно является относительным.

Событие в системодинамике будем понимать в широком смысле, включая в его суть как наблюдаемые факты явлений, реакций, эффектов, результатов действий и т.д., так и факты измерения величин. Особо отметим, что нас будут интересовать не всякие события, наблюдаемые в системе, а только наиболее характерные события, свойственные качественным признакам и обладающие способностью отражать особенности развития системы (по И. Пригожину – ход эволюции системы). Другими словами, характерные события должны формироваться под действием необратимых процессов, происходящих в системе в процессе ее эволюции, и отражать наблюдаемые в совокупности количественные и качественные изменения в состояниях систем.

## 7.2 Функция состояния системы

Определим теперь понятие функции состояния системы. Исходя из предыдущей главы, предположим, что качественная определенность системы может быть оценена, при этом статистические вероятности некоторых характерных событий, которые связаны с множеством качественных признаков и изменениями в состоянии системы, будут являться количественной оценкой. Другими словами, статистические вероятности будут выступать основной мерой пространства событий. При этом события, связанные с изменением свойств в процессах смены условий, будут формировать сложные события, отражающие изменение качеств.

При такой постановке вопроса мы приходим к необходимости установления закономерностей взаимосвязи между относительным пространством событий и абсолютным пространством свойств, что даст возможность обосновать понятие пространства состояний для определенного класса сложных систем. При обобщенном подходе пространство состояний можно рассматривать как вероятностное пространство, представляющее собой некоторую совокупность  $(Z, A, W)$ , состоящую из множества  $Z$  (абсолютного пространства свойств – элементарных равновозможных событий), класса  $A$  подмножеств множества  $Z$  (пространства случайных событий – результатов опыта) и вероятностной меры  $W$ , которая представляет собой семейство действительных функций и определяет связь между распределениями на множествах  $Z$  и  $A$ . В рамках теории вероятности данная задача крайне

сложна, так как в каждом конкретном случае невозможно теоретически обосновать вид вероятностной меры  $W$ , если имеется многомерное пространство свойств, наблюдается сложная структура системы и не ясна причинно-следственная картина формирования событий. Другими словами можно сказать, что практически невозможно достоверно отобразить дерево событий с вероятностями последовательных переходов между событиями, если не пользоваться результатами опыта, а исходить только из теоретических предпосылок, логических и гипотетических предположений. Если же считать, что вероятностная мера во многих случаях может быть найдена или оценена эмпирически, то задача существенно упрощается.

Введем вероятностное пространство состояний системы, координатами которого являются параметры абсолютных свойств, число которых равно  $n$ . Предположим, что в различных внешних условиях окружающей среды изучается поведение конечного множества однотипных объектов (объектов одного класса), состояния которых изменяются под действием этих внешних условий. В процессе опытов поведение  $N$  идентичных объектов можно рассматривать как поведение некоторой системы, состоящей из этих объектов. При этом, каждому состоянию системы (каждому объекту) в  $n$ -мерном пространстве соответствует точка  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$  с известными параметрами свойств, которой могут быть поставлены в соответствие также вероятности  $w$  некоторых наблюдаемых событий, характеризующих реакции системы на воздействие. Таким образом, в  $n$ -мерном пространстве изучаемая система представима в виде «облака» опытных точек некоторого условного вероятностного поля. Благодаря такому представлению, в опыте можно оценить статистические вероятности наблюдаемых событий, которые свойственны каждому состоянию системы. При этом система, как класс однотипных объектов, представима в вероятностном пространстве определенным распределением статистических вероятностей. Естественно, что такое представление должно существовать, исходя из имеющихся данных. Каждому характерному событию соответствует свое вероятностное пространство статистических распределений. Семейство вероятностных  $n$ -мерных пространств размерности  $m$ , где величина  $m$  представляет собой число характерных событий, определяет область возможных состояний системы по множеству всех наблюдаемых событий.

Отметим, что данный подход, принятый при формировании вероятностного пространства, отличается от подхода, который был предложен Г. Гиббсом при построении фазового пространства состояний термодинамических систем. Гиббс предложил общую функцию распределения вероятности энергии системы, которая называется статистикой Гиббса. Фазовое пространство Гиббса отличается равновозможностью микроскопических состояний. Для него невозможно построить вероятностную меру в классическом представлении теории вероятности и опыт привносится в теорию косвенно путем умозрительных предположений о распределении микроскопических состояний системы для



В общем случае функция состояния (7.1) представляет собой систему функций, зависящих только от одной переменной – параметра времени  $\tau$ . Именно время накладывает определенные ограничения по изменению состояния системы в абсолютном пространстве свойств. При определении функции состояния системы (7.1) речь идет о параметре времени  $\tau$ , свойственном одной из выбранных систем измерения времени, которых в общем случае может быть множество. Пока ограничимся системой измерения времени, реализованной на основе часов, где используется некоторый регулярный циклический процесс.

### 7.3 Постулаты системодинамики

Теперь, исходя из общего определения функции состояния, установим понятие *эволюционно развивающейся* во времени системы и сформулируем основные постулаты системодинамики. Попробуем это сделать в терминах теории случайных процессов. Будем рассматривать два типа случайных процессов. Первый – случайные процессы изменения параметров свойств  $z_k(\tau)$ , вызванные внешними и внутренними условиями, и второй – связанные с ними случайные процессы изменения состояния системы, которые отражают в совокупности изменение ее качественных и количественных характеристик и которые могут быть представлены в виде некоторых реакций системы на воздействие  $X_j(\tau)$ . При этом, как указывалось выше, для реакций системы  $X_j(\tau)$ , представляющих собой некоторый поток событий, возможно определение в опыте статистических вероятностей  $w_j$ , которые свойственны каждому  $j$ -тому качественному признаку.

Согласно общепринятому определению будем считать случайным процессом функцию, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, причем заранее не известно, какой именно. Отнесем это определение к изменению параметров свойств системы  $z_k$ . Для них рассматриваем только случайные процессы, зависящие лишь от одной переменной – времени  $\tau$ . Поэтому представим случайный процесс изменения параметра каждого свойства  $z_k(\tau)$  как множество всех его возможных реализаций. Отметим, что случайный процесс изменения параметра  $k$ -того свойства в окрестности любого состояния системы является нестационарным, так как имеет определенную тенденцию развития во времени и зависит от процесса изменения состояния системы и формирования внешних условий.

Далее естественно предположить, что в окрестности любого исходного состояния системы не все возможные процессы изменения ее состояния могут быть осуществлены. Природа каждой системы накладывает определенные ограничения на реализацию всей совокупности процессов изменения качественных и количественных характеристик в

окрестности наблюдаемого состояния. Соответствующие ограничения на осуществление совокупности процессов накладываются системой функций  $W_j$ , которая имеет свои особенности для каждой конкретной системы. В терминах вероятностей это утверждение можно сформулировать в виде: *в окрестности любого исходного состояния системы осуществляемые процессы изменения ее состояния не обладают свойством равновозможной реализации.*

Таким образом, процесс изменения состояния системы предполагает определенные реализации совокупного случайного процесса для реакций системы на воздействие  $X_j(\tau)$  при определенной реализации случайного процесса для каждого свойства.

Сделаем два предположения относительно эволюционно развивающихся систем. Первое предположение будет касаться особенностей этих систем на фоне многообразия различных систем, а второе – реакций этих систем на воздействие. Это позволяет нам выделить эволюционно развивающиеся системы в отдельный класс систем и этот обширный класс, в свою очередь, разделить на подклассы в зависимости от характера реакций системы на воздействие.

Наиболее общее допущение предполагает, что эволюционно развивающиеся системы относятся к классу линейных систем или в определенных условиях могут быть линеаризованы.

Второе допущение определяет применительно к различным подклассам этих систем требования, которые могут быть связаны с некоторыми общесистемными ограничениями. Например, если для некоторой системы в процессе ее изменения и развития соблюдается принцип устойчивости относительных частот событий, то согласно частотной концепции вероятности Р. Мизеса должно выполняться два требования. Первое условие заключается в том, что при неограниченном увеличении числа опытов относительная частота наблюдаемого события при неизменных внешних условиях (и как следствие, при установившихся состояниях системы и неизменных или слабо изменяющихся параметрах свойств) должна приближаться к некоторому числу  $w$ , которое является вероятностью события. Второе условие статистической устойчивости состоит в том, что при большом количестве опытов частота события, которая вычислена по различным произвольным группам опытов (сериям испытаний), взятым из исходной совокупности опытов, должна быть близка к тому же самому числу  $w$ . Исходя из того, что на практике большое число опытов требует значительного времени их реализации, логически накладывается условие независимости (или слабой зависимости) статистических характеристик случайного процесса от времени. Другими словами при неизменных внешних условиях статистические характеристики реакций подобных систем на протяженных интервалах времени в динамически устойчивых состояниях инвариантны относительно следующего преобразования  $X_j(\tau) \rightarrow X_j(\tau + a)$ , где  $a$  – произвольное

фиксированное число. Чаще всего это возможно в системах, которые подвержены медленным и непрерывным изменениям во времени.

Подобный подход позволяет в концептуальной совокупности эволюционно развивающуюся систему представить в виде квазистатической системы, для которой при совместно протекающих случайных процессах изменения параметров свойств во времени наблюдается стационарность статистических характеристик многокомпонентной функции состояния (7.1) на достаточно длительном периоде наблюдения за поведением системы. Это дает возможность в окрестности любого состояния эволюционно развивающейся системы представить ее функцию состояния в виде совокупности оценок статистических вероятностей  $w_j$  для стационарных случайных процессов  $X_j(\tau)$  по каждому из компонентов системы:

$$\begin{cases} w_1(\tau) = W_1(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)) \\ \dots \\ w_j(\tau) = W_j(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)) \\ \dots \\ w_m(\tau) = W_m(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)) \end{cases} \quad (7.2)$$

Функцию состояния вида (7.2) в окрестности любого состояния системы будем называть квазистатической функцией. Таким образом принимаем, что в окрестности любого состояния для  $m$  компонентов системы квазистатическая функция состояния для реакций системы может быть представлена в виде статистических оценок вероятностей стационарных случайных функций или нестационарных случайных функций, которые сводимы к стационарным. Существенным здесь является то, что любой стационарный случайный процесс, определяющий реакции системы, допускает спектральные, канонические или другие виды разложений.

Сказанное выше позволяет иным образом определить понятие квазистатического процесса для системы, нежели это делается в термодинамике (равновесный процесс). В термодинамике изначально дается понятие равновесного состояния (состояние, к которому приходит система при неизменных внешних условиях) и накладывается требование осуществления равновесного процесса в виде бесконечно медленного прохождения системы через непрерывный ряд равновесных состояний. Если понятие равновесного состояния имеет объяснение и при небольшом уточнении может быть принято (при неизменных внешних условиях параметры свойств системы в таком состоянии остаются неизменными или с течением времени имеют устойчивую тенденцию, сводимую к небольшим наблюдаемым изменениям этих величин около средних значений), то понятие равновесного процесса крайне противоречиво. В такой формулировке в основы теории закладывается глубокое противоречие, связанное с отсутствием времени в уравнениях



классической термодинамики, несмотря на то, что любой процесс по своему содержательному определению предполагает зависимость от времени (*процесс* /лат. *processus* – движение вперед/ – последовательное закономерное изменение явления или состояния во времени). Следует отметить, что многие нефизические системы имеют медленный дрейф состояний во времени даже при неизменных внешних условиях или находятся в гомеостазе. Кроме того, при неизменных параметрах свойств всегда наблюдаемы некоторые характерные события, которые свойственны данному состоянию системы, так как существование материальных систем немислимо без движения и взаимодействия. Именно поэтому в основу определения квазистатического процесса в системодинамике, в отличие от определения равновесного процесса в термодинамике, закладывается необходимое условие существования для каждого состояния системы реакций на воздействие в виде стационарных случайных функций и независимость (или слабая зависимость) их статистических характеристик от времени.

Различные системы, для которых функции состояния могут быть представлены в квазистатическом виде (7.2), формируют обширный класс объектов и явлений в природе и обществе, в связи с чем их изучение представляет собой важную задачу системодинамики. Развитие теории анализа функций состояния вида (7.2) позволяет в перспективе перейти к изучению других функций состояния. Известно, что кроме стационарных случайных процессов и нестационарного пуассоновского процесса, сводимого к стационарному, существуют также другие случайные процессы, например, случайные процессы с независимыми приращениями, гауссовские и винеровские процессы и т.д. Поэтому реакции системы  $X_j(\tau)$ , которые определяют состояние системы, могут быть отнесены к одному из классов этих случайных процессов, а на их статистические оценки  $w_j(\tau)$  могут быть наложены определенные ограничения. Функции состояния вида (7.1) для отдельных случаев рассматриваются в последней главе данной книги.

Таким образом, предполагаем, что квазистатические функции состояния, свойственные эволюционно развивающимся системам, обеспечивают преобразования, которые могут быть отнесены к классу линейных операторов, и позволяют в устойчивых состояниях при неизменных внешних условиях формировать реакции системы на случайное нестационарное воздействие в виде стационарных случайных функций или случайных функций, сводимых к стационарным.

Обобщая сказанное выше, первый основной постулат системодинамики, который затрагивает качественную и количественную стороны системы, можно сформулировать в таком виде: *любая эволюционно развивающаяся система имеет квазистатическую функцию состояния, характеризующую в совокупности качественные и количественные изменения в системе.*

Принятие данного постулата предполагает, что для эволюционно развивающейся системы функция вида (7.2) существует и она, в общем случае, может быть оценена по опытным данным, причем статистические распределения для множества реализуемых процессов изменения состояния системы явно не зависят от времени. Более сложный вид функции состояния для других классов систем определяется видом уравнения (7.1), где статистические распределения зависят от времени. Системы, для которых невозможно представить функцию состояния в виде (7.1) или (7.2), в системодинамике не рассматриваются.

Проблема восстановления по опытным данным функции состояния часто приводит к необходимости учета многих свойств системы, в связи с чем многомерные распределения становятся крайне сложными. Кроме того, недостаточное количество опытных данных во многих случаях не позволяет достоверно определить вид функции состояния.

Однако, в любом отдельно взятом и уже произошедшем процессе (реализации случайного процесса) можно рассматривать изменения  $k$ -того свойства во времени ( $z_k = z_k(\tau)$ ) как динамическую закономерность. При этом измерение характерного параметра свойства на числовой оси сводится не только к установлению значений  $z_{k1}$  и  $z_{k2}$ , но и к определению в течении всего процесса промежуточных значений этого параметра в шкале отношений, общепринятой по соглашению для этого свойства (например, в шкалах измерения длины, массы, объема, давления, численности и т.д.). При этом можно определить также и изменение геометрических вероятностей. В условиях подобных измерений свойство объекта будет абсолютным и геометрические вероятности  $\rho(z_k) = \int_{z_{k1}}^{z_{k2}} f(x)dx$  будут определять вероятность элементарных событий попадания точки в наблюдаемый интервал изменения параметра свойства  $z_k$  в изучаемом процессе. Естественно, что геометрические вероятности удовлетворяют требованию равновозможности, что является основной закономерностью для принятой среды моделирования.

В свою очередь, факты наблюдения в опыте простых и сложных событий, а также их характеристических случайных величин (по отношению к конкретному объекту/свойству), будут рассматриваться как статистические закономерности, а события, для которых определяются вероятности  $w$  согласно (6.1), уже не будут равновозможными. Если будет существовать эмпирически определяемая связь между статистическими и геометрическими вероятностями, то можно уйти от установления многомерных распределений величин путем проверки статистических гипотез и подгонки модельных распределений к опытным данным, как это принято в теории вероятности. Это позволяет в простых случаях (например, при изменении свойств) или в более сложных случаях (при формировании реакций системы) оперировать распределениями статистических вероятностей, представляемых в виде функций времени и геометрических

вероятностей. Данный подход дает возможность получить статистические вероятности сложных событий в виде линейных разложений по простым координатным функциям геометрических вероятностей для каждого свойства, используя для этой цели, имеющиеся опытные данные.

Теперь необходимо задать способы определения вероятностей различных событий при изучении процессов изменения и развития систем.

Предположим, что состояние некоторой системы может характеризоваться  $n$  измеряемыми независимыми параметрами  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , совместные значения которых могут выбираться произвольно из некоторого множества  $\Omega_n$  точек  $n$ -мерного абсолютного пространства свойств, причем соответствующие события выбора точек являются равновероятными. В наблюдаемой области определения количественных переменных  $\Omega_n \{0 \leq z_1 \leq z_{1,\max}, 0 \leq z_2 \leq z_{2,\max}, \dots, 0 \leq z_n \leq z_{n,\max}\}$  с каждой точкой  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$  связывается скалярная величина  $T$ , которая линейно зависит от геометрической вероятности  $\rho$ . Величину  $T$  определим как *абсолютный индекс* системы. Данная величина в общем случае может определяться как для группы свойств, так и для каждого свойства в отдельности. Величина  $T$ , в отличие от геометрической вероятности  $\rho$ , которая по определению задается на отрезке  $[0, 1]$ , может быть распространена на всю числовую ось от нуля до бесконечности.

Задание способа определения абсолютного индекса  $T$  над множеством всех свойств позволяет построить координатную систему  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , где измерение параметров свойств осуществляется с использованием шкал отношений, а в пространстве состояний  $\Omega_n$  задается непрерывное скалярное поле величины  $T$ . При подобном построении координатной системы любое мгновенное состояние системы при осуществлении некоторого процесса геометрически отображается в  $n$ -мерном абсолютном пространстве точкой  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , для которой величины  $z_k$  и  $T = T(M)$  являются параметрическими функциями времени.

В области  $\Omega_n$  геометрическая вероятность  $\rho$  для случайной точки  $M$  с параметрами свойств  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  определяется согласно известной плотности вероятности  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  по формуле:

$$\rho = F(z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} \dots \int_{-\infty}^{z_n} f(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n. \quad (7.3)$$

Плотность распределения  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  для  $n$ -мерной случайной величины равномерно распределенной в области  $\Omega_n$  задается в виде

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{cases} C & \text{внутри } \Omega_n \\ 0 & \text{вне } \Omega_n \end{cases}, \quad (7.4)$$

где  $C$  – некоторая постоянная. Отметим, что при  $n = 2$  данный подход построения абсолютного индекса применяется в термодинамике при создании шкалы абсолютной температуры.

Известно, что в пространстве  $\Omega_n$  при заданных диапазонах изменения параметров свойств и равномерно распределенной для  $n$ -мерной случайной величины плотности распределения  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  значение геометрической вероятности может быть найдено следующим образом:

$$\rho = \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} \dots \int_{-\infty}^{z_n} f(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } z_k \leq 0 \\ \frac{z_1}{z_{1, \max}} \cdot \frac{z_2}{z_{2, \max}} \cdot \dots \cdot \frac{z_n}{z_{n, \max}} & \text{при } 0 < z_k \leq z_{k, \max} \\ 1 & \text{при } z_k > z_{k, \max} \end{cases} \quad (7.5)$$

Согласно уравнения (7.5) функция геометрической вероятности, определенная через параметры свойств системы, является дифференцируемой. Данный способ позволил нам каждую точку  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$  пространства состояний  $\Omega_n$  связать со скалярной величиной, задав тем самым скалярную функцию индекса  $T$ , который линейно связан с геометрической вероятностью.

В частном случае, если рассматривается одно свойство системы, то геометрические вероятности могут быть представлены в виде:

$$\rho_k = \int_{-\infty}^{z_k} f(z_k) dz_k = \frac{z_k}{z_{k, \max}}. \quad (7.6)$$

Все это позволяет нам в абсолютном пространстве свойств задать скалярное поле индекса  $T$ , которое, в свою очередь, можно «увязать» с функцией состояния системы (7.2).

Далее предположим, что в пространстве состояний  $\Omega_n$  задано  $N$  опытных точек  $M_i(z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{ni})$ , для которых может быть определена статистическая вероятность состояния системы  $w_j$  по некоторым характерным событиям. Рассмотрим в начале простое событие совместного наблюдения параметров свойств системы.

Алгоритм определения статистической вероятности события, связанного с наблюдаемыми свойствами для опытных точек  $M_i$ , предполагает следующую последовательность действий. При рассмотрении одного параметра  $z_1$  на координатной оси  $Oz_1$  область изменения параметра разбивается на  $\omega$  равномерных интервалов и опытные данные группируются, исходя из попадания точек в каждый интервал. Статистическая вероятность оценивается по кумулятивной относительной частоте наблюдаемого события. С этой целью определяется число опытных точек, для которых выполняется неравенство  $z_1 < z_{1p}$ , где  $z_{1p}$  – правая точка каждого  $p$ -того интервала. Аналогично при рассмотрении двух параметров  $z_1$  и  $z_2$  на плоскости  $Oz_1z_2$  определяется число опытных точек, для которых совместно выполняются неравенства  $z_1 < z_{1p}$  и  $z_2 < z_{2q}$ . При

рассмотрении трех параметров  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  в трехмерном пространстве  $Oz_1z_2z_3$  определяется число точек, для которых совместно выполняются неравенства  $z_1 < z_{1p}$ ,  $z_2 < z_{2q}$  и  $z_3 < z_{3r}$ . Также определяется число опытных точек, попавших в области группирования, для  $n$ -мерного пространства параметров свойств. Если при разбиении для каждого параметра используется одинаковое количество интервалов, то для одного параметра имеем  $\omega$  областей группирования, для двух –  $\omega^2$ , для трех –  $\omega^3$  и т.д. Все это позволяет оценить статистические вероятности состояния системы по относительной частоте событий.

Исходя из этого, статистические вероятности для события, связанного с совместно наблюдаемыми параметрами свойств, находятся в  $n$ -мерном пространстве согласно следующей зависимости:

$$w_\lambda = P(z_1 < z_{1p}, \dots, z_n < z_{ng}) = \frac{I_\lambda}{N}, \quad (7.7)$$

где  $I_\lambda$  – число всех опытных точек, для которых совместно выполняется приведенное в формуле (7.7) неравенство ( $z_1 < z_{1p}, \dots, z_n < z_{ng}$ ) и которые находятся в  $n$ -мерном параллелепипеде, представляющим собой некоторую  $\lambda$ -область группирования;  $N$  – общее число точек (опытных данных в выборке).

Например, в системе Statistica скрипт определения количества точек для одномерного распределения величины (одно свойство) согласно (7.7) имеет следующий вид (20 интервалов группирования):

```
Function Minimum (Data As Spreadsheet, Var As PortInt) As Double
' Функция определения минимального значения в выборке данных
  Minimum = Data.Cells(1,Var)
  For I = 2 To Data.Cases.Count
    If Data.Cells(I,Var) < Minimum Then
      Minimum = Data.Cells(I,Var)
    End If
  Next I
End Function

Function Maximum (Data As Spreadsheet, Var As PortInt) As Double
' Функция определения максимального значения в выборке данных
  Maximum = Data.Cells(1,Var)
  For I = 2 To Data.Cases.Count
    If Data.Cells(I,Var) > Maximum Then
      Maximum = Data.Cells(I,Var)
    End If
  Next I
End Function

Sub Main
  Dim s_in As Spreadsheet
  Dim s_out As Spreadsheet
```

```

Dim K      As Long
Dim Min    As Double
Dim Max    As Double
Dim Step   As Double
Dim Coord  As Double
' Ссылка на текущий лист с данными и создание нового листа
Set s_in = ActiveSpreadsheet
Set s_out = Spreadsheets.New
' Показать новый лист расчетных данных
s_out.Visible = True
' Определение минимального и максимального значений величины
Min = Minimum(s_in,1)
Max = Maximum(s_in,1)
' Задание количества групп (K) и расчет шага изменения величины
K = 20
Step = (Max-Min)/K
' Присвоение размеров новому листу расчетных данных
s_out.SetSize(K, 4)
' Определение статистической и геометрической вероятностей
Count = 1
For II=1 To K
    Coord = Min+(II*Step)
    Points = 0
    For I = 1 To s_in.Cases.Count
        If s_in.Cells(I,1) < Coord Then
            Points = Points + 1
        End If
    Next I
    s_out.Cells(Count, 1) = Coord
    s_out.Cells(Count, 2) = Points
    s_out.Cells(Count, 3) = Points/s_in.Cases.Count
    s_out.Cells(Count, 4) = (Coord - Min) / (Max - Min)
    Count = Count + 1
Next II
End Sub

```

В свою очередь, скрипт определения количества точек для двумерного распределения величины согласно (7.7) аналогичен приведенному выше, при этом алгоритм определения статистической и геометрической вероятностей имеет следующий вид:

```

For II=1 To K
    For I2 = 1 To K
        Coord(1) = Min(1)+ II*Step(1)
        Coord(2) = Min(2)+ I2*Step(2)
        Points = 0
        For I = 1 To s_in.Cases.Count
            If s_in.Cells(I,1) < Coord(1) And s_in.Cells(I,2) < Coord(2) Then

```

```

    Points = Points + 1
  End If
Next I
s_out.Cells(Count, 1) = Coord(1)
s_out.Cells(Count, 2) = Coord(2)
s_out.Cells(Count, 3) = Points
s_out.Cells(Count, 4) = Points/s_in.Cases.Count
s_out.Cells(Count, 5) = (Coord(1) - Min(1))/(Max(1)-Min(1))
s_out.Cells(Count, 6) = (Coord(2) - Min(2))/(Max(2)-Min(2))
Count = Count + 1
Next I2
Next I1

```

Аналогично определяется функция распределения для  $n$ -мерного пространства параметров свойств. Таким образом, для опытных данных может быть найдена статистическая функция распределения вероятности состояния системы, исходя из имеющегося массива опытных данных.

С учетом вышесказанного, имеем два способа определения вероятности состояния системы по событиям, связанным с наблюдаемыми в опыте параметрами свойств: по геометрическим ( $\rho$ ) и статистическим ( $w$ ) вероятностям. Если существует связь между статистическими и геометрическими вероятностями распределений параметров свойств, то возможно построение простых координатных функций для каждого свойства в виде геометрических вероятностей и разложение статистической вероятности по этим функциям.

Далее отметим, что для массива опытных данных кроме статистической вероятности, связанной с совместно наблюдаемыми свойствами, можно определить и статистическую вероятность  $w_j$  характерных событий, отражающих качественные изменения в системе.

Статистические вероятности  $w_j$  характерных событий для каждого  $j$ -того качественного признака системы также будем определять согласно зависимости (7.7), при этом величина  $I_\lambda$  будет представлять собой количество опытных точек, свойственных характерному событию и попадающих в некоторую область группирования данных для одномерной случайной величины. Это позволяет для пространства состояний  $\Omega_n$  определить статистическую функцию распределения вероятностей  $w_j$  для  $j$ -того признака и каждой точке  $M_i$  поставить в соответствие значение этой вероятности. Установление связи между статистической вероятностью  $w_j$  характерных сложных событий и геометрической ( $\rho$ ) или статистической ( $w$ ) вероятностями для простых событий, связанных с наблюдаемыми свойствами, позволяет построить модели изменения системы во времени.

Теперь для примера построим единую шкалу абсолютного индекса  $T$  для определения скалярного поля индекса на множестве  $Z$ . Пусть каждая

функция  $W_j$  в системе уравнений (7.2) имеет свою область изменения параметров  $z_k$ . Ранее мы определили, что каждый параметр  $z_k$  может изменяться в пределах от нуля до  $z_{k, \max}$ . Определим положение первой опорной точки, связав ее с началом координат. Примем, что в начале координат в точке  $O(0, 0, \dots, 0)$ , где параметры всех свойств равны нулю, значение абсолютного индекса системы  $T$  также равно нулю. Это связано с тем, что при всех  $z_k \leq 0$  значение геометрической вероятности  $\rho$ , согласно (7.3) – (7.4), равно нулю. Для определения постоянной  $a$  в линейном уравнении  $T = a \cdot \rho$  выберем вторую опорную точку  $M_0(z_{1, \max}, z_{2, \max}, \dots, z_{n, \max})$ , для которой примем, что значение абсолютного индекса  $T_0$  будет равно 100 или 1000 градусов (пунктов или баллов). Выбор конкретного значения  $T_0$  равным 100 или 1000 является условным и определяется размерами наблюдаемой области  $\Omega_n$ . В точке  $M_0(z_{1, \max}, z_{2, \max}, \dots, z_{n, \max})$  опорное значение геометрической вероятности равно единице, поэтому постоянная  $a$  будет равна  $a = T_0$ . Далее будет показано, что существует условие, при котором значение индекса  $T_0$  может быть задано с учетом особенностей пространства наблюдаемых состояний системы.

Распространим, заданную подобным образом, функцию абсолютного индекса системы  $T$  на всю числовую ось  $T(0, +\infty)$ , построив тем самым шкалу отношений, основанную на определении геометрической вероятности  $\rho$  между точками  $O$  и  $M_0$  пространства состояний  $\Omega_n$ . Для определения индекса  $T$  вне области  $\Omega_n$  будем также использовать уравнение (7.5). Если  $z_k > z_{k, \max}$ , то в связи с тем, что индекс  $T$  распространен на всю числовую ось, будем использовать зависимость

$$T = a \cdot \frac{z_1}{z_{1, \max}} \cdot \frac{z_2}{z_{2, \max}} \cdot \dots \cdot \frac{z_n}{z_{n, \max}}.$$

Так как все сказанное далее, если это не оговорено особо, относится к каждому компоненту  $w_j(\tau)$  функции состояния системы (7.2), то часто для упрощения записи индекс  $j$  будем опускать, представляя функцию состояния в общем виде  $w(\tau) = W(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau))$ .

Теперь, обобщая все сказанное выше, сформулируем второй постулат системодинамики в следующем виде: *в элементарной окрестности произвольно заданного состояния эволюционно развивающейся системы существует линейная связь между распределениями статистической и геометрической вероятностей случайных величин, характеризующих качественные и количественные изменения в системе.*

Подобное утверждение позволяет в элементарной окрестности каждого состояния и в любом процессе  $l$  его изменения связать приращения статистической и геометрической вероятности в виде линейной функции



относительно абсолютного индекса системы ( $dw = c_l \cdot dT$ ). В свое время Пригожиным была высказана гипотеза, что «... между необратимостью и динамической природой системы должна существовать какая-то фундаментальная связь», при этом необратимость логически увязывалась со статистической вероятностью состояния системы. Именно эту фундаментальную связь мы и определяем вторым постулатом системодинамики, причем под необратимостью будем понимать статистическую природу системы, о чем более подробно будем говорить в одиннадцатой главе данной монографии.

Сразу сформулируем два следствия, которые вытекают из постулатов системодинамики и будут доказаны далее.

Первое следствие: *каждая эволюционно развивающаяся система обладает характеристической функцией пространства состояний, называемой энтропией, которая является мерой качественных изменений в системе.* Данным утверждением определяется общесистемный смысл понятия энтропии и исходный принцип, который количественно характеризует качественную определенность системы.

Второе следствие может быть сформулировано в виде: *для эволюционно развивающихся систем в абсолютном пространстве свойств существует функция меры, которая может быть представлена в виде потенциальной функции для наблюдаемых состояний системы, которые отличаются одинаковым качеством.*

Здесь в философском смысле можно сказать, что принимается гипотеза существования некоторой обобщенной характеристики, обладающей общесистемными свойствами и определяющей органическое единство качественной и количественной определенности системы. Важный исходный принцип, который формулируется данным утверждением – это существование меры пространства состояний системы как общей характеристики различных форм материального движения и обоснование характера функциональной связи между качествами и свойствами, т.е. определение вида формального представления функции меры. В термодинамике для физических систем обоснование такой связи основано на эмпирическом факте установления закона сохранения энергии. Что касается систем другой природы, то данный вопрос абсолютно не изучен, и это может быть содержанием важной для системодинамики задачи исследования.

Сформулированные постулаты и следствия позволяют математически обосновать основные положения системодинамики и имеют общесистемное значение по отношению к самым разнообразным классам явлений.

## Глава восьмая ВРЕМЯ В СИСТЕМОДИНАМИКЕ

### 8.1 Абсолютное и системное время

После изложения основных определений, принципов и постулатов системодинамики перейдем к наиболее важному вопросу – представлению времени как системной категории. Данной проблеме в конце книги мы посвятим целый раздел, однако уже сейчас необходимо обсудить некоторые вопросы, связанные с представлением времени в системодинамике. Будем отделять проблему феномена времени как явления от проблемы измерения времени как величины. Для формализации данного вопроса воспользуемся предположением, которое вытекает из общей логики закона перехода количественных изменений в качественные, что должно существовать, по крайней мере, два понятия в этой области – времени как качественной характеристики и времени как количественной характеристики наблюдаемых изменений в состояниях систем. Качественная характеристика изменений системы связана с последовательностями наиболее характерных событий, свойственными системе, а количественная характеристика – с наблюдаемыми параметрами основных свойств и динамическими процессами изменения этих свойств. Поэтому для любой системы (объекта) можно предложить различные шкалы измерения времени, исходя из наблюдения по отношению к системе внутренних или внешних процессов, использования регулярных и случайных потоков событий, а также регистрации самых разных характерных последовательностей событий. В этом будет проявляться статистическая и динамическая закономерности связи между прошлыми, настоящими и будущими состояниями систем. Каждая система обладает своими особенностями проявления этой связи, например, количественными динамическими характеристиками протекающих в ней процессов и различной статистической вероятностью событий, которые наблюдаются в системе и связаны с реализацией этих процессов, а также отражают качественные изменения в ней. Динамические и статистические закономерности как две формы причинной связи, в том или ином виде, характерны для любых систем и определяются природой времени, свойственной объектам и системам, а также отражают наши знания о системе. Тем не менее, наиболее распространенные системы измерения времени построены на использовании только динамических характеристик регулярных потоков событий – последовательностей событий, следующих одно за другим через строго определенные промежутки времени. Систем измерения времени, где бы использовались другие виды потоков событий, например, стационарные случайные потоки, практически нет.

Для измерения времени обычно применяется периодический физический процесс, на основе которого создаются часы, представляющие

собой измерительный прибор. Шкала времени, построенная на использовании регулярных потоков событий, исторически введена в науку через механику как мера для измерения интенсивности движения. Время, определяемое по такой шкале, принято называть *абсолютным*. Шкала абсолютного времени ориентирована на измерение длительностей в последовательностях любых событий, так как она построена *вне отношения* к конкретным объектам. Данная шкала является удобной для относительных сравнений моментов возникновения событий, но она не отражает внутренних закономерностей в изменениях систем, так как в любой опыт система измерения абсолютного времени привносится извне как закономерность, характерная для систем совсем иной природы. Кроме того, регулярные потоки событий имеют последствие: моменты появления следующих друг за другом событий связаны функциональной связью, т.е. эти потоки обладают явной динамической закономерностью.

Абсолютное, истинное, математическое время, как принято со времен Ньютона, – «само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью». Исходя из этого, абсолютное время Ньютона не является физической величиной, а представляет собой шкалу для измерения интенсивности физических процессов и изучения различных последовательностей событий [21, 39, 77]. На данной шкале нет опорных точек, начало отсчета выбирается произвольно, единица измерения времени принимается на основе соглашения, мгновение на шкале представляется геометрической точкой, а вся шкала является равномерной и непрерывной и содержит как отрицательные значения (прошлое), так и положительные значения (будущее) [21]. При этом, время течет абсолютно равномерно и выбор события, относительно которого ведется отсчет времени как в прошлое, так и будущее, полностью условен и в каждом конкретном случае определяется рациональными соображениями. Данная шкала реализована в часах, использующих периодический физический процесс. При изучении процессов изменения и развития систем принимается, что в любой точке системы время течет одновременно с абсолютным временем, которое измеряется часами. Исходя из сказанного следует, что шкала абсолютного времени является общепринятой шкалой интервалов. Для того, чтобы такую шкалу преобразовать в шкалу отношений, необходимо установить абсолютное начало отсчета и желательно принять (если это в принципе возможно) естественный масштаб времени, характерный для различных классов (подклассов) систем, процессов и явлений. Кроме того, такая шкала должна быть «привязана» к изучаемому классу объектов, т.е. будет отражать некоторую характерную для него последовательность событий. В этом случае абсолютное время может быть представлено объективным свойством, характерным для некоторого класса систем. Однако, подобное преобразование невозможно провести в рамках существующих систем измерения времени, так как они затрагивают только один, хотя и очень

обширный, класс физических систем. Для развития понятия времени необходимо учитывать природу объектов, процессов и явлений.

С точки зрения анализа функции состояния системы (7.2) это следует понимать таким образом, что для эволюционно развивающихся систем должны существовать преобразования, позволяющие перейти от внешнего способа введения координат системы (параметров абсолютных свойств принесенных извне) к внутреннему способу введения координат, основанному на оценке состояний системы относительно некоторых выбранных *a priori* опорных состояний. Такие преобразования позволяют создать модели, где процессы изменения состояния могут описываться особыми функциями, для которых изменение величины в каком-либо процессе не зависит от характера процесса, а определяется только начальным и конечным состоянием системы.

В этом плане есть примеры, в которых существующая система измерения времени для некоторых объектов преобразуется в шкалу отношений, для чего принимается абсолютное начало отсчета и создается шкала системного времени на основе использования шкалы интервалов абсолютного времени. В токсикологии в качестве начала отсчета шкалы системного времени, привязанной к объекту, устанавливается момент возникновения негативного воздействия; в демографии при изучении возраста – момент рождения человека; в теории риска – момент возникновения опасного события; в палеонтологии и археологии при применении радиоуглеродного метода – смерть биологического объекта; в геохронологии при применении радиометрических методов – фазовый переход минералов из жидкого в твердое состояние и т.д. В данных случаях параметр относительного времени по отношению к классу объектов исследования является уже количественным абсолютным свойством, так как отражает некоторую объективную особенность этих объектов. Однако отметим, что подобные шкалы являются нелинейными, чаще всего их представляют в логарифмическом масштабе относительно абсолютного времени. Кроме того, в основу таких шкал обычно положены последовательности событий, характерных для изучаемой системы.

Существуют различные шкалы для оценки системного времени, например, стратиграфические шкалы геологического времени, рис. 8.1. Данные шкалы имеют множество официально признанных опорных точек, и возраст геологических слоев измеряется без часов по характеру отложений. В единицах измерения абсолютного времени возраст пород и отложений для разных слоев устанавливается с помощью стратиграфических, радиометрических, палеомагнитных и других методов. Стратиграфические шкалы, с помощью которых измеряется геологическое время, рассматриваются как шкалы порядка [30, 82]. Создание и детализация глобальной геохронологической шкалы является основной задачей стратиграфии [123]. Принятая международная стратиграфическая шкала является официальным стандартом особенностей геологической

летописи, построенной на основе обобщения результатов изучения геологического строения и геологической истории регионов планеты.

Сегодня многие авторы обращают внимание на то, что время считается скорее философской категорией, нежели четко определенной физической величиной [21, 24, 97]. В свое время Р. Фейнман отмечал крайнюю сложность определения понятия времени: «...время – это одно из понятий, которые определить невозможно...». Согласно его утверждения, которое нельзя назвать определением: время – «это то, что определяет два последовательных события» [97]. То, что течение времени связано с событиями, или наоборот, события определяют течение времени – является эмпирическим фактом. Однако, наблюдаемые события бывают разные – элементарные, простые, сложные, совместные, несовместные, зависимые, независимые, однородные, неоднородные и т.д.; различным классам систем свойственны характерные события разной природы. При этом особо выделим, высказанный ранее факт, что сегодня таксономия (систематика) событий для систем различных классов проработана слабо.

Если, используя последовательности событий можно определять время и строить системы измерения времени, то различных шкал для измерения времени должно быть бесчисленное множество. На практике дело обстоит несколько иначе. Поэтому, согласимся с автором работы [21], что наука о методах построения хроношкал в различных физических теориях – хронофизика – не существует. Время в большинстве разделов физики выступает как абсолютное время и является универсальной шкалой для относительных сравнений длительности различных событий, построенной с использованием регулярных потоков событий, наблюдаемых в периодических физических процессах. При этом абсолютное время применяется для измерения длительности событий в системах различных классов и привносится для этих измерений извне, поэтому никак не связано со свойствами этих систем.

В отличие от данного способа измерения времени существует и другой способ измерения: каждой системе (классу систем) может быть поставлена в соответствие некоторая собственная шкала отсчета времени (набор шкал). Данная шкала будет основана на использовании характерной для системы наблюдаемой последовательности событий, поэтому она должна быть тесно связана с изменением свойств этой системы. Для биологических, геологических, экологических, социальных и других систем, где существуют различные факты и индикаторы, которые отражают процессы в изменении и развитии систем, подобных последовательностей может быть множество.

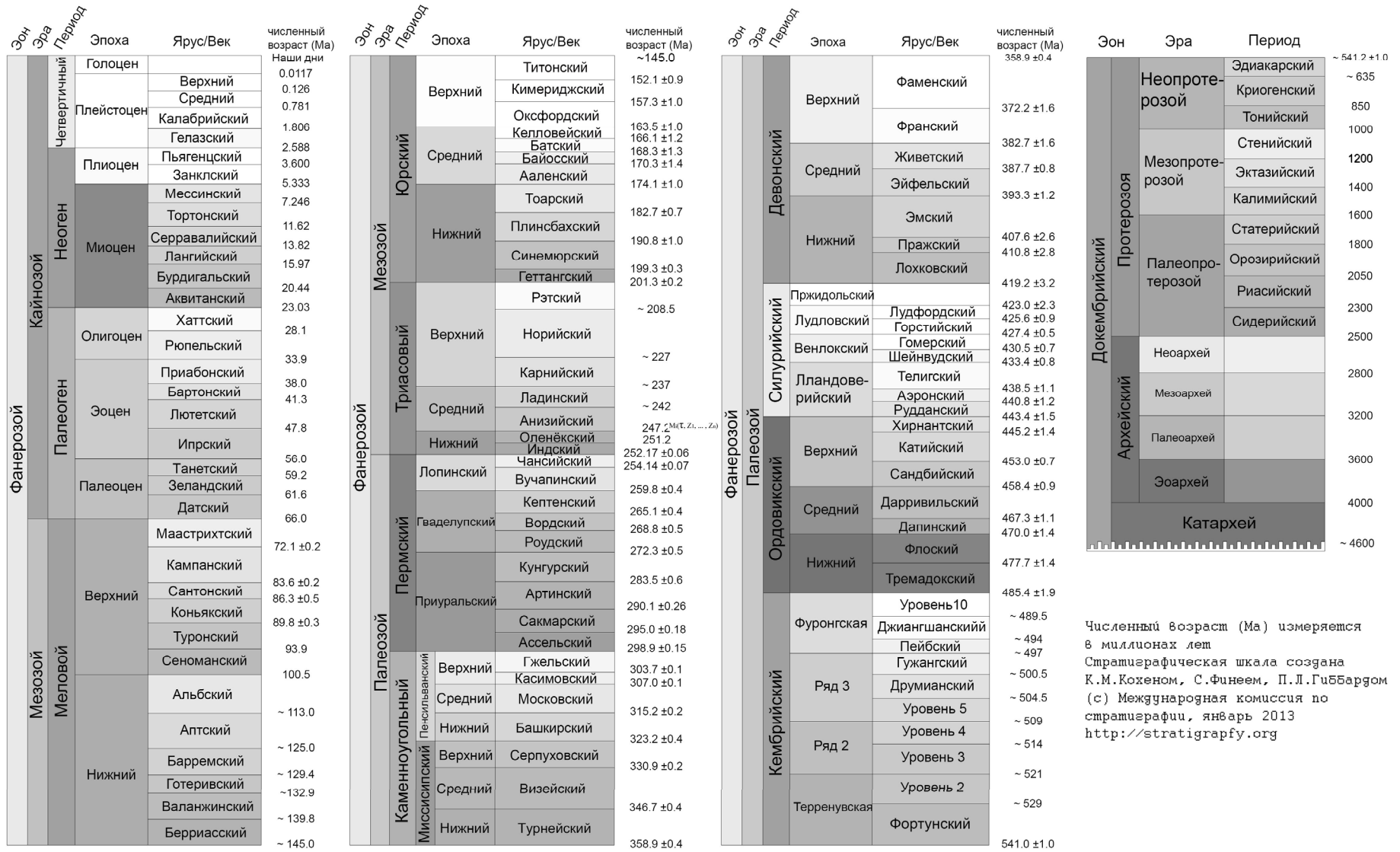


Рис. 8.1. – Международная стратиграфическая шкала геологического времени

Все эти представления приводят многих авторитетных авторов к выводу о существовании *системного* (относительного, собственного) времени для объектов одного класса; по их мнению проблема феномена времени – это центральная проблема современной науки.

Относительное время Г. Лейбница, собственное время А. Бергсона, геологическое время Ж. Бюффона, биологическое время В. Вернадского и Д. Уитроу, органическое время Г. Бакмана, внутреннее время И. Пригожина, таксонометрическое время С. Мейена – это идеи определения времени на основе наблюдаемых событий, которые свойственны объектам разной природы. Научное представление о том, что любому процессу и явлению может быть поставлена в соответствие некоторая шкала системного времени, становится распространенным. Так же как между существованием эмпирических шкал температур и принятием шкалы абсолютной температуры нет противоречий, а есть органическая связь, также не должно быть противоречий между существованием различных шкал времени. Здесь обратим внимание на одну неординарную идею, высказанную ученым П. Шамбадалем: «... чтобы установить различие между прошлым и будущим, мы должны обратиться не к хронометрам, а к термометрам» [103]. Работа хронометров построена на принципе использования последовательностей регулярных событий, генерируемых в часах, в свою очередь, работа термометров – на принципе косвенного измерения интенсивности потоков множества случайных событий, свойственным многим физическим процессам в реальных объектах. И первый, и второй методы позволяют получить информацию о процессах изменения систем во времени. Так как шкала абсолютной температуры является шкалой геометрической вероятности для идеальной системы, то данная идея заставляет по иному взглянуть на природу времени.

Действительно, дать ясное и лаконичное определение времени пока невозможно, слишком мало эмпирических фактов и исходных идей для этого. Однако можно сформулировать ряд предположений для уточнения направлений исследований в этой области.

Первое предположение связано с тем, что в рамках только класса физических систем пока сложно понять природу времени. Существующую шкалу интервалов абсолютного времени нельзя перевести в шкалу отношений – нет абсолютного начала отсчета для всего класса физических систем, или хотя бы отдельных подклассов этих систем. Такая задача никогда не ставилась. В связи с громадным количеством разных физических объектов и крайне различной длительностью физических процессов ( $\approx 10^{-22} \div 10^{17}$  сек) эта задача вообще является проблематичной, так как требует эмпирического изучения потоков событий во множестве наблюдаемых систем, что не является, по большому счету, предметом исследований только физики. Сегодня физика оперирует событиями постольку, поскольку это необходимо для построения детерминированных динамических моделей, по возможности уходя от явно выраженных статистических моделей опытных данных после проведения физического

опыта. Другими словами, в физических теориях за отдельными исключениями преобладает применение динамических закономерностей и повсеместно используется при моделировании принцип равновозможности. Вполне возможно, что это вызвано особенностями физических процессов и систем или общей логикой развития этой науки.

Однако, именно с этим может быть связана основная концептуальная проблема физики – парадокс, вызванный необратимостью процессов в природе и обратимостью уравнений физики, которые описывают эти процессы. Многие модели в классической, релятивистской и квантовой физике инвариантны к изменению направления времени и не отражают существующую необратимость времени. Все модели физических процессов строятся в детерминированной моделирующей среде на основе формулировки различных динамических теорий, где абсолютное время фундаментально. Физика традиционно понимается как наука о физических процессах, происходящих во времени. Как отмечает Д. Гросс, нобелевский лауреат по физике, роль физики сводится к прогнозированию будущего на основе настоящего. Однако, по его словам, у нас нет ни малейшей идеи, как формулировать физику, если время не фундаментально. С абсолютной шкалой времени во все уравнения физики вносится принцип равновозможности и благодаря этому уже на этапе первоначальной формулировки задач исключается неравновозможность, которая свойственна необратимым процессам в природе. Это не относится к уравнениям классической термодинамики, где время отсутствует, а есть только параметры свойств, в общем случае, параметрически зависящие от времени. Следствием данного факта является то, что необратимость просто исключается из предмета исследования уже на этапе математической формулировки задач, и, как следствие, ее бесполезно искать в уравнениях динамики любой сложности. Сегодня математических методов моделирования, которые концептуально были бы ориентированы на стохастическую среду, практически нет. Пока сложно представить координатную систему, где пространство свойств топологически не только искривлено, но и подчиняется стохастическим закономерностям, исключающим равновозможность. Возможно, именно поэтому сложность теорий в физике постоянно увеличивается, так как в детерминированной среде сложно адекватно отразить стохастическую реальность.

В других науках, где объем эмпирического знания является преобладающим, а теория еще относительно слабо развита, существует тенденция использования закономерностей, имеющих статистический характер. Следует отметить, что статистические закономерности преобладают в природе и обществе. Принятие допущения, что между геометрической и статистической вероятностями при реализации всякого процесса, наблюдаемого в опыте, может существовать взаимосвязь, дает дополнительные возможности при построении моделей систем и ведет к пониманию временных особенностей процессов и явлений различной природы, а также раскрывает сущность необратимости процессов,



происходящих в природе и обществе. В этой области формируется предположение, что феномен времени тесно связан с природой событий, их частотными свойствами, качественными характеристиками систем, а также различной интенсивностью потоков событий в системах.

Второе предположение заключается в том, что для изучения природы времени необходимо накопить обширный опыт построения различных систем измерения времени с использованием фактов наблюдений и потоков событий, характерных для разных объектов и явлений. Создание эмпирических шкал системного времени даст возможность устанавливать в каждом конкретном случае связи между системным и абсолютным временем, т.е. между длительностью процессов различной природы и свойствами систем. Эмпирические шкалы системного времени могут учитывать основные статистические закономерности, свойственные той или иной системе, например, свойство устойчивости относительных частот событий, особенности и специфику случайных процессов и т.д. Это может дать обширный опытный материал для изучения времени и понимания его природы. Однако на этом пути не обойтись без общепринятой и ясной таксономии различных событий, а для этого существующий объем эмпирического знания еще не достаточен. Теория вероятности, математическая статистика, теория риска и другие естественные науки не отвечают на вопрос о природе событий, их причинно-следственном развитии и их возникновении друг из друга. Случайные, закономерные, регулярные, катастрофические, хаотические, предопределенные и другие события, которые наблюдаются в природе и обществе, формируются исходя из закона причинности, а это пока больше область исследования философии, нежели естественных наук.

Подойдем к изучению феномена времени с точки зрения установления статистических и динамических закономерностей, характерных для систем и явлений различных классов. Не будем давать общих определений, так как это преждевременно, а сформулируем следующие предположения, которые могут быть положены в основу представления времени как системной категории. *Время* – это феномен объективной реальности, связанный с вероятностным изменением (искривлением) абсолютного пространства свойств и не соблюдением признаков равновозможности, однородности, изотропности, изоморфности и так далее, т.е. феномен, вызванный нарушением принципа симметрии при взаимодействии системы как единого целого с окружающей средой.

Таким образом, при изучении времени как системной категории будем исходить из идей так называемых «нарушенных симметрий» [97], философских представлений В.И. Вернадского о свойствах времени, пространства и симметрии [24], а также системных походов И. Пригожина, акцентирующего внимание на возможности модельного представления внутреннего времени системы и связи закона возрастания энтропии со «стрелой времени» [76, 77]. Другими словами, мы будем придерживаться реляционной концепции времени в представлениях о природе времени.

Обратим внимание на следующие факты. Если для системы соблюдается признак равновозможности (рис. 6.16), то соблюдается, в общем, и вероятностный принцип тождественности динамических и статистических закономерностей: геометрическая и статистическая вероятности для некоторого характерного события системы равны между собой (рис. 6.19). Если признак равновозможности нарушается, то нарушается и равенство между соответствующими вероятностями. Признак равновозможности следует выделить особо, так как он лежит в основе признаков однородности, изотропности, изоморфности, а также других простых признаков симметрии, имеющих статистическую природу. Очевидно, что с увеличением сложности системы значимость данного признака уменьшается и возрастает значимость закономерности, регулярности, предопределенности и структурированности, как особых признаков детерминизма. Это формирует новые закономерности в системе, которые уже не обладают свойством равновозможности. В науке симметрия природы изучена пока слабо, хотя, как указывал П. Кюри, принцип симметрии является основным для всех физических явлений.

Таким образом, считаем, что в абсолютном пространстве свойств, отличающимся признаком равновозможности, гипотетически предполагается равномерное и однородное течение времени, т.е. в процессе изменения состояний системы реализуется абсолютная природа времени, причем время в моделях может выступать в виде обычного параметра. В системах, где признак равновозможности нарушается, течение времени будет неравномерно и неоднородно, т.е. реализуется системная природа времени. В этом случае системное время представимо в зависимости от сложности комплексным параметром, общим интегралом, полем, зависящим от изменений параметров свойств системы и т.п.

Поэтому для начала исследований пока достаточно использовать сложившиеся представления реляционной концепции времени, когда время представляет собой систему причинно-следственных отношений между событиями и является проявлением свойств систем и происходящих с ними изменений. Принимаем также как гипотезу факт существования абсолютного и системного времени для любого процесса. Абсолютное время и соответствующая шкала измерения времени будут отражать динамические закономерности в изменении и развитии, исходя из факта изменения систем во времени. Другими словами абсолютное время вместе с абсолютным пространством свойств будут представлять собой логически мыслимую форму, которая служит средой для построения статистических моделей процессов, отражающих относительность изменения свойств и состояний систем различной природы во времени.

Для конкретных систем принятие гипотезы существования абсолютного времени как шкалы измерения последовательностей различных случайных событий в любых объектах связано с реализацией некоторой последовательности эталонных регулярных событий высокой плотности на числовой оси времен, реализованной в часах. Такая шкала в

виде числовой оси будет отличаться свойством равновозможного выбора произвольных моментов времени, хотя сама последовательность событий, генерированная в часах, будет упорядочена.

В свою очередь, системное время и соответствующие ему эмпирические шкалы времени должны отражать статистические закономерности в изменении и развитии конкретных систем. Данные шкалы измерения длительности в последовательности характерных событий, свойственных объекту, уже не будут обладать свойством равновозможной реализации этих событий на числовой оси времен, а будут отражать существование некоторых статистических распределений в последовательностях моментов времени при изменении свойств.

Попытаемся изучить некоторые особенности систем измерения абсолютного и системного времени, исходя из сформулированных выше взглядов на природу времени. В начале речь будет идти об абсолютном времени и особенностях шкал измерения абсолютного времени.

Пусть при совершении во времени некоторого процесса  $l$  параметры свойств изучаемой системы представимы уравнениями

$$z_1 = z_1(\tau), z_2 = z_2(\tau), \dots, z_n = z_n(\tau), \quad (8.1)$$

где  $z_k = z_k(\tau)$  – суть функции от параметра абсолютного времени  $\tau$ , непрерывные в промежутке  $[\tau_a, \tau_b]$ . Данные функции представляют в  $n$ -мерном пространстве непрерывную кривую процесса  $l$ . Если положить  $z_{1a} = z_1(\tau_a), z_{2a} = z_2(\tau_a), \dots, z_{na} = z_{na}(\tau_a)$  и  $z_{1b} = z_1(\tau_b), z_{2b} = z_2(\tau_b), \dots, z_{nb} = z_n(\tau_b)$ , то можно сказать, что линия процесса  $l$  соединяет два состояния системы, которые определены по комплексу всех свойств:

$$A(z_{1a}, z_{2a}, \dots, z_{na}) \text{ и } B(z_{1b}, z_{2b}, \dots, z_{nb}).$$

Примем как факт, что процесс  $l$  наблюдаем в опыте в течении длительного времени и параметры свойств системы измеряемы. Это указывает на то, что функции (8.1) существуют. Возьмем на кривой  $l$  ряд точек:

$$A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_i, M_{i+1}, \dots, M_n = B,$$

так, чтобы они располагались в направлении, которое отвечает возрастающим значениям параметра  $\tau$  (рис. 1.2), где параметр времени изменяется с постоянным дискретным шагом

$$\tau_a < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots < \tau_b.$$

Представим шкалу абсолютного времени как шкалу интервалов: начало отсчета примем для момента времени, когда в изучаемом процессе наблюдалось некоторое состояние системы  $M_i(z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{n,i})$ , причем прошлое свяжем с отрицательными значениями, а будущее – с положительными значениями шкалы. Выберем стандартную единицу измерения времени, тогда длительность интервала времени между смежными наблюдаемыми состояниями  $M' = M_i(z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{n,i})$  и  $M'' = M_{i+1}(z_{1,i+1}, z_{2,i+1}, \dots, z_{n,i+1})$  можно принять равной этой единице времени. Будем считать, что данный интервал достаточно мал, это

позволяет линию процесса  $l$  в интервале  $\Delta\tau = \tau_b - \tau_a$  заменить ломаной, состоящей из множества прямолинейных отрезков и вписанной в кривую  $AB$ . При этих условиях для любого состояния  $M$ , которое лежит между состояниями  $M'$  и  $M''$ , справедливо соотношение между отрезками:

$$M'M'' = M'M + MM'',$$

что является характерным для прямой, как в обычном, так и  $n$ -мерном пространстве [99]. Уравнение «прямой», проходящей через две заданные точки  $M'$  и  $M''$ , могут быть представлены для любого свойства в виде:

$$\begin{aligned} z_1 - z_{1,i} &= \tau \cdot (z_{1,i+1} - z_{1,i}), & z_2 - z_{2,i} &= \tau \cdot (z_{2,i+1} - z_{2,i}), \dots \\ \dots, & & z_n - z_{n,i} &= \tau \cdot (z_{n,i+1} - z_{n,i}), \end{aligned} \quad (8.2)$$

причем сами точки  $M'$  и  $M''$  получаются отсюда при  $\tau = 0$  и  $\tau = 1$ .

Рациональный выбор стандартной единицы измерения времени (миллисекунда, секунда, минута, час, день, год, столетие, миллион лет и т.д.) вообще-то определяется классом системы, природой изучаемого процесса и сложившейся практикой наблюдения и измерения его параметров. Например, характерная единица времени при изучении динамики рождаемости выбирается во много раз больше, нежели при изучении турбулентных пульсаций в процессе течения жидкости. Обычно данная единица времени задается исходя из интуитивных соображений и непосредственно связана с длительностью формирования регистрируемого события, которое характерно для изучаемого процесса и отражает результат измерений. Таким образом, выбор единицы шкалы времени при относительных измерениях (релятивных по отношению к объекту) уже априори задает длительность «момента» времени, характерного для шкалы измерений. При изучении реальных процессов момент времени никогда не представляет собой безразмерную (геометрическую) точку на оси времени, а подразумевает собой некоторую протяженность, которая определена средним временным интервалом формирования характерного события. В этом состоит главное отличие практической шкалы измерения времени от математической шкалы, используемой в моделях процессов и явлений.

Теперь обратим внимание, что уравнения (8.2) представимы в виде:

$$\rho_1 = \tau, \quad \rho_2 = \tau, \dots, \quad \rho_n = \tau,$$

где  $\rho_k$  – геометрические вероятности для каждого свойства, определенные на отрезке  $M'M''$ . Из данных соотношений также имеем, что  $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n = \tau^n$ , где величина  $\rho$  представляет собой геометрическую вероятность в  $n$ -мерном абсолютном пространстве свойств. Таким образом, согласно (8.2), в окрестности точки  $M'$   $n$ -мерный вектор параметров свойств вдоль линии  $M'M''$  связан подобным преобразованием относительно параметра времени  $\tau$  [70].

Теперь пусть функция состояния системы  $w(\tau) = W(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau))$  определена и непрерывна в замкнутой области  $\Omega_n$  и имеет непрерывные частные производные внутри этой области по параметрам свойств. Состоянию  $M'$  свойственно уравнение

$w_i = W(z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{n,i})$ , а состоянию  $M''$  – аналогичное уравнение  $w_{i+1} = W(z_{1,i+1}, z_{2,i+1}, \dots, z_{n,i+1})$ . Все другие состояния, соответствующие отрезку процесса  $M'M''$ , будут определены уравнением  $w = W(M)$ . Используем ту же самую шкалу измерения абсолютного времени  $\tau$ , отличающуюся равномерным течением времени. В процессе изменения параметра времени от 0 до 1 изменение функции  $w(\tau)$  можно приближенно представить в виде  $w(\tau) = w_i + \tau \cdot (w_{i+1} - w_i)$ . В результате имеем следующее приближенное уравнение, которое тем точнее, чем меньше интервал единицы времени  $\Delta\tau$ :

$$w_i + \tau \cdot (w_{i+1} - w_i) = W(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)), \quad (8.3)$$

где параметры свойств  $z_k = z_k(\tau)$  приближенно представимы параметрическими функциями времени вида (8.2).

Продифференцируем равенство (8.3) по  $\tau$ : левую часть равенства как обычную функцию, правую часть – по правилу дифференцирования сложной функции, в результате получим:

$$\begin{aligned} w_{i+1} - w_i &= \frac{\partial W}{\partial z_1}(z_{1,i+1} - z_{1,i}) + \frac{\partial W}{\partial z_2}(z_{2,i+1} - z_{2,i}) + \dots + \frac{\partial W}{\partial z_n}(z_{n,i+1} - z_{n,i}) \text{ или} \\ w_{i+1} - \frac{\partial W}{\partial z_1} z_{1,i+1} - \frac{\partial W}{\partial z_2} z_{2,i+1} - \dots - \frac{\partial W}{\partial z_n} z_{n,i+1} &= \dots \\ \dots &= w_i - \frac{\partial W}{\partial z_1} z_{1,i} - \frac{\partial W}{\partial z_2} z_{2,i} - \dots - \frac{\partial W}{\partial z_n} z_{n,i} \end{aligned}$$

Здесь мы умышленно не переходим к дифференциалам величин  $dw$  и  $dz_k$ , чтобы не потерять суть «момента» шкалы измерений времени, связанного с формированием характерных событий для конкретной системы.

Так как точки  $M_i$  и  $M_{i+1}$  выбирались абсолютно произвольно, то, в общем случае, в окрестности любого состояния системы получим:

$$w - \frac{\partial W}{\partial z_1} z_1 - \frac{\partial W}{\partial z_2} z_2 - \dots - \frac{\partial W}{\partial z_n} z_n = const. \quad (8.4)$$

Постоянную в соотношении (8.4) можно задать таким образом, чтобы при значениях параметров свойств  $z_k = 0$  вероятность состояния системы также была равно нулю, так как если свойства системы не наблюдаемы, то и система не существует. Тогда, в первом приближении функция состояния системы, которая обладает подобием свойств относительно абсолютного времени, в окрестности любого состояния системы должна быть представима однородной функцией [99]:

$$w = \frac{\partial W}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial W}{\partial z_2} z_2 + \dots + \frac{\partial W}{\partial z_n} z_n. \quad (8.5)$$

В процессе вывода уравнения (8.5) после дифференцирования соотношения (8.3) мы сократили дифференциал абсолютного времени (интервал, равный единице измерения времени) в правой и левой части полученного уравнения. Однако, для адекватного описания изменения и

развития системы во времени мы должны учесть факт того, что для процесса измерения каждого свойства существует свое характерное событие со своей длительностью формирования во времени (своим «моментом» шкалы измерений). Предположим линейность связи длительности этого события с единицей измерения, принятой для конкретной системы шкалы абсолютного времени. Кроме того, допущение о линейности функции  $w(\tau)$  на участке между точками  $M_i$  и  $M_{i+1}$   $w(\tau) = w_i + \tau \cdot (w_{i+1} - w_i)$  является слишком приближенным, поэтому лучше считать, что левая часть уравнения (8.5) зависит от параметров свойств. Исходя из данных предположений, можно получить уравнение вида:

$$\alpha_1 \frac{\partial W}{\partial z_1} z_1 + \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial z_2} z_2 + \dots + \alpha_n \frac{\partial W}{\partial z_n} z_n = f, \quad (8.6)$$

где  $\alpha_k$  и  $f$ , в общем случае, представляют собой некоторые функции от параметров свойств.

Таким образом, для эволюционно развивающихся систем, которые позволяют получить линейное модельное описание в окрестности любого состояния, функция состояния представима квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка относительно параметров свойств системы. Это связано с тем, что изменения функции состояния и параметров свойств для таких систем подобны относительно абсолютного времени. Соотношение (8.6) получено нами на основе некоторых логических предположений, в дальнейшем справедливость данного соотношения будет обоснована более строгим образом.

## 8.2 Шкала системного времени

Теперь определим требования, которым должны удовлетворять шкалы измерения системного времени, построенные на использовании последовательностей однородных событий. Для этого воспользуемся требованиями статистической устойчивости последовательностей событий Р. Мизеса и возможностью параметрического представления функции состояния системы и параметров ее свойств относительно абсолютного времени. Пусть для множества объектов одного класса (однотипные технические системы, биологические организмы, звездные системы, компании и предприятия, страны мира и т.п.) имеются последовательности однородных несовместных событий, представляющие собой результаты наблюдений некоторых фактов или измерений значений характеристических случайных величин, которые получены один за другим в определенные моменты времени. Будем считать, что события различных последовательностей независимы, так как соответствуют разным объектам, находящимся в разных условиях. Очень часто такие последовательности можно представить в виде случайной функции  $X(\tau)$  на определенном отрезке времени, для которой можно определить функцию состояния системы в виде (7.2). Функция состояния системы не является случайной

функцией, так как отражает статистические закономерности в формировании событий.

Рассмотрим две системы, состоящие из разного количества изучаемых объектов, каждый из которых, в свою очередь, находится в некотором устойчивом (динамически равновесном) состоянии в определенных условиях окружающей среды, причем условия среды могут быть различными. Естественно, что области изменения параметров объектов в этом случае отличаются между собой. Будем считать, что для всех объектов наблюдается динамически относительное постоянство параметров свойств, которые могут меняться с течением времени в небольшом диапазоне. Предположим, что за каждым объектом обеих систем ведется наблюдение с целью оценки статистической вероятности появления характерных однородных событий, которые будем рассматривать как реакции систем на воздействие окружающей среды. При этом примем, что относительная частота  $w$  появления значений  $x$  случайной функции  $X(\tau)$ , характеризующей реакцию, в общем случае зависит от параметров свойств объектов, так как последние связаны с условиями окружающей среды, в которой находится объект. В свою очередь, согласно допущений главы 7, вероятностные характеристики случайного процесса  $X(\tau)$  не зависят от времени и в любом процессе параметры свойств являются функциями абсолютного времени, поэтому функция состояния может быть представлена в виде (7.2).

Пусть для каждого объекта получена реализация случайной функции  $X_i(\tau)$  в виде временного ряда, в результате мы имеем конечное множество реализаций, которое равно количеству всех объектов для обеих систем. Исходя из этого, для некоторого значения времени  $\tau$  можно получить сечение случайной функции, состоящее из опытных значений, принятых случайной величиной  $X(\tau)$ . Предположим, что объем всех наблюдений за длительный период времени достаточно большой и статистически устойчив (относительные частоты стремятся к статистической вероятности), тогда по полученным данным вполне возможно определить плотности распределений. Разделим весь процесс наблюдений на три серии испытаний (серии опытов). В результате всех испытаний в нашем распоряжении имеются данные наблюдений случайной величины  $X(\tau)$  в виде статистических временных рядов. Первая серия испытаний включает первую последовательность наблюдений, состоящую из опытов, полученных для первой системы; вторая серия – вторую последовательность наблюдений, состоящую из опытов для второй системы; третья серия испытаний состоит из обеих последовательностей, объединенных вместе. На основе этих данных для каждой из трех систем возможно определение своей функции состояния вида (7.2).

Условимся величины, относящиеся к первой и второй серии испытаний, отмечать индексами 1 и 2; величины без индексов будем относить к общей серии испытаний. Далее предположим, что в каждой

серии испытаний для измерения времени появления событий была использована своя шкала абсолютного времени, эмпирически построенная по некоторым регулярным событиям, генерируемым в эталонных приборах измерения времени – часах, где реализуется периодический физический процесс. Исходя из этого, в качестве переменных в первой серии испытаний примем параметры свойств объектов  $z_k$  и время, определяемое по шкале  $\tau_1$ , во второй серии испытаний – параметры свойств и время, определяемое по шкале  $\tau_2$ , и наконец в общей серии – параметры свойств и время, определяемое по шкале  $\tau$ . В процессе наблюдений за системами абсолютное время, определяемое по соответствующим шкалам  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau$ , будет выступать параметром как для функций состояния системы, так и согласно уравнений (8.1) каждого параметра свойства.

Так как рассматриваются последовательности однородных событий, полученных в одинаковых опытах (однако в разных внешних условиях) для одной и той же случайной величины, то между моментами измерения времени на основе различных шкал абсолютного времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau$  должна существовать тесная связь. Кроме того, последовательности характерных событий, свойственные величине  $X(\tau)$ , также должны позволять оценивать изменения в объектах и с помощью них может быть построена своя шкала измерения системного времени, которая должна быть непосредственно связана со стохастическим процессом изменения величины  $X(\tau)$ . Если измерения времени на основе шкал  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau$  позволяют оценить изменения в системе, исходя из относительного сопоставления стохастического процесса  $X(\tau)$  с внешними процессами (по отношению к системе), то шкала системного времени должна давать возможность оценивать наблюдаемые изменения, исходя из последовательности случайных событий, свойственных самой системе.

Связь между абсолютным и системным временем определяется фактом существования функции состояния системы (7.2), который постулируется. Здесь мы исходим из очевидного утверждения, что любые последовательности однородных и закономерных событий (как регулярные, так и стохастические) должны позволять оценивать течение времени и служить основанием для создания шкал измерения времени, при этом в основе построения шкал могут лежать как динамические, так и статистические закономерности. Некоторые из временных шкал будут существенно более «удобны» для относительных сопоставлений, нежели другие, однако шкалы времени, имеющие отношение к конкретным объектам, могут давать дополнительную информацию о системе или классе систем.

В процессе анализа примем, что системы измерения абсолютного времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau$  привнесены в данный опыт извне, в связи с чем эти величины позволяют представить параметры свойств изучаемых объектов в виде параметрических уравнений (8.1), так как абсолютное время



является независимой переменной. Выберем некоторый произвольный интервал наблюдений  $\Delta t$  для всех трех случаев, отмерив его по двум выделенным событиям общей последовательности, тогда в разных шкалах измерения времени данный интервал соответственно равен  $d\tau_1$ ,  $d\tau_2$  и  $d\tau$ . Будем считать, что в процессе обработки опытов для случайной величины  $X(\tau)$  в первой серии испытаний была получена оценка плотности статистической вероятности появления событий  $\beta_1$ , во второй серии испытаний – плотности вероятности появления событий  $\beta_2$ . Так как опыты одинаковы, то можно утверждать, что в общей серии испытаний может быть получена оценка плотности статистической вероятности  $\beta$ .

По найденным плотностям вероятностей определим функции распределения вероятностей для всех трех серий испытаний:

$$\begin{aligned} dw_1 &= \beta_1(z_1, z_2, \dots, z_n) d\tau_1; \\ dw_2 &= \beta_2(z_1, z_2, \dots, z_n) d\tau_2; \\ dw &= \beta(z_1, z_2, \dots, z_n) d\tau. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Так как все события несовместные, то по теореме сложения вероятностей получим:

$$\beta d\tau = \beta_1 d\tau_1 + \beta_2 d\tau_2. \quad (8.8)$$

Дифференциал абсолютного времени  $d\tau$  может быть представлен в виде  $d\tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1}\right) d\tau_1 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_2}\right) d\tau_2$ , так как абсолютное время  $\tau$  необходимо рассматривать как функцию величин  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . Отсюда с учетом (8.8) получим:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_2} d\tau_1 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_2}\right)_{\tau_1} d\tau_2 = \frac{\beta_1}{\beta} d\tau_1 + \frac{\beta_2}{\beta} d\tau_2. \quad (8.9)$$

Учитывая независимость шкал  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , равенство (8.9) возможно только в том случае, когда производные от  $\tau$  по  $\tau_1$  и  $\tau_2$  будут иметь вид:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_2} = \frac{\beta_1}{\beta} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_2}\right)_{\tau_1} = \frac{\beta_2}{\beta}.$$

В свою очередь, так как любой параметр свойства системы может быть представлен в параметрическом виде относительно величин  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau$ , то для произвольно выбранного интервала наблюдений  $\Delta t$ , изменение параметра свойства можно выразить в виде:

$$dz_{k1} = \varphi_{k1}(\tau_1) d\tau_1; \quad dz_{k2} = \varphi_{k2}(\tau_2) d\tau_2 \quad \text{и} \quad dz_k = \varphi_k(\tau) d\tau. \quad (8.10)$$

Во всех этих случаях на интервале  $\Delta t$  изменение величины  $dz_{k1}$ ,  $dz_{k2}$  и  $dz_k$  одинаково, поэтому выражая (8.8) через параметрические уравнения (8.10) получим, зависимость вида:

$$\varphi_k^{-1}(\tau) = \frac{\beta_1}{\beta} \varphi_{k1}^{-1}(\tau_1) + \frac{\beta_2}{\beta} \varphi_{k2}^{-1}(\tau_2), \quad (8.11)$$

которая зависит только от  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau$ .

Справедливость данного уравнения выполняется при следующих условиях:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \left( \frac{\beta_1}{\beta} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial z_k} \left( \frac{\beta_2}{\beta} \right) = 0,$$

откуда после несложных преобразований получаем:

$$\frac{1}{\beta_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial z_k} = \frac{1}{\beta_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial z_k} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial z_k}. \quad (8.12)$$

Таким образом, в различных системах измерения времени плотности распределений статистических вероятностей для одних и тех же последовательностей однородных и закономерных событий, регистрируемых в изучаемых объектах, связаны между собой соотношением (8.12).

Так как плотность распределения  $\beta_1$  не зависит от  $\tau_2$ , а плотность распределения  $\beta_2$  – от  $\tau_1$ , то равенство (8.12) возможно только в случае, когда все отношения являются функцией только одной переменной  $z_k$ . Исходя из этого, последнее уравнение можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} (\ln \beta_1) = \frac{\partial}{\partial z_k} (\ln \beta_2) = \frac{\partial}{\partial z_k} (\ln \beta) = \lambda_k(z_k). \quad (8.13)$$

Здесь  $\lambda_k(z_k)$  – некоторая универсальная функция, зависящая от параметра свойства, принимающая тождественные значения во всех сериях испытаний. Это позволяет нам опустить индексы при величинах  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и оперировать только величиной  $\beta$ .

Рассматривая  $n$  равенств (8.13) как систему уравнений в частных производных и учитывая, что в силу линейности и однородности этой системы всякая конечная сумма частных решений также будет решением, представим плотность статистической вероятности  $\beta$  в виде:

$$\ln \beta_k = \int \lambda_k dz_k + \ln \Phi_k \quad \text{или} \quad \ln \beta = \sum_{k=1}^n \left( \int \lambda_k dz_k + \ln \Phi_k(\tau) \right). \quad (8.14)$$

Здесь  $\Phi_k$  – постоянные интегрирования, которые зависят только от независимой переменной – параметра абсолютного времени  $\tau$ . Итак, в общем случае плотность статистической вероятности при условии статистической устойчивости последовательностей однородных событий представляет собой конечную сумму произведений двух функций, одна из которых зависит от параметров свойств, а вторая – от параметра  $\tau$  некоторой эмпирически построенной абсолютной шкалы времени.

Следствием данного вывода является то, что статистическая вероятность  $w$  наблюдаемых событий согласно (8.14) может быть представлена в виде:

$$dw = \Phi(\tau) \cdot \exp \left( \sum_{k=1}^n \left( \int \lambda_k dz_k \right) \right) d\tau, \quad (8.15)$$

где  $\Phi(\tau) = \Phi_1(\tau) \cdot \dots \cdot \Phi_n(\tau)$ .

Примем обозначение  $\Phi(\tau) d\tau = d\omega$ , где величину  $\omega$  определим как *системное* время для данного класса объектов, шкала которого может быть построена по характерным событиям реакций системы на воздействие. Ранее показано, что статистическая вероятность однозначно связана с геометрической вероятностью, а последняя является функцией параметров свойств, поэтому системное время для эволюционно развивающихся систем согласно (8.15) можно представить в виде:

$$d\omega = \Psi(w) dw. \quad (8.16)$$

Отсюда следует важный вывод – *системное время* объекта, определенное по последовательности однородных несовместных характерных событий, можно представить инверсной функцией статистической вероятности этих событий.

В отличие от абсолютного времени, которое является внешней координатной переменной, системное время выступает внутренней координатной переменной для системы. Системное время можно ввести для оценки изменений как всей системы в целом, так и для каждого свойства, так как функция состояния может быть построена и для отдельного параметра свойства.

Теперь в (8.15) выделим множитель, зависящий от системного времени и, соответственно, от параметров свойств системы, в форме

$$\frac{dw}{d\omega} = P(\omega) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \int \lambda_k dz_k\right) \quad (8.17)$$

и определим его как абсолютную плотность статистической вероятности состояния системы по системному времени для изучаемого компонента, которому свойственен  $j$ -тый качественный признак. Вид функции  $P(\omega)$  находится на основе опытных данных. Согласно (8.17) функция плотности вероятности состояния системы может быть только положительна или равна нулю. Нормирование функции  $P(\omega)$  необходимо осуществлять на бесконечном интервале времени. Если начало отсчета системного времени связать с некоторым событием, которое условно принять за настоящее, считая, что прошлое соответствует отрицательным значениям шкалы, а будущее – положительным значениям, то нормировка может быть представлена в виде  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) d\omega = 1$ . В процессе нормировки считается, что в любом процессе геометрическая вероятность системы функционально связана с системным временем.

Из сказанного выше следует, что в первом приближении вид функции плотности статистической вероятности  $P(\omega)$  может быть определен из эмпирического распределения вероятностей событий, характерных для изучаемого качественного признака системы.

В настоящее время принятая эмпирическая шкала времени основана на принципе генерирования простых регулярных событий в часах, которые используют различные периодические физические процессы.

Последовательность регулярных событий высокой плотности в принятой системе измерения абсолютного времени соответствует равномерной последовательности точек на оси времени. Применение регулярных событий, генерируемых в часах, позволяет при построении шкалы абсолютного времени задать последовательность псевдослучайных чисел, которая обладает комплексом частотных свойств, «типичных» для последовательности случайных чисел с равномерной функцией распределения. Можно показать, что для такой регулярной последовательности выполняется также принцип тождественного равенства геометрической и статистической вероятности событий. Другими словами, часы создают регулярный поток стационарных и ординарных событий, которые, однако, отличаются явным последствием. Стохастический процесс  $X(\tau)$  «генерирует» случайный поток стационарных и ординарных событий без последствия.

В заключение раскроем суть полученных результатов. С одной стороны, как установлено в этом разделе, системное время является интегральной переменной, причем из уравнения (8.15) следует, что в элементарной окрестности любого состояния системы дифференциал системного времени пропорционален дифференциалу абсолютного времени, т.е.  $d\omega = \Phi(\tau) \cdot d\tau$ . С другой стороны, системное время является полным дифференциалом, так как  $d\omega$  переходит в полный дифференциал  $d\omega$  путем деления на абсолютную плотность распределения  $P$ . Поэтому распределение  $P$  является интегрирующим делителем для статистической вероятности  $d\omega$ . Так как вероятности событий в общем случае представляются аддитивно-мультипликативными зависимостями, то изменения вероятностей  $d\omega$  представимы в виде пфаффовых дифференциальных форм вида  $d\omega = W_1 dz_1 + W_2 dz_2 + \dots + W_n dz_n$ . Известно, что пфаффова дифференциальная форма двух переменных всегда имеет интегрирующий делитель, причем делителей бесконечно много и они функционально связаны между собой. Поэтому статистическая вероятность распределения некоторой реакции системы  $d\omega$  или отдельного свойства  $d\omega_k$ , которая в самом общем случае зависит от параметра соответствующей случайной величины ( $x$  или  $z_k$ ) и абсолютного времени ( $\tau$ ), всегда может быть преобразована в системное время  $d\omega$  или  $d\omega_k$  путем деления на соответствующий интегрирующий делитель (умножения на интегрирующий множитель). Естественно, что, если найдены значения  $d\omega$  или  $d\omega_k$ , то вполне возможно установить их связи с абсолютным временем  $d\omega = \Phi(\tau) \cdot d\tau$  или  $d\omega_k = \Phi_k(\tau) \cdot d\tau$ . Также при известных значениях  $d\omega$  или  $d\omega_k$  можно искать зависимости вида

$$d\omega = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot d\omega_k.$$

Данные зависимости могут быть как точными, так и

приближенными, что определяется видом стохастического процесса реакции системы на воздействие.

Математически суть системного времени заключается в следующем. Пфаффа дифференциальная форма для статистической вероятности  $dw = W_\tau d\tau + W_y dy$  ( $W_\tau$  и  $W_y$  – функции от  $\tau$  и  $y$ , а величина  $y$  – это соответственно параметр или  $x$  или  $z_k$ ), может быть всегда интегрирована и решением уравнения Пфаффа  $dw = 0$  являются кривые однопараметрического семейства на плоскости  $\tau, y$ :  $y = y(\tau, c)$  или  $\omega(\tau, y) = C$ , где  $C$  – константа. В каждой точке плоскости интегральные кривые  $\omega(\tau, y) = C$  имеют касательные, которые совпадают с направлением, задаваемым уравнением Пфаффа  $\frac{dy}{d\tau} = -\frac{W_\tau}{W_y}$ , поэтому

системное время представляет собой векторные линии скалярного поля вероятности  $w$  для некоторого характерного события. Для этих кривых должно быть и  $dw = 0$  и  $d\omega = 0$ , а  $dw$  переходит в полный дифференциал  $d\omega$  путем деления на интегрирующий делитель.

Известно, что не все уравнения Пфаффа двух переменных интегрируются в квадратурах. Однако, мы рассматриваем реально наблюдаемые в опытах процессы, где параметры свойств и реакций системы измеряемы, поэтому изначально предполагается отсутствие особых точек и особых решений.

Из теории известно [58, стр. 36], что, если уравнение  $W_\tau d\tau + W_y dy = 0$  имеет общий интеграл  $\omega(\tau, y) = C$  и функция  $\omega(\tau, y)$  имеет непрерывные частные производные второго порядка, то исходное уравнение Пфаффа имеет интегрирующий делитель, т.е. функция  $dw$  интегрируема. Таким образом, постулируя существование функции состояния, т.е. фактически возможность интегрирования уравнения Пфаффа, мы тем самым удовлетворяем требованиям данной теоремы. Следствием этого является как существование интегрирующего делителя, так и существование системного времени в виде общего интеграла исходного уравнения.

Отметим, что кроме постулирования существования функции состояния возможны также другие исходные предпосылки для обоснования существования интегрирующего делителя уравнения Пфаффа  $W_\tau d\tau + W_y dy = 0$ . Например, можно постулировать возможность бесконечно малого преобразования исходного уравнения Пфаффа [58], накладывая тем самым условие непрерывности процессов во времени в окрестности исходного состояния системы. В другом случае, можно постулировать однородность уравнения Пфаффа [58], накладывая условие подобия изменения параметров свойств во времени или возможность параметрического представления параметров свойств относительно времени в одном и том же масштабе измерения и т.д. Во всех этих случаях уравнение Пфаффа для двух переменных интегрируемо в квадратурах и имеет бесконечное количество интегрирующих делителей и общих интегралов, которые функционально связаны между собой.

Следствием всего этого является то, что статистическая вероятность однозначно представляется относительно системного времени, а системное время – относительно абсолютного времени.

Здесь мы подходим к возможности более строгого обоснования понятия эволюционно развивающихся систем, которые относятся к классу линейных систем. Так как для функции распределения любого параметра свойства  $z_k$  и любой величины  $x$ , характеризующей реакцию системы на воздействие, может быть найдено системное время в виде общего интеграла  $\omega_k(\tau, z_k) = C$  или  $\omega(\tau, x) = C$ , то функция состояния системы (7.2) может быть преобразована к системному времени  $\omega(\tau, x)$ , которое может быть разложено по частным системным временам для каждого

свойства  $\omega_k(\tau, z_k)$  в виде:  $\omega = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \omega_k$ . Если данное разложение на

основе опытных данных может быть найдено с необходимой точностью, то систему можно относить к классу эволюционно развивающихся систем. Практически для таких систем мы предполагаем существование непрерывного скалярного поля статистической вероятности, которое описывается пфаффовыми дифференциальными формами.

Здесь видны отличия данного подхода от подхода, предложенного Каратеодори, который требует постулирования адиабатической недостижимости для многомерного уравнения Пфаффа, что совсем не является очевидным. По крайней мере, если, исходя из опыта, для термодинамических систем может быть и можно постулировать, что пфаффова форма  $n$  переменных для количества теплоты всегда голономна (имеет интегрирующий делитель), то для систем иной природы такое допущение в принципе не правомерно. В отличие от теоремы Каратеодори для многомерного уравнения Пфаффа, которое удовлетворяет принципу адиабатической недостижимости для термодинамических систем, двумерное уравнение Пфаффа всегда имеет общий интеграл, хотя и не всегда интегрируемо в квадратурах. Согласно теореме Коши [92] пфаффова форма двух переменных всегда голономна. Для пфаффовых форм трех и более переменных голономность является редким исключением и особенностью, которая, скорее всего, вовсе не является очевидной даже для термодинамических систем. Поэтому особенностью подхода системодинамики является постулирование существования функции состояния – скалярного поля вероятности представимого в виде пфаффовых форм, причем справедливость этого в каждом случае может быть проверена по опытным данным путем оценки факта существования

для общего системного времени зависимости вида  $\omega = \sum_{k=1}^n \gamma_k \cdot \omega_k$ .

В заключение отметим также, что не следует на системные времена  $d\omega$  и  $d\omega_k$  переносить представление о времени, которое исторически сложилось как модель абсолютного времени. В первую очередь, эти

величины отражают изменения в системе, связанные с наблюдаемыми характерными событиями и изменениями свойств системы, и речь идет пока об различных способах оценки этих изменений и построении различных шкал, позволяющих это делать. В отличие от абсолютного времени, которое представляет собой параметр, привносимый извне, системное время является полным дифференциалом (общим интегралом для уравнения состояния) и образует потенциальное скалярное поле, которое зависит от абсолютного времени и реакций системы на воздействие  $x$  или параметров свойств  $z_k$ . Поле системного времени тесно связано с полем статистической вероятности, которое, в общем случае, не является потенциальным. Поэтому системное время представляет собой особую функцию состояния, для которой изменение величины в каком-либо процессе не зависит от характера этого процесса, а определяется только начальным и конечным состоянием системы. Далее будет показана тесная связь системного времени с другой особой функцией состояния системы – энтропией. Данные две функции состояния функционально связаны между собой и для каждой из них существует свой интегрирующий делитель для статистической вероятности  $w$ .

Таким образом, исходная задача сводится к разработке моделей и алгоритмов, дающим возможность по опытным данным для каждой случайной величины, характеризующей процесс или изменение свойств, определять системное время и устанавливать связи между этими величинами на уровне конкретных систем. В следующей главе показаны возможности построения шкал системного времени для различных процессов и явлений.

### **8.3 Примеры построения шкал системного времени**

Анализ многих работ, посвященных изучению природы времени [21, 32, 45, 46, 73, 75, 77, 102], показывает исключительное преобладание в направлениях исследований гипотетических и теоретических подходов, а также умозрительных построений и абстрактных моделей. Изучению опытных данных в этой области уделяется существенно меньше внимания. Если в естествознании соотношение количества теоретических и экспериментальных работ в какой-то степени соизмеримо между собой, то в области темпорологии количество работ, посвященных анализу данных наблюдений в десятки раз меньше [46]. Все это говорит об начальном этапе накопления данных и отсутствии продуктивных идей в области изучения природы времени, которые бы основывались на опытных данных или статистической обработке накопленной информации.

Поиск таких идей должен начинаться с изучения систем, на которые течение времени в нашей реальности оказывает наибольшее влияние – это живые системы. В свою очередь, анализ данных следует начинать с построения эмпирических шкал измерения системного времени для различных классов живых объектов и систем. Подобный путь в прошлом

прошла и термометрия – от эмпирических шкал измерения температуры до термодинамической шкалы абсолютной температуры. В этом плане необходимо искать общесистемные количественные связи между свойствами объектов и системными шкалами времени. Важная особенность этой задачи заключается в том, что любая шкала системного времени не может основываться на частных эффектах изменения свойств, а должна быть связана с наиболее общими, фундаментальными закономерностями систем. Поэтому изначально следует определить принцип построения шкалы системного времени, а также установить количественное соответствие этой шкалы со шкалой абсолютного времени.

Будем изучать опытные данные для величин, которые характеризуют изменения реакций систем  $(x_j)$  или параметров их свойств  $(z_k)$  во времени. Соответствующие базы данных в самом общем случае сводятся к трехмерным массивам, которые охватывают объекты наблюдений одного класса, значения времени наблюдения и найденное значение величины.

Известно, что шкала измерения – это упорядоченная совокупность значений некоторой величины, которая является основой для измерения этой величины. Исходя из этого определения и результатов предыдущего раздела, под шкалой абсолютного времени будем понимать последовательность однородных, регулярных и ординарных событий высокой плотности, которая определена некоторым эталонным физическим процессом. Данной последовательности событий свойственно равномерное распределение, она полностью характеризуется циклическим физическим процессом, который генерируется в часах, и никак не связана со свойствами систем, где применяется для измерения времени.

В свою очередь шкала системного времени – это последовательность однородных случайных событий, характерных для изучаемой системы и самым тесным образом связанных со свойствами этой системы в процессе ее эволюционного развития. Данной последовательности свойственны различные виды вероятностных распределений.

В поисках оснований для рационального определения принципа построения шкалы системного времени обратимся к постулатам системодинамики о существовании функции состояния и линейной связи между распределениями статистической и геометрической вероятностей случайных величин в окрестности произвольно заданного состояния системы. Для всего дальнейшего важно, чтобы количественные результаты отличались высокой общностью соотношений для целого ряда живых систем, для которых имеются данные об изменении во времени некоторого общего атрибутивного свойства или характерного события.

В первую очередь, для нас наибольший интерес представляет выбор характерного события, которое для биологических систем непосредственно связано с течением времени. Одним из таких длительных событий является факт существования биологического организма, который характеризуется продолжительностью жизни этого организма. Для



построения шкалы системного времени, которое бы выступало в качестве общего свойства биологических организмов также необходимо использовать существующую шкалу часов времени, построенную на основе регулярных потоков событий. Однако, для преобразования шкалы интервалов в шкалу отношений необходимо определиться с выбором абсолютного начала отсчета и эмпирическим путем установить вид функции  $\omega = \int \Phi(\tau) \cdot d\tau$ . В этом плане продолжительность жизни биологических организмов является удобной характеристикой, так как для всех организмов может быть задано общее начало отсчета – момент рождения объекта, от которого определяется продолжительность жизни в виде временного диапазона до момента смерти, поэтому все множество подобных событий может быть оценено в одной шкале отношений. Количественное соответствие между шкалами системного и абсолютного времени будем устанавливать на основе применения методов пробит-анализа. В дальнейшем применение методов пробит-анализа при определении системного времени будет строго обосновано. Ниже во всех случаях анализа данных абсолютное время задавалось в минутах.

Для изучения данных о продолжительности жизни животных воспользуемся наиболее полной на сегодняшний день базой данных по продолжительности жизни позвоночных животных [108]. Нынешняя версия базы включает сведения о 4083 видах позвоночных. База данных охватывает амфибий, рептилий, рыб, птиц и млекопитающих. Для 3750 видов в базу внесены данные о максимальной продолжительности жизни; для многих видов указана масса тела при рождении и во взрослом состоянии, скорость роста и размножения, время полового созревания, продолжительность беременности и некоторые другие характеристики.

Для начала рассмотрим данные о продолжительности жизни подотряда мышеобразных отряда грызунов, который является одной из самых крупных таксономических единиц среди семейств млекопитающих (10 семейств, около 120 родов и примерно 400÷500 видов). Грызуны распространены по всему миру, за исключением Антарктиды, и встречаются почти во всех наземных биотопах. Жизненные популяции грызунов можно рассматривать как индикатор состояния окружающей среды. На рисунке 8.2 для подотряда мышеобразных представлена реализация принципа построения шкалы системного времени, а также показана ее связь со шкалой абсолютного времени.

Уравнение, которое устанавливает количественное соответствие между шкалами системного и абсолютного времени, имеет вид:

$$Pr ob_w = -28,959 + 1,943 \cdot \ln \tau, \quad (8.18)$$

где продолжительность жизни  $\tau$  задана в минутах,  $Pr ob_w$  определен с учетом зависимости (6.2) по значению статистической вероятности  $w$ , характеризующей распределения опытных данных о продолжительности жизни 234 видов мышеобразных. Коэффициент корреляции зависимости (8.18) составляет 0,992.

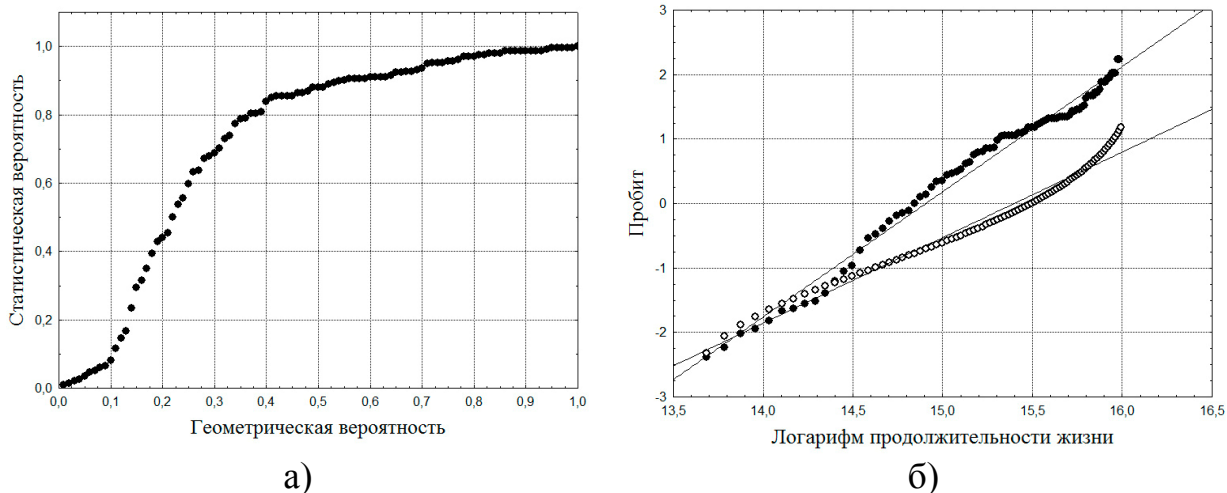


Рис. 8.2. – Шкалы системного времени для мышеобразных:

- а) взаимосвязь вероятностей распределения продолжительности жизни;
- б) выравнивание данных для получения линейной связи величин;
- – пробит определен по статистической вероятности распределения событий;
- – пробит определен для случая равновозможных событий по геометрической вероятности

На рисунке 8.2 (б) представлены также данные о распределении продолжительности жизни для случая, если бы соответствующие события были бы равновозможными. Уравнение, которое устанавливает количественное соответствие в этом случае, имеет вид:

$$Prob_{\rho} = -20,423 + 1,326 \cdot \ln \tau, \quad (8.19)$$

где пробит определен по значению геометрической вероятности  $\rho$ . Коэффициент корреляции зависимости (8.19) составляет 0,980. Из приведенных данных видно, что системная шкала времени является нелинейной и тесно связана со шкалой абсолютного времени для данного класса биологических объектов, причем данная связь имеет логарифмический характер. Кроме этого видны различия в случае формирования равновозможных и неравновозможных событий.

Рассмотрим теперь данные о продолжительности жизни всех видов животных, которые входят в классы амфибий, рептилий, рыб, птиц и млекопитающих. На рисунке 8.3 представлена обработка данных при построении шкал системного и абсолютного времени для 3750 видов животных, представленных в базе данных [108].

В данном случае уравнения, которые устанавливают количественное соответствие между шкалами системного и абсолютного времени, при неравновозможном и равновозможном распределении событий, характеризующих продолжительность жизни животных, имеют вид:

$$Prob_w = -20,611 + 1,304 \cdot \ln \tau \quad (8.20)$$

$$Prob_{\rho} = -13,970 + 0,795 \cdot \ln \tau. \quad (8.21)$$

Коэффициенты корреляции зависимостей (8.20) и (8.21) соответственно равны 0,997 и 0,973.

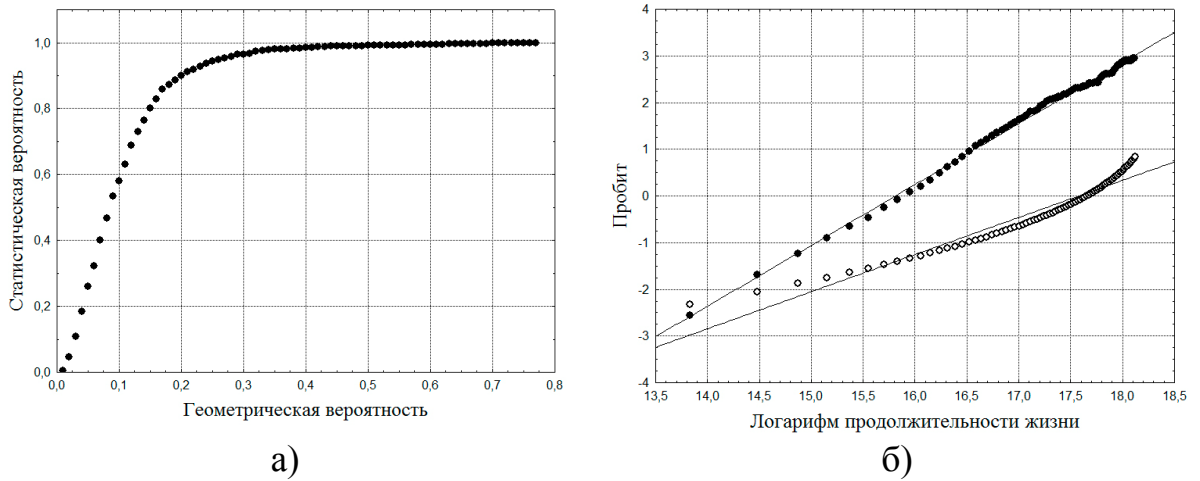


Рис. 8.3. – Шкалы системного времени для животных: а) взаимосвязь вероятностей распределения продолжительности жизни; б) выравнивание данных для получения линейной связи величин;  
 ● – пробит определен по статистической вероятности распределения событий;  
 ○ – пробит определен для случая равновозможных событий по геометрической вероятности

Интересно изучение данных о продолжительности жизни отряда приматов, к которым относится и человек. На рисунке 8.4 показана шкала оценки времени для этого случая. Уравнения, которые устанавливают количественное соответствие между шкалами имеют вид:

$$Prob_w = -43,947 + 2,664 \cdot \ln \tau ; \quad (8.22)$$

$$Prob_p = -23,203 + 1,385 \cdot \ln \tau . \quad (8.23)$$

Коэффициенты корреляции зависимостей (8.22) и (8.23) соответственно равны 0,991 и 0,984. Данные уравнения характеризуют распределения данных о продолжительности жизни 150 видов приматов.

Из рисунков 8.2-8.4 видно, что между пробитом, определенным по статистической вероятности событий, и логарифмом абсолютного времени существуют практически функциональные зависимости, которые очень близки к линейным уравнениям. Только при значениях вероятностей, близких к нулю и к единице, могут наблюдаться не значительные отклонения. Кроме того, из рисунков видны отличия в протекании процессов с равновозможным и неравновозможным распределением событий. Различный угол наклона прямых, сглаживающих опытные данные для функций  $Prob_w$  и  $Prob_p$ , указывает на разную скорость протекания процессов в логарифмической шкале абсолютного времени. В данном случае необходимо подробное изучение закономерностей в существующей базе данных, так как не исключено, что наклон зависимости для системного времени зависит от уровня развития биологического организма (например, амфибии и млекопитающие и т.п.).

Покажем, что шкала системного времени, отражающая изменения в системе, может быть построена для различных последовательностей характерных событий. Например, на рисунке 8.5 (а) представлена шкала

для последовательности событий изменения температуры атмосферного воздуха (рис. 6.14 (а)). Соответствующие уравнения, устанавливающие количественное соответствие между пробитами имеют вид:

$$Prob_w = -146,325 + 25,934 \cdot \ln t ; \quad (8.24)$$

$$Prob_\rho = -71,332 + 12,687 \cdot \ln t . \quad (8.25)$$

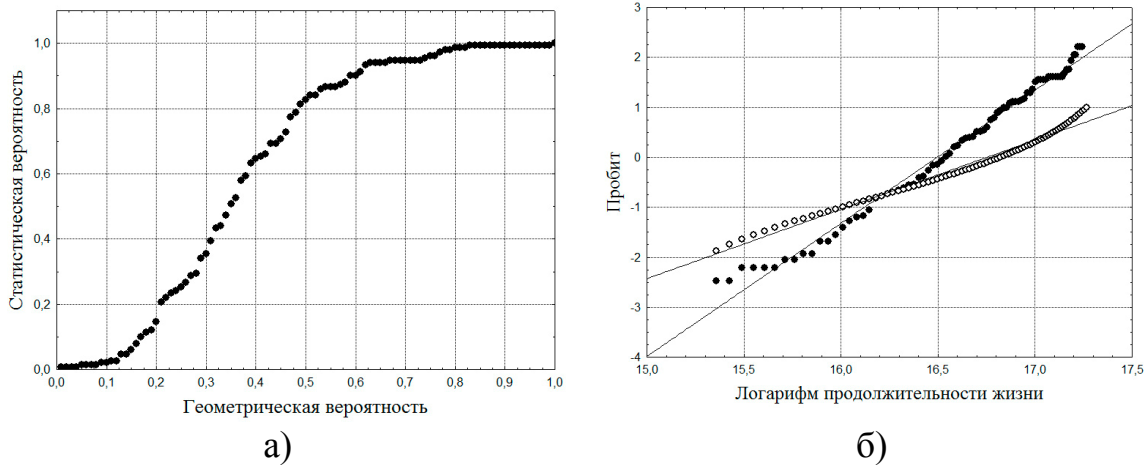


Рис. 8.4. – Шкалы системного времени для приматов: а) взаимосвязь вероятностей распределения продолжительности жизни;

б) выравнивание опытных данных для получения линейной связи величин;

- – пробит определен по статистической вероятности распределения событий;
- – пробит определен для случая равновероятных событий по геометрической вероятности

Здесь  $t$  – абсолютная температура в градусах Кельвина. Коэффициенты корреляции зависимостей (8.24) и (8.25) соответственно равны 0,996 и 0,987.

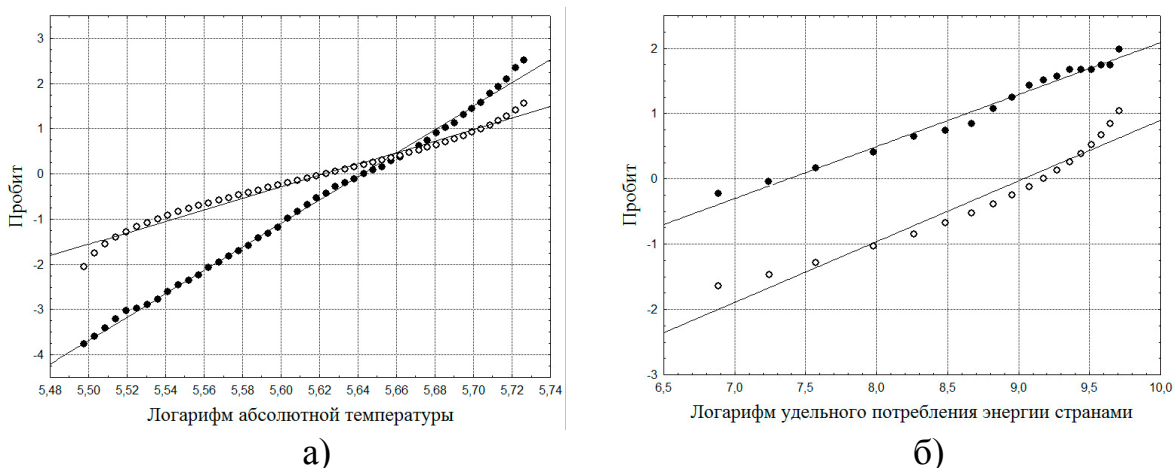


Рис. 8.5. – Шкалы системного времени для различных последовательностей событий: а) взаимосвязь вероятностей распределения событий изменения температуры воздуха; б) взаимосвязь вероятностей распределения событий удельного потребления энергии странами;

- – пробит определен по статистической вероятности распределения событий;
- – пробит определен для случая равновероятных событий по геометрической вероятности

Аналогичным образом, на рисунке 8.5 (б) представлены зависимости пробитов от удельного потребления энергии странами (рис. 6.15 (б)):

$$Prob_w = -5,870 + 0,796 \cdot \ln E ; \quad (8.26)$$

$$Prob_\rho = -8,400 + 0,930 \cdot \ln E . \quad (8.27)$$

Здесь  $E$  – удельное потребление энергии странами, кВт·ч/чел. Коэффициенты корреляции зависимостей (8.26) и (8.27) выше 0,95.

Далее будет показано, что пробит самым тесным образом связан с системным временем, которое однозначно характеризует изменения в системе. В целом, результаты шестой, седьмой и восьмой глав данной монографии позволяют подойти к созданию теории и математического аппарата системодинамики, а также предложить возможные пути аксиоматики этой науки, что является актуальным, если исходить из необходимости развития общей теории систем.

# Глава девятая

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ЗАКОНЫ СИСТЕМОДИНАМИКИ

### 9.1 Основные уравнения и соотношения

Теперь выполним формализацию диалектического закона перехода количественных изменений в качественные для эволюционно развивающихся систем, используя математический аппарат системодинамики, основные положения которого органически вытекают из теории вероятности, математической статистики и логического метода построения моделей в термодинамике.

Пусть имеется пространство состояний системы  $\Omega_n$ , где координатные оси соответствуют атрибутивным переменным  $z_1, z_2, \dots, z_n$   $n$ -мерного абсолютного пространства свойств  $\Omega$ , которое включает  $\Omega_n$ . Каждой точке  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$  данного пространства состояний системы поставлено в соответствие значение абсолютного индекса  $T$ , который линейно пропорционален геометрической вероятности, определенной по параметрам свойств  $z_k$ .

Таким образом,  $\Omega_n$  – многомерное пространство точек  $M$ , в свою очередь,  $T = T(M)$  – непрерывное скалярное поле абсолютного индекса системы в этом пространстве, имеющее непрерывные частные производные по всем переменным  $z_k$ .

Далее предположим, как и раньше, что каждому состоянию системы  $M$  соответствуют определенные внешние условия. При неизменных внешних условиях окружающей среды параметры свойств системы с течением времени не изменяются или могут колебаться около среднего значения, т.е. в любом состоянии  $M$  система будет находиться в устойчивом динамическом равновесии.

Предположим, что в пространстве состояний  $\Omega_n$  для множества  $N$  опытных точек  $M_i$  найдены реализации случайной функции  $X$ . При этом для состояний  $M_i$  путем группировки данных могут быть определены относительные частоты  $\nu_i$  случайного процесса  $X$ . Исходя из свойств статистической устойчивости событий, считаем, что при достаточно большом числе  $N$  относительные частоты  $\nu_i$  стремятся к некоторым значениям величины  $w_i$ , которую определим как статистическую вероятность состояния системы для случайного процесса  $X$ .

Введем следующие аксиомы.

1. Статистическая вероятность состояния системы  $w$  образует в пространстве  $\Omega_n$  скалярное поле  $w = W(M)$ .

2. Скалярное поле статистической вероятности  $w = W(M)$  является

непрерывным, имеет непрерывные частные производные по всем переменным  $z_k$  в области  $\Omega_n$  и связано со скалярным полем абсолютного индекса системы  $T = T(M)$ .

Задание поля статистической вероятности  $w$  равносильно заданию числовой функции  $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Так как функция  $w$  имеет непрерывные частные производные по всем переменным, то в случае, если эти производные не равны одновременно нулю уравнение  $W(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$ , где  $C = const$ , определяет поверхность уровня. Через каждую точку  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$  пространства состояний  $\Omega_n$  проходит только одна поверхность уровня.

Исходя из существования скалярного поля величины  $w$ , в каждом состоянии  $M$  полный дифференциал функции  $dw$  может быть представлен в виде суммы простых функций:

$$dw = \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial z_k} dz_k = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \varphi_k(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_k, \quad (9.1)$$

где  $c_k$  – некоторая величина,  $\varphi_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$  – семейство функций, зависящих от параметров свойств. Представление в форме (9.1) будем называть разложением функции состояния системы. Обычно величины  $c_k$  называют коэффициентами разложения, а функции  $\varphi_k$  – координатными функциями. Задача разложения функции состояния  $w$  состоит в обосновании метода определения коэффициентов разложения и координатных функций для различных видов систем.

Исходя из сказанного выше, естественно предположить, что в каждой точке  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$  пространства состояний  $\Omega_n$  функция  $w$  будет иметь непрерывную производную по любому произвольному направлению  $l$ . Направление  $l$  определяет развитие во времени некоторого процесса в пространстве  $\Omega_n$ . Таким образом, функция  $w$  в окрестности состояния  $M$  будет иметь бесчисленное множество производных.

Учитывая второй постулат системодинамики, введем в рассмотрение величину  $c_l$ , определяемую на основе опыта, и которую по аналогии с понятием теплоемкости процесса в термодинамике, назовем темпоральностью процесса изменения состояния системы (*темпоральность* /англ. *tempora* – временные особенности/ – временная сущность процесса, порожденная динамикой его особенного движения). В общем случае, величина  $c_l$  будет отражать связь теории с опытными данными и давать представление о реальности процесса  $l$ . Будем считать, что в окрестности любой точки  $M$  при бесконечно малом изменении состояния системы в каком-либо произвольном процессе  $l$  темпоральность  $c_l$  характеризует связь между статистической вероятностью  $w$  и абсолютным индексом  $T$  для случайной функции  $X$ . Определим  $c_l$  как величину равную отношению элементарного приращения функции  $w$  к соответствующему приращению индекса  $T$  в процессе  $l$ :

$$c_l = \frac{dw_l}{dT_l}. \quad (9.2)$$

Исходя из принятых допущений, величина  $c_l$  зависит как от положения точки  $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , так и от направления процесса развития системы в пространстве состояний. Именно поэтому элементарное приращение статистической вероятности  $w$  и абсолютного индекса  $T$  в произвольном процессе изменения состояния системы отмечены индексом  $l$ . Как было сказано выше, в термодинамике величина  $c_l$  называется теплоемкостью и имеет важное значение, т.к. привносит в теорию опытные факты и эмпирические закономерности реальных процессов. Далее индекс  $l$  относим только к величине  $c_l$ , а для остальных переменных с целью упрощения обозначений его будем опускать.

Таким образом, идея построения математического аппарата системодинамики связана с фундаментальным принципом, который определяет связь между статистическими и динамическими закономерностями в процессе изменения и развития систем. В свою очередь, представление в форме (9.1) получим, используя метод разложения статистических вероятностей для случайных функций  $X$  по координатным функциям, зависящим от параметров свойств. Общий логический подход построения математического аппарата непосредственно вытекает из метода термодинамики.

Согласно уравнения (9.2), в окрестности точки  $M$  имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial w}{\partial z_1} = c_1 \frac{\partial T}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial w}{\partial z_2} = c_2 \frac{\partial T}{\partial z_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial w}{\partial z_n} = c_n \frac{\partial T}{\partial z_n}, \quad (9.3)$$

где  $c_l$  – темпоральность процессов, которые протекают соответственно в направлении координатных осей системы координат  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  пространства состояний  $\Omega_n$ .

Определим свойства геометрической вероятности, представленной зависимостями (7.3) – (7.5). Так как плотность распределения  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  для  $n$ -мерной равномерно распределенной случайной величины имеет постоянное значение, то функция геометрической вероятности  $\rho$  (7.3) в многомерном пространстве переменных  $z_k$  будет иметь вид однородной функции степени  $n$ . Аналогичным образом и абсолютный индекс системы  $T$  будет иметь вид однородной функции степени  $n$ , для которой  $\alpha^n \cdot T = T(\alpha \cdot z_1, \alpha \cdot z_2, \dots, \alpha \cdot z_n)$ , где  $\alpha$  – некоторый множитель. Известно, что однородная функция степени  $n$ , имеющая непрерывные частные производные, удовлетворяет формуле Эйлера [99]:

$$n \cdot T = z_1 \cdot T'_{z_1}(z_1, z_2, \dots, z_n) + z_2 \cdot T'_{z_2}(z_1, z_2, \dots, z_n) + \dots + z_n \cdot T'_{z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (9.4)$$

Исходя из этого, абсолютный индекс системы  $T$  в многомерном пространстве переменных  $z_k$  можно представить следующем виде:



$$T = \frac{1}{n} \left( z_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial T}{\partial z_2} + \dots + z_n \frac{\partial T}{\partial z_n} \right). \quad (9.5)$$

Следующее свойство индекса  $T$  для любых  $z_k$  вытекает из зависимости (7.5) в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial z_k} = \frac{T}{z_k}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial w}{\partial z_k} = c_k \frac{T}{z_k}. \quad (9.6)$$

Так как вероятность  $w$  согласно второму постулату системодинамики связана с абсолютным индексом системы  $T$  зависимостями (9.3), то уравнение (9.5) можно представить в виде:

$$\frac{z_1}{n \cdot c_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_1} + \frac{z_2}{n \cdot c_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_2} + \dots + \frac{z_n}{n \cdot c_n} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_n} = T. \quad (9.7)$$

Так как абсолютный индекс системы явно зависит от параметров свойств, то уравнения (9.7) и (8.6) одинаковы, однако вывод уравнения (9.7) отличается от вывода уравнения (8.6) большей логической строгостью. Уравнение (9.7) является линейным неоднородным уравнением в частных производных первого порядка. Из полученных результатов следует, что для эволюционно развивающихся систем в соответствии с исходными допущениями функция статистической вероятности  $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$  в пространстве  $\Omega_n$  должна удовлетворять уравнению (9.7).

Для получения решения (9.7) воспользуемся методом характеристик. Согласно [54] характеристики уравнения определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$n \cdot c_1 \frac{dz_1}{z_1} = n \cdot c_2 \frac{dz_2}{z_2} = \dots = n \cdot c_n \frac{dz_n}{z_n} = \frac{dw}{T} = ds, \quad (9.8)$$

где  $s$  – некоторый вещественный параметр. Если определить параметр  $s$  как длину дуги, изменяющуюся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (9.8) примут вид:

$$n \cdot c_1 \frac{dz_1}{ds} = z_1; \quad n \cdot c_2 \frac{dz_2}{ds} = z_2; \quad \dots; \quad n \cdot c_n \frac{dz_n}{ds} = z_n; \quad \frac{dw}{ds} = T. \quad (9.9)$$

Известно, что интегральное решение уравнения (9.7) можно покрыть семейством характеристик, причем любая характеристическая кривая, определяемая уравнениями (9.8) и имеющая общую точку с многомерной интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности.

Из системы (9.8) для любого произвольного процесса  $l$  при постоянных коэффициентах темпоральности и условии, что  $dw = c_l dT$ , имеем следующие  $n$  первых независимых интегралов:

$$\frac{z_1^{c_1}}{z_n^{c_n}} = a_1; \quad \frac{z_2^{c_2}}{z_n^{c_n}} = a_2; \quad \dots; \quad \frac{z_{n-1}^{c_{n-1}}}{z_n^{c_n}} = a_{n-1}; \quad T = a_n \cdot z_n^{c_l}. \quad (9.10)$$

Общее интегральное решение исходного уравнения (9.7) определяется из следующего уравнения:

$$\Phi \left( \frac{c_1}{z_1^{c_n}}, \frac{c_2}{z_2^{c_n}}, \dots, \frac{c_{n-1}}{z_{n-1}^{c_n}}, T \cdot z_n^{-\frac{n \cdot c_n}{c_l}} \right) = 0, \text{ откуда}$$

$$w + C_1 = c_l \cdot z_n^{\frac{n \cdot c_n}{c_l}} \cdot \Theta \left( \frac{c_1}{z_1^{c_n}}, \frac{c_2}{z_2^{c_n}}, \dots, \frac{c_{n-1}}{z_{n-1}^{c_n}} \right), \quad (9.11)$$

где  $\Theta$  – произвольная дифференцируемая функция,  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Таким образом, общим решением является интеграл квазилинейного уравнения (9.7), зависящий от произвольной функции вида (9.11).

В случае, если рассматривается определенный процесс изменения состояния  $l$ , который для параметров свойств в окрестности точки  $M$  может быть представлен в параметрическом виде относительно абсолютного времени:

$$z_1 = z_1(\tau), \quad z_2 = z_2(\tau), \quad \dots, \quad z_n = z_n(\tau), \quad (9.12)$$

то функция  $\Theta$  уже не будет произвольной [54, 104], а определится путем поиска решения системы (9.7), удовлетворяющего при  $s = 0$  или  $s = s_0$  начальным условиям (9.12).

Теперь получим соотношений для основных величин. Из зависимостей для характеристик системы (9.8) сразу находим:

$$ds = c_1 \frac{dz_1}{z_1} + c_2 \frac{dz_2}{z_2} + \dots + c_n \frac{dz_n}{z_n}. \quad (9.13)$$

Определим данную величину как *энтропию*, исходя из аналогий с термодинамикой. Энтропия является характеристической функцией пространства состояний системы. Как следует из уравнений (9.8), в параметрическом представлении энтропия является длиной дуги векторной линии некоторого поля направлений, порождаемого скалярным полем статистической вероятности  $w$ .

На содержательном уровне энтропию можно определить как *меру качественных изменений*. При этом любое множество качественно одинаковых состояний системы ( $dw = 0$ ), которое оценивается по характерному качественному признаку, однозначно будет определяться условием  $ds = 0$ , ( $s = const$ ).

Таким образом, нами введено понятие энтропии как векторной характеристики, связанной со скалярным полем статистической вероятности  $w$ , которое определяет качественные изменения в системе.

Из уравнений (9.8) вытекает важное соотношение, которое связывает между собой вероятность  $w$  с энтропией  $s$  и абсолютным индексом системы  $T$ :

$$ds = \frac{dw}{T}. \quad (9.14)$$

Из данного уравнения следует, что для любого процесса в окрестности некоторого произвольного состояния  $M$  производная функции  $w$  по энтропии  $s$  пропорциональна геометрической вероятности состояния системы в данной точке  $M$  ( $dw/ds = T = a \cdot \rho$ ).

Зависимость (9.14) можно получить непосредственно из разложения дифференциала  $dw$  для произвольного процесса  $l$  и применения свойств геометрической вероятности:

$$dw = \left( \frac{\partial w_{z_1}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial z_1} dz_1 + \left( \frac{\partial w_{z_2}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial z_2} dz_2 + \dots + \left( \frac{\partial w_{z_n}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial z_n} dz_n = T \sum_{k=1}^n c_k \frac{dz_k}{z_k}.$$

Учитывая свойство (9.6) и зависимости (9.2) и (9.13), сразу получаем уравнение (9.14).

Существование энтропии является основным фундаментальным принципом системодинамики, который определяет связь между статистическими и динамическими закономерностями, свойственными состояниям системы в окрестности произвольно выбранного состояния  $M$ .

Из второго постулата системодинамики и системы уравнений (9.8) кроме зависимости (9.14) вытекает еще несколько важных соотношений:

$$ds = \frac{dw}{T} = c_l \frac{dT}{T} = c_l \frac{dw}{w + C_1}. \quad (9.15)$$

Из зависимости  $w + C_1 = c_l T$  найдем постоянную  $C_1$ . Пусть в точке  $M$ , где абсолютный индекс равен  $T = T_m$ , статистическая вероятность по опытным данным равна  $w = w_m$ , тогда, находя постоянную  $C_1 = c_l T_m - w_m$ , для любого возможного процесса  $l$  в окрестности точки  $M$  получим:

$$w - w_m = c_l \cdot (T - T_m). \quad (9.16)$$

Если для упрощения ввести обозначение  $Q = c_l \cdot T = w + C_1$ , то из (9.15) получаем известное в термодинамике соотношение:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dT}{T}. \quad (9.17)$$

Таким образом, приходим к достаточно неожиданному выводу, что принятое в термодинамике понятие количества теплоты тесным образом связано со статистической вероятностью некоторых характерных событий, которые свойственны термическим взаимодействиям. Это подтверждает правомерность утверждения П. Шамбадаля о связи измерений времени и температуры, так как проводя температурные измерения мы тем самым определяем интенсивность потоков множества событий в физических системах.

Как уже указывалось ранее, при смене внешних условий не все процессы изменения состояния для конкретной системы могут быть осуществлены. В окрестности любого состояния при развитии процессов по направлениям  $l$  приращения  $dw$  будут различны. Наибольшая

вероятность свойственна наиболее распространенным и чаще всего наблюдаемым процессам, которые понимаются как естественные процессы. Все естественные процессы в природе и обществе протекают в направлении наиболее вероятных изменений, поэтому вероятности событий, связанные с качественными признаками, будут возрастать. В связи с тем, что вероятность события и абсолютный индекс системы – величины положительные, то согласно (9.14) в любом наиболее вероятном природном процессе ( $dw > 0$ ) энтропия будет возрастать  $ds > 0$ . Здесь уже видна связь зависимости (9.14) со вторым законом термодинамики, который в трактовке Больцмана формулируется в виде: природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным.

Второй постулат системодинамики позволяет установить функциональную связь между статистической вероятностью  $w$  и энтропией системы  $s$ . Если для некоторого естественного процесса установлен опытный факт существования зависимости между статистическими и геометрическими вероятностями случайных величин (например, рис. 6.1 – 6.15), то возможно описание этой вероятностной связи зависимостью вида:  $T = \mathcal{G}(w)$ . В этом случае из уравнения (9.14) получим:

$$s = \int_1^w \frac{dw}{\mathcal{G}(w)}. \quad (9.18)$$

При интегрировании было принято, что началу отсчета энтропии (длине дуги векторной линии) соответствует граничная точка области  $\Omega_n$ ,  $M_1(z_{1, \max}, z_{2, \max}, \dots, z_{n, \max})$ , для которой энтропия  $s = 0$ , а вероятности  $w = 1$  и  $\rho = 1$ .

Предположим, что функция  $T = \mathcal{G}(w)$  для некоторого выделенного множества состояний системы может быть представлена в виде линейной зависимости  $T = \alpha_* \cdot w + \beta_*$ , тогда из (9.18) имеем:

$$s = k_{1*} \cdot \ln W = k_{1*} \cdot \ln \frac{w + k_{2*}}{1 + k_{2*}}, \quad (9.19)$$

где даны следующие обозначения  $k_{1*} = \frac{1}{\alpha_*}$ ;  $k_{2*} = \frac{\beta_*}{\alpha_*}$ ;  $W = \frac{w + k_{2*}}{1 + k_{2*}}$ .

Данное уравнение является аналогом известного соотношения Больцмана в термодинамике. Уравнения (9.18) – (9.19) имеют фундаментальное значение, так как указывают на то, что для всех эволюционно развивающихся систем как живой, так и неживой природы, существует тесная связь между статистическими вероятностями и энтропией состояния системы.

Теперь как следствие первого и второго постулатов системодинамики можно сформулировать принцип существования энтропии в следующем виде: *каждая эволюционно развивающаяся система обладает характеристической функцией пространства состояний, называемой энтропией ( $s$ ), которая является мерой*

качественных изменений и которая имеет постоянное значение для любого множества качественно однородных состояний системы.

Для качественно однородных состояний системы изменение статистической вероятности равно нулю ( $dw=0$ ), при этом качество оценивается по некоторым характерным событиям, отражающим эволюционные изменения системы.

В данной формулировке заключается общесистемный смысл понятия энтропии и важный научный факт, при котором энтропия является характеристикой математической модели процесса изменения и развития системы в пространстве состояний при изменении ее качества.

## 9.2 Закон сохранения энергии

Покажем, что на основе полученных результатов, как следствие, может быть сформулирован общесистемный закон сохранения «энергии». Представим зависимость (9.14) в виде:

$$dw = T \cdot ds = c_n dT + (T \cdot ds - c_n dT).$$

По аналогии с термодинамикой определим величину  $du = c_n dT$  как изменение энергии состояния системы. Используя соотношения (9.3) и (9.13) и представляя полный дифференциал  $dT$  в виде суммы частных дифференциалов относительно параметров свойств, приведенное соотношение преобразуем к виду:

$$T \cdot ds = du + r \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \cdot z_1 \cdot \dots \cdot z_{k-1} \cdot z_{k+1} \cdot \dots \cdot z_n dz_k, \quad (9.20)$$

где постоянные равны:  $\alpha_k = \frac{c_k - c_n}{c_1 - c_n}$ ;  $\alpha_1 = 1$ ;  $r = \frac{(c_1 - c_n) \cdot T_0}{z_{1,\max} \cdot z_{2,\max} \cdot \dots \cdot z_{n,\max}}$ .

Так как значение абсолютного индекса  $T_0$  в точке  $M_0$  принимается условно, то определим его таким образом, чтобы коэффициент  $r$  был равен единице, тогда:

$$T_0 = \frac{z_{1,\max} \cdot z_{2,\max} \cdot \dots \cdot z_{n,\max}}{c_1 - c_n}, \quad (9.21)$$

откуда получаем общесистемный закон сохранения энергии для  $n$  переменных в виде:

$$T \cdot ds = du + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \cdot z_1 \cdot \dots \cdot z_{k-1} \cdot z_{k+1} \cdot \dots \cdot z_n dz_k. \quad (9.22)$$

Теперь покажем, что уравнение сохранения энергии в термодинамике является частным случаем уравнения (9.22), если последнее представлено относительно двух параметров свойств. Пусть  $z_1 = v$ ,  $z_2 = p$ ,  $c_p = c_1$  и  $c_v = c_2$ , тогда имеем:

$$T \cdot ds = du + p \cdot dv, \quad (9.23)$$

где  $du = c_v dT$ ,  $ds = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}$ ,  $T = \frac{p \cdot v}{R}$  и  $p_{\max} = p_0$ ,  $v_{\max} = v_0$ . При условии, что коэффициент  $r=1$ , определим значение абсолютной температуры в точке  $T_0$ :

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{z_{1,\max} \cdot z_{2,\max}}{c_1 - c_2} = \frac{p_0 \cdot v_0}{c_p - c_v} = 273,1494 \frac{R}{c_p - c_v} = \\ &= 273,1494 \frac{R}{c_p - c_v} = 273,1494 \text{ K}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Таким образом, в качестве опорной точки при преобразовании координат в термодинамике выбирается эмпирически определяемое состояние идеального газа, при котором отношение  $\frac{R}{c_p - c_v} = 1$ , и данное состояние соответствует температуре 273,15 по шкале Кельвина.

Энергия  $du$  должна являться полным дифференциалом, так как  $dT$  по своему определению есть полный дифференциал. Можно показать, что при справедливости соотношения  $c_p - c_v = R$ , которое представляет собой известное в термодинамике уравнение Майера для идеального газа, величина  $du$  будет представлять собой полный дифференциал. Выразим  $du$  из уравнения (9.23) в виде:

$$du = \frac{c_p - R}{R} \cdot p \cdot dv + \frac{c_v}{R} \cdot v \cdot dp.$$

Применяя к величине  $du$  признак Эйлера, можно показать, что  $du$  является полным дифференциалом при условии  $c_p - c_v = R$ , в результате чего

$$du = \frac{c_v}{R} d(p \cdot v) = c_v \cdot dT.$$

Из полученных данных видно, что энергия в термодинамике является математической функцией, которая связана с приращением геометрической вероятности в произвольном процессе изменения состояния системы.

В физике понятие энергии является крайне важным. Это понятие сформировалось благодаря историческим опытам Джоуля, когда была установлена эквивалентность тепла и работы. Данный эмпирический факт эквивалентности стал первым шагом к формулировке закона передачи и сохранения энергии. Общее философское определение энергии имеет вид: энергия – это общая мера различных форм материального движения. Так сложилось, что исторически концепция энергетического взаимодействия была сформулирована для физических систем и физико-химических форм движения материи. Энергетический принцип является незыблемой основой научного мировоззрения в физике. Однако вопрос применимости этой концепции к нефизическим системам сегодня пока остается открытым.

В свое время А. Пуанкаре указывал на тот факт, что выбор функции, которую сегодня называют энергией, является условным и, единственная

возможная формулировка первого закона термодинамики для физико-химических систем формулируется в виде: «...существует нечто остающееся постоянным. Даная формулировка охватывает как закон сохранения энергии, так и закон сохранения массы. Это «нечто» представляет собой математическую функцию, физический смысл которой интуитивно не ясен» [80].

Полученный общесистемный закон сохранения энергии для  $n$  переменных в виде соотношения (9.22) подтверждает справедливость утверждения А. Пуанкаре и указывает на то, что «нечто остающееся постоянным» должно существовать в виде некоторой меры пространства состояний системы. При этом понятие энергии действительно является математической функцией, физический смысл которой связан с изменением вероятности состояния системы.

В науках о жизни и обществе в понятие «энергии» необходимо вкладывать совсем иной смысл, нежели это делается в физике. Лучше говорить об общей мере различных форм материального движения и взаимодействия, которая характерна для каждой эволюционно развивающейся системы. Чтобы не путать данную величину с энергией назовем ее *трансергией* (лат. trans – за, через + гр. energeia – действие, сила), что будет более правильно. Этим мы подчеркиваем отличие данной величины от общепринятого понятия энергии в физике.

Энтропия  $s$  и трансергия системы  $u$  могут быть приняты в качестве обобщенных критериев для комплексной оценки состояния систем различной природы в многомерном пространстве  $\Omega_n$ . Их наиболее важной особенностью является то, что данные величины являются функциями состояния системы при справедливости условия существования скалярного поля величины  $w$ . Изменение данных функций зависит только от начального и конечного состояния системы и не зависит от пути перехода системы между этими состояниями.

### 9.3 Закон взаимосвязи энтропии и времени

В современной науке применение понятия энтропии достаточно распространено [51, 128]. Однако анализ состояния исследований в этой области указывает на то, что природа энтропии до конца пока не ясна, так как нет однозначного мнения по этому вопросу. Различные точки зрения о сути энтропии исходят из того, что она является: некоторой субстанцией, связанной с ходом времени; свойством, характеризующим процессы; характеристикой математической модели процесса; информационным параметром процесса [51]. Причины роста энтропии в изолированных системах также имеют несколько трактовок. Следствием всего этого является то, что различные авторы по-разному определяют смысл энтропии – мера необратимости процессов; мера сложности системного описания объекта; мера неопределенности информации; мера разнообразия; мера хаотичности; мера структурированности системы и т.д.

Расширенное представление об энтропии создает впечатление о ее универсальности в науке. Очень часто понятие энтропии в различных науках вводится априори без должного опытного подтверждения и математического обоснования, что приводит к заблуждениям и ошибочным обобщениям. Так как основой любой теории является опыт, то только опытные данные отражают характер естественных процессов в природе и обществе, которые в своей массе протекают в направлении наиболее вероятных изменений. Ранее указывалось, что существующая связь между изменениями статистической вероятности и энтропии вида (9.14) и определяет рост энтропии при протекании естественных процессов. Все это говорит о том, что второй закон термодинамики является отражением некоторого общего закона природы, который по аналогии с высказыванием А. Пуанкаре об законе сохранения энергии может быть сформулирован в следующем виде: в природе существует «нечто» возрастающее (неубывающее) при осуществлении процессов. Это «нечто» является статистическими вероятностями событий, которые отражают характер изменения процессов и явлений во времени.

Сегодня многие авторы [51, 77] отмечают возможность взаимосвязи энтропии и времени, которое в своей сущности необратимо и тоже неумолимо возрастает в направлении от прошлого к будущему, причем течение времени непосредственно отражается в наблюдаемых событиях.

Полученные ранее результаты позволяют установить эту связь в виде фундаментальной закономерности между энтропией, как мерой качественных изменений, и временем, как общей мерой всех наблюдаемых изменений в состояниях систем. Будем исходить из представления системного времени (8.17) и зависимости (9.14) для энтропии, тогда:

$$dw = P \cdot d\omega = T \cdot ds. \quad (9.25)$$

Данная зависимость указывает на явную связь между системным временем и энтропией состояния системы. Раскроем ее, используя метод интегрирующего множителя [58].

При математическом описании любого реального явления или процесса неизбежно приходится вводить допущения, выделяя и учитывая лишь наиболее существенные из всех влияющих факторов и существующих свойств. При этом всегда встает вопрос о достоверности полученной модели. В конечном счете, этот вопрос решается практикой – установлением соответствия полученных выводов и опытных данных. Таким образом, любая функция, описывающая явление или процесс, строится и проверяется по опытным данным, причем исходные математические модели чаще всего формулируются в дифференциальной форме, так как любое изменение в своей сути связано с приращениями наблюдаемых величин.

В общем случае плотность распределения вероятности для некоторой случайной величины зависит от времени и параметра этой величины. При исходных предположениях данной работы статистическая вероятность  $w$  для некоторой реакции системы на воздействие или



параметра свойства однозначно зависит от абсолютного времени и значения этой величины. Поэтому представим дифференциал  $w$  в виде:

$$dw = M(\tau, y) \cdot d\tau + N(\tau, y) \cdot dy, \quad (9.26)$$

где  $y$  в общем случае – это параметр реакции системы на воздействие  $x$  или параметр свойства  $z_k$ .

Будем считать, что подобная зависимость может быть построена по опытным данным, полученным в процессе длительного наблюдения за некоторой системой.

Из соотношений (8.17) и (9.14) следует, что функции  $1/P$  и  $1/T$  для вероятности состояния системы являются интегрирующими множителями, для которых умножение величины  $dw$  на эти интегрирующие множители преобразует уравнение (9.26) в уравнения в полных дифференциалах:

$$d\omega = \frac{dw}{P}; \quad ds = \frac{dw}{T}. \quad (9.27)$$

Из теории известно [58], что, если  $1/T$  – интегрирующий множитель уравнения (9.26), а  $s(\tau, y)$  – соответствующий ему интеграл уравнения (9.26), то всякий интегрирующий множитель  $\mu$  этого уравнения дается формулой:

$$\mu = \frac{1}{T} \varphi(s), \quad (9.28)$$

где  $\varphi$  – произвольная дифференцируемая функция. Опуская доказательство о существовании зависимости между интегралами уравнения (9.26), которое имеется в литературе [например, 58, стр. 38], запишем общую зависимость между величинами  $\omega$  и  $s$ :

$$\omega = \phi(s), \quad (9.29)$$

где  $\phi(s)$  – непрерывно дифференцируемая функция, причем  $\phi(s) = \phi'(s)$ .

Из уравнений (9.27) – (9.29) получаем, что произвольную функцию  $\varphi(s)$  можно представить как отношение

$$\varphi(s) = \frac{T}{P} = \frac{d\omega}{ds}. \quad (9.30)$$

Ранее указывалось, что вид функции, определяющей абсолютную плотность распределения вероятности  $P(\omega)$ , может быть найден из эмпирического распределения вероятностей событий, которые характерны для изучаемого качественного признака системы. В самом общем случае, так как функция  $\varphi(s)$  выбирается произвольно, то ее можно подобрать так, чтобы абсолютная плотность статистической вероятности  $P(\omega)$  соответствовала наиболее распространенному и изученному виду распределения, например, нормальному. Поэтому, учитывая, что системное время объекта, определенное по последовательности однородных характерных событий, представляет собой инверсную функцию статистической вероятности, определим функцию  $\varphi(s)$  в виде:

$$\varphi(s) = \frac{d\omega}{ds} = T \frac{d\omega}{d\omega} = T \cdot \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\omega^2(s)}{2}\right). \quad (9.31)$$

Из данной зависимости получаем, что  $P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2(s)}{2}\right)$ . Тем

самым удовлетворяется уравнение (8.17), которое определяет абсолютную плотность статистической вероятности состояния системы по изучаемому компоненту, свойственному  $j$ -тому качественному признаку. При определении функции  $P(\omega)$  принято, что распределение статистических данных подчиняется нормальному закону распределения. Естественно, что возможно использование также и других видов статистических распределений, если необходимость этого будет определена опытными данными.

Если ввести обозначение  $\varphi_* = T/P$ , то в элементарной окрестности любого состояния системы зависимость для системного времени относительно энтропии можно представить в виде:

$$d\omega = \varphi_* \cdot ds = \gamma_1 \frac{dz_1}{z_1} + \gamma_2 \frac{dz_2}{z_2} + \dots + \gamma_n \frac{dz_n}{z_n}, \quad (9.32)$$

где постоянные  $\gamma_k$  равны  $\gamma_k = \varphi_* \cdot c_k$ . При постоянном значении коэффициента  $\varphi_*$  в окрестности состояния  $M$  системное время будет представлено в виде линейной функции относительно энтропии или в виде логарифмической функции относительно параметров свойств:

$$\omega - \omega_0 = \varphi_*(s - s_0) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \ln(z_1) + \gamma_2 \cdot \ln(z_2) + \dots + \gamma_n \cdot \ln(z_n). \quad (9.33)$$

Таким образом, в любом элементарном процессе изменения состояния эволюционно развивающейся системы приращение системного времени прямо пропорционально изменению энтропии состояния этой системы. Для протяженных процессов изменения состояния справедлива зависимость (9.29).

Все сказанное выше позволяет теоретически обосновать принятую методику обработки данных, которая используется в науках, связанных с оценкой опасностей и рисков. Данная методика основана на использовании методов пробит-анализа. В этом случае статистические вероятности (риски) преобразуют в пробиты  $\text{Pr}\{-\infty, +\infty\}$  путем применения инверсного преобразования для нормального распределения. После этого функцию пробита подбирают по опытными данным путем нахождения уравнения регрессии относительно степенных функций или логарифмов параметров свойств. Если при такой обработке опытных данных пробит рассматривать как системное время, то зависимости (9.25) – (9.33) теоретически обосновывают существующие эмпирические методы оценки рисков, которые положены в основу анализа данных в токсикологии, радиологии, промышленной безопасности, оценке опасности стихийных явлений, страховании жизни и т.д. Апробация данных методов велась в течении

десятилетий и сегодня они являются важной составляющей общей методологии изучения опасностей и рисков в природе и обществе.

Определим теперь связь энтропии состояния системы с абсолютным временем. Пусть функция  $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$  имеет следующие непрерывные частные производные  $w'_{z_1}, w'_{z_2}, \dots, w'_{z_n}$ , причем параметры свойств  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , в свою очередь, являются функциями абсолютного времени  $\tau$  в некотором процессе изменения состояния системы:

$$z_1 = z_1(\tau), z_2 = z_2(\tau), \dots, z_n = z_n(\tau), \quad (9.34)$$

также имеющими непрерывные частные производные по абсолютному времени  $\tau$ . Тогда не только существуют производные от сложной функции  $w$  по  $\tau$ , но эти производные также непрерывны по  $\tau$ . Непрерывность производных обусловлена реальностью совершаемого процесса, который может быть наблюдаем в опыте, что является необходимым условием первого постулата системодинамики.

Известно, что производная вероятности  $w$  по времени будет равна:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= \left( \frac{\partial w_{z_1}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial z_1} \frac{dz_1}{d\tau} + \left( \frac{\partial w_{z_2}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial z_2} \frac{dz_2}{d\tau} + \dots \\ &\dots + \left( \frac{\partial w_{z_n}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial z_n} \frac{dz_n}{d\tau} = T \sum_{k=1}^n \left( \frac{c_k}{z_k} \cdot \frac{dz_k}{d\tau} \right). \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (9.14) и принимая для скоростей изменения параметров свойств обозначение  $v_k = dz_k/d\tau$ , получим зависимость энтропии от абсолютного времени  $\tau$  в виде:

$$\frac{ds}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{c_k}{z_k} \cdot v_k \right) \quad \text{или} \quad s - s_0 = \int_0^\tau \sum_{k=1}^n \left( \frac{c_k}{z_k(\tau)} \cdot v_k(\tau) \right) d\tau. \quad (9.35)$$

При постоянных величинах  $c_k$  из уравнения (9.35) получаем простую зависимость взаимосвязи энтропии и абсолютного времени:

$$s(\tau) = \sum_{k=1}^n \left( c_k \cdot \ln \left( \frac{z_k(\tau)}{z_{k0}} \right) \right). \quad (9.36)$$

Здесь принято, что  $z_1(0) = z_{10}$ ;  $z_2(0) = z_{20}$ ;  $\dots$ ;  $z_n(0) = z_{n0}$ , а также  $s_0 = 0$  при  $\tau = 0$ .

В случае, если рассматривается простая система, где формируются равновозможные события, то  $c_k = 1$  и  $s(\tau) = \ln \rho(\tau)$ . Здесь  $\rho(\tau)$  – геометрическая вероятность, причем  $s_0 = 0$  при  $z_k = z_{k,\max}$ . В простых системах энтропия состояния с течением времени может как увеличиваться, так и уменьшаться, так как на изменения статистической вероятности не накладывается ограничений. Эти ограничения задаются опытными данными через значения величин  $c_k$ .

Подведем итоги данной главы. Системное время и энтропия являются общими интегралами для функции состояния системы, которую можно представить в виде скалярного поля статистической вероятности некоторой

последовательности эволюционных событий, характерных для системы. Исходя из этого, данные величины функционально связаны между собой зависимостью  $\omega = \phi(s)$  и каждая из них имеет свой интегрирующий делитель. Полный дифференциал системного времени представим в виде:  $d\omega = \frac{dw}{P}$ , а полный дифференциал энтропии соответственно в виде:  $ds = \frac{dw}{T}$ .

Системное время и энтропия функционально связаны с абсолютным временем. Таким образом, системное время и энтропия представляют собой кривые однопараметрического семейства на плоскости  $\tau$  и  $y$  для уравнения (9.26) вида  $\omega(\tau, y) = C$  или  $s(\tau, y) = C$ , где  $C$  – константа.

Особенностью интегрирующего делителя для энтропии является то, что он связан с геометрической вероятностью и равномерным распределением, поэтому энтропия отражает условия формирования последовательностей равновозможных событий изменения свойств или реакций системы в модельной (динамической) среде. В свою очередь, системное время отражает последовательности неравновозможных событий изменения свойств и реакций системы в моделируемой (статистической) среде, так как его интегрирующий делитель связан со статистической вероятностью и нормальным распределением. Таким образом, системное время и энтропия – это собственные характеристики наблюдаемого пространства состояний, связанные с различными вероятностными закономерностями наблюдаемой системы.

Что касается абсолютного времени, то оно представляет собой общий параметр, позволяющий реакции и свойства системы представить в виде временных последовательностей относительно регулярных событий некоторой внешней эталонной системы.

Так как интегрирующих делителей может быть бесконечно много, то можно построить также бесконечно много различных собственных характеристик наблюдаемого пространства состояний системы, которые будут связаны между собой, так как являются общими интегралами уравнения (9.26). Это позволяет учитывать различные вероятностные особенности и закономерности наблюдаемой системы и ее элементов. Для каждого свойства и реакции системы по опытным данным может быть найден свой вид вероятностного распределения (не обязательно нормального, как при построении интегрирующего делителя  $P$ ) и произвольная функция  $\phi(s)$  может быть связана с данным эмпирическим распределением.

Таким образом, основной вывод, который можно сделать из приведенного выше материала: системное время, энтропия и абсолютное время взаимосвязаны между собой и отражают вероятностный характер изменения процессов и явлений в природе и обществе.

## Глава десятая

# ВЕКТОРНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМОДИНАМИКИ

### 10.1 Вектор эволюции системы

После того как предложен математический аппарат и сформулированы законы системодинамики мы имеем возможность подойти к изучению процессов эволюции систем. С этой целью вернемся к рассмотрению уравнения (9.7), которое определяет закономерности изменения во времени развития изучаемых систем и накладывает на их поведение определенные ограничения. Изменение состояния системы происходит в пространстве  $n$  свойств и некоторого качества, которое оценивается по характерному событию, отражающему эволюцию системы и имеющему вероятностную оценку  $w$ . Общее решение уравнения (9.7) геометрически представляет собой в пространстве  $\Omega_{n+1}\{z_1, z_2, \dots, z_n, w\}$  бесконечное семейство интегральных поверхностей, которые образованы характеристиками (9.8) данного уравнения. Каждой интегральной поверхности в пространстве состояний соответствует некоторый возможный процесс изменения состояния  $l$ , который, в свою очередь, характеризуется изменением во времени параметров свойств системы (9.34). Через каждую точку кривой процесса  $l$  проходит только одна характеристическая кривая, которая целиком лежит на интегральной поверхности  $w_l = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Таким образом, согласно понятий векторного анализа, характеристики уравнения (9.7), которые являются линиями энтропии, представляют собой векторные линии векторного поля, а интегральные поверхности – векторные поверхности этого поля. Множество реализуемых процессов формирует в пространстве  $\Omega_{n+1}$  некоторую область наблюдаемых состояний системы.

В случае, если в пространстве состояний  $\Omega_{n+1}$  формируются равновозможные события, то статистическая вероятность  $w$  тождественно равна геометрической вероятности  $\rho$ , причем  $c_k = 1$ , и поле вероятности связано с параметрами свойств системы функциональной связью, т.е. существуют явные динамические закономерности. В этом случае естественно предположить, что реализуются любые возможные процессы. Если формируются неравновозможные события, то наблюдаются статистические закономерности и на реализацию процессов накладываются ограничения, определяемые классом системы.

Исходя из всего сказанного выше, можно утверждать, что при справедливости принятых исходных допущений в пространстве состояний  $\Omega_{n+1}$  в каждой точке  $M(z_1, z_2, \dots, z_n, w)$  существует некоторое поле направлений, порожденное скалярным полем статистической вероятности – векторное поле  $\Gamma(z_1, z_2, \dots, z_n, w)$ , которое имеет вид [104]:

$$\Gamma(z_1, z_2, \dots, z_n, w) = \frac{z_1}{n \cdot c_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{z_2}{n \cdot c_2} \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{z_n}{n \cdot c_n} \cdot \mathbf{e}_n + T \cdot \mathbf{e}_{n+1}, \quad (10.1)$$

где  $\mathbf{e}_k$  – единичные векторы, направленные соответственно по осям координат  $\{z_1, z_2, \dots, z_n, w\}$  пространства состояний  $\Omega_{n+1}$ .

Определим вектор  $\Gamma$  как *вектор эволюции* системы по  $j$ -тому качественному признаку, которому соответствует некоторое  $j$ -тое событие и которое отражает ход эволюции системы. Вектор эволюции определяет наиболее вероятные направления изменения и развития системы в пространстве ее состояний. Направление поля  $\Gamma$  в каждой точке  $M$  пространства состояний  $\Omega_{n+1}$  совпадает с направлением касательной к векторной линии энтропии, проходящей через точку  $M$ . Поэтому геометрическое представление о движении системы в пространстве состояний будем связывать с векторными линиями энтропии.

Исходя из понятий теории поля, совокупность всех линий энтропии в потоке вектора  $\Gamma$  определим как спектр линий энтропии. Спектр линий энтропии дает представление об изменении качества системы, являясь как бы отображением мгновенного состояния эволюционных изменений. Если провести все векторные линии, проходящие через точки некоторого куска поверхности  $S$ , то их совокупность даст векторную трубку энтропии. Подобное представление вектора эволюции в пространстве состояний  $\Omega_{n+1}$  при анализе процессов изменения и развития системы позволяет применить известные уравнения теории поля.

Выделяя в векторном поле произвольный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  с направлением нормали  $\mathbf{n}$  к этой поверхности, получим согласно формулы Остроградского, что объемный интеграл от расходимости

поля ( $div \Gamma$ ) равен потоку поля  $\left( \iint_{(S)} \Gamma_n dS \right)$  через поверхность этого объема:

$$\iiint_{(V)} div \Gamma dV = \iint_{(S)} \Gamma_n dS. \quad (10.2)$$

В свою очередь, выделяя в векторном поле некоторый замкнутый контур  $l$ , который ограничивает поверхность  $S$ , получим согласно формулы

Стокса, что циркуляция вектора  $\Gamma$  вдоль этого контура  $\left( \int_{(l)} \Gamma_\varepsilon d\varepsilon \right)$  равна

потоку вихря  $\left( \iint_{(S)} rot_n \Gamma dS \right)$  через поверхность  $S$ :

$$\int_{(l)} \Gamma_\varepsilon d\varepsilon = \iint_{(S)} rot_n \Gamma dS. \quad (10.3)$$

Здесь  $d\varepsilon$  – направленный элемент дуги кривой  $l$ , рассматриваемый как малый вектор.

Теперь рассмотрим задачу о нахождении семейства поверхностей, ортогональных к линиям энтропии  $s$  вектора эволюции  $\Gamma$ . Известно, что уравнение таких поверхностей определяется из скалярного произведения  $(\Gamma \cdot \mathbf{t}) = 0$ , где  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1 \cdot dz_1 + \mathbf{e}_2 \cdot dz_2 + \dots + \mathbf{e}_{n+1} \cdot dw$  – вектор, лежащий в касательной плоскости к исходной поверхности. Это уравнение в развернутом виде приводит к соотношению:

$$\frac{z_1}{c_1} dz_1 + \frac{z_2}{c_2} dz_2 + \dots + \frac{z_n}{c_n} dz_n + n \cdot T \cdot dw = 0, \quad (10.4)$$

которое является уравнением Пфаффа.

Легко показать, что уравнение (10.4) приводится к полному дифференциалу, если в системе формируются равновозможные события, для которых  $c_k = const$ ,  $dw = d\rho$  и  $dT = \alpha_* \cdot dw$ , где  $\alpha_*$  – постоянная величина. Таким образом, в случае формирования равновозможных событий для  $j$ -того качественного признака поле вектора эволюции является потенциальным полем. Для случая, когда наблюдаются неравновозможные события, потенциальность поля вектора эволюции нарушается, поэтому можно говорить об искривлении поля вектора эволюции.

## 10.2 Мера пространства состояний системы

Сегодня в философии понятие меры определено на вербальном уровне. Согласно определению мера – это философская категория, отражающая единство качественных и количественных характеристик объекта или системы. Очень часто мера трактуется как диапазон или область количественных изменений, которые могут происходить при сохранении данного качества объекта. Исходя только из данных определений, формализовать понятие меры невозможно. Введем понятие меры как функции пространства состояний, выражающей единство качественной и количественной определенности системы, используя для этого основные положения системодинамики и методы векторного анализа.

Подойдем к определению *меры пространства состояний* системы как некоторой  $n$ -мерной поверхности, на которой изменение количественных характеристик системы происходит при сохранении ее качества. В этом случае, так как качество системы не изменяется, изменение вероятности ее состояния, определенное по характерному событию, равно нулю, т.е.  $dw = 0$ , откуда и изменение энтропии состояния тоже равно нулю  $ds = 0$ . В результате этого с учетом (10.4) приходим к простому уравнению Пфаффа в  $n$ -мерном пространстве свойств вида:

$$\frac{z_1}{c_1} dz_1 + \frac{z_2}{c_2} dz_2 + \dots + \frac{z_n}{c_n} dz_n = 0, \quad (10.5)$$

Данному уравнению в пространстве  $\Omega_n \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  соответствует  $n$ -мерная проекция вектора эволюции в виде векторного поля:

$$\Gamma_z(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{z_1}{c_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{z_2}{c_2} \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{z_n}{c_n} \cdot \mathbf{e}_n. \quad (10.6)$$

Пфаффовая форма, стоящая в левой части уравнения Пфаффа (10.5), при постоянных величинах  $c_k$  в окрестности точки  $M$  является полным дифференциалом, поэтому уравнение (10.5) может быть преобразовано следующим образом

$$dU = d\left(\frac{z_1^2}{2 \cdot c_1} + \frac{z_2^2}{2 \cdot c_2} + \dots + \frac{z_n^2}{2 \cdot c_n}\right) = 0; \quad (10.7)$$

$$U(z_1, z_2, \dots, z_n) = -\frac{1}{2} \left( \frac{z_{1,\max}^2 - z_1^2}{c_1} + \frac{z_{2,\max}^2 - z_2^2}{c_2} + \dots + \frac{z_{n,\max}^2 - z_n^2}{c_n} \right). \quad (10.8)$$

Здесь принято, что значение  $U(z_{1,\max}, z_{2,\max}, \dots, z_{n,\max}) = 0$ . Уравнение  $U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$  согласно (10.8) представляет поверхность в  $n$ -мерном пространстве состояний  $\Omega_n$  и, следовательно, решениям уравнения Пфаффа (10.5) соответствует потенциальное семейство поверхностей, ортогональных векторным линиям энтропии  $s$ . Так как векторное поле  $\Gamma_z$  является потенциальным, то имеем следующие зависимости, которые вытекают из соотношений (10.6) и (10.8):

$$\Gamma_z(z_1, z_2, \dots, z_n) = \text{grad}(U), \text{ т.е. } \frac{z_k}{c_k} = \frac{\partial U}{\partial z_k}. \quad (10.9)$$

Таким образом, искомыми поверхностями, которые ортогональны векторным линиям энтропии в пространстве свойств, являются поверхности уровня  $U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$  потенциальной функции  $U$ , которая представляется уравнением (10.8).

Определим величину  $U(z_1, z_2, \dots, z_n)$  как меру качественной и количественной определенности системы. Мера, как и энтропия, также является характеристической функцией пространства состояний системы. Из полученных выше результатов следует, что мера представляет собой потенциальную функцию векторного поля  $\Gamma_z$ , которое зависит только от параметров свойств системы. Причем все качественно однородные (одинаковые) состояния системы, которым свойственны различные параметры свойств, принадлежат одной и той же поверхности уровня  $U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$ . Поэтому любое состояние  $M$ , лежащее на этой поверхности, будет однозначно определяться значением потенциала  $U$  и векторной линией энтропии, которой принадлежит точка  $M$  пространства состояний  $\Omega_n$ . Каждой точке  $M$  поверхности уровня  $U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$  будет соответствовать одно и тоже значение вероятности  $w$ .

Теперь для решения уравнения (10.4) воспользуемся методом, при котором вероятность  $w$  будет выступать параметром [104]. Так как был получен интеграл уравнения (10.5), то представим постоянную  $C$  как функцию параметра  $w$ :



$$U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C(w). \quad (10.10)$$

Подберем величину  $C(w)$  таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение (10.4). Дифференцируя (10.10) получим:

$$\frac{\partial U}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial U}{\partial z_2} dz_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_n} dz_n - C'(w)dw = 0. \quad (10.11)$$

Соответствующие коэффициенты при дифференциалах переменных в уравнениях (10.4) и (10.11) должны быть пропорциональны, поэтому:

$$\frac{n \cdot c_1}{z_1} \frac{\partial U}{\partial z_1} = \frac{n \cdot c_2}{z_2} \frac{\partial U}{\partial z_2} = \dots = \frac{n \cdot c_n}{z_n} \frac{\partial U}{\partial z_n} = -\frac{C'(w)}{T}, \quad (10.12)$$

откуда с учетом (10.9)  $C'(w) = -n \cdot T$ . Так как предполагается существование взаимосвязи между статистическими и геометрическими вероятностями  $T = \mathcal{G}(w)$ , то  $C(w) = -n \cdot \int \mathcal{G}(w)dw$ , а в случае, если возможно представление этой зависимости для некоторого множества состояний системы линейной функцией  $T = \alpha_* \cdot w + \beta_*$ , имеем  $C(w) = -n \cdot \alpha_* \cdot (w^2/2) - n \cdot \beta_* \cdot w + const$ .

Таким образом, получим зависимость, которая связывает статистическую вероятность и меру пространства состояний системы вида:

$$U(z_1, z_2, \dots, z_n) + n \cdot \int \mathcal{G}(w)dw = const. \quad (10.13)$$

Очевидна также следующая связь меры и энтропии состояния системы:

$$dU + n \cdot T^2 \cdot ds = 0. \quad (10.14)$$

Обратим внимание, что в случае, если в уравнении (10.8) все величины  $c_k = 1$ , то поверхности уровня представляют собой многомерные сферы, которые заполняют все пространство состояний системы. При этом величина  $U$  является потенциалом для уравнения (9.5), и для данных потенциальных поверхностей наблюдается тождественное равенство статистической и геометрической вероятностей, имеющих равномерную плотность распределения. В случае, если  $c_k \neq 1$ , то для любого множества состояний системы, для которых  $U = const$ , также будет наблюдаться тождество статистических и геометрических вероятностей, несмотря на разные плотности распределения вероятностей. Однако, потенциальные поверхности уже не будут представлять собой концентрические сферы. Поэтому на содержательном уровне меру можно представить как *характеристику искривления* пространства наблюдаемых состояний системы относительно пространства ее равновозможных состояний.

Таким образом, мы ввели понятие меры как потенциала векторного поля  $\Gamma_z$ , причем мера как характеристика искривления пространства состояний связана с нарушением симметрии равновозможных состояний и выражает единство качественной и количественной определенности системы. Данное утверждение было представлено в виде следствия постулатов системодинамики утверждающего, что для эволюционно развивающихся систем существует функция меры, которая может быть представлена в виде потенциальной функции пространства наблюдаемых состояний системы.

### 10.3 Основное уравнение системодинамики

Теперь получим дифференциальное уравнение системодинамики для меры как функции пространства состояний, выражающей единство качественной и количественной определенности системы. Из уравнений (10.9)

следует, что  $c_k \frac{\partial^2 U}{\partial^2 z_k} = 1$  или  $\frac{\partial^2 U}{\partial^2 z_k} = \frac{1}{c_k}$ , поэтому основное уравнение

системодинамики для меры, как функции пространства состояний, имеет вид:

$$c_1 \frac{\partial^2 U}{\partial^2 z_1} + c_2 \frac{\partial^2 U}{\partial^2 z_2} + \dots + c_n \frac{\partial^2 U}{\partial^2 z_n} = n \quad \text{или} \quad \nabla^2 U = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \quad (10.15)$$

В случае, если величины  $c_k$  зависят от параметров свойств, то уравнение (10.15) можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left( c_1 \frac{\partial U}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_2} \left( c_2 \frac{\partial U}{\partial z_2} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial z_n} \left( c_n \frac{\partial U}{\partial z_n} \right) = n. \quad (10.16)$$

Таким образом, уравнение (10.16) определяет свойства моделирующей среды, которая может быть принята для описания определенной эволюционно развивающейся системы. Данная среда представляется в виде потенциальной функции, исходя из условия постоянного качества системы для любой поверхности уровня данной функции.

### 10.4 Понятие необратимости в системодинамике

Сегодня в философии необратимость рассматривается как переход системы в качественно новое состояние или как характеристика изменения процесса, при котором не возможен возврат в начальное состояние. Необратимость в большей и меньшей степени присуща всем процессам в природе. Исходя из материалов предыдущего раздела будем считать, что в случае, если качество системы не изменяется, то возможно существование обратимых процессов. При этом обратимость можно рассматривать как некоторый частный случай, при котором описание поведения системы может быть осуществлено только на основе динамических закономерностей. Ранее показано, что при условии, когда изменение статистической вероятности равно нулю ( $w = const$ ), в каждой точке  $M$  пространства состояний  $\Omega_n$  существует поле потенциала  $U(z_1, z_2, \dots, z_n) = C$ . Данное поле порождает поле градиента  $\Gamma_z(z_1, z_2, \dots, z_n) = grad(U)$ , векторные линии которого, в свою очередь, определяются уравнениями (9.8) и являются векторными линиями энтропии. Так как векторное поле  $\Gamma_z(z_1, z_2, \dots, z_n)$  потенциально, то циркуляция вектора  $\Gamma_z$  по простому замкнутому контуру всегда будет нулем, а линейный интеграл по многомерной кривой любого процесса  $l$ , соединяющей произвольные два состояния системы, оказывается не зависящим от формы кривой.

В данном случае в системе наблюдаются только количественные изменения и множество объектов или систем данного класса могут находиться в разных состояниях, отвечающих различным параметрам свойств, однако все они будут обладать одним качеством.

Ранее отмечалось, что только при одном условии вектор эволюции  $\Gamma$  в пространстве состояний  $\Omega_{n+1}$  может быть потенциальным вектором – это тогда, когда характерные события качественных признаков обладают свойством равновозможности. В этом случае уравнение (10.4) может быть представлено в виде полного дифференциала, т.е. будет существовать потенциальная функция, как в пространстве свойств  $\Omega_n$ , так и в пространстве состояний  $\Omega_{n+1}$ . Другими словами, в этом случае, пространство состояний системы будет обладать внутренней симметрией и не будет искривлено.

В свою очередь, если в любом процессе статистическая вероятность состояния системы изменяется ( $w \neq const$ ), то поле вектора эволюции  $\Gamma$  будет характеризовать уже как количественные, так и качественные изменения в системе. Можно показать, что при этом условии вектор эволюции уже не будет потенциальным вектором. Естественно, что данное поле не будет и соленоидальным полем, так как эволюции не свойственны простые случаи.

В связи с тем, что вектор эволюции  $\Gamma$  не является потенциальным, то циркуляция вектора  $\Gamma$  по замкнутому контуру будет отлична от нуля, а интеграл по многомерной кривой любого процесса  $l$ , соединяющей произвольные два состояния системы, будет зависеть от формы кривой.

Из теории поля известно, что произвольное векторное поле всегда может быть представлено в виде суммы потенциального и соленоидального векторов. Исходя из этого, вектор эволюции представляется в виде:

$$\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_s, \text{ где} \\ rot \Gamma_p = 0 \text{ и } div \Gamma_s = 0. \quad (10.17)$$

Считая, что  $\Gamma_p = grad \Phi$ , где  $\Phi$  – подлежащая определению скалярная функция, получим для определения функции  $\Phi$  дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка  $\nabla^2 \Phi = div \Gamma$  или в развернутой форме:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z_2} + \dots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z_n} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 w} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} + \mathcal{G}'(w), \quad (10.18)$$

которое всегда имеет решения [99]. После определения потенциальной функции  $\Phi$ , второй вектор суммы (10.17) будет иметь вид:  $\Gamma_s = \Gamma - grad \Phi$ . В частном случае, если предположить, что функция  $\Phi$  представима в виде суммы функций, одна из которых является мерой системы  $U$  и зависит только от параметров свойств, получаем дифференциальное уравнение для меры системы (10.15).

Таким образом, необратимость связана с изменением качества системы, а характерные события качественных признаков отражают процесс эволюции системы. Важным из этого вывода является то, что не

все события отвечают эволюционным изменениям в системе – процессы развития отражают только сложные события, которым не свойственен принцип равновозможности и которые наблюдаются на всем периоде существования системы. Простые равновозможные события, в свою очередь, будут отвечать протекающим в системе изменениям, которые не ведут к изменению качества системы.

Исходя из сказанного выше, приходим к заключению, что необратимость, как следствие статистических закономерностей, несвойственна обратимым процессам, для которых характерны динамические закономерности. Именно здесь лежит решение проблемы, на которую указывал Больцман, что необратимость, присущая второму закону термодинамики, несовместима с обратимыми законами динамики. Второй закон термодинамики отражает статистические закономерности необратимых процессов, связанных с качественными изменениями систем, а законы динамики отражают только количественные изменения в динамических системах – динамические закономерности, свойственные обратимым равновозможным процессам.

## Глава одиннадцатая

### АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СИСТЕМОДИНАМИКИ

Подведем итоги данного раздела. Обобщение полученных результатов позволяет сформулировать выводы в следующем виде. Качественные признаки сложных систем могут иметь количественное измерение, основанное на вероятностной оценке событий или их характеристических случайных величин. Это связано с тем, что изменение качественных признаков при воздействии связано с возникновением характерных событий, отражающих ход эволюции системы, по частоте появления которых и может оцениваться состояние системы в процессе изменения ее во времени. С другой стороны, состояние системы определяется также ее свойствами, которые количественно характеризуются параметрами. Общеизвестная взаимосвязь качественных и количественных изменений позволяет сформулировать первый постулат системодинамики о существовании функции состояния системы, которая представляет собой статистическое распределение вероятности характерных событий и может быть оценена путем измерения количественных показателей, отражающих как качественные признаки, так и свойства системы. Второй постулат практически определяет линейность связи между статистическими и динамическими закономерностями в элементарной окрестности изменения состояния эволюционно развивающейся системы.

Дальнейшая система доказательств приводит к следующим выводам.

Существуют особые взаимосвязанные функции, которые являются общими интегралами (характеристиками) для функции состояния системы и могут быть определены как системное время и энтропия системы. Системное время отражает изменения, связанные с наблюдаемыми случайными событиями реакций и изменений свойств системы при воздействии. Системное время – это суть наблюдаемых статистических закономерностей, связанных со случайными неравновозможными состояниями, а энтропия – суть моделируемых динамических закономерностей, связанных с равновозможными состояниями. Системное время и энтропия, как общие интегралы функции состояния, связаны между собой зависимостью  $\omega = \phi(s)$ , где  $\phi(s)$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция энтропии. Каждому интегралу  $\omega$  и  $s$  соответствует свой интегрирующий делитель для пфаффово́й формы функции состояния системы. Общих интегралов и интегральных делителей для дифференциальной функции состояния системы может быть бесконечно много, однако они все функционально связаны между собой.

Благодаря второму постулату системодинамики нам удалось найти интегрирующий делитель в виде линейной функции геометрической вероятности, что, в свою очередь, позволило установить общий интеграл,

который был определен как энтропия системы. Энтропия является характеристической функцией состояния системы и может, наряду с системным временем, выступать мерой качественных изменений. Зная один интегрирующий делитель и соответствующий интеграл, легко найти любой другой интеграл системы путем установления вида связи  $\omega = \phi(s)$ . Это позволяет количественно определить системное время, подбирая произвольную функцию  $\phi(s)$ . Задавая интегрирующий делитель для пфаффовй формы функции состояния в виде плотности нормального распределения был установлен вид связи между системным временем и энтропией, исходя из зависимости между статистической и геометрической вероятностями.

С энтропией тесно связана важная скалярная величина – мера пространства состояний системы. Любое множество качественно одинаковых состояний системы, которое оценивается по характерному качественному признаку, однозначно определяется двумя функциями состояния – энтропией и мерой. В первом случае имеем векторную линию, а во втором случае – потенциальную поверхность, ортогональную векторной линии, причем множество состояний, лежащих на данной поверхности, является состояниями системы с одним качеством. При этом энтропия в параметрическом представлении является длиной дуги векторной линии. Энтропия, мера пространства состояний и системное время, как особые функции состояния системы, не зависят от характера процесса, а определяются только начальным и конечным состоянием системы. Исходя из этого, уравнение сохранения энергии в термодинамике является одной из форм представления уравнения Пфаффа через координатные линии поверхности уровня и энтропию. Системодинамика по своей сути сводится к системе преобразования координат в вероятностном пространстве. Другими словами, привнесение параметров свойств объекта в виде системы координат извне (внешний способ) заменяется на внутренний способ введения координат, где параметры свойств преобразуются с учетом особенностей объекта в естественные координаты этого объекта.

Сегодня в науке термодинамический принцип возрастания энтропии утверждается как абсолютный закон. Действительно, все естественные процессы в природе при нарушении равновесия протекают в направлении наиболее вероятных изменений, поэтому вероятности событий, связанные с качественными признаками, будут возрастать ( $dw \geq 0$ ). В связи с тем, что вероятности событий величины положительные, а энтропия – это величина вида  $ds = dw/T = dw/(a \cdot \rho)$ , то в любом природном процессе  $ds \geq 0$ . Здесь уже видна связь второго закона термодинамики с базовыми положениями теории вероятности. Из этой зависимости видна также справедливость формулировки второго закона, которая дана в свое время Больцманом: природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным. Закон возрастания энтропии имеет отношение ко всем

процессам в природе и обществе, для которых существуют распределения вероятностей. Кроме того, аналогичные утверждения можно перенести и на системное время. Так как эта величина равна  $d\omega = dw/P$ , а абсолютная плотность вероятности всегда больше нуля, то в любом процессе  $d\omega \geq 0$ . Так как энтропия состояния системы функционально связана с системным временем, а системное время, в свою очередь, – с абсолютным временем, то все три величины непосредственно являются различными способами измерения времени. В первом случае, измерение основано на последовательности равновероятных событий изменения свойств (интегрирующий делитель связан с геометрической вероятностью и равномерным распределением), во втором случае – на последовательности неравновероятных событий изменения свойств и реакций системы (делитель связан со статистической вероятностью и нормальным распределением) и, в последнем случае, измерение основано на последовательностях регулярных событий, характерных для некоторой внешней системы. Между данными величинами существуют принципиальные отличия. Абсолютное время – это общий параметр, позволяющий реакции и свойства системы представить в виде временных последовательностей относительно регулярных событий некоторой внешней системы. Системное время и энтропия – это собственные (релятивистские) характеристики наблюдаемого пространства состояний, связанные со статистическими закономерностями системы; математически – это векторные линии скалярного поля статистической вероятности характерной для системы последовательности эволюционных событий.

Следует отметить, что возможны и другие способы измерения времени (в общем случае – бесконечно много), например, если интегрирующий делитель связать не с нормальным распределением, а найденными эмпирическими распределениями реакций или свойств системы, то можно предложить различные функции системного времени  $\omega$  и способы измерения времени, основанные на последовательностях неравновероятных событий, свойственных наблюдаемым процессам изменения характеристик и параметров системы.

Однако, принцип возрастания энтропии или системного времени не является абсолютным. Из полученных результатов уже видна область применения данного закона. Во-первых, понятия энтропии и системного времени распространяются только на процессы, которые могут наблюдаться в опыте. Исходя из этого, бессмысленно принцип возрастания энтропии распространять на области, где отсутствуют опытные данные (пример – известный вывод о тепловой смерти Вселенной), т.к. этот принцип является следствием эмпирических наблюдений, а не гипотетических предположений. Во-вторых, область применения закона распространяется только на процессы и явления, для которых справедливо свойство статистической устойчивости относительных частот событий и возможно существование функций распределения вероятностей. И, наконец, область применения закона ограничена эволюционными

процессами, которым свойственны более или менее медленные, постепенные количественные и качественные изменения. Для процессов и явлений, где возможны быстрые, скачкообразные и революционные изменения принцип возрастания энтропии и закон сохранения энергии (трансергии) не будут справедливы. Это связано с прекращением эволюционного развития системы и возникновением в таких процессах и явлениях новых качественных признаков и событий, связанных с переходом наблюдаемой системы в принципиально иные состояния, существенными структурными изменениями в системе или нарушениями ее целостности. Таким образом, для систем, у которых нарушается однородность и непрерывность вероятностного пространства состояний, энтропия и системное время не определяемо и для таких систем не может быть найден вектор эволюции.

Из всего материала, приведенного в данном разделе, видно, что метод системодинамики самым тесным образом связан с методом термодинамики. Поэтому именно на стыке системодинамики и термодинамики могут быть получены самые интересные результаты, связанные с развитием теории, обобщением опытных данных и осуществлением процессов и циклов различными системами. На стыке наук почва для новых идей всегда плодотворна. Исходя из этого, последние главы следующего раздела книги посвящены применению методов системодинамики в физике и, в частности, в термодинамике и теории относительности.

Основная же область применения метода системодинамики лежит вне предмета исследования физических наук. Наличие обширных баз данных опытных фактов, которые могут быть представлены в количественном виде, является необходимым условием для применения метода системодинамики. Сегодня по многим научным направлениям идет процесс создания обширных баз данных и хранилищ информации. В области климатологии, экологии, науках о жизни, социально-экономическом развитии, оценке биоразнообразия, в некоторых прикладных сферах экономики и т.д., накоплен значительный объем опытных фактов. При этом развитие вычислительной науки создает условия для поиска скрытых закономерностей в базах данных, для чего применяются методы интеллектуального анализа данных (ИАД). В некоторых случаях системодинамика позволяет осуществить обобщение базовых закономерностей, направленных на построение теорий. Кроме этого метод системодинамики дает возможность научно обосновать поиск фундаментальных закономерностей в массивах информации, и тем самым предложить новые теоретические методы для ИАИ. В этой области можно говорить о моделях данных применительно к некоторым видам баз данных. Хотя применение алгоритмов интеллектуального анализа данных при решении многих сложных задач пока не имеет альтернативы, они имеют ряд существенных недостатков:



- методы ИАД слабо связаны с особенностями прикладной области и не учитывают фундаментальные закономерности изучаемых систем;
- существующие алгоритмы принципиально ориентированы на анализ данных для многих классов сложных систем;
- в основе анализа данных чаще всего лежат логические методы «слепого» поиска закономерностей;
- практически нет алгоритмов анализа, использующих высокие уровни понимания информации, содержащейся в данных.

Метод системодинамики позволяет разрабатывать алгоритмы ИАД, которые могут быть реализованы на высоких уровнях понимания информации, могут использовать идеи взаимосвязи детерминированных и статистических закономерностей и дают возможность предложить способы формирования математических моделей опытных данных.

Возможности системодинамики при построении теорий в прикладных областях показаны в некоторых статьях автора, опубликованных ранее [1-7].

С точки зрения системодинамики актуально построение теории оценки человеческого потенциала и развития стран и регионов мира. Существующие базы данных (<http://www.hdr.undp.org/>; <http://data.worldbank.org>; <http://www.weforum.org>; <http://www.yale.edu/esi>; <http://www.heritage.org>) позволяют построить на основе методов системодинамики теорию прогнозирования развития стран мира. Сейчас основной прогресс в этой области связан с использованием индикаторов и индексов. Изучение различных индикаторов позволяет оценить уровень воздействий и проанализировать их последствия. Данное направление анализа развития социально-экономических систем сегодня очень популярно, и можно сказать даже модно. Различные рейтинги стран и регионов публикуются международными организациями, университетами, страховыми компаниями и банками. На их основе принимаются многие управляющие решения в мировой политике.

Следует признать, что в настоящее время не существует фундаментальной теории, которая характеризовала бы развитие стран и регионов, а тем более мира в целом, а построение такой теории является важной задачей, стоящей перед человечеством. В статьях [1-3, 7], предложены некоторые подходы для построения такой теории, которая бы отвечала исходным целям общей теории систем. Метод системодинамики позволяет предложить теорию комплексных индексов и алгоритмы для оценки развития стран и регионов, учитывающие вероятностные связи в базах данных социально-экономических показателей.

Вторая область перспективных исследований системодинамики связана с построением теории в токсикологии, которая является широкой и многогранной областью человеческих знаний. Сегодня известно около  $10^7$  химических соединений, среди которых широко используются более 60 тысяч веществ. Токсикология изучает специфические свойства различных веществ –

токсические свойства. Процесс изучения осуществляется в основном опытным путем, благодаря чему накоплен громадный опытный материал, который систематизирован в различных базах данных и обширной литературе. При этом можно говорить о достаточности данных, позволяющих получать базовые эмпирические закономерности. Кроме того, токсикология – это одна из тех немногих наук, где в опыте возможна оценка вероятностей событий. Это дает возможности для статистических обобщений и получения феноменологических закономерностей [1, 41].

Третья область исследований может быть связана с передовым направлением современной науки – разработкой глобальных моделей климата. Сегодня трудно найти другую область человеческого знания, где бы были накоплены подобные базы данных, в которых объем только систематизированных данных составляет десятки терабайт. Естественно, что на таком объеме информации идентифицируются климатические модели и отрабатываются современные алгоритмы интеллектуального анализа данных. Это в перспективе приведет к созданию глобальных моделей климата, поэтому применение методов системодинамики для поиска закономерностей в климатических данных актуально.

Следующее приложение метода системодинамики может быть связано с эволюцией видов животного и растительного мира, где за всю историю Земли накоплено очень много опытных фактов. В области изучения распространения биологических видов и оценки биоразнообразия существует обширная информация в виде баз данных и всемирно известных энциклопедий [38, 108]. Здесь сегодня достаточно опытных фактов, чтобы на основе методов системодинамики поэтапно реализовать идею построения теории эволюции биосферы, которая в начале 30-х годов прошлого века была высказана русским ученым В.А. Костициным [53]. Объединение глобальных баз климатических данных [107] с моделями распространения биологических видов на Земле и базами данных биологических характеристик таксонов позволит в будущем подойти к созданию модели биосферы планеты. Также интересно изучить возможности количественного представления некоторых законов экологии на основе обобщения событий биологической жизни и ее эволюции. Вопросы эволюции лежат в основе всей земной жизни, поэтому поиск теоретических методов в данной научной области актуален.

Особо следует сказать о возможностях системодинамики при построении количественных моделей в философии и истории. В данном разделе было показано, как можно «математизировать» закон перехода количественных изменений в качественные и, естественно, что это пока только первый пример реализации подхода системодинамики в гуманитарных областях знаний. Однако, чтобы развить этот подход на практике, необходимо от абстрактного построения теории перейти к анализу опытных данных. В этом плане актуально искать способы систематизации исторических событий для человеческого общества, которые позволили бы подойти к созданию системных моделей в философии и истории.

Практические приложения системодинамики в различных областях знаний и обобщение опытных данных требует существенных затрат времени и большого коллективного труда. Только время покажет, имеют ли высказанные идеи основу для построения различных теорий.

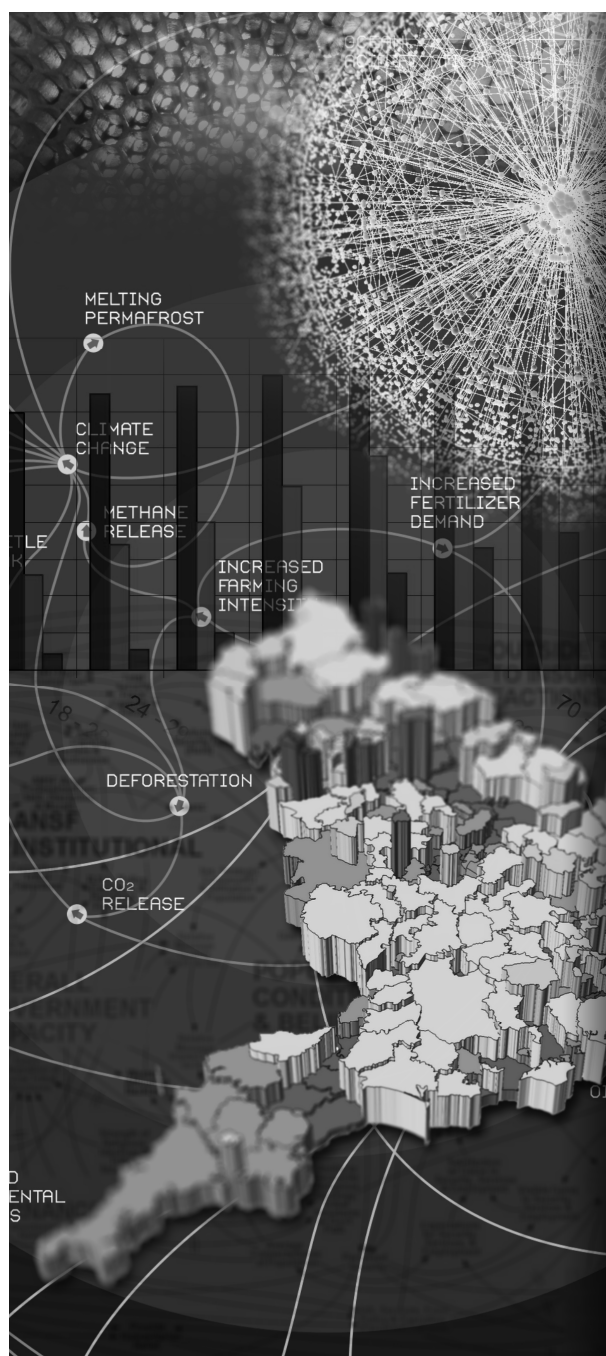
Следующий раздел данной книги посвятим обобщению данных в области социально-экономического развития стран мира и токсикологии, так как в данных науках построение научных теорий вполне возможно, исходя из существования развитой феноменологической базы. Кроме этого уделим внимание отдельным важным теоретическим вопросам, которые возникают на стыке системодинамики и физики. Это вызвано тем, что развитие общей теории систем связано, в первую очередь, с конвергенцией двух научных культур – гуманитарной и естественнонаучной [132], и не исключено, что системодинамика сможет предложить некоторые идеи для решения этой актуальной задачи.

«...Гааль Дорник, пользуясь общими терминами, определил психоисторию как раздел математики, изучающий реакции человеческих сообществ на социальные и экономические воздействия»

Айзек Азимов «Академия»

## ЧАСТЬ III

### Приложения системодинамики



**ГЛАВА 12**  
**Системный анализ**  
**данных в глобалистике**  
**и прогностике**

**ГЛАВА 13**  
**Метод системодинамики**  
**и токсикология**

**ГЛАВА 14**  
**Системодинамика и**  
**проблемы**  
**термодинамики**

**ГЛАВА 15**  
**Время как предмет**  
**моделирования**

## Глава двенадцатая

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ В ГЛОБАЛИСТИКЕ И ПРОГНОСТИКЕ

### 12.1 Метод системодинамики как инструмент анализа данных в глобальных исследованиях

Достойное будущее любой страны обеспечивается не только природными ресурсами, человеческим капиталом и конкурентоспособной экономикой, во многом – это результат многолетней и целенаправленной работы правящей элиты, главная задача которой заключается в стратегическом управлении обществом. Стратегическое мышление политика не формируется в одночасье, оно является уделом избранных и обеспечивается опытом государственного строительства, защитой национальных интересов страны, преемственностью и интеллектуальной работой лучших представителей правящего класса. Однако существует еще один крайне важный фактор – это знание закономерностей развития общества, стран и мира в целом, и такое объективное знание должна дать современная наука.

Сегодня поиск таких закономерностей связывают с глобалистикой, прогностикой и другими междисциплинарными научными направлениями, изучающими развитие общества. Глобалистика выявляет сущность, тенденции и причины процессов глобализации, а также анализирует последствия глобальных процессов для человека и биосферы. Прогностика представляется как наука для предсказания будущего. Практическим результатом данных областей знаний являются научные методы стратегического прогнозирования и планирования.

Пока и глобалистика и прогностика в своей практической деятельности используют преимущественно экспертные подходы в анализе и прогнозировании социально-экономических процессов. Метод системодинамики, в отличие от экспертных методов, основывается на объективном подходе и может быть полезным при установлении закономерностей развития общественных систем. Данный метод дает возможность разрабатывать модели данных статистических баз данных, при этом модели данных следует понимать как статистические и функциональные связи между количественными показателями, которые характеризуют те или иные процессы и явления и устанавливаются на основе вероятностных закономерностей распределения данных.

Идея создания принципов мирового стратегического планирования с позиций общей теории систем, после того как была высказана в 60-х годах XX столетия Э. Янчем, одним из основателей Римского клуба, сейчас актуальна как никогда. Мир входит в эпоху кризисов и нехватки ресурсов, и стратегическое прогнозирование развития любой страны становится жизненно необходимым фактом. События последних 20 лет, и особенно

протесты и революции в постсоветских странах и арабском мире, говорят о том, что мир управляем, и любая небогатая страна, обладающая слабоустойчивой экономикой, нестабильным обществом и непопулярной властью может стать объектом масштабного политического эксперимента. На фоне противоречий между властью и народом, между богатыми и бедными, между властными группами элит, реализация целенаправленного комплекса политических, экономических, информационных и других мероприятий может привести к смене любого правительства в такой стране. Вопрос состоит только в политической и экономической целесообразности подобных действий и результативности эксперимента по фактору «затраты-выгоды». При этом страны, обладающие ресурсами и имеющие геополитическое значение, являются основными кандидатами на применение новых методов преобразования мира.

То, что такие методы разрабатываются и апробируются на практике ведущими разведывательными и аналитическими службами, а также силовыми ведомствами ряда стран мира не вызывает сомнения. Противопоставить этому можно только эффективную систему национальной безопасности, ориентированную на нейтрализацию потенциальных угроз, а также стратегическое видение целенаправленного развития страны. Сегодня во многих странах растет понимание того, что стратегическое планирование и национальная безопасность неразрывно связаны между собой, и эти составляющие государственной политики должны быть направлены на достижение долгосрочных целей, которые определяли бы достойное место страны в бурно меняющемся мире XXI века. Однако реализация такой политики не мыслима без эффективной системы стратегического прогнозирования.

Современные методы анализа и прогнозирования развития объектов и систем в экономике и обществе являются преимущественно экспертными – т.е. по своей природе субъективными. За пятьдесят лет наукой было рождено множество методов и технологий стратегического прогнозирования и планирования: классическая прогностика, включающая набор фактографических и экспертных методов; функционально-стоимостной и причинно-следственный анализ; построение деревьев целей или матриц взаимного влияния; модели системной динамики; имитационно-прогностические компьютерные модели; стратегическая оценка; технологическое предвидение; GAP-анализ и SWOT-анализ; форсайт; комплексная оценка с использованием индикаторов; циклическое прогнозирование и прогнозирование по критериям стратегических рисков и т.д. – все это не полный перечень инструментов исследователя для составления прогнозов, изучения путей и сценариев развития общества [69, 43, 55, 78, 79, 91]. Большинство из перечисленных инструментов относятся к классу экспертных методов или требуют построения гипотетических моделей, которые формулируются экспертами. Однако, несмотря на крайнюю необходимость научного обеспечения стратегического планирования, указанные методы неохотно используются

практиками. Преобладающая ошибочность среднесрочных и долгосрочных прогнозов, отсутствие современных средств поддержки принятия решений, сложность и трудоемкость многих методов, неоднозначность оценок и субъективизм экспертов, а иногда и наукообразие – основные причины для скептического отношения практиков-управленцев к науке «видения будущего». Всегда на полученный экспертный прогноз некоторого ожидаемого сценария развития общественного процесса найдется не менее обоснованный, но абсолютно противоположный сценарий развития. Особенно это наблюдается при оценках политически заангажированными экспертами ситуации в экономике.

С одной стороны, бурное развитие экспертных подходов и эвристических методов указывает на интенсивный поиск человечеством возможностей для ответа на вопросы: Что будет? Как разводить все эти миры и народы? Что делать? Можно ли догнать и перегнать лидеров? Как обеспечить себе возможности, которых нет у других? и т.д. С другой стороны, создается впечатление возникновения ситуации, которую можно охарактеризовать как «топтание на месте», т.е. ситуации, когда еще не виден путь для качественного прорыва в решении проблемы.

Сегодня старая парадигма прогностики себя уже полностью исчерпала. Не случайно за последние 30 лет не появилось ни одной сколько-нибудь значимой работы, вносящей качественно новое знание в основы прогностики и фундаментальные законы развития общественных систем. Можно сказать, что различных модных направлений, позволяющих экспертам показать свою значимость, достаточно много, однако направлений, которые бы затрагивали основы науки прогностики и вывели бы ее на качественно новый уровень, пока нет. Также крайне мало и убедительных примеров практического применения новых прогностических методов.

Кризис науки о прогнозировании будущего виден также и в том, что последнее время появилось много работ, где представления о будущем связываются с телеологическими взглядами и воззрениями, например [6], или астрологическими прогнозами. В последнем случае примеров можно привести большое множество. Если наука длительно не может сформулировать объективные количественные закономерности развития общества, то естественно начинает увеличиваться доля работ футурологического плана, и именно той ее части, где не применяются научные методы.

Теоретические работы прогностики в области политических, экономических и экологических наук, а также в области глобальных исследований (Global studies), часто сводятся к гипотезам и обобщениям, оторванным от реальной статистической базы и систематического изучения фактов. В области теоретических исследований существует несколько проблем, которые не позволяют многочисленным научным обобщениям превратиться в общепринятые теории. Во-первых, не редко изначально формулируются противоречивые и явно непознаваемые

теоретические концепции. «Прогнозировать будущее можно только из будущего» – данная идея, которая претендует на новую парадигму прогнозирования и особую методологию познания [78], вряд ли может быть подтверждена или опровергнута на данном этапе науки и практики. Во-вторых, очень часто теоретические гипотезы высказываются на основе «озарений» и поверхностного обобщения данных, при этом современные методы анализа информации не используются, а результаты не проверяются на массивах информации. Все это приводит к «валу» частных и противоречивых моделей или, вообще, к множеству различных качественных описаний общественных процессов и явлений, которые не могут быть обобщены. В-третьих, уже почти пятнадцать лет существуют обширные и общедоступные базы данных о развитии стран и регионов мира, и только последние годы наметился явный интерес исследователей к данной информации. Конечно, изучать несколько миллионов данных традиционными инструментами невозможно, а новые технологии обработки данных медленно познаются исследователями. Формировать же целевые коллективы квалифицированных специалистов – это трудоемкий и дорогостоящий процесс, причем не всегда и результативный.

Как следствие, научных прогнозов развития мира, при составлении которых задействованы коллективы исследователей, не так уж и много. Среди них следует выделить модель Форрестера, модель Месаровича – Пестеля, прогноз PricewaterhouseCoopers «Мир в 2050 году», долгосрочную модель развития энергетики и состояния окружающей среды ЕС – VLEEM, прогноз Дж Ф. Коутса «2025: Сценарии развития США и мирового сообщества под воздействием науки и технологий», прогнозы глобальных климатических и экологических изменений и т.д. Время обычно показывает низкую достоверность таких прогнозов, однако они имеют большое значение для развития методологии прогнозирования в области изучения глобальных процессов.

Следует признать, что в настоящее время не существует фундаментальной теории, которая характеризовала бы социально-экономическое развитие и экологические изменения стран и регионов, а тем более мира в целом. Современная наука должна дать лицам, принимающим решения, понимание закономерностей развития общества и предложить новую парадигму прогностики. Не исключено, что это откроет пути для изменения нашего мира к лучшему, хотя новые возможности не всегда используются на благо всего мирового сообщества.

Методология фундаментальной теории может быть сформулирована только на основе использования объективного подхода, проведения междисциплинарных исследований и установления количественных закономерностей. В ограниченных рамках общественных или экономических наук формулировка объективных законов развития общества невозможна, так как методология данных наук в своей основе направлена на качественное описание процессов и слабо ориентирована на поиск и установление количественных закономерностей в больших



массивах статистической информации. Новые знания рождаются на стыке наук. Именно так возникают новые научные дисциплины: слияние методов физики и геометрии обеспечило возникновение науки геометродинамики; конвергенция методологий физики и экономики привела к появлению эконофизики, а синергетики и экономики – к синергетической экономике; совместное применение информационных технологий и системного анализа при изучении эмпирических фактов и знаний в прикладных областях открыло возможности для развития нового направления науки – интеллектуального анализа данных (ИАД / Data mining) и т.д.

Информатика действительно открывает большие возможности для развития во всех сферах науки и общества. Принцип «Гуртом і батька легше бити!» широко используется при решении критических проблем, выполнении глобальных проектов и программно-целевом планировании. Вики-технологии быстро входят в научный мир. Так создаются свободные энциклопедии – Википедии, сети социальной информатики, базы данных программ с открытым кодом, викиучебники, информационные порталы развития, базы данных открытого доступа и т.д. Сегодня это распространенный путь обеспечения ускоренного прогресса, так как в современной науке, по выражению Джим Грея, стремительно формируется четвертая парадигма научного исследования – анализ, визуализация, поиск и управление массивами информации. Данная область, которая называется интеллектуальным анализом данных (интеллектуальным анализом информации), быстро развивается. В соответствии с известным определением, интеллектуальный анализ данных – это процесс обнаружения в сырых данных ранее неизвестных, нетривиальных, практически полезных и доступных интерпретации знаний, необходимых для принятия решений в различных сферах человеческого общества. Поиск таких знаний в области развития регионов, стран и мира в целом является актуальной проблемой современности.

Второй актуальной проблемой является разработка специальных информационных систем для стратегического прогнозирования и планирования. Создание подобных систем имеет большое значение, так как они могут стать инструментом поддержки принятия решений, осуществляемых обществом на различных уровнях.

Сегодня анализ данных социально-экономического развития стран и регионов мира не мыслим без использования методов ИАД. В этой области при изучении процессов и объектов исследователь оперирует массивами данных, которые содержат сотни статистических показателей. Современная карта мира включает около 200 стран, многие из которых имеют административное деление на десятки регионов, республик, областей, округов, районов, штатов, провинций, земель и т.д. В свою очередь, ретроспективная глубина данных может составлять десятки лет по каждому объекту с разбивкой на кварталы и даже месяцы. Известно, что процесс обобщения результатов наблюдений является первым этапом в построении любой теории. Современные инструменты для анализа,

статистической обработки и визуализации подобных массивов информации имеются пока только в ИАД. В этой области могут лежать ответы на многие актуальные вопросы о путях развития мирового сообщества и его будущего.

Цель исследования процессов и явлений с применением методов ИАД направлена на поиск количественных закономерностей в больших и многомерных массивах данных. Цель же данного раздела – показать возможности применения метода системодинамики и разработки методов ИАД для изучения социально-экономического развития стран мира, которые бы использовали высокие уровни понимания информации, содержащейся в данных. Это одна из наиболее актуальных задач прогностики в области глобальных исследований. Оценка развития стран формально представляет собой задачу распознавания многомерных образов по комплексу показателей среди значительного числа объектов одного класса. Другими словами определяется статус объекта на множестве однотипных объектов, показатели которых могут изменяться во времени. Статус (лат. *status* – «*состояние, положение*») – абстрактный термин, в общем смысле обозначающий совокупность значений параметров объекта или субъекта. Статус чаще всего характеризует состояние (положение, позицию) объекта в иерархическом множестве объектов одного класса. Исходя из этого, в глобальных исследованиях важным является оценка статуса выбранной страны среди других стран мира по множеству социальных, экономических, экологических, технологических, политических, инфраструктурных и других показателей. Разработка моделей развития стран позволит получить вариант глобальной модели мира, исходя из среднестатистических тенденций мирового развития. В процессе работы параллельно может быть решена также задача разработки методики оценки человеческого развития, которая использовала бы объективные подходы и могла бы стать альтернативой известной методике Программы развития ООН (ПРООН).

Особенностью применения метода системодинамики является необходимость использования показателей, которые общепризнаны научным сообществом и в обязательном порядке имеют количественное измерение. Во втором разделе данной книги высказана идея, что для всесторонней характеристики какого-либо явления, объекта или процесса необходимо применять показатели, которые дают количественную характеристику явления в единстве с его качественной определенностью. С этой целью предлагается использовать многокомпонентные функции состояния системы. Каждому составляющему компоненту функции состояния будут соответствовать распределения вероятности некоторых событий, которые качественно характеризуют развитие системы. Это могут быть как отдельные характерные события, так и разные сочетания нескольких таких событий, представляющих собой одно сложное событие.

Функции состояния являются комплексными показателями и отражают в совокупности качественные и количественные характеристики

системы на фоне множества параметров свойств системы. При этом считается, что параметры свойств системы наблюдаемы, подвержены медленным эволюционным изменениям и формируются под действием внешних условий в конкретный момент времени. При формировании баз статистических данных, отражающих развитие стран мира, данные условия выполняются. Однако, так как данных обычно много, применить метод системодинамики можно только в комплексе с вычислительными алгоритмами и апробированными статистическими методами. Как результат мы приходим к необходимости разработки новых методов ИАД, которые бы учитывали вероятностные закономерности изучаемых систем, исходя из принципов системодинамики, а также необходимости создания информационных систем для анализа таких данных.

Развитие подобных подходов в науках об обществе имеет большое значение, так как позволяет предложить объективные методы исследования систем  $n$ -мерной размерности, к которым относятся все общественные, экономические и экологические системы.

## **12.2 Существующая система оценки развития человеческого общества**

В настоящее время в практической деятельности на фоне множества экспертных методов чаще всего инструментом анализа в процедурах стратегического прогнозирования выступают методы прогностики [79], а также методы комплексной оценки, когда исследование объектов проводится по комплексу показателей [33, 35, 36, 40]. При этом выбор прогнозных методов полностью зависит от предпочтений эксперта или экспертных групп. Применение комплексной оценки позволяет существенно расширить пространство для выводов экспертов, однако этот путь приводит к обширным докладам по изучаемой проблеме. В таких докладах разделы, посвященные оценке существующего состояния, по объему всегда существенно превышают разделы с практическими результатами, которые несут прогностические выводы. Оценка состояния объекта всегда является первым этапом любого исследования. Проблемы применения многих методов начинаются тогда, когда необходимо дать прогноз развития объекта во времени.

Важную роль в прогнозных исследованиях имеют уровень квалификации экспертов, их способности к стратегическому мышлению и интуитивные возможности. Однако, хотя многие методы прогностики и комплексной оценки в своей методологии представляются достаточно простыми, их недостатком является субъективный подход эксперта при прогнозировании, а также фактор «утопизма» – подспудное желание любого человека выдать желаемое за действительное.

Комплексная оценка состояния объекта представляет собой достаточно трудоемкую процедуру из-за множества показателей, требующих анализа, поэтому с целью ее упрощения часто применяют

метод индексов и индикаторов, т.е. используют индикаторный подход. Данный подход предполагает, что при оценке состояния объекта применяется понятие индекса, который является мерой отклонения системы по комплексу свойств от базового уровня. Индексы строятся на основе индикаторов экспертным путем. В свою очередь, индикаторы отражают наиболее важные свойства и количественно характеризуют состояние объекта.

Сегодня оценки качественного состояния систем различной природы тесно связаны с появлением в соответствующих науках многочисленных индексов. Большинство исследователей не утруждают себя решением статистической задачи, суть которой заключается в изучении возможности введения индексов и свертывании данных в многомерном пространстве переменных до комплексных показателей приемлемой размерности, а вводят индексы априори, применяя не всегда обоснованные соображения.

Обычно количественная оценка состояния экологических, экономических и социальных систем проводится на основе использования целого ряда стандартизированных и нормируемых индикаторов и показателей [56, 66, 68, 85, 115, 116, 121, 122, 135]. В разных методиках при расчете индексов применяется от трех до ста индикаторов, позволяющих оценить развитие стран или регионов. Для примера в таблице 12.1 приведены некоторые международные индексы для оценки развития стран мира, построенные на основе использования различных индикаторов.

Например, при определении индекса человеческого развития (ИЧР) индикатор образования определяется по двум показателям, а индикаторы продолжительности жизни и ВВП соответственно – по одному [35, 36]. В целом ИЧР в окончательном виде находится по трем сводным индикаторам. Аналогичную структуру определения имеет и индекс нищеты населения (ИНН-1). В свою очередь, индекс развития с учетом гендерного фактора (ИРГФ) имеет структуру определения, при которой три составляющих определяются по двум индикаторам и затем они сводятся в один общий индекс из трех компонентов [36]. Всего в докладах о развитии человека для комплексной оценки используется около 100 индикаторов, объединенных в 15 групп, однако в оценках индексов обычно применяется чуть более 30 индикаторов.

Аналогично, при анализе экологической ситуации индикаторы формируются по разделам: социально-экономическое развитие, здоровье населения, качество атмосферного воздуха и поверхностных вод, изменение климата, воздействие отраслей экономики на природную среду.

В Европе при оценке экологического развития стран используются около 70 индикаторов, объединенных в 14 групп, которые комплексно характеризуют социально-экономическую и экологическую ситуацию, а также безопасность жизнедеятельности [40]. В свою очередь, российская методика оценки экологического состояния территории [56] использует 45 индикаторов для оценки изменения среды обитания, состояния здоровья

населения, оценки нарушения природной среды, деградации наземных экосистем, биогеохимической оценки территории и т.д.

Таблица 12.1. – Некоторые международные индексы для оценки развития стран

Индекс (показатель)	Количество стран	Количество индикаторов	Рейтинги стран в 2011 (2012) годах		
			Украины	России	Белоруссии
Человеческого развития	187	34	76(78)	66(55)	65(50)
Глобальной конкурентноспособности <sup>1</sup>	142	12	82	66	в рейтинге отсутствует
Экономической свободы	179	10	164(163)	143(144)	155(153)
Экологической эффективности	136	31	102	106	65
Качества жизни	192	9	60	54	51
Общества, основанного на знаниях	77	15	56	55	в рейтинге отсутствует
Нестабильности стран	177	12	110(113)	82(83)	83(85)
Восприятия коррупции	182	Экспертный опрос	152(144)	143(133)	143(123)
Демократии	167	60	79	117	139
Свободы прессы	198	Экспертный опрос	116	142	168
Глобализации	186	24	53	52	118
Экологического следа <sup>2</sup>	152(149)	6	58(51)	40(33)	46(41)
Счастья <sup>3</sup>	178	3	95	108	104
Готовности к сетевому обществу	138	53	56	55	59
Экологических достижений <sup>4</sup>	133	16	51	32	в рейтинге отсутствует
Готовности к электронному правительству	190	3	68	27	61

<sup>1</sup> данные за 2011-2012 годы; <sup>2</sup> данные за 2007(2008) годы; <sup>3</sup> данные за 2009 год; <sup>4</sup> данные за 2005 год.

Методики анализа социально-экономического развития используют еще больше индикаторов. Например, украинская методика социально-экономической оценки развития регионов [66] использует статистические данные приблизительно по ста индикаторам, которые объединены в девять групп. Российская методика оценки социально-экономического развития субъектов федерации применяет 295 индикаторов, которые сведены в 9 разделов [68]. Базовый перечень показателей для экологической оценки разработан ЕЭК ООН и применяется на практике при оценке развития стран [85]. Базовый перечень социально-экономических показателей для оценки развития стран мира разработан Всемирным банком [122, 135].

В настоящее время метод индикаторов и индексов применяют не только при экологической и социально-экономической оценке, но и при

измерении уровня глобализации стран. Наиболее известны две системы измерения глобализации, которые позволяют ежегодно рассчитывать индекс глобализации. По первой системе (система КОФ), этот индекс рассчитывается для 123 стран мира [89], а по второй системе (СЕІР) – для 62. Методология расчета индекса глобализации такая же, как и при оценке ИЧР, хотя имеет свои особенности.

В оценке развития стран применяют индекс глобальной конкурентоспособности (<http://www.weforum.org>), состоящий из 47 наборов данных, индекс экономической свободы, включающий 50 наборов данных (<http://www.heritage.org>), индекс экологического измерения (<http://www.yale.edu/esi>), обобщающий 76 наборов данных, индекс качества и безопасности жизни (6 индикаторов, <http://www.eu.wikipedia.org>) и т.д. Аналогично ведется оценка рейтингов развития городов мира [117, 127, 130]. В экономике используют фондовые индексы, индексы ценообразования и т.д.

В практической деятельности многих международных организаций наиболее распространена методика оценки стран мира, которая основана на применении индекса человеческого развития (ИЧР). Данная методика использует основные принципы, которые являются типовыми при использовании экспертных методов.

Концепция развития человеческого потенциала была введена в международную политическую и научную сферы в рамках подготовки ежегодных глобальных Докладов о человеческом развитии. В настоящее время систематическая оценка человеческого развития ведется для 187 стран мира; почти для 100 стран такая оценка проводится с 1975 года. С 1990 года оценка индекса человеческого развития дается почти для 140 стран мира и результаты анализа публикуются в открытой печати.

Существующие таблицы показателей развития дают глобальную оценку достижений стран в различных областях общества. Таблицы содержат данные по 187 странам, т.е. по всем странам, для которых может быть рассчитан индекс человеческого развития [35, 36]. Страны, для которых рассчитывается ИЧР, подразделяются по уровню развития на четыре группы: страны с очень высоким уровнем человеческого развития (ИЧР составляет 0,750 и выше), страны с высоким уровнем человеческого развития (0,510 – 0,750), страны со средним уровнем развития (0,250 – 0,500) и страны с низким уровнем человеческого развития (менее 0,25).

В методике ИЧР в качестве основных показателей используются индикаторы продолжительности жизни ( $I_1$ ), образования ( $I_2$ ) и валового внутреннего продукта на душу населения ВВП ( $I_3$ ), для каждого из которых устанавливаются минимальные и максимальные значения [36]. Индекс человеческого развития ( $I$ ), вычисляется по формуле:

$$I = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot I_i, \quad (12.1)$$

где  $I_i$  – индикаторы продолжительности жизни, образования и дохода (ВВП);  $\beta_i = 1/3$  – весовые коэффициенты;  $n = 3$ .

В свою очередь, каждый из индикаторов  $I_i$  выражается величиной от нуля до единицы и рассчитывается по нижеприведенным формулам.

Индикатор продолжительности жизни определяется в виде:

$$I_1 = \frac{X - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}}, \quad (12.2)$$

где:  $X$  – ожидаемая продолжительность жизни в определенной стране, при этом  $X_{\max}$  принимают равным 85, а  $X_{\min}$  – равным 25 (лет).

Индикатор образования определяется следующим образом:

$$I_2 = \frac{2}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2, \quad (12.3)$$

где:  $X_1$  – доля грамотного взрослого населения (от 15 лет и старше, доли ед.);  $X_2$  – доля обучающихся в начальных, средних и высших учебных заведениях в возрасте от 5 до 23 лет (доли ед.).

При расчете показатель дохода (ВВП на душу населения) корректируется, так как считается, что при достижении достойного уровня развития человеческого потенциала не требуется неограниченного дохода. Поэтому при расчете индикатора используются логарифмы дохода:

$$I_3 = \frac{\log(X) - \log(X_{\min})}{\log(X_{\max}) - \log(X_{\min})}, \quad (12.4)$$

где  $X_{\max} = 40000$  дол. США по ППС, а  $X_{\min} = 100$  дол. США по ППС. Паритет покупательной способности (ППС) представляет собой обменный курс, отражающий ценовую разницу в зависимости от страны и позволяющий осуществлять сопоставления реальных показателей производительности и доходов. С учетом ППС курса доллара, 1 доллар США имеет такую же покупательную силу в условиях внутренней экономики страны, как и 1 доллар США в Соединенных Штатах Америки. Методы оценки ППС разработаны Всемирным банком [122].

Подобным образом строятся все экспертные методики определения различных индексов. Некоторые из них по сравнению с методикой ИЧР существенно более сложны, как например [56, 66]. В подобных методиках можно встретить целый спектр различных уравнений для расчета индексов, при этом эксперты очень часто обходят стороной вопрос выбора и обоснования тех или иных расчетных зависимостей.

С точки зрения принципов системного анализа, методики, основанные на применении индексов, имеют много недостатков, тем не менее, они широко применяются при оценках развития систем. Основной недостаток таких оценок состоит в том, что нельзя забывать известную истину – «Реальность не сводится просто к числу» (Парменид). Познание любой системы требует построения множества моделей, соответствующим образом отражающих многообразие всех ее аспектов.

Кроме того, используемый при построении индексов, принцип аддитивности индикаторов с учетом весов показателей теоретически не обоснован. В общем случае согласно теории системного анализа для любой системы веса должны зависеть от параметров ее состояния. Однако построить такие уравнения для сложной системы экспертным путем невозможно. Сегодня в теории экспертной оценки отсутствуют базовые методические предпосылки, связанные с использованием тех или иных законов сохранения или специальных форм уравнений состояний, которые отличались бы системным единообразием, а также обоснованным перечнем исходных независимых показателей для прогнозирования.

В ряде методик используется чрезмерное количество показателей, некоторые индикаторы часто дублируют друг друга, а резкое увеличение числа индикаторов при оценке одного комплексного индекса ведет к потере адекватности и достоверности экспертных методов. Специалисты в области системного анализа осторожно относятся к увеличению количества разноплановых индикаторов при экспертном анализе, так как факт того, что индекс может представлять собой поверхность в  $n$ -мерном пространстве индикаторов для данных, собранных по значительному количеству объектов одного класса, экспертным путем не докажем.

Кроме того, большинство из индикаторов в базах данных зависимы друг от друга, в связи с чем получаемые статистические модели являются слабо устойчивыми. Это приводит к тому, что применение методик, построенных на одной и той же методологической базе, но разными коллективами экспертов, может давать абсолютно противоположные результаты [42]. Все это говорит о нарушении основного принципа научного познания, связанного с воспроизводимостью результатов.

Далее следует отметить, что в имеющихся методиках оценки развития систем при определении индексов субъективно назначаются весовые функции и выбираются способы нормировки индикаторов. Например, в методике расчета ИЧР [36], используемой до 2010 года, весовые функции при суммировании индикаторов продолжительности жизни, образования и ВВП принимаются равными  $1/3$ . Обоснования этого факта не существует. Аналогично, нет обоснования – почему при построении безразмерного индикатора ВВП применяются операции логарифмирования, а при построении других индикаторов – операции суммирования. Принятое обоснование вида «для достижения достойного уровня человеческого развития не требуется неограниченного дохода» явно субъективно. Единственно можно сказать, что после операции логарифмирования пропасть между доходами населения в богатых и бедных странах уже не кажется такой бездонной.

После 2010 года была изменена методика расчета ИЧР, при этом операции суммирования и логарифмирования при определении индикаторов продолжительности жизни и ВВП сохранились, а для определения индикатора образования была применена операция нахождения геометрического среднего [35]. Кроме того, ИЧР с 2010 года



определяется не на основе аддитивной зависимости (12.1), использующей значения весов, а путем расчета геометрического среднего  $I = \sqrt[3]{I_1 \cdot I_2 \cdot I_3}$ . Обоснования необходимости введения новых расчетных зависимостей практически нет, авторы Доклада не обсуждают данный вопрос, хотя методологически абсолютно не ясна цель введения при расчете каждого из основных индикаторов различных функциональных зависимостей. В результате ИЧР стал еще более выраженной нелинейной зависимостью и вся система оценки стала еще более запутанной.

Значительным недостатком экспертных методик расчета различных индексов является факт того, что любой индекс определяется по «соглашению» и как бы «висит в воздухе», так как обычно не устанавливаются связи с показателями изучаемого объекта, которые не входят в базу данных атрибутивных индикаторов. В результате подобные индексы ничего объективно не отражают и дают только субъективную оценку экспертов о состоянии системы, которая исходит из относительных сопоставлений и может быть очень далека от действительности.

Таким образом, сегодня теоретические обоснования применения индексов при оценке развития стран и регионов в целом имеют слабую доказательность основополагающих суждений и отличаются не высокой строгостью, так как формализм теории абсолютно не развит. Указанные выше недостатки и привели к выраженному кризису экспертных методов прогнозтики, который наблюдается на фоне того, что в науке о прогнозировании развития социально-экономических систем начинают применяться объективные методы интеллектуального анализа данных.

### **12.3 Данные для оценки и индикаторы развития общества**

Существует множество различных баз данных, которые несут информацию о компонентах и аспектах развития стран мира. Наиболее известные из них – это база данных Программы развития ООН [15, 36] и база данных индикаторов развития стран мира Всемирного банка [14]. Сегодня обе базы данных (БД) присутствуют в открытом доступе сети Internet соответственно по адресам:

- база данных Программы развития ООН <http://hdr.undp.org/en/data>;
- база данных индикаторов развития стран мира Всемирного банка <http://data.worldbank.org/>.

База данных Программы развития ООН включает статистические таблицы данных почти по 100 странам в период 1975 – 1980 годов и по 187 странам в период 2011 – 2013 годов. Характеристика статистических данных дана в таблице 12.2. База данных организации ПРООН содержит около 100 индикаторов, по которым определяются несколько индексов, характеризующих различные аспекты человеческого развития. На Web-сайте организации предоставлены инструменты визуализации и работы с данными для чаще всего используемых индикаторов (около 50).

Пользователь может создавать свои таблицы и конвертировать их в Excel формат. База данных уже несколько лет находится в открытом доступе.

В свою очередь, база данных Всемирного банка является значительно более обширной нежели БД Программы развития ООН. Однако, только недавно Всемирный банк заявил об открытии свободного доступа к более чем 1200 показателям развития стран, многие из которых имеют ретроспективу до 50 лет. База данных содержит индикаторы в области мирового развития (WDI), индикаторы в области финансов (GDF), данные глобального экономического мониторинга (GEM) и др. Данные предоставляются в виде Microsoft Excel документа, который имеет объём 62 Mb. Всемирный банк относительно недавно предоставил инструменты для визуализации и работы с данными.

База данных Всемирного банка включает в себя 21 компонент и аспект развития стран мира, в которые сведены следующие индикаторы:

- экспорт/импорт товаров и услуг (150 индикаторов);
- эффективность внешней помощи (25);
- экономическая политика и внешний долг (74);
- финансовый сектор и статистика (более 400);
- энергетика и горная промышленность (32);
- сельское хозяйство (29);
- окружающая среда и изменение климата (54);
- образование (53);
- здравоохранение (43);
- инфраструктура (60);
- наука и технологии (12);
- градостроительство (17 индикаторов).
- демография (41);
- труд и социальная защита (83);
- бедность (15);
- социальное развитие (26);
- частный сектор (27);
- государственный сектор (14);
- военная сфера (13);
- гендерное развитие (54);
- рейтинги (25).

В открытом доступе имеются также и другие базы данных социально-экономического развития стран и регионов мира, например, [www.yale.edu](http://www.yale.edu); [www.kof.ch/globalization](http://www.kof.ch/globalization); [www.weforum.org](http://www.weforum.org); [www.heritage.org](http://www.heritage.org); [www.atkerney.com](http://www.atkerney.com); [www.wwf.ru/resources](http://www.wwf.ru/resources) и т.д.

В области глобалистики и прогнозирования развития стран мира сегодня возникает задача интегрирования баз данных. Информация должна собираться из множества источников и считываться из различных форматов хранения данных.

Таблица 12.2. – Характеристика статистических данных ПРООН о развитии стран мира\*

Компонент развития стран	Кол-во индикаторов	Некоторые основные индикаторы	Един. измерения	Значение индикаторов			
				min	max	среднее	Украина
Человеческое развитие	5	Ожидаемая продолжительность жизни	лет	31,3	82,2	67,3	66,1
		Средняя продолжительность обучения	лет	1,2	12,6	7,4	11,3
		Удельный валовой национальный доход	\$/чел	561	69961	8 833	6394
Гендерное неравенство	10	Коэффициент материнской смертности	на 100 тыс. рож.	0	1800	н/д	13
		Коэффициент рождаемости у подростков	на 100 тыс. рож.	0,7	207,1	58,1	30,8
		Показатель фертильности	рожд. на 1 женщ.	0,9	7,9	2,7	1,1
Многомерная бедность	10	Доля населения за чертой бедности	%	3,8	77	н/д	7,9
		Доля населения в условиях тяжелой бедности	%	0	81,8	н/д	0,2
Экологическая устойчивость	13	Показатель экологического следа	га/чел.	0,4	10,7	2,4	2,9
		Удельные выбросы углекислого газа	т/чел.	4	53,5	4,4	7,0
		Виды под угрозой исчезновения	%	0	25	12	8
Экологические угрозы	10	Дети до пяти лет, страдающие от истощения	%	0,5	43,5	н/д	4,1
		Смертность от стихийных бедствий	чел/1 млн. чел.	0	290	6	2
		Смертность от загрязнения воздуха	чел/1 млн. чел.	0	882	145	305
Человеческая безопасность	10	Экспорт вооружений	млн \$	0	7101	н/д	188
		Количество беженцев	тыс. чел.	0	693	н/д	84
		Распространенность недоедания	% общ. числ.	<2,5	67	17	3
Гражданское и общественное благополучие	10	Показатель убийств	на 100 тыс. чел.	0	59,5	н/д	6,3
		Показатель ограблений	тоже	1	859	н/д	59
		Жертвы нападений	%	1	38	н/д	4
Образование	11	Уровень грамотности населения	%	19	100	н/д	99,4
		Охват населения высшим образованием	%	1,4	81,1	27,6	81,1
		Кол-во учеников на 1 учителя	чел.	6,5	84,3	н/д	15,6
Здравоохранение	10	Смертность младенцев	чел/1000 живрож	2	165	51	14
		Смертность детей до 5 лет	тоже	2	573	58	15
		Распространенность туберкулеза	на 100 тыс. чел.	2	1137	229	151
Демографические тенденции	7	Прирост населения	%	-0,7	3,5	1,1	-0,5
		Доля городского населения	%	9,7	100	48,3	67,6
Достойный труд	10	Доля занятого населения	%	30,2	83,3	н/д	53,5
		Уровень безработицы	%	7,0	54,2	н/д	14,6
		Детский труд	%	1,0	53,0	н/д	7,0

\* Статистические данные за 2004 год

Сегодня одной из целей международных организаций является привлечение научной общественности всего мира к анализу данных. Можно предположить, что в ближайшем будущем с созданием новых IT-систем для социально-экономического анализа, количество работ, посвященных анализу данных в области развития регионов, стран и мира в целом, резко возрастет, а это прямой путь к созданию нового знания.

#### **12.4 Методика анализа данных социально-экономического развития**

Для анализа социально-экономического и экологического состояния стран мира воспользуемся системным подходом и методом системодинамики. Методика оценки развития стран может быть основана на построении моделей развития социально-экономических систем, исходя из гипотезы существования для таких систем функций состояния. Анализ показывает, что для некоторых классов социально-экономических систем возможно построение функций состояния, которые являются математическими функциями и могут быть представлены в виде общих интегралов. Это позволяет для глобальной системы в виде стран мира сформулировать обобщенные критерии для комплексной оценки. Данные критерии позволяют провести ранжирование стран по уровню и темпам развития и степени воздействия на природную среду.

Предложенная методика оценки развития стран предполагает в процессе ИАД следующую последовательность действий.

1. На первом этапе создается база данных индикаторов (БДИ), которые характеризуют процессы социально-экономического развития и экологических изменений в странах мира. БДИ создается путем объединения информации международных организаций, которая находится в открытом доступе. Цель создания базы данных – накопление и сортировка информации, формирование файлов данных и расширение возможностей визуализации данных и их статистического анализа, например, путем использования среды анализа данных R, системы Statistica или других подобных средств. Осуществляется так же перевод названий переменных и предварительная обработка информации. Наличие базы данных дает возможность автоматизировать процесс анализа данных и применить вычислительные алгоритмы.

2. Далее путем формирования запросов сортировки осуществляется группировка данных и выбор атрибутивных переменных. В качестве основных компонентов развития выделяются группы демографических, экономических, экологических, трудовых, технологических, инфраструктурных и т.п. показателей, например, как это показано в таблице 12.2. Обычно цель данного этапа исследования состоит в поиске атрибутов (наиболее информативных и влияющих показателей) для построения моделей системы или ее компонентов и в выборе класса функций, в рамках которых в дальнейшем строятся модели. Подобные

атрибуты могут определяться как для всей системы в целом (если это возможно), так и для каждого компонента системы. В самом простом случае, это может быть набор из 2 – 4 наиболее важных индикаторов для определенного компонента системы, которые характеризуют ее в некотором существенном аспекте.

В данном разделе, как базовом примере, эта задача была упрощена и в качестве атрибутивных переменных были выбраны индикаторы, которые считаются важными, исходя из сложившихся научных представлений, и которые используются при расчете индекса человеческого развития [36]. К таким переменным относятся индикаторы продолжительности жизни, образования, удельного валового внутреннего продукта, доли городского населения и т.д. Подобный выбор переменных связан также и с актуальной задачей разработки альтернативной методики оценки человеческого развития, в которой не предполагается использовать экспертные методы.

Выбор класса функций для анализа связан с мультипликативными зависимостями. Также, согласно ранее полученным теоретическим результатам, при моделировании используем геометрические вероятности распределения индикаторов. Для одномерной случайной величины геометрическая вероятность находится согласно уравнения:

$$\rho_k = \frac{I_k - I_{\min}}{I_{\max} - I_{\min}}; 0 \leq \rho_k \leq 1, \quad (12.5)$$

где  $I_k$  – некоторый индикатор;  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$  – соответственно максимальное и минимальное значение данного индикатора в изучаемой группе стран (в данном классе объектов, наблюдаемых в опыте) за некоторый период, например, 2004 год или за некоторый диапазон времени, например, 1980 – 2010 гг.

Для многомерной случайной величины геометрическая вероятность определяется согласно известной плотности вероятности  $f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$  по формуле (7.3), при этом плотность распределения  $f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$  для  $n$ -мерной случайной величины является равномерно распределенной в изучаемой области. Для независимых случайных величин получим:

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n, \quad (12.6)$$

где  $\rho_k$  – геометрическая вероятность распределения некоторого индикатора, который принят в качестве атрибутивной переменной;  $n$  – число атрибутивных переменных для системы в целом или для каждого из компонентов системы.

Далее построим шкалы переменных. С этой целью база данных индикаторов нормируется путем выбора опорного состояния (базового объекта с заданными в выбранный момент времени индикаторами). В качестве опорного состояния системы приняты индикаторы развития Украины в 2004 году. Параметры опорного состояния в дальнейшем будем обозначать дополнительным индексом «0». В результате имеем

безразмерные переменные вида  $\xi_k = \frac{\rho_k}{\rho_{k0}}$ , где  $\rho_{k0}$  – геометрические вероятности распределения индикаторов, которые соответствуют опорному состоянию.

3. Следующий шаг исследования – осуществление процесса многомерного шкалирования по индикаторам системы.

Процесс шкалирования предполагает построение шкал абсолютного индекса развития системы и эмпирических индексов развития:

$$T = a \cdot \frac{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n}{\rho_{10} \cdot \rho_{20} \cdot \dots \cdot \rho_{n0}} = a \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n; \quad t_j = b \cdot \frac{\rho_j^*}{\rho_{j0}^*} = b \cdot \xi_j^*. \quad (12.7)$$

Здесь  $T$  – абсолютный индекс развития системы;  $t_j$  – эмпирические индексы развития;  $a, b$  – постоянные шкалирования;  $\rho_j^*$  – геометрическая вероятность распределения индикатора, который не является атрибутивной переменной и который отражает тенденции развития для некоторого компонента системы ( $j \leq m$ );  $\rho_{k0}, \rho_{j0}^*$  – геометрические вероятности распределения индикаторов, которые соответствуют опорному состоянию;  $m$  – число переменных, которые отражают различные компоненты развития системы. Если абсолютный индекс строится только для определенного компонента системы, то далее его будем обозначать  $T_j$ , если для всей системы, то будем его обозначать как  $T$ .

Отметим, что на основе мультипликативных зависимостей абсолютный индекс системы в зависимости от ее вида может быть построен различными способами и принятое представление (12.7) не является единственно возможным. Например, абсолютный индекс развития может строиться по каждому компоненту системы в виде мультипликативных степенных функций атрибутивных переменных вида:

$$T = a \cdot \xi_1^{\alpha_1} \cdot \xi_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \xi_n^{\alpha_n} \quad (12.8)$$

или, в более общем виде:  $T = a \cdot \theta_1(\xi_1) \cdot \theta_2(\xi_2) \cdot \dots \cdot \theta_n(\xi_n)$ ,

где  $\alpha_k$  – константы, имеющие определенное значение для каждого компонента системы,  $\theta_k(\xi_k)$  – некоторые функции. Выбор вида построения абсолютного индекса системы определяется теоретическими предпосылками, предварительным анализом данных, а также путем применения алгоритмов ИАД и изучения множества регрессионных зависимостей, характерных для анализируемой базы данных показателей.

Цель построения абсолютного индекса – создать моделирующую среду (построить поле величины), которая даст возможность разработать аналитическую модель системы и адаптировать ее по опытным данным.

В результате данного подхода строится среда моделирования в виде пространства координат  $\Omega$ , где координатные оси соответствуют шкалам атрибутивных переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  для изучаемой базы данных. На

практике мы обычно имеем ограниченное количество статистических точек, отражающих данные наблюдений о параметрах развития стран мира. Статистическая база данных опытных точек  $M_i \{\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{ni}\}$  отражает в пространстве  $\Omega$  некоторую область  $\Omega_n$ , которая определена наблюдаемыми значениями атрибутивных переменных. Область  $\Omega_n$  будем рассматривать как общее пространство наблюдаемых состояний системы. Каждой точке  $M \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  данного пространства поставим в соответствие значение абсолютного индекса  $T, (T_j)$ , которое находится согласно уравнений (12.7), (12.8) или других аналогичных зависимостей. В свою очередь, каждой опытной точке  $M_i \{\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{ni}\}$  также может быть поставлен в соответствие определенный набор значений абсолютных  $T, (T_j)$  и эмпирических  $t_j$  индексов развития. Таким образом,  $\Omega_n$  – многомерное пространство точек  $M$ , в свою очередь,  $T = T(M)$ ,  $T_j = T_j(M)$  – непрерывное скалярное поле абсолютного индекса системы, которое мы будем называть, по аналогии с термодинамикой, полем идеальных состояний (объектов) системы. На первом этапе анализа данных задача сводится к изучению возможности построения регрессионных зависимостей для описания скалярного поля величины  $T$ , исходя из связи для каждого компонента системы эмпирического и абсолютного индексов, т.е.  $\varphi_j(t_j) = T_j$ . Таким образом, может быть построен набор эталонных шкал абсолютного индекса системы  $\varphi_j(t_j) = T_j$ , которые характеризуют множества различных состояний системы. Построение системы из  $m$  уравнений вида  $\varphi_j(t_j) = T_j$  указывает на наличие значимых связей в изучаемой базе данных. Естественно, что существуют системы или их компоненты, для которых это невозможно, в связи с чем создание системодинамических моделей таких систем становится проблематичным.

Для построения общей теории развития данного класса систем сделаем предположение, что в пространстве состояний  $\Omega_n$  процессы развития стран мира описываются многомерными непрерывными кривыми, соединяющими между собой различные состояния. Однако, процессы развития определенной страны, которые могут осуществляться между наблюдаемым состоянием  $M$  и любым другим возможным состоянием в области  $\Omega_n$ , будут отличаться между собой по интенсивности взаимодействия объекта с глобальным социально-экономическим, биосферным, информационным и другим окружением, т.е. с глобальной окружающей средой. Для того, чтобы иметь возможность характеризовать взаимодействие системы с окружающей средой для системы (каждого компонента системы) введем некоторую переменную величину  $W (W_j)$ , непосредственно связанную с опытными данными. Данная величина характеризует реальные процессы развития стран мира в

пространстве многомерных переменных  $\Omega_n$  и определяет интенсивность взаимодействия системы с окружающей средой. Будем называть величину  $W (W_j)$  *статистическим индексом развития* (для системы в целом или для выбранного компонента). Другими словами, мы принимаем гипотезу о существовании множества общих мер для различных форм материального движения и взаимодействия социальных систем, которыми являются страны мира. Далее для упрощения индекс  $j$  при определении величин  $T$  и  $W$  будем опускать, имея в виду, что все сказанное выше справедливо как для системы в целом, так и для каждого ее компонента. Для обоснования величины  $W$  сделаем предположение, что она связана со статистическими вероятностями наблюдаемых состояний системы. В дальнейшем нам придется определить смысл величины  $W$  и научиться оценивать по опытным данным ее значения.

Задание величины  $W$  на некотором множестве точек  $M\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  пространства  $\Omega_n$  равносильно заданию числовой функции в виде  $W = W(M)$ , значения которой зависят от того, какой процесс осуществляется в окрестности точки  $M$ . Кроме этого, значения этой величины в опытных точках  $M_i\{\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{ni}\}$  должны принимать соответствующие значения данной числовой функции  $W_i = W(M_i)$ . Считаем также, что величины  $W$  и  $T$  зависят от времени, так как имеются статистические данные о состоянии стран мира в дискретные моменты времени с периодом наблюдений в один год. Однако принимаем, что зависимость от времени является квазистатической в связи, с чем изменение состояния системы происходит достаточно медленно. Данное предположение отвечает содержанию данных о развитии мира стран.

Будем также предполагать, что функция  $W = W(M)$  имеет непрерывные частные производные по всем переменным. Из теории известно, что при справедливости указанных выше условий изменение статистического индекса  $dW$  в окрестности любой точки  $M$  при условии осуществления некоторого процесса  $l$  может быть представлено в виде:

$$dW = W_1 d\xi_1 + W_2 d\xi_2 + \dots + W_n d\xi_n, \quad (12.9)$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – атрибутивные переменные системы;  $W_1, W_2, \dots, W_n$  – функции этих переменных, причем  $W_k = \partial W / \partial \xi_k$ .

Представление вида (12.9) используется в практике построения индексов и комплексных показателей линейного вида. Данное выражение понимается как уравнение, которое служит для определения величины  $dW$  через параметры системы в условиях некоторого процесса, медленно изменяющегося во времени, в связи с чем производной функции  $W$  по времени можно пренебречь.

Всякая гипотеза независимо от ее априорной правдоподобности должна быть апробирована посредством сопоставления ее следствий с данными опыта. В нашем случае опытной проверке будет подлежать



справедливость теоретических зависимостей, вытекающих из исходных предположений и анализа всего массива статистических данных о развитии стран мира. Основной вопрос, на который следует дать ответ в каждом конкретном случае анализа массивов баз данных – это справедливость исходной гипотезы о существовании аналитических выражений для величин  $T$  и  $W$ , установление вида этих величин и их связи с данными.

Сделанные предположения о существовании статистического индекса  $W$  и его представимости в виде уравнения (12.9) позволяют получить теоретические зависимости для его определения, которые далее проверяются на соответствие опытным данным. Основная идея метода связана с возможностью представления поля абсолютного индекса системы в виде аналитических зависимостей и построении на основе этого поля моделей для величины  $W$ . Определение величины  $T$  в виде мультипликативных зависимостей необходимо для того, чтобы получить математическое описание величины  $W$ .

Согласно ранее полученным результатам будем считать, что в окрестности любой точки  $M$  при бесконечно малом изменении состояния социальной системы в каком-либо произвольном процессе  $l$  существует линейная связь между индексами  $W$  и  $T$ , которую можно представить в виде отношения элементарного приращения индекса  $W$  к соответствующему приращению индекса  $T$  в процессе  $l$ :

$$c_l = \frac{dW_l}{dT_l}. \quad (12.10)$$

Величина  $c_l$  определяется на основе опыта и зависит как от положения точки  $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , так и от направления процесса развития системы в пространстве состояний  $\Omega_n$ .

Согласно уравнений (12.9) и (12.10) в окрестности точки  $M$  имеем следующие соотношения:

$$dW = c_1 \frac{\partial T}{\partial \xi_1} d\xi_1 + c_2 \frac{\partial T}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dots + c_n \frac{\partial T}{\partial \xi_n} d\xi_n. \quad (12.11)$$

Если учесть уравнение (12.7), то из зависимости (12.11) получим при условии существования аналитической зависимости для абсолютного индекса  $T$ :

$$ds = \frac{dW}{T}; \quad ds = c_1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} + c_2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} + \dots + c_n \frac{d\xi_n}{\xi_n}, \quad (12.12)$$

где величина  $s$  согласно (9.13) определена как *энтропия* системы.

В свою очередь, согласно уравнению (12.8) в окрестности точки  $M$  имеем следующие соотношения:

$$ds = \frac{dW}{T}; \quad ds = \alpha_1 c_1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} + \alpha_2 c_2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} + \dots + \alpha_n c_n \frac{d\xi_n}{\xi_n}. \quad (12.13)$$

Энтропия  $s$  и потенциал развития (мера) системы вида (10.8) могут быть приняты в качестве обобщенных критериев для комплексной оценки

статуса стран мира по каждому компоненту развития в многомерном пространстве атрибутивных переменных  $\Omega_n$ . Их наиболее важной особенностью является то, что данные величины являются функциями состояния системы при справедливости условия существования величины  $W$  и возможности представления абсолютного индекса системы аналитическим выражением.

Таким образом, поставленная задача сводится к проверке исходных гипотез, связанных с существованием абсолютного  $T$  и статистического  $W$  индексов, определению на основе опытных данных уравнений состояния системы  $\varphi_j(t_j) = T_j$  и значений величин  $c_k$ , а также установлению соответствия полученных зависимостей опытным данным для конкретных социальных систем.

Для решения данной задачи, в первую очередь, следует разработать систему оценки статистического индекса  $W$  и систему измерения абсолютного индекса системы  $T$ . В термодинамике термометрами непосредственно измеряют эмпирические температуры, определяют абсолютную температуру, после чего находят количество тепла через известные значения теплоемкостей. В нашем случае также следует научиться измерять абсолютный индекс в различных состояниях системы и оценивать значение статистического индекса  $W$  в наблюдаемых социальных процессах. Это позволит оценить изменения статистического индекса в любом реальном процессе развития стран мира.

Для разработки систем измерения и оценки величин воспользуемся принципом замещения объекта измерения или объекта оценки некоторой другой величиной.

4. Для построения системы измерения индекса  $T$  установим корреляционные связи между абсолютным индексом системы, зависящим от ее атрибутивных переменных, и всеми эмпирическими индексами развития  $t_j$ , отражающими различные аспекты развития системы. Среди полученных уравнений выберем одну или несколько наиболее значащих зависимостей и построим шкалу (шкалы) измерений. Общий подход несколько подобен построению шкал температур в термодинамике. Важным здесь является выбор наиболее влияющих индикаторов и построение уравнений состояния системы по каждому из компонентов системы, что позволяет при измерении использовать принцип замещения объекта измерения некоторой другой величиной.

При существовании значимых корреляционных связей определяются регрессионные зависимости. Все установленные значимые зависимости и представляют модель состояния системы по различным компонентам, на основе которой можно сделать вывод о форме представления скалярного поля величины  $T$ .

Методом последовательных приближений на основе методики построения регрессионных зависимостей уточняется перечень

атрибутивных переменных и модель корректируется. Общая модель в виде уравнений состояния системы представляется следующим образом:

$$T_1 = \varphi_1 \left( \frac{\rho_1^*}{\rho_{10}^*} \right), \quad T_2 = \varphi_2 \left( \frac{\rho_2^*}{\rho_{20}^*} \right), \quad \dots, \quad T_m = \varphi_m \left( \frac{\rho_m^*}{\rho_{m0}^*} \right), \quad (12.14)$$

где  $T_j$  – абсолютные индексы системы, определяемые для каждого компонента системы по характерному перечню атрибутивных переменных. Подобным образом может быть построено несколько различных шкал для измерения абсолютных индексов и создан набор уравнений состояния для конкретных стран мира. Отличия в уравнениях для различных стран мира от уравнений среднестатистического состояния вида (12.14) будут связаны с особенностями этих стран. В результате для каждой страны измеренные значения индекса  $T = T(M)$  по эмпирическим шкалам будут несколько отличаться от значений индекса, определенного расчетным путем согласно (12.7) – (12.8) по абсолютным шкалам с учетом опытных значений индикаторов.

При наличии шкал измерения индекса  $T_j = T(M)$  могут быть построены уравнения состояния стран мира относительно атрибутивных переменных. Уравнения состояния в виде мультипликативных функций могут быть определены с любой точностью, так как имеются 10-15 массивов наблюдений за 10-15 лет для каждой страны.

5. Следующим шагом разрабатывается система оценки значений статистического индекса  $W$ , что позволяет совместно с уравнением (12.10) найти коэффициенты  $c_k$  для каждого компонента в процессе ее развития, исходя из среднестатистических тенденций. Для этого оценку значений индекса  $W$  будем проводить путем определения вероятности состояния системы в пространстве  $\Omega_n$  на основании статистических данных.

Определим статистическую вероятность состояния системы исходя из относительных частот событий, которые связаны с распределениями атрибутивных переменных в массиве опытных данных.

Для распределений величины относительная частота (статистическая вероятность) события  $X < x$  определяется по формуле (7.7). Это дает возможность для каждой опытной точки, попадающей в некоторый диапазон (область) группировки данных, найти значение статистической вероятности состояния системы, исходя из имеющегося массива опытных данных.

В окрестности любой точки  $M$  свяжем статистический индекс системы  $W$  теоретической линейной зависимостью со статистической вероятностью  $w$ . В этом случае будем иметь:

$$W = \alpha \cdot \frac{w}{w_0}, \quad (12.15)$$

где  $w_0$  – вероятность состояния системы для условий принятого опорного состояния;  $\alpha$  – некоторый коэффициент пропорциональности, который

можно принять равным единице. Статистическая вероятность  $w$  может быть определена как для событий, связанных с наблюдаемыми значениями только одной выбранной величины, так и для событий, которые отражают факт одновременного наблюдения значений нескольких величин.

Для построения системы оценки статистического индекса  $W$  с одной стороны установим корреляционные связи индекса с распределениями вероятностей характеристических величин наблюдаемых событий, отражающих различные аспекты развития системы. С другой стороны, установим связи индекса с энтропией системы, которая, например, согласно (12.12) может быть представлена в виде:

$$s = c_1 \cdot \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_{10}}\right) + c_2 \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}}\right) + \dots + c_n \cdot \ln\left(\frac{\rho_n}{\rho_{n0}}\right), \quad (12.16)$$

Здесь принято, что  $s_0 = 0$  для условий опорного состояния.

Таким образом, обработка статистических данных о развитии стран мира ведется путем определения теоретического значения энтропии  $s$  по атрибутивным переменным согласно уравнений (12.16) и установления значений величин  $c_k$  по известным данным статистической вероятности  $w$ , для событий, наблюдаемых в совокупности значений атрибутивных переменных. Согласование теоретической модели с опытными данными сводится к построению регрессионного уравнения вида:

$$s = \Psi(W), \quad (12.17)$$

где также принято, что  $s_0 = 0$  для опорного состояния.

Данное уравнение является аналогом соотношения Больцмана в физике  $s = k \cdot \ln W$  применительно к изучаемой задаче, при этом вид функции  $\Psi$  определяется исходя из особенностей изучаемой системы.

Методом последовательных приближений путем исключения аномальных наблюдений окончательно устанавливается вид статистического индекса  $W$  и определяются параметры уравнения (12.16), после чего модель принимается в окончательном виде. Подобный метод, несколько аналогичный подходу построения моделей в термодинамике, позволяет определить коэффициенты  $c_k$  в процессе развития стран мира.

В дальнейшем при установлении связей статистического индекса  $W$  с различными событиями также используем принцип замещения объекта оценки некоторой другой величиной, в данном случае вероятностью наблюдаемых характерных событий по каждому компоненту системы.

В качестве таких событий могут выступать индикаторы младенческой и детской смертности, число случаев возникновения заболеваний, например, туберкулеза или СПИДа, рождаемость, число пользователей Интернет, количество абонентов мобильной связи, показатели убийств и ограблений, расходы на здравоохранение, образование и т.д. Для этих индикаторов может быть оценена статистическая вероятность распределения данных и установлена связь статистического индекса  $W$  с этой вероятностью.

Подобная методика обработки данных применяется для каждого компонента системы, поэтому необходима автоматизированная обработка информации в связи с трудоемкостью вычислений.

Следует отметить, что теоретически данная модель переопределена за счет установления возможных связей вида  $T_j = \varphi_j(t_j)$  и  $s_j = \Psi(W_j)$ . Уравнения  $T = \varphi_j(t_j)$  определяют некоторую моделирующую среду для описания наблюдаемых состояний системы, в то время как уравнения  $s_j = \Psi(W_j)$  позволяют оценивать вероятности таких состояний.

В термодинамике основной упор при построении моделей делается на измерение абсолютной температуры и построение на основе этого уравнений состояний веществ. Методы экспериментального определения вероятностей состояния систем в термодинамике слабо проработаны, такая оценка осуществляется косвенно через систему измерения количества теплоты и значения теплоемкостей.

В нашем случае система определения абсолютного индекса дает возможность построить аналитический вид поля величины  $T$ , как моделирующей среды, а оценка вероятности состояния системы – увязать аналитические зависимости с опытными данными.

7. Следующим этапом для каждой страны в процессе комплексной оценки следует определить функции состояния системы (потенциал  $P$ , энтропию  $s$  и трансергию  $u$ ), которые выступают в качестве обобщенных переменных.

Функции состояния определяют многомерные криволинейные координаты поля величины  $W$ , при этом каждая страна в процессе своего развития в пространстве  $\Omega_n$  будет занимать некоторое положение относительно этих координат. Это позволяет объективно определить ранг страны в иерархическом множестве других стран по различным компонентам системы. Энтропия будет определять направление развития страны относительно опорного состояния, потенциал – принадлежность точки некоторой поверхности уровня, ортогональной линиям энтропии, при условии определенной вероятности состояния системы (постоянной энтропии), а трансергия – это одна из координат, определяющая положение страны на поверхности уровня.

При известных абсолютном индексе  $T$  и энтропии системы  $s$  значение трансергии  $u = c_n \cdot T$  определяется путем установления уравнения сохранения для всего массива опытных данных:

$$T \cdot ds = du + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \cdot \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_{k-1} \cdot \xi_{k+1} \cdot \dots \cdot \xi_n d\xi_k, \quad (12.18)$$

где коэффициенты  $\alpha_k$  находятся путем регрессионного анализа.

В свою очередь, согласно уравнения (10.8) потенциал развития страны относительно опорного состояния будет равен:

$$P = \frac{\xi_1^2 - 1}{c_1} + \frac{\xi_2^2 - 1}{c_2} + \dots + \frac{\xi_n^2 - 1}{c_n}, \quad (12.19)$$

где принято, что потенциал  $P$  равен нулю для опорного состояния.

Потенциал является наиболее удобной величиной для обобщенного определения ранга страны при ее развитии в пространстве  $\Omega_n$ .

8. После построения общей модели развития системы определяется статус Украины, который комплексно характеризует ее состояние среди стран мира в различные годы. Проводится также сравнение положения страны относительно некоторых индикативных объектов, в качестве которых взяты страны, имеющие определенный интерес при проведении оценки. Такими странами приняты:

- среди стран с очень высоким уровнем человеческого развития – Норвегия, Исландия, Швеция, Канада, Япония, США, Франция, Италия, Англия, Германия, Греция, Словения, Чешская республика, Венгрия, Польша, Эстония, Литва, Словакия, Латвия;

- среди стран с высоким уровнем человеческого развития – Болгария, Румыния, Российская федерация, Македония, Беларусь, Бразилия, Казахстан, Армения, Грузия, Азербайджан, Турция;

- среди стран со средним уровнем человеческого развития – Китай, Египет, Молдова, Узбекистан, Кыргызстан, Индия;

- среди стран с низким уровнем человеческого развития – Кения, Пакистан, Нигерия, Эфиопия, Нигер.

9. На заключительном этапе анализа определяются рейтинги для каждой страны (ранг развития страны), проводится визуализация актуальных данных, делаются выводы и разрабатываются предложения для оптимизации процесса развития.

## 12.5 Оценка статуса Украины в современном мире

В связи с большим объемом аналитических работ, результаты которых могут составить сами по себе отдельную книгу, для примера проведем оценку статуса Украины только по нескольким компонентам развития стран мира. Комплексную оценку выполним на основе зависимостей (12.7) для абсолютного индекса системы и зависимостей для определения энтропии (12.10) – (12.12), а также уравнений (12.15) – (12.19). Целью анализа данных является проверка гипотезы о существовании статистического индекса  $W$ , установление возможности построения шкалы абсолютного индекса  $T$  и определение значений величин  $c_k$ . Для этого предварительно изучим связи различных индикаторов развития стран с абсолютным индексом по данным международной организации ПРООН. Сегодня в базе данных данной организации находится около 50 индикаторов и индексов для 187 стран мира. Информация не является абсолютно полной. Например, данные по детской смертности в возрасте до 5 лет приведены для 1970, 1980, 1990,

2000, 2005, 2007 – 2009 годов. Данные для удельного потребления энергии странами только для 1980 и 2003 годов. Однако большинство показателей стран меняется достаточно медленно. К примеру, детская смертность в Украине с 1970 по 2010 годы изменилась с 34 до 13 смертей на 1 тысячу живорожденных (в целом по миру в среднем она снизилась с 146 до 75 смертей). В свою очередь, младенческая смертность в Украине с 1970 по 2010 год снизилась с 22 до 11 смертей на одну тысячу живорожденных, а потребление энергии в целом по миру с 1980 по 2003 год в среднем возросло с 1573 до 2490 кВтч на душу населения. Анализ показывает, что за 30 – 40 лет для большинства показателей стран мира наблюдаются изменения значений в среднем не более, чем в 1,5 – 2,5 раза.

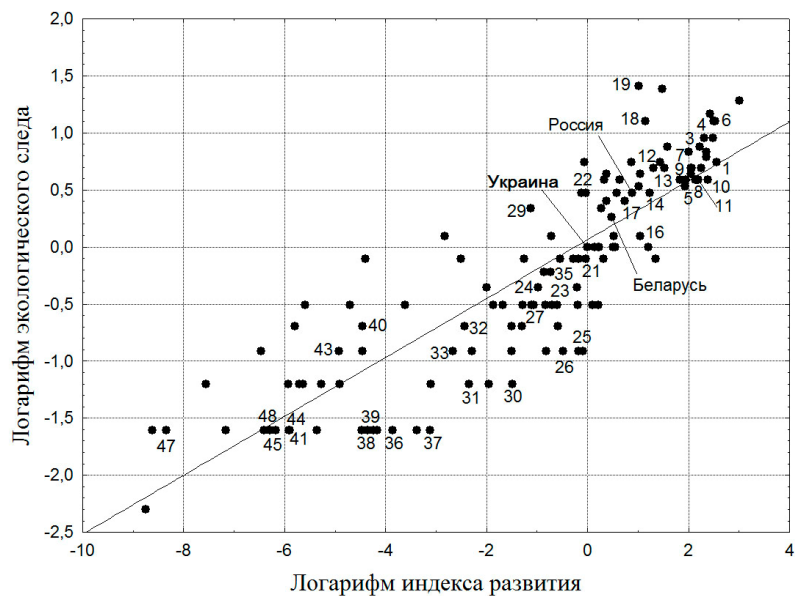
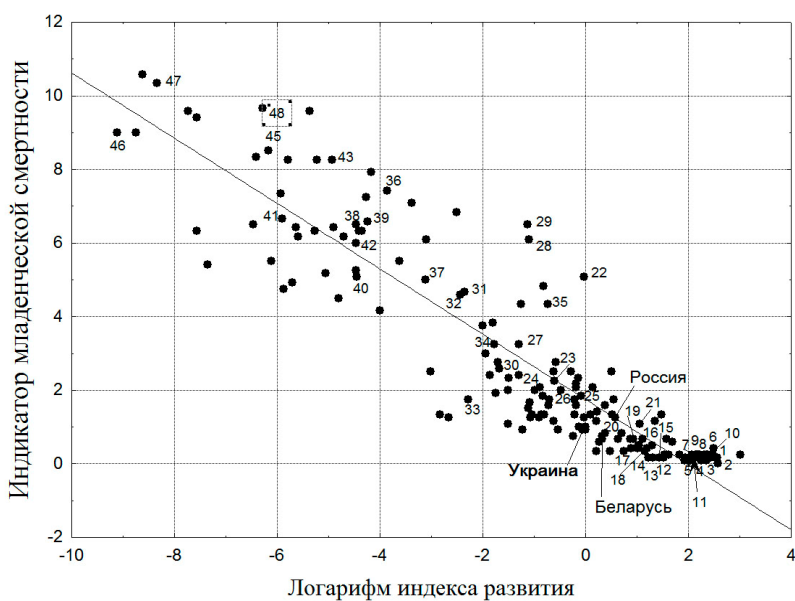
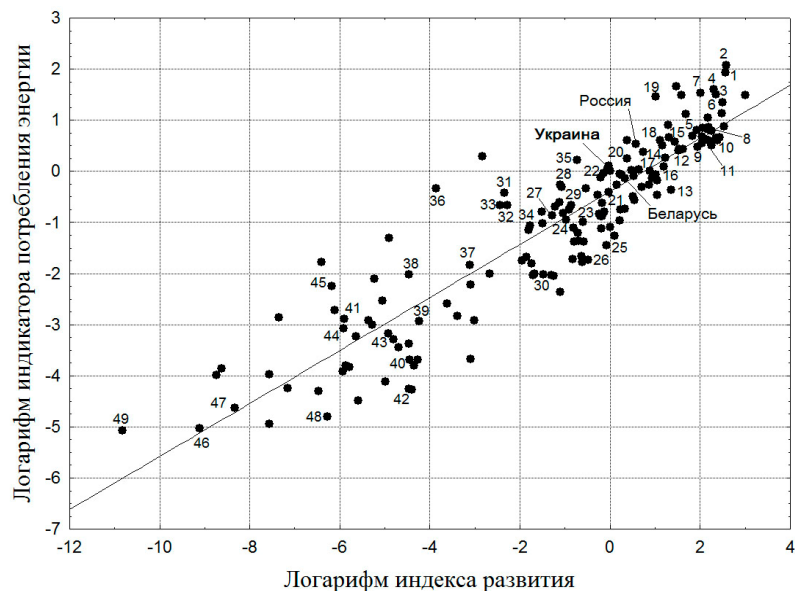
С 2000 года информация по основным индикаторам развития является достаточно полной, позволяющей применить данный метод интеллектуального анализа данных. В качестве атрибутов системы выберем принятые при расчете индекса человеческого развития показатели: ожидаемую продолжительность жизни ( $\rho_1$ ), уровень грамотности населения ( $\rho_2$ ), коэффициент охвата населения средним и высшим образованием ( $\rho_3$ ), ВВП страны в пересчете по ППС ( $\rho_4$ ), а также дополнительно долю городского населения ( $\rho_5$ ). Первые четыре показателя до 2010 года входили в методику ПРООН как атрибутивные переменные. После 2010 года методика оценки изменилась, при этом показатель  $\rho_1$  остался, а остальные показатели были заменены.

Построим предварительно абсолютный индекс развития в виде:

$$T = a \cdot \frac{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \rho_4 \cdot \rho_5}{\rho_{10} \cdot \rho_{20} \cdot \rho_{30} \cdot \rho_{40} \cdot \rho_{50}}, \quad (12.20)$$

где  $\rho_{10}, \dots, \rho_{50}$  значения геометрических вероятностей  $\rho_1, \dots, \rho_5$  для Украины в 2004 году, которые определяются при значениях индикаторов равных  $I_1 = 66,1$  лет,  $I_2 = 99,4\%$ ,  $I_3 = 85\%$ ,  $I_4 = 6394$  дол. США (по ППС),  $I_5 = 67,6\%$ , а параметр  $a$  примем равным единице.

Для установления связей с показателями развития стран выберем различные индикаторы, отражающие состояние основных компонентов системы, а именно: удельное потребление энергии; младенческую и детскую смертность; общую численность населения и количество населения до 15 лет и свыше 65 лет; фертильность; случаи заболевания туберкулезом и ВИЧ; количество врачей 1 тыс. человек; количество пользователей сети Интернет и абонентов сотовых сетей на 1 тыс. человек; коэффициент Джинни; импорт и экспорт в процентах от ВВП; расходы на образование, здравоохранение, науку, военные расходы; численность студентов естественнонаучных и технических вузов; численность вооруженных сил; удельные выбросы диоксида углерода; жертвы преступлений и т.д. (всего около 50 индикаторов). Результаты анализа связи некоторых индикаторов с абсолютным индексом системы представлены на рисунках 12.1 и 12.2. Видно, что даже предварительный

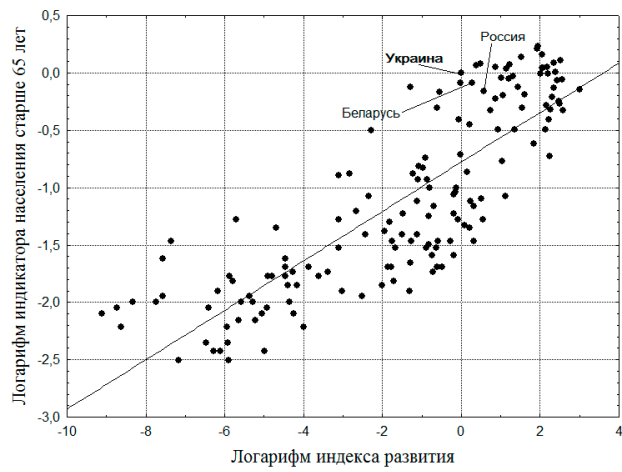


**Страны мира:**

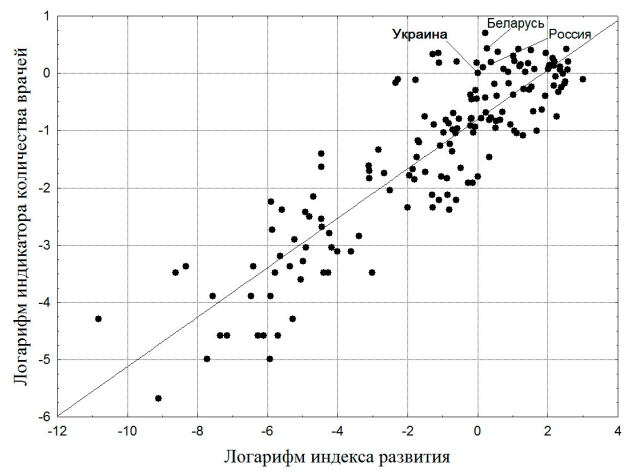
- 1 – Норвегия;
- 2 – Исландия;
- 3 – Швеция;
- 4 – Канада;
- 5 – Япония;
- 6 – США;
- 7 – Финляндия;
- 8 – Франция;
- 9 – Италия;
- 10 – Англия;
- 11 – Германия;
- 12 – Греция;
- 13 – Словения;
- 14 – Португалия;
- 15 – Чехия;
- 16 – Венгрия;
- 17 – Польша;
- 18 – Эстония;
- 19 – ОАЭ;
- 20 – Болгария;
- 21 – Румыния;
- 22 – Казахстан;
- 23 – Армения;
- 24 – Китай;
- 25 – Перу;
- 26 – Филиппины;
- 27 – Грузия;
- 28 – Азербайджан;
- 29 – Туркменистан;
- 30 – Индонезия;
- 31 – Кыргызстан;
- 32 – Узбекистан;
- 33 – Молдова;
- 34 – Монголия;
- 35 – ЮАР;
- 36 – Таджикистан;
- 37 – Индия;
- 38 – Пакистан;
- 39 – Конго;
- 40 – Судан;
- 41 – Йемен;
- 42 – Гаити;
- 43 – Нигерия;
- 44 – Ангола;
- 45 – Мозамбик;
- 46 – Эфиопия;
- 47 – Гвинея-Бисау;
- 48 – Руанда;
- 49 – Буркина-Фасо

Рис. 12.1. – Зависимости различных индикаторов от абсолютного индекса развития стран мира

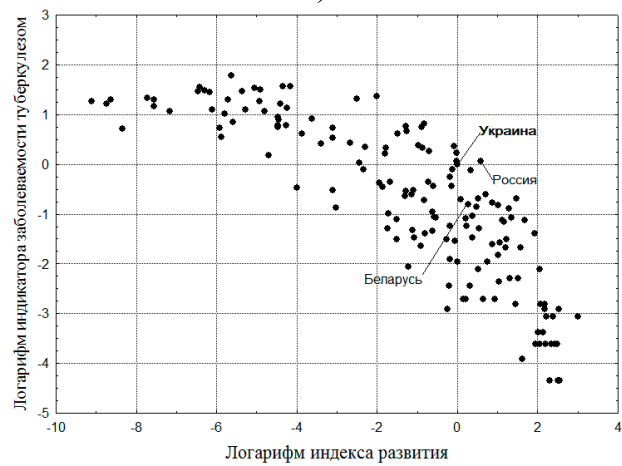




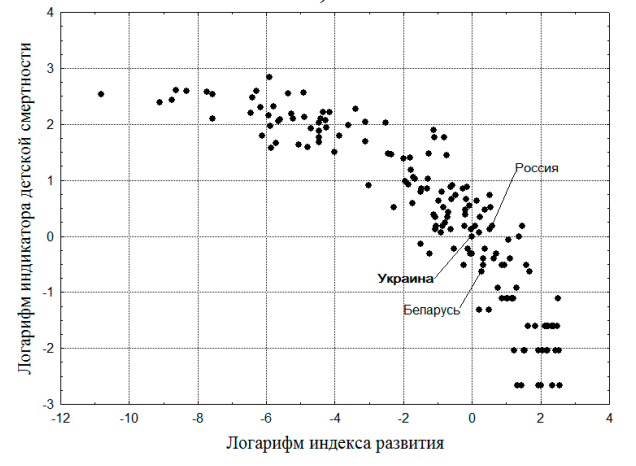
а)



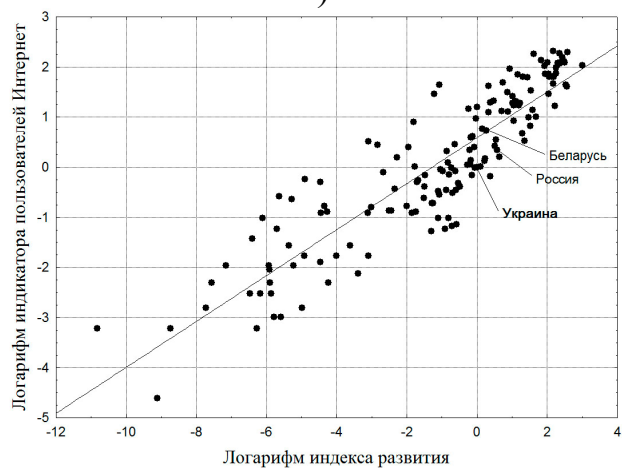
б)



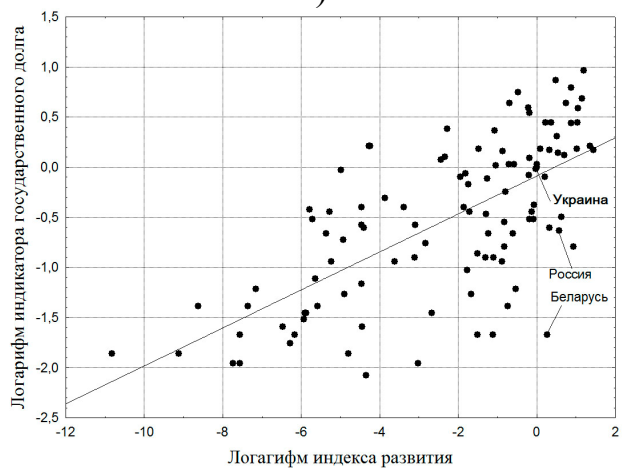
в)



г)



д)



е)

Рис. 12.2. – Зависимости различных индикаторов от абсолютного индекса развития стран мира:

- а) доля населения старше 65 лет; б) удельное количество врачей; в) индикатор заболеваемости туберкулезом; г) индикатор детской смертности; д) количество пользователей Интернет; е) индикатор государственного долга

анализ данных показывает возможность построения абсолютного индекса для многих компонентов системы. В базе данных ПРООН из почти 50 индикаторов значимые связи с атрибутивными переменными системы

установлены для более чем 30 индикаторов. Наиболее значимые связи абсолютного индекса развития установлены с индикаторами удельного потребления энергии, младенческой и детской смертности, заболеваемости населения туберкулезом, с показателями, характеризующими доступ к коммуникационно-информационным технологиям и т.д.

В свою очередь, ряд экономических показателей стран мира не имеет тесных связей с индексом развития  $T$ , что указывает на необходимость поиска в этом случае иных атрибутивных переменных или говорит о несправедливости принятой гипотезы о существовании статистического индекса  $W$  для экономического компонента системы.

Теперь для построения шкал абсолютного индекса  $T_j$  определим наиболее значимые уравнения взаимосвязи индекса с различными индикаторами стран мира. В таблице 12.3 приведены характеристики уравнений для основных индикаторов. Естественно, что для каждого компонента системы наблюдается свой перечень значимых атрибутивных переменных и характерных индикаторов.

Таблица 12.3. – Зависимости различных индикаторов от абсолютного индекса развития стран мира в 2004 году

Индикаторы	Регрессионное уравнение вида $T_j = t_j$	Атрибутивные переменные	Коэф. корреляции
Удельное потребление энергии, $t_e$	$T = 1,514 \cdot t_e^{1,178}$	$\rho_2, \rho_4, \rho_5$	0,92
Младенческая смертность, $t_{ml,s}$	$T = 1,400 \cdot \exp(-0,233 \cdot t_{ml,s})$	$\rho_1, \rho_4$	0,91
Детская смертность, $t_{d,s}$	$T = 4,22 \cdot \exp(-0,743 \cdot t_{d,s} + 0,028 \cdot t_{d,s}^2)$	$\rho_1, \rho_4$	0,93
Количество врачей, $t_{doc}$	$T = 4,219 \cdot t_{doc}^{1,810}$	$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$	0,89
Пользователи Интернет, $t_{int}$	$T = 0,695 \cdot t_{int}^{1,212}$	$\rho_1, \rho_4, \rho_5$	0,89
Абоненты сотовых телефонов, $t_{mob}$	$T = 0,913 \cdot t_{mob}^{1,268}$	$\rho_4, \rho_5$	0,90

В целом шкалы абсолютного индекса на основе (12.7) могут быть построены для следующих компонентов человеческого развития: демография, энергетика, образование, здоровье, сфера технологий, окружающая среда и т.д. Все это говорит о возможности построения моделирующей среды для данных компонентов системы. Атрибутивные переменные для некоторых компонентов системы указаны в таблице 12.3.

Для установления возможности определения значений величин  $c_k$  построим зависимости статистической вероятности распределения каждой из атрибутивных переменных от распределения геометрических вероятностей этих же переменных. Результаты анализа данных приведены

на рисунках 12.3, 12.4. Из приведенных данных видно, что существуют практически функциональные зависимости между статистическими и геометрическими вероятностями распределения атрибутивных переменных. Данные зависимости в каждом конкретном случае обладают выраженными особенностями и имеют чаще всего нелинейный вид. Все это говорит об очень тесной взаимосвязи одномерных вероятностных распределений атрибутивных величин.

Данные рис. 12.3 и 12.4 указывают на возможность существования тесной связи между статистическим индексом  $W$  и абсолютным индексом  $T$ , что является, в свою очередь, следствием взаимосвязи статистических и геометрических вероятностей распределения переменных.

Покажем общую процедуру построения системы измерения человеческого развития на примере, когда в качестве индикатора эмпирической шкалы для анализа процессов принимают удельное потребление энергии.

С этой целью на основе опытных данных для стран мира определим вероятность многомерного распределения, когда совместно наблюдаются значения атрибутивных переменных  $\rho_2, \rho_4, \rho_5$ . Для этого будем использовать алгоритмы оценки вероятности событий, приведенные в разделе 7.3. Далее свяжем значение установленной вероятности совместных событий со значениями атрибутивных переменных  $\rho_2, \rho_4, \rho_5$ , отнесенных, в свою очередь, к величинам  $\rho_{20}, \rho_{40}, \rho_{50}$ , которые соответствуют опорному состоянию.

Это позволит нам согласно (12.16) определить функцию энтропии системы и величины  $c_k$  на множестве опытных данных, характерных для стран мира. В связи с тем, что многомерная нелинейная функция вероятности в преобразованных координатах описывается приближенной линейной зависимостью, то в совокупности будет наблюдаться определенный разброс опытных точек (рис. 12.5).

При построении графика значение  $w_0$  равно 0,4215, а величина энтропии  $s$  была получена равной:

$$s = \ln(W); \quad s = 1,4604 \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}}\right) + 0,0149 \cdot \ln\left(\frac{\rho_4}{\rho_{40}}\right) + 0,6937 \cdot \ln\left(\frac{\rho_5}{\rho_{50}}\right). \quad (12.21)$$

При этом значение коэффициента корреляции между величиной  $W$  и энтропией  $s$  по опытным данным составило 0,982. Тем самым была найдена зависимость между статистическим индексом и энтропией системы вида (12.17).

После того как определена энтропия через вероятность состояния системы, установим связь энтропии с вероятностью событий, характеризующих удельное потребление энергии странами мира.

С этой целью оценим вероятность  $w_e$  распределения этих событий на всей выборке стран мира, найдем значение пробита  $Prob_e$  через значение этой вероятности согласно (6.2) и установим регрессионную

зависимость между величиной  $Prob_e$  и величиной  $E_n = \rho_e / \rho_{e0}$ . Результаты обработки данных приведены на рис. 12.6. Уравнение, которое при сглаживании данных устанавливает связь между величинами  $Prob_e$  и  $E_n = \rho_e / \rho_e$  имеет вид:

$$Prob_e = 0,5774 + 0,9117 \cdot \ln \left( \frac{\rho_e}{\rho_{e0}} \right). \quad (12.22)$$

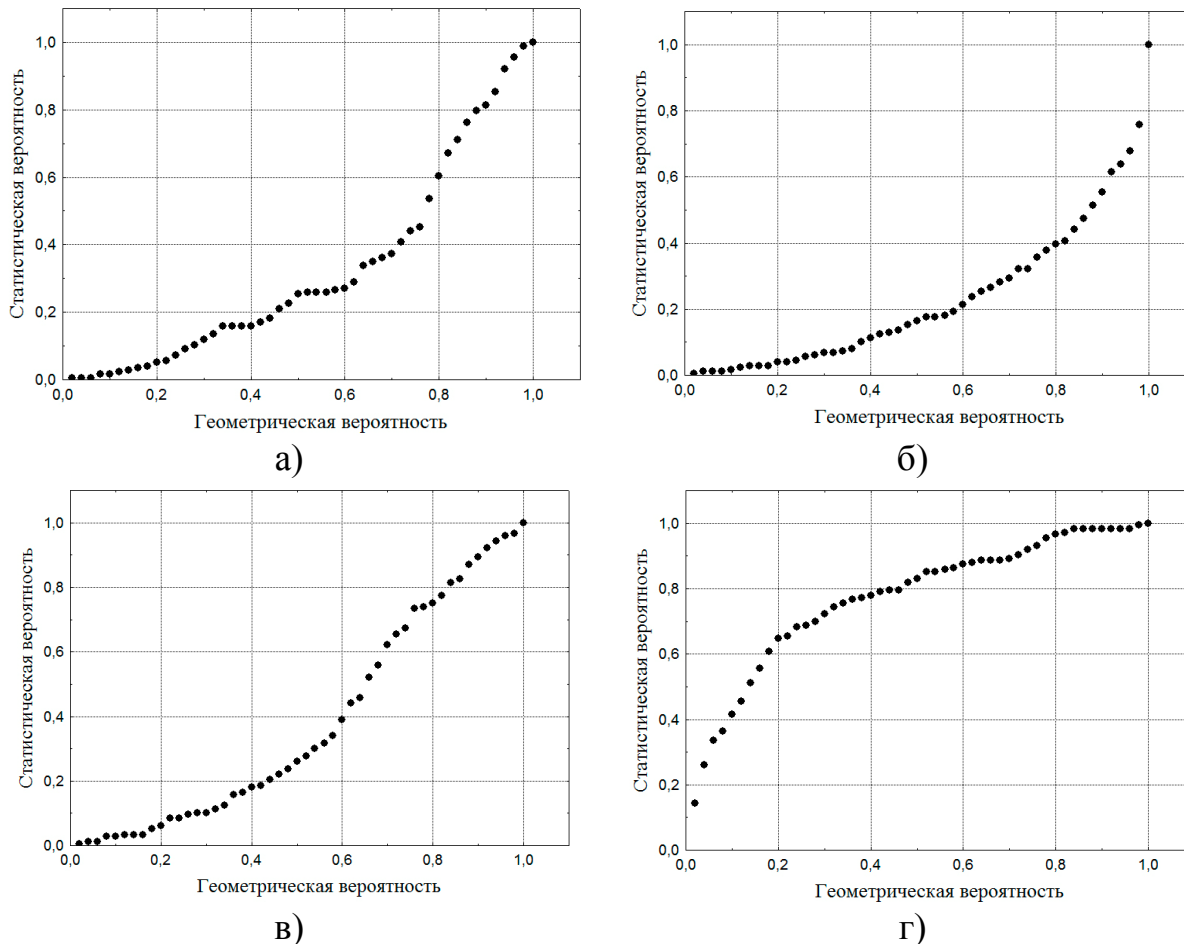


Рис. 12.3. – Зависимости статистических и геометрических вероятностей распределения атрибутивных переменных: а) индикатор ожидаемой при рождении продолжительности жизни; б) индикатор грамотности взрослого населения; в) индикатор охвата населения средним и высшим образованием; г) индикатор валового внутреннего продукта на душу населения

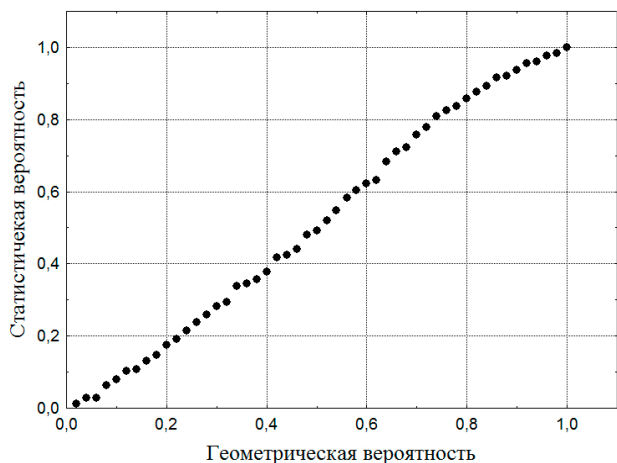


Рис. 12.4. – Зависимость статистической и геометрической вероятностей распределения индикатора доли городского населения

Коэффициент корреляции зависимости (12.22) составляет  $r = 0,985$ .

Вероятность  $w$  совместно наблюдаемых значений атрибутивных переменных  $\rho_2, \rho_4, \rho_5$  может быть связана с вероятностью различных сложных событий, которые отражают тенденции изменений в области энергетики и окружающей среды. В общем случае, такими событиями могут быть потребление энергии на душу населения в странах мира, удельное потребление электроэнергии, ВВП на единицу потребления энергии, объемы выбросов диоксида углерода и т.д. Подобные причинно-следственные связи, выражаемые через вероятности событий, позволят получить модели системы, исходя из различных аспектов ее развития.

Для определения зависимостей между вероятностями  $w_e$  и  $w$  установим связь между  $Prob_e$  и энтропией системы  $s$  на основе опытных данных о развитии стран мира. Соответствующая зависимость имеет вид:

$$Prob_e = 0,6731 + 1,5831 \cdot s, \quad (12.23)$$

причем коэффициент корреляции составил 0,815. Результаты обработки данных приведены на рис. 12.7.

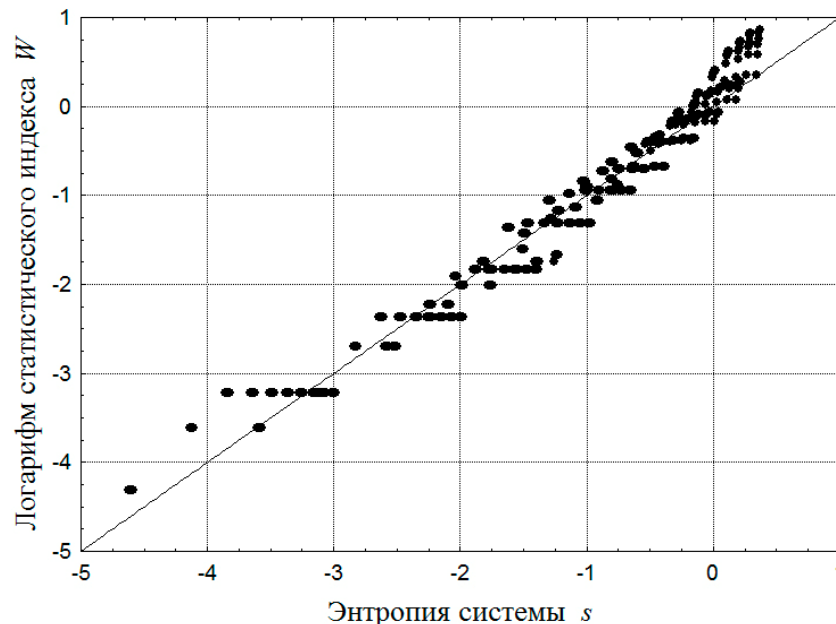


Рис. 12.5. – Зависимость статистического индекса ( $W$ ) от энтропии системы ( $s$ ) для распределения совместно наблюдаемых значений атрибутивных переменных ( $\rho_2, \rho_4, \rho_5$ )

Зная значения абсолютного индекса  $T$  и величин  $c_k$ , легко определить энтропию системы  $s$  на основе зависимости (12.21) и трансергию системы  $u = c_5 \cdot T$ . Поэтому в заключение процесса анализа данных установим параметры уравнения сохранения трансергии вида (12.18) путем обработки массива данных о развитии стран мира. Для этого определяется регрессионная зависимость между переменными. Результаты обработки данных приведены на рис. 12.8, а соответствующее уравнение сохранения трансергии в дифференциальной форме имеет вид:

$$T \cdot ds = du + 1,2938 \cdot \xi_4 \cdot \xi_5 \cdot d\xi_2 - 1,1834 \cdot \xi_2 \cdot \xi_5 \cdot d\xi_4, \quad (12.24)$$

где  $ds$ ,  $du$ ,  $d\xi_2$ ,  $d\xi_4$  – приращения величин относительно опорного состояния. Коэффициент корреляции для уравнения (12.24) составляет 0,985, средняя относительная ошибка – 11%.

На основе полученных данных, исходя из оценки событий, связанных с потреблением энергии, определены энтропия и потенциал развития для каждой страны мира. Результаты ранжирования стран мира для данного случая приведены в таблице 12.4.

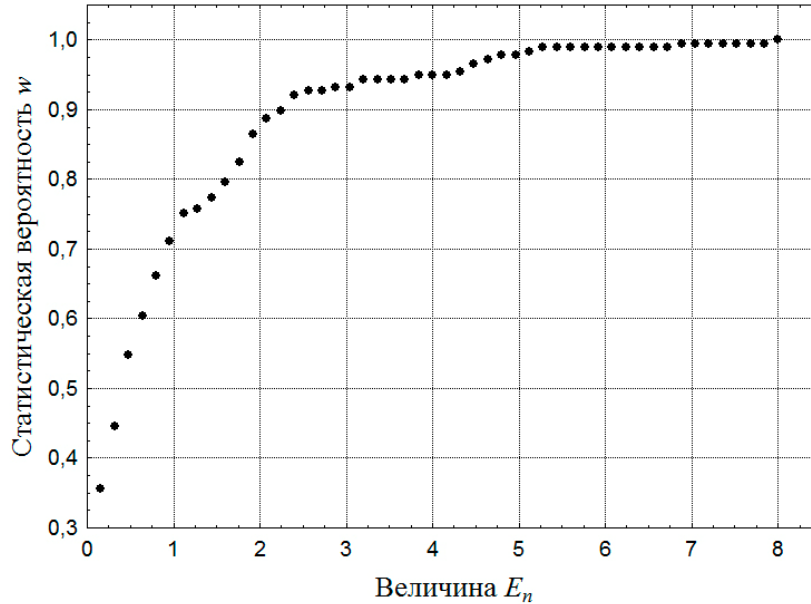


Рис. 12.6. – Зависимость статистической вероятности ( $w_e$ ) распределения удельного потребления энергии странами мира от величины  $\left( E_n = \frac{\rho_e}{\rho_{e0}} \right)$

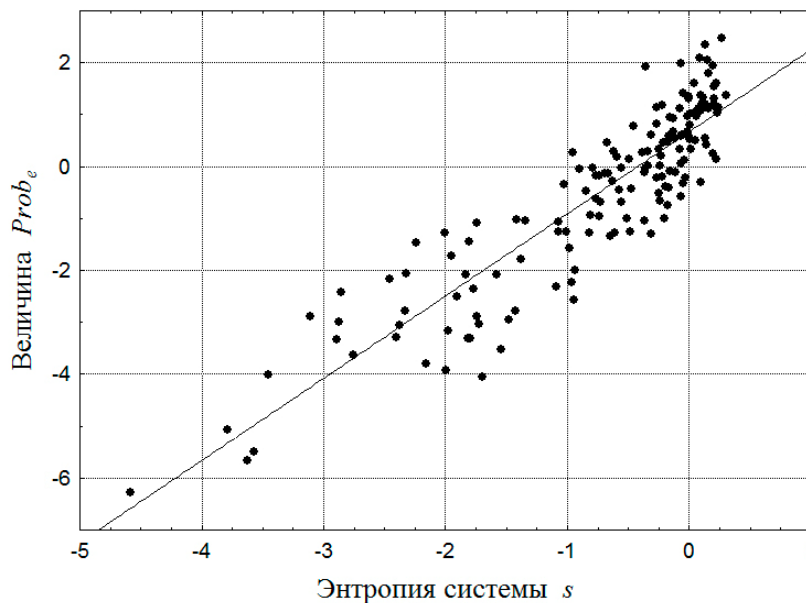


Рис. 12.7. – Зависимость величины ( $Prob_e$ ) для удельного потребления энергии странами мира от энтропии системы ( $s$ )

Аналогичным образом проведено ранжирование стран по факту оценки событий, связанных с различными индикаторами (уровнем младенческой и детской смертности, количеством абонентов сотовых телефонов и т.д. (табл. 12.3).

Результаты анализа развития стран по различным эмпирическим шкалам индикаторов указывают на то, что, несмотря на различия в потенциалах развития по разным моделям, наблюдается высокая устойчивость рангов стран, которые практически очень мало отличаются от значений таблицы 12.4. Полученные результаты позволяют предложить объективный метод оценки развития стран мира и построить систему оценки их параметров и индикаторов. В целом суть метода основывается на гипотезе существования абсолютного индекса  $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$  и связи скалярного поля этого индекса с опытными данными по распределению статистической вероятности состояния системы.

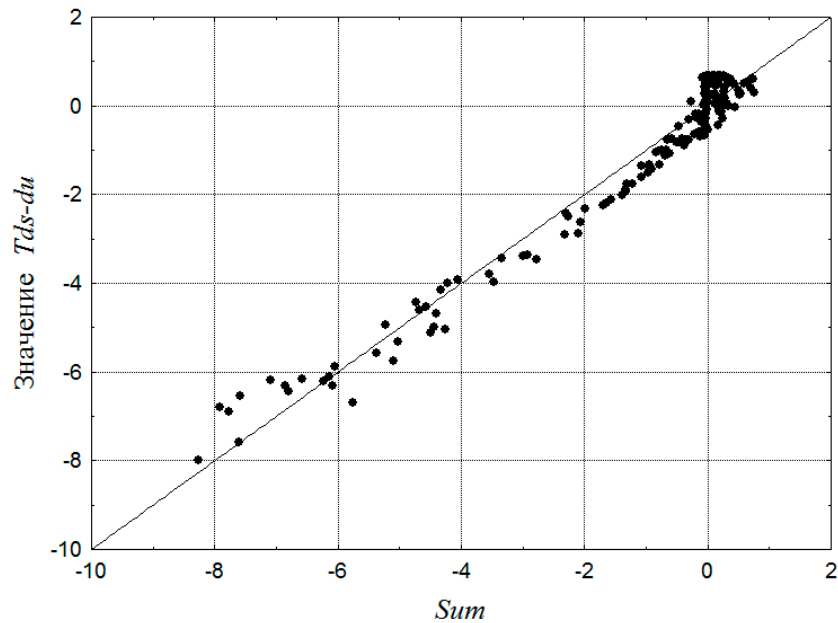


Рис. 12.8. – Результаты обработки данных для уравнения сохранения трансергии вида (12.24)

$$Sum = 1,2938 \cdot \xi_4 \cdot \xi_5 \cdot d\xi_2 - \dots - 1,1834 \cdot \xi_2 \cdot \xi_5 \cdot d\xi_4$$

При справедливости этой гипотезы в пространстве наблюдаемых состояний системы  $\Omega_n$  можно построить криволинейные координаты, которые определяют некоторое поле направлений, отражающее среднестатистические тенденции в развитии системы. Все это позволяет предложить методику оценки человеческого развития, как альтернативу известной методике ПРООН. Особенностью методики является использование объективного подхода и отсутствие необходимости построения экспертных шкал для оценки. Основные положения методики были разработаны и изложены в статьях [6, 7].

Таблица 12.4. – Значения энтропии ( $s$ ) и потенциала ( $P$ ) и рейтинги стран мира при построении шкалы оценки по факту потребления энергии

Страны мира	Значения в 2004 году		Ранги стран согласно предложенной методики		Ранги стран по ИЧР согласно методике ПРООН (2004 г.)
	$s$	$P$	уровень развития (2004 г.)	темпы развития (2004 – 2008 гг.)	
Норвегия	0,1280	1382,7	4	5	1
Исландия	0,2681	1008,3	5	153	2
Швеция	0,1905	795,1	16	15	5
Канада	0,1521	896,6	10	14	6
Япония	-0,0067	778,3	18	21	7
США	0,1606	1475,9	2	13	8
Франция	0,1156	781,3	17	24	16
Италия	0,0038	718,8	20	148	17
Англия	0,2406	870,3	13	30	18
Германия	0,1004	725,7	19	16	21
Греция	-0,1566	428,4	27	22	24
Чехия	0,0785	316,9	34	44	30
Венгрия	-0,0128	226,9	39	145	35
Польша	-0,0666	118,3	48	29	37
Эстония	0,0381	159,6	44	49	40
Литва	0,0030	121,7	47	61	41
Словакия	-0,1281	161,3	43	19	42
Латвия	0,0174	87,84	54	68	45
Болгария	0,0077	22,24	65	50	54
Румыния	-0,2276	28,00	63	43	60
<b>Россия</b>	<b>0,0700</b>	<b>52,60</b>	<b>59</b>	<b>31</b>	<b>65</b>
<b>Беларусь</b>	<b>0,0536</b>	<b>7,08</b>	<b>79</b>	<b>34</b>	<b>67</b>
Бразилия	-0,0364	24,31	64	56	69
<b>Украина</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,00</b>	<b>85</b>	<b>109</b>	<b>77</b>
Казахстан	-0,1346	12,85	74	54	79
Армения	-0,0494	-21,28	112	77	80
Китай	-0,6252	-6,06	91	71	81
Турция	-0,2427	17,35	70	35	92
Грузия	-0,2176	-28,75	119	74	97
Азербайджан	-0,2443	-21,17	110	48	99
Египет	-1,0223	-21,09	109	70	111
Узбекистан	-0,5589	-32,44	139	86	113
Молдова	-0,3566	-32,65	145	83	114
Индия	-1,7407	-27,89	117	99	126
Пакистан	-2,0035	-31,71	132	94	134
Нигерия	-1,0868	-33,84	156	93	159
Эфиопия	-3,4512	-34,55	176	116	170
Нигер	-4,6039	-34,56	177	124	177

Полученные результаты дают также возможность разработать методы, которые позволяют получить ответы на ряд актуальных вопросов.



Например, может ли Украина за десять лет попасть в тридцать наиболее развитых стран мира? Какой выбрать эффективный путь развития страны? По каким компонентам страна имеет наиболее низкие (высокие) темпы развития, и как эти темпы сопоставимы с темпами развития отдельных стран? Естественно, что при анализе статуса оценка должна выполняться по всем компонентам системы и всему множеству показателей и индикаторов развития. Без использования IT-технологий получить в этой области практический инструмент для анализа невозможно.

При условии индикативной оценки развития стран по шкале потребления энергии, на вопрос о возможности для Украины войти в число 30 наиболее развитых стран мира можно ответить отрицательно. Несмотря на наличие в стране атомной энергетики (4 станции), более 25 тепловых электростанций и 10 гидроэлектростанций статус Украины в 2004 году по шкале удельного потребления энергии был невысокий – всего 85 ранг. Кроме того, в 2004 – 2008 годах 109 стран имели более высокие темпы развития. Ранг Украины при оценке развития по данному показателю даже ниже, нежели ранг человеческого развития (77 ранг) по методике ПРООН. В 2004 – 2008 годах самые высокие темпы развития имели Катар, ОАЭ, Кувейт, Норвегия и Сингапур, в свою очередь, самые низкие темпы – Исландия, Ирландия, Кипр, Тонга и ЮАР. За этот период Украина по темпам развития занимала 109 место и существенно отставала от России и Белоруссии, а также большинства стран бывшего СССР.

К первым десяти странам, имеющим самые высокие темпы развития в 2004 – 2008 годах, относятся: Катар, ОАЭ, Кувейт, Бруней, Норвегия, Сингапур, Гонконг, Нидерланды, Австралия и Тринидад и Тобаго. Отсюда видно, что из Большой двадцатки ведущих стран мира (G20) в списке присутствует только Австралия, а из ЕС – только Нидерланды.

В свою очередь, к десяти странам, имеющим самые низкие темпы развития, относятся Никарагуа, Венгрия, Намибия, Кабо-Верде, Италия, ЮАР, Тонга, Кипр, Ирландия, Исландия. Видно, что в списке присутствуют Италия и ЮАР, входящие в группу стран G20, а также четыре страны ЕС. На самом последнем месте в мире по темпам развития находилась Исландия, у которой удельный ВВП в долларах США по ППС уменьшился с 2004 по 2008 годы с 33051 \$ до 22917\$.

Данный метод позволяет оценивать также процессы развития стран, характеризующие переходы объектов с течением времени в новые состояния. Например, среднестатистический мировой путь развития стран по шкале удельного потребления энергии определяется направлением характеристики, которое находится из общего уравнения для энтропии системы:

$$1,4604 \cdot \frac{d\xi_2}{\xi_2} = 0,0149 \cdot \frac{d\xi_4}{\xi_4} = 0,6937 \cdot \frac{d\xi_5}{\xi_5}.$$

Если разработать методы определения уравнений состояний, величин  $c_k$  и других параметров системы оценки развития, исходя не из

среднестатистических тенденций поведения системы, а непосредственно для каждой страны мира, то вполне возможно создать точную теорию прогнозирования развития стран. Указанные выше задачи определяют важные направления будущих исследований в глобалистике.

В целом трудоемкость оценки развития стран определяется не методической сложностью метода, а необходимостью построения множества зависимостей для индикаторов, входящих в различные базы данных о развитии стран мира. Если база данных ПРООН содержит несколько десятков индикаторов, требующих анализа, то база данных Всемирного банка – это уже более тысячи индикаторов. На фоне 186 стран видна явная необходимость автоматизации процесса вычислений и поиска закономерностей в базах данных. Это возможно только при создании специальных ИТ-систем для анализа данных в области Global studies.

Новые ИТ-системы должны предоставлять одновременно сотням пользователям доступ к данным, а также возможности для их визуализации и анализа [8]. Ценность подобных систем заключается в том, что очень небольшой коллектив экспертов, аналитиков и ИТ-специалистов может выполнять объемы работ, которые под силу только целым институтам. Причем, чаще всего, это вики-технологии, используя которые специалисты сообща создают новое знание. Все это выводит деятельность эксперта на новый качественный уровень, так как позволяет применить в исследованиях методы интеллектуального анализа данных.

Особенности развития информационных систем для анализа больших объемов геоданных уже отработаны на примере ИТ-сервиса, созданного для исследования глобальных процессов в климатологии [90]. Система Wikience предназначена для обработки спутниковых данных и мультиспектральных снимков, а также архивов повторного анализа климатических данных. Техническое обеспечение включает в себя высокопроизводительную кластерную сеть на графических видеокартах. В состав сети входит восемь узлов кластера, RAID-массив хранения данных объемом 32 Тб и высокоскоростной канал доступа в Интернет на 1 Гб/с. Интернет-сервис на основе кластера дает возможность обеспечить работу несколько тысяч пользователей одновременно. Архитектура Wikience построена с использованием технологий CUDA и MapReduce. Для развертывания кластерной сети выбрано программное обеспечение Apache Hadoop и операционная система Ubuntu на основе Debian GNU/Linux. Wikience обеспечивает доступ к данным Всемирного климатического центра (объем десятки терабайт), а также данным спутников NASA (Terra, Aqua и Aura) и позволяет ретроспективно представлять в 3D графике более 700 глобальных климатических, метеорологических и экологических параметров с высокой частотой во времени (от 1 часа до 1 дня) и пространстве (до 9×14 км). Данные собираются из множества источников и считываются из более чем 100 форматов хранения данных. Для применения статистических методов и методов ИАД имеется возможность работы в среде анализа данных R.

Подобные системы могут быть реализованы для анализа данных в глобалистике, в процедурах оценки человеческого развития, при исследовании социально-экономического развития стран и регионов мира. В этой области уже сегодня возникает задача интегрирования баз данных и их использования (*data fusion*), а также взаимодействия множества проблемно ориентированных компьютерных систем и применения полуавтоматических алгоритмов поиска закономерностей в данных. Интеграция таких глобальных баз данных со спутниковой информацией, системами 3D визуализации, средами анализа данных (например, средой R) дает возможность выполнять работы, связанные с прогнозированием глобальных процессов на абсолютно новом научном уровне. Создание таких систем достаточно актуально, так как они позволят прогнозировать глобальные процессы и осуществлять поддержку принятия решений, направленных на среднесрочную и долгосрочную перспективу.

Таким образом, международные базы данных индикаторов в комплексе с методами ИАД позволяют установить закономерности развития стран мира. Все это говорит о возможности создания теории оценки развития стран по логике построения аналогичной той, которая применяется сегодня в термодинамике.

## Глава тринадцатая

# МЕТОД СИСТЕМОДИНАМИКИ И ТОКСИКОЛОГИЯ

В качестве иллюстрации возможностей системодинамики было уделено внимание разработке теоретических моделей в области токсикологии, которая является достаточно далекой от точных наук областью знания. В данном разделе мы несколько отойдем от принятого ранее изложения и больше будем использовать принципы и методы, используемые в термодинамике. Однако применение этих принципов не связано с простым переносом положений из одной области знаний в другую. Речь идет, скорее всего, о структурно-логических принципах построения моделей, принятых в термодинамике, и возможности применения этих принципов в токсикологии.

Есть веские причины того, почему для построения системодинамических моделей выбрана такая область знания как токсикология. С одной стороны, этой науке свойственна развитая феноменология. Она отличается доступностью и достаточностью опытных данных, позволяющих получать закономерности на эмпирическом уровне. С другой стороны – это наглядность применения системодинамики в биологической области научных исследований. Есть еще несколько важных причин. Во-первых, хотя термодинамика и токсикология – это очень далекие друг от друга науки, но они имеют одно общее – громадный экспериментальный материал в области анализа свойств веществ, накопленный в процессе проведения экспериментов. В этих науках эмпирическая база формируется непосредственно исследователями, а не пассивно отслеживается во времени. Во-вторых, эксперимент в токсикологии – это работа с живыми объектами, в исследованиях преимущественно используется биология, химия и медицина. В-третьих, в токсикологии основной параметр состояния любой системы – это время. Эта наука оперирует с категориями “жизнь” и “смерть”, что пока невозможно в точных науках. И последнее, наиболее важное: токсикология – это одна из тех немногих наук, где в опыте возможна непосредственная оценка вероятностей. И, в отличие от термодинамики, это делается экспериментально, а не путем теоретического применения статистических методов. Однако, за это знание заплачено миллионами жизней животных при проведении токсикологических экспериментов. В этих экспериментах животные выполняли функцию “измерительных приборов”, так как других способов оценки опасностей человечество пока не знает.

### 13.1. Предмет токсикологии

Современная токсикология является широкой и многогранной областью человеческих знаний. В настоящее время известно около 10 миллионов химических соединений, среди которых более 60 тысяч широко

используются в быту, медицине и хозяйственной деятельности. Обширный человеческий опыт в этой области, накопленный с глубокой древности, указывает на тот факт, что при воздействии на биологический организм практически любое вещество, в зависимости от его количества, может быть нейтральным, полезным или вредным. Считается что токсикология – это наука о токсичности – свойстве, присущем практически всем веществам окружающего мира. В своем самом простом определении токсикология характеризуется как наука о ядах (*греч. toxicon – яд, logos – наука*). В медицинской энциклопедии дается более емкое определение, токсикология – наука, изучающая физические и химические свойства ядов, механизмы их токсического действия на организм и разрабатывающая методы диагностики, лечения и профилактики отравлений.

В основу базовых понятий токсикологии положено свойство токсичности веществ, которое представляет собой способность вещества при его воздействии на биологический организм вызывать негативные последствия различной степени тяжести (токсические эффекты, заболевания, повреждения, гибель).

Токсичность проявляется и может быть изучена только в процессе воздействия вещества на биологические системы разной степени организации (клетки, органы, организмы, популяции и т.д.). Формирование и развитие реакций биосистемы на токсическое действие вещества называется токсическим процессом. Теоретически не существует веществ, лишенных токсичности.

Исходя из сказанного выше, часто предмет токсикологии определяют как учение о токсичности и токсических процессах. Механизмы формирования и развития токсических процессов, их качественные и количественные характеристики определяются в основном химическим строением вещества и воздействующей дозой этого вещества.

Если применить метод системодинамики к токсикологии и строить аналогии на уровне определений (глава 6, подраздел 6.1), то можно сказать, что предметом изучения токсикологии служат все факты биологии и медицины, которые представляют собой статистически закономерный результат явлений, возникающих при воздействии химических веществ на биологические организмы.

Внешние, регистрируемые признаки изменения параметров и характеристик биосистемы при развитии токсического процесса называются у специалистов проявлениями (негативными эффектами, неблагоприятными последствиями, опасными событиями и т.д.). Проявления токсического процесса могут формироваться на клеточном, органном, организменном и популяционном уровнях организации биологического объекта. На клеточном уровне токсические процессы проявляются внешне регистрируемыми структурно-функциональными изменениями клетки (обратимыми или необратимыми), преждевременной гибелью клетки или различными мутациями. Токсический процесс со стороны органов или некоторой системы в целом проявляется

функциональными реакциями (спазмами тканей, падением артериального давления, изменениями в дыхании, лейкоцитозом и т.д.), заболеваниями органов, неопластическими реакциями. На уровне биологического организма токсический процесс может проявляться в регистрации болезней или различных токсических реакций, в констатации летального исхода. В свою очередь на уровне популяций этот процесс связан с ростом заболеваемости и смертности, увеличением числа врожденных дефектов развития, ухудшением демографических характеристик, снижением продолжительности жизни, деградацией особей и популяций в целом и т.д.

В процессе проведения токсикологических экспериментов и оценки химических воздействий токсические процессы на уровне целостного организма разделяют на процессы, развивающиеся по пороговому и беспороговому принципу. В первом случае, при действии веществ в дозах, ниже определенных безопасных уровней (порога действия), токсический процесс не развивается. Однако в области выше порога действия наблюдается выраженная закономерность – чем больше доза, тем более значительны проявления токсического процесса. Во втором случае негативные эффекты, которые носят вероятностный характер, могут возникать при любой дозе вредного вещества (даже крайне малой).

В зависимости от продолжительности взаимодействия химического вещества и организма токсические проявления (отравления, интоксикации) могут быть острыми, подострыми и хроническими.

Острыми называются интоксикации (отравления), которые развиваются в результате однократного или повторного действия значительных количеств веществ. Действие вещества длится в течении небольшого промежутка времени (как правило, от нескольких минут до нескольких суток).

Подострой называется интоксикация, развивающаяся в результате непрерывного или периодического действия средних количеств веществ продолжительностью до 90 суток.

Хронической называется интоксикация, которая развивается в результате продолжительного действия небольших количеств веществ. При хронической интоксикации воздействие может продолжаться в течение нескольких лет или существовать длительный период, соизмеримый с продолжительностью жизни биологического вида.

В зависимости от интенсивности воздействия токсический процесс может приводить к отравлениям различной степени тяжести. Тяжелое отравление – это угрожающее для жизни объекта состояние. В процессе острых интоксикаций у биообъектов могут наблюдаться смертельные отравления (смертельные эффекты). Отравление средней степени тяжести – это интоксикация, при которой возможно развитие осложнений и болезней, необратимые повреждения органов и систем организма и т.д. Легкие отравления – это интоксикации, которые заканчиваются выздоровлением. Существуют также и другие формы токсического процесса – транзиторные токсические реакции, аллобиотические

состояния, генетические поражения и т.д. Говорят, что вещества, которые приводят к образованию специфических эффектов, обладают аллергенным, эмбриотропным, мутагенным, канцерогенным и другим действием [25, 26, 59, 71, 87].

Структурно токсикология как наука содержит несколько разделов: токсикометрия, токсикодинамика, токсикокинетика и т.д.

Токсикометрия – это достаточно обширный раздел токсикологии, что объясняется значительным перечнем потенциально опасных химических веществ и широким спектром различных форм и проявлений токсического процесса. Предметом исследования токсикометрии являются методология и методы оценки токсичности химических веществ. Токсикодинамика связана с изучением механизмов, лежащих в основе токсического действия веществ, а также закономерностей формирования токсических процессов и их проявлений. В свою очередь, токсикокинетика изучает механизмы проникновения токсикантов в организм, закономерности их распределения, метаболизма и выведения.

Основные задачи токсикологии решаются в ходе экспериментальных исследований на животных, в процессе лечения отравлений человека или путем проведения эпидемиологических исследований. На основе полученных данных устанавливаются критерии вредности токсических веществ, обосновываются и разрабатываются предельно допустимые концентрации, референтные уровни и другие безопасные параметры воздействия токсикантов, обеспечивается решение практических задач. Полученные знания используются при разработке нормативных и правовых актов в области профилактики отравлений человека на производстве и в быту, при совершенствовании методов диагностики и лечения острых отравлений и болезней, связанных с интоксикациями вредными веществами и ядами.

В своей основе токсикология является преимущественно экспериментальной наукой. Обычно общие закономерности протекания токсических процессов и взаимодействия химических веществ и биологических систем изучаются путем проведения экспериментов на животных, с последующей экстраполяцией данных с животных на человека. Многие опытные данные получены за счет осуществления эпидемиологических исследований, которые проводятся среди профессиональных групп и населения, а также клинических исследований острых и хронических отравлений человека и возникающих при этом болезней.

### **13.2. Краткие сведения из токсикометрии**

Задачи исследований токсикометрии связаны с оценкой токсичности химических веществ и установлением количественных характеристик причинно-следственных связей между фактом воздействия токсиканта и развитием различных форм токсического процесса. Классификация

токсикантов охватывает несколько рубрик, в которые входят тысячи веществ. По происхождению токсиканты разделяют на естественные вещества (биологические яды, неорганические и органические вещества) и синтетические соединения. По условиям воздействия выделяют загрязнители окружающей среды, загрязнители производственной среды, бытовые токсиканты, поражающие вещества (боевые отравляющие вещества, специальные агенты) и т.д. По способам использования химических веществ человеком – вещества, применяемые в промышленности, пестициды, лекарства, топлива и масла, растворители и красители, побочные продукты и отходы и т.д. По опасности воздействия вещества делят на четыре класса: чрезвычайно опасные, высокоопасные, умеренно опасные и малоопасные. В токсикологии, как и в любой экспериментальной науке, очень много способов классификации веществ, которые приводятся различными авторами.

Сегодня среди токсикантов биологического происхождения изучено несколько сотен веществ. В основном это растительные и животные яды, а также бактериальные токсины. Среди распространенных неорганических веществ наибольшую опасность представляют металлы и их соединения (ртуть, кадмий, хром, свинец и т.д.), а также газообразные вещества (оксид углерода, сероводород, оксиды азота и серы, озон и т.д.). Токсические органические соединения образуются при неполном сгорании топлива, фотохимических реакциях в атмосфере, промышленной и сельскохозяйственной деятельности, работе транспорта и т.д. К ним относятся присутствующие в окружающей среде вещества: бенз(а)пирен, формальдегид, бензол, толуол и т.д. Классы органических растворителей, лекарств, пищевых добавок включают сотни изученных веществ. В связи с бурным ростом производства новых веществ, список неизученных соединений постоянно расширяется, несмотря на то, что тысячи лабораторий работают над исследованиями веществ.

Каждое вещество может отличаться широким спектром проявлений токсического процесса и его показателями:

- особенностями воздействия, присущими каждому биологическому объекту (при действии на человека, животных или растения) и спецификой действия, связанной с видовыми, межвидовыми и возрастными особенностями;

- видом и спецификой наиболее характерного токсикологического воздействия (общетоксическое, раздражающее, канцерогенное, бластмогенное, мутагенное, нейropаралитическое, эмбриотропное, наркотическое, аллергенное, гонадотропное и т.д.);

- количественными показателями и характеристиками токсичности при действии на биообъект, имеющими обычно явно выраженный вероятностный характер;

- особенностями проявлений токсического процесса на клеточном, органном, организменном, популяционном уровне и т.д.



Если учесть существенную неопределенность и вероятностный характер данных, получаемых в токсикологических экспериментах, то становится понятной вся сложность токсикологии как эмпирической науки. Указанные выше факторы определяют высокую трудоемкость, значительную продолжительность и стоимость токсикологических экспериментов по определению показателей токсичности химических веществ.

Токсикологические эксперименты в токсикометрии чаще всего направлены на установление количественных характеристик зависимости «доза-эффект», которая представляет собой связь между дозой и степенью выраженности того или иного эффекта при токсическом воздействии. Изучение зависимости «доза-эффект» служит основой для установления показателей токсичности веществ. Спектр проявлений токсического процесса определяется строением опасного вещества, а выраженность развивающегося эффекта является функцией количества действующего токсиканта. Для характеристики количества вещества, действующего на биологический объект, используют понятие дозы. *Доза* – это основная мера экспозиции, которая характеризует количество химического вещества, воздействующее на организм. В подавляющем большинстве случаев в экспериментах регистрируется общая закономерность – с увеличением дозы увеличивается степень повреждения биообъекта. Единица измерения дозы – мг/кг, т.е. при расчете дозы количество воздействующего вещества относят к весу биологического объекта. Например, лабораторной белой мышке весом 100 г введено в желудок вещество в количестве 2 мг. Это означает, что животное получило дозу в размере 20 мг/кг. В случае, если изучается токсикологическое воздействие на условно одинаковые биообъекты при определенном времени действия токсиканта, то оценка опасности веществ может проводиться на основе определения концентраций веществ в окружающей среде (например, это распространено при ингаляционных воздействиях).

В зависимости от степени воздействия вещества формы проявления токсического процесса могут быть различными, как по специфике, так и по тяжести эффектов [59]. Для примера характеристики токсического процесса для человека при загрязнении атмосферного воздуха формальдегидом приведены в таблице 13.1.

На проявления токсического процесса при воздействии оказывает существенное влияние внутри- и межвидовая изменчивость организмов. Особи, относящиеся к одному и тому же виду, существенно отличаются друг от друга по биохимическим, физиологическим и морфологическим характеристикам. Эти отличия в большинстве случаев обусловлены их генетическими особенностями и возрастом. Еще более выражены, в силу тех же причин, межвидовые различия. Поэтому дозы веществ, при которых вызываются повреждения организмов одного и того же вида (и тем более разных видов) обычно существенно отличаются. Значение коэффициентов неопределенности (коэффициентов безопасности) при оценке

количественных показателей воздействий может составлять от 1 до 10, а в отдельных случаях и выше. Следовательно, зависимость «доза-эффект» отражает свойства не только токсиканта, но и организма, на который он действует. Поэтому на практике изучение токсичности вещества требует проведения экспериментов на различных биологических объектах. В свою очередь, неопределенность и вероятностный характер опытных данных приводит к необходимости при обработке результатов экспериментов применения методов теории вероятности и математической статистики. Именно поэтому токсикологические эксперименты обычно проводятся на группах (состоящих из нескольких особей) условно одинаковых объектов (например, лабораторных мышах заданного веса, пола, возраста и т.д.).

Таблица 13.1. – Зависимость между концентрацией формальдегида во вдыхаемом воздухе и выраженностью токсического процесса

Концентрация		Клинические проявления
см <sup>3</sup> /м <sup>3</sup> – ppm	мг/м <sup>3</sup>	
0,01 – 0,05	0,012 – 0,06	Раздражение глаз
0,05 – 1,00	0,06 – 1,23	Непереносимый запах
1,00 – 3,00	1,23 – 3,69	Раздражение верхних дыхательных путей
3,00 – 10,0	3,69 – 12,3	Сильное раздражение слизистой дыхательных путей
10,0 – 30,0	12,3 – 36,9	Раздражение глубоких дыхательных путей
30,0 – 100,0	36,9 – 122,9	Воспалительный процесс в легких, токсический отек

Оценка зависимости «доза-эффект» осуществляется на основе проведения специальных экспериментов, методики которых стандартизованы [26, 71]. Изучение токсичности веществ проводится в остром опыте на животных путем однократного или кратковременного поступления химического соединения естественным путем – вдыхание с воздухом, введение в желудок или нанесение на кожу, а в хроническом опыте – путем длительного воздействия вещества на объект исследования (время воздействия до 3 – 4 месяцев). Для экспериментов животных особым образом отбирают. В зависимости от задач исследования это могут быть мыши, крысы, кролики, морские свинки и т.д. Обычно используются животные одного пола, возраста и веса, содержащиеся на определенной диете и при стандартизованных условиях окружающей среды. Группы животных для опытов формируют методом случайных выборок. В процессе опыта изучают целый ряд показателей организма, позволяющих судить об интенсивности воздействия. В остром и хроническом опыте периодически во времени оценивается количество объектов, у которых возникают устойчивые негативные эффекты определенной степени тяжести. При этом могут рассматриваться следующие категории тяжести эффекта: “нет эффекта”, “слабый эффект”, “умеренный эффект”, “выраженный эффект”. С увеличением дозы увеличивается часть животных в изучаемых группах, у которых выражено развился

оцениваемый эффект. В летальном опыте основной критерий воздействия – смерть животного (смертельный эффект). Краткая методика эксперимента и обработки данных на примере изучения ингаляционных воздействий приведены в шестой главе (зависимости (6.1) – (6.3)).

Вероятностную оценку проводят по частоте возникновения тех или иных событий, которые и являются опытным фактом возникновения того или иного эффекта [26]. Для определения вероятности (частоты) эффектов применяют уравнение (6.1). Оценка функционального состояния организма проводится не менее чем по 4 – 6 интегральным и 3 – 4 специфическим показателям, то есть установление факта появления события (наличие повреждения, заболевания, последствий и т.д.) основывается на методах комплексной оценки. Это связано с тем, что сложное событие, связанное с заболеванием или неявным повреждением, не всегда можно достоверно констатировать. Поэтому результаты экспериментов в исследуемой группе всегда сравнивают с результатами в контрольной группе, где воздействие отсутствует. Для обоснованности выводов используют статистические критерии: изменения в испытуемой группе достоверно отличаются от контрольной группы ( $p < 0,05$ ) и выходят за пределы статистически не значимых изменений. Совокупность принципов и методических приемов для принятия решения об отклонении показателей от нормы позволяет дифференцированно подходить к обоснованию критериев вредности воздействия [26, 59, 71, 87].

На основании полученных данных проводится вероятностная оценка зависимости «доза-эффект», которая представляет собой кумулятивную кривую относительных частот, где процент животных с положительной реакцией на воздействие является функцией дозы (или функцией концентрации и времени действия вещества).

В общем виде зависимость «доза-эффект» в полулогарифмических координатах (логарифм дозы – процент эффекта в группе) имеет вид S-образной кривой. Левая ветвь этой кривой стремится к нулю или совмещается с абсциссой в точке, соответствующей нулевому эффекту; правая ветвь ограничена асимптотой в 100% (рис. 13.1). Основным параметром зависимости «доза-эффект» для определенного токсиканта и биообъекта является величина среднеэффективной дозы (концентрации), обозначаемая  $ED_{50}(EC_{50})$ . Согласно определению  $ED_{50}$  – это такая доза (концентрация) вещества, при действии которой на объект развивается эффект, равный 50% от максимально возможного эффекта (или у 50% особей). Доза (концентрация), вызывающая 50-ти процентную гибель подопытных животных в частном случае обозначается как  $DL_{50}(CL_{50})$ .

Чаще всего график зависимости «доза-эффект» представляет собой кривую логарифмически-нормального распределения, симметричную относительно средней точки (рис. 13.1). Выделяют ряд характеристик этой кривой [59].

1. Средняя точка кривой (значение 50% эффекта,  $ED_{50}$ ) является

наиболее точной количественной характеристикой токсичности, поскольку значение 95% доверительного интервала здесь минимально.

2. Чувствительность большинства животных в популяции близка к значению  $ED_{50}$ . Небольшая часть популяции в левой части кривой реагирует на малые дозы токсиканта – это группа сверхчувствительных особей. Другая часть популяции в правой части кривой реагирует лишь на большие дозы токсиканта – это группа малочувствительных особей.

3. Наклон кривой «доза-эффект» (особенно вблизи среднего значения), характеризует разброс доз, вызывающих эффект, и определяет то, как изменяется реакция популяции с изменением дозы. Крутой наклон указывает на то, что большая часть популяции реагирует примерно одинаково в узком диапазоне доз. Пологий наклон свидетельствует об существенных различиях в чувствительности особей к токсиканту. Опасные вещества имеют высокую крутизну зависимости «доза-эффект».

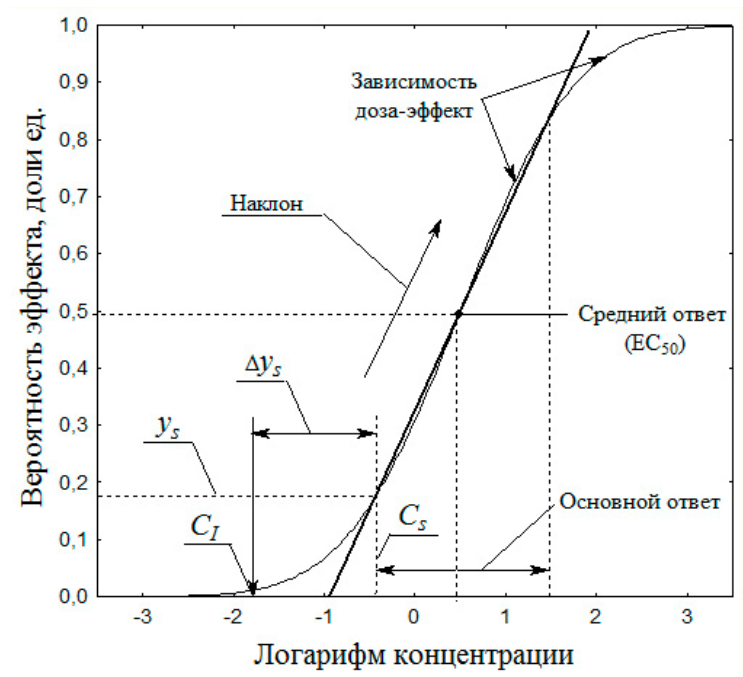


Рис. 13.1 – Типичная кривая «доза-эффект» для группы исследуемых животных

Параметры зависимости «доза-эффект» позволяют оценить максимально недействующую

дозу (концентрацию) токсиканта, согласно известной методики, которую разработал Годдам [59]. График зависимости строится в координатах «логарифм дозы – выраженность эффекта». На S-образной кривой выделяют участок, в пределах которого зависимость имеет линейный характер. Находят крутизну этой прямой ( $b$ ) по отношению к оси абсцисс и определяют пороговый эффект ( $y_s$ ) и безопасную дозу ( $D_I$ ) или концентрацию ( $C_I$ ):

$$y_s = t \cdot \delta; \quad \log(C_I) = \log(C_s) - \Delta y_s; \quad \Delta y_s = 6 \cdot \frac{\delta}{b}, \quad (13.1)$$

где  $t$  – коэффициент Стьюдента;  $\delta$  – величина стандартного отклонения, определяемая из опыта. Максимально недействующую дозу ( $MНД$ ) или максимально недействующую концентрацию ( $MНК$ ) принимают равной

значению безопасного уровня  $D_I(C_I)$ . Дозу (концентрацию)  $D_S(C_S)$  определяют по значению величины  $y_s$  [26, 59].

Кроме указанных выше параметров зависимости «доза-эффект» существует также ряд показателей, позволяющих оценить токсичность веществ. В таблице 13.2 приведены основные показатели токсичности, применяемые при оценке опасности в случае ингаляционных воздействий, а в таблице 13.3 их значения для некоторых веществ. Химические загрязнители атмосферного воздуха по общетоксическому действию подразделяются на 4 класса опасности: I – чрезвычайно опасные; II – высокоопасные; III – умеренно опасные; IV – малоопасные.

Таблица 13.2. – Параметры токсикометрии, используемые для установления опасности химических загрязнителей атмосферного воздуха

Показатели токсикометрии	Обозначение	Количественные критерии для класса опасности			
		I	II	III	IV
Средняя смертельная концентрация, мг/м <sup>3</sup>	$CL_{50}$	< 500	500 – 5000	5001 – 50000	> 50000
Средняя смертельная доза, мг/кг	$DL_{50}$	< 15	15 – 150	151 – 1500	> 1500
Зона острого действия	$Z_{ac}$	< 6	6 – 18	18,1 – 54	> 54
Зона хронического действия	$Z_{ch}$	> 625	625 – 126	125 – 25	< 25
Зона биологического действия	$Z_{biol}$	> 50000	50000 – 5001	5000 – 500	< 500
Зона специфического действия	$Z_{sp}$	> 9	9 – 3,1	3 – 1,0	< 1,0
Значение наименьшей величины порога хронического действия, мг/м <sup>3</sup>	$Lim_{ch}$	< 0,01	0,01 – 0,1	0,11 – 1,0	> 1,0
Значение максимально недействующей или минимально неэффективной концентрации (с учетом спонтанного фона), мг/м <sup>3</sup>	$MHK$	< 0,001	0,001 – 0,01	0,011 – 0,5	> 0,5

При ингаляционных воздействиях веществ для оценки потенциальной опасности применяют различные показатели, например, величины  $DL_{16}(CL_{16})$  и  $DL_{84}(CL_{84})$ , позволяющие определять диапазоны опасных доз при 16% и 84% вероятности эффекта; отношение  $CL_{16}/CL_{84}$ , характеризующее наклон зависимости «доза-эффект»; зоны острого, хронического, биологического и специфического действия, которые

определяются в соответствии со следующими формулами:

$$Z_{ac} = \frac{CL_{50}}{Lim_{ac}}; Z_{ch} = \frac{Lim_{ac}}{Lim_{ch}}; Z_{biol} = \frac{CL_{50}}{Lim_{ch}}; Z_{sp} = \frac{Lim_{inf}}{Lim_{sp}}; \quad (13.2)$$

Таблица 13.3. – Показатели токсичности некоторых опасных веществ

Вещество	Показатели токсичности опасных веществ при ингаляционных воздействиях на мышей							
	$CL_{50}$ мг/л	$Lim_{ac}$ мг/л	$Lim_{ch}$ мг/л	$MHK$ мг/м <sup>3</sup>	$Z_{ac}$	$Z_{ch}$	$KBIO_{CL}$	$KBIO_{ch}$
Диоксан	43,0	0,5	0,1	0,42	86,0	5	3,1	1 398
Толуол	32,0	0,7	0,05	2,7	49,0	13	3,0	2 398
Сероуглерод	1,26	0,02	0,014	0,03	10,0	--	126	--
Озон	0,003	0,001	0,0008	0,23	28,0	1,2	685700	2 399 875
Бензол	45,0	1,1	0,02	0,6	40,9	55	8,8	19 900
Фуран	2,30	0,1	0,004	0,06	23,0	20	560	450 000
Этиленамин	0,40	0,01	0,0004	0,0075	40,0	--	935	935 500
Хлорбензил	0,39	0,1	0,001	0,375	3,9	100	17,7	6 900

КВНО – коэффициент возможности ингаляционного отравления (острого смертельного –  $KBIO_{CL}$ , острого несмертельного –  $KBIO_{ac}$ , хронического отравления –  $KBIO_{ch}$ ) и т.д. [87].

### 13.3. Эмпирические закономерности в токсикологии

Конечная цель установления зависимости «доза-эффект» состоит в определении уровня доз, при которых появляются неблагоприятные эффекты различной степени тяжести от действия токсиканта на организм. Однако в токсикологии часто отсутствует исчерпывающая информация о зависимости «доза-эффект» на всей области определения опасных факторов даже для достаточно известных веществ. Это связано, в первую очередь, с неопределенностью токсикологических данных. Причины и механизмы появления неопределенности объясняются многими факторами. Основными из них являются: огромное количество токсикантов и разная степень их изученности; отсутствие в ряде случаев достоверных экспериментальных данных (например, при смертельных эффектах у человека); вариабильность свойств изучаемого биологического объекта и условий окружающей среды; выраженный вероятностный характер опытных данных; видовые, межвидовые и популяционные отличия; практическая необходимость экстраполяции данных (например, распространение выводов на иные, нежели в экспериментах, условия и объекты); неопределенность выводов при оценке воздействий; комплексность оценок при выявлении неблагоприятных эффектов и т.д.

Поэтому в литературе имеется доступная информация о наиболее важных точках, областях или параметрах зависимости «доза-эффект» только для наиболее широко изученных веществ.

Ученые признают, что в основе высокой степени неопределенности результатов лежит скудность наших знаний в области токсикологии, несовершенство методологии определения токсичности и недостаточно полное изучение общих законов этой науки. Сегодня в методологии токсикологии отсутствует теория, построенная на математическом аппарате, которая позволяла бы обобщать эмпирические данные. В свое время такая же ситуация наблюдалась и в термодинамике. И по мере накопления данных термодинамических экспериментов и развития теории произошло качественное изменение методологии.

Накопленный в токсикологии объем опытных данных создает условия для обобщения информации и возможности развития математической теории. Ниже приводится один из возможных способов создания такой теории, основанный на системодинамическом методе построения моделей объектов и явлений. Однако только эксперимент и практика могут подтвердить эффективность теории и возможность ее принятия научной общественностью.

Перед тем как перейти к развитию математических методов в токсикологии, обобщим основные эмпирические закономерности, которые имеются в этой науке и необходимы будут в дальнейшем. Применим метод системодинамики для построения математического аппарата, исходя из полученных ранее результатов, причем при построении уравнений токсикологии воспользуемся логическими подходами, разработанными в теории термодинамики.

По аналогии с седьмой главой, вначале определим содержание основных элементов понятийно-категорийного аппарата, который будет использоваться для формализации в процессе построения моделей. В простейшем варианте токсикология, как и другие науки в области безопасности систем, оперирует сложными системами, в которые входит опасная окружающая среда и биологический объект, находящийся под воздействием этой среды. Длительное или интенсивное действие опасной среды обычно приводит к необратимым последствиям у объекта. Одним из таких опасных факторов среды может быть наличие токсиканта, который поступает в живой организм. В данном случае опасная среда воздействует на объект через опасные факторы, в связи с чем у него появляются негативные эффекты и последствия в виде различных проявлений токсического процесса: повреждений, нарушений, заболеваний, смерти. Эти эффекты и последствия регистрируются в виде неблагоприятных событий определенной частоты. Используем далее следующие определения и результаты, которые возьмем из работ [1, 3, 5].

*Окружающая среда* – совокупность химических, физических, биологических и других условий, в которых находится биологический объект.

*Опасный фактор* – химические, физические и биологические компоненты и условия окружающей среды, обладающие опасными свойствами и способные вызвать негативные эффекты и последствия у объектов воздействия при реализации опасности.

*Объект воздействия* – биологические (живые) объекты, на которые воздействует опасный фактор окружающей среды.

*Воздействие* – действие опасного фактора окружающей среды на уровне, создающем внешне регистрируемые негативные эффекты и последствия у объектов воздействия.

Таким образом, опасность окружающей среды реализуется через опасный фактор, который обладает определенными вредными для биообъекта свойствами и может характеризоваться несколькими параметрами. Исходя из вышесказанного, сформулируем для нашего случая понятие опасной системы в следующем виде.

*Опасная система* – концептуальная совокупность окружающей среды, формирующей опасность, и объекта воздействия, находящегося под действием опасных факторов среды, которые с течением времени обеспечивают при воздействии появление у данного объекта негативных эффектов и последствий в виде событий определенной частоты.

В общей теории систем, в отличие от термодинамики, принято, что состояния сложных систем определяются целым набором свойств, характеризующихся параметрами, которые в свою очередь динамически меняются во времени, поддерживая тем самым устойчивое состояние гомеостаза. Это наблюдение имеет непосредственное отношение к биологическим системам. Динамика гомеостаза в принципе не предполагает возможность существования равновесных состояний. Известно, что гомеостаз представляет собой устойчивое динамическое равновесие, или, иначе, динамически относительное постоянство состава и свойств системы. В этом уже видно существенное концептуальное отличие рассматриваемых нами сложных систем от термодинамических систем.

Далее будет показано, что в токсикологии можно построить теорию, учитывающую всю совокупность опытных результатов без разделения состояний системы на различные категории. Именно по этой причине в дальнейшем не используются понятия равновесных и неравновесных состояний. Это указывает на то, что в термодинамике разделение состояний на равновесные и неравновесные использовано для облегчения обоснования понятия обратимости, что в токсикологии не наблюдаемо, так как в принципе не возможно.

Под действием опасного фактора свойства системы могут обладать трендом – изменяться во времени в сторону формирования у объекта воздействия проявлений в виде негативных эффектов. Возникновение негативных эффектов и последствий у биологического объекта в виде некоторых событий характеризуется определенной вероятностью, которая в общем случае называется риском. Применительно к рассматриваемому случаю дадим следующее определение риска.



*Риск* – вероятность существования особых (опасных) состояний биологической системы, при которых у объекта воздействия под действием опасного фактора среды возникают устойчивые и наблюдаемые негативные эффекты и последствия.

Частота появления соответствующих событий и может быть принята в качестве оценки вероятности существования таких состояний.

Все методики анализа данных в токсикологии построены на возможности получения зависимости «доза-эффект». Чаще всего эту зависимость ищут в виде (6.1) – (6.3) на основе статистической обработки данных токсикологических экспериментов. Как указывалось ранее, методика подобной обработки данных учитывает базовую эмпирическую закономерность, свойственную опасным процессам при воздействии химических веществ, которые имеют логарифмически-нормальное распределение вероятностей:

$$Pr = \alpha + \beta_{\tau} \cdot \ln C + \beta_c \cdot \ln \tau = \alpha + \beta_c \cdot \ln(C^n \cdot \tau), \quad (13.3)$$

где  $Pr$  – пробит,  $C$  – концентрация (доза),  $\tau$  – время воздействия опасного вещества,  $n = \beta_{\tau} / \beta_c$ .

Наиболее статистически значимые результаты токсических воздействий получают в исследованиях при использовании высоких доз токсикантов (острый и подострый опыты). Для достоверного выявления слабых токсических эффектов, связанных с легкими отравлениями токсикантами в малых дозах, необходимо проведение экспериментов на тысячах животных, что практически не возможно. Существуют модели экстраполяции данных, полученных в опытах с высокими дозами токсикантов, в область слабых воздействий. Однако в рамках существующего знания отсутствует возможность экспериментальной верификации этих моделей. В области сильных воздействий имеются адекватные модели в виде (13.3), хорошо описывающие зависимость «доза-эффект». Например, параметры такой зависимости при воздействиях на человека приведены в таблице 13.4 согласно данным [67, 88].

Использование зависимости для фактора опасности в виде (13.3) обосновано эмпирической закономерностью, суть которой заключается в том, что произведение концентрации, возведенной в степень, и времени воздействия есть величина постоянная при получении эффекта определенной степени тяжести [67, 71, 88]:

$$C^n \cdot \tau = const, \quad (13.4)$$

где  $n$  – показатель степени для определенного опасного вещества.

Обычно построение зависимостей вида (13.3) при воздействии веществ осуществляется отдельно для каждой категории тяжести эффекта.

Если рассматривать области возникновения хронического, острого несмертельного и смертельного эффектов, где значения времени воздействия и концентрации вещества существенно отличаются, то напрашиваются определенные аналогии с уравнениями состояния в термодинамике. Обычно вся область возможных воздействий, при которых

возникают как хронические (слабые), так смертельные (сильные) эффекты, разбивается на зоны, где системе присущи существенные, в данном случае качественные, различия в проявлениях токсического процесса. Все это указывает на то, что в зависимости «доза-эффект» вида (13.3) коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta_\tau$  и  $\beta_c$ , являются переменными величинами, которые зависят от концентрации и времени воздействия опасного вещества, а пробит может определяться по вероятностям возникновения различных событий, отличающихся категорией тяжести эффекта.

Таблица 13.4. – Параметры пробит-функции (13.3) при летальных поражениях производственного персонала ( $C$  – ppm,  $\tau$  – мин).

Вещество	$\alpha$	$\beta_c$	$n$
Акролеин	-9,931	2,049	1,0
Акрилонитрил	-29,42	3,008	1,43
Аммиак	-35,90	1,850	2,0
Бензол	-109,8	5,300	2,0
Бром	-9,04	0,920	2,0
Четыреххлористый углерод	-6,290	0,408	2,5
Угарный газ	-37,98	3,700	1,0
Хлор	-8,290	0,920	2,0
Формальдегид	-12,24	1,300	2,0
Соляная кислота	-16,85	2,000	1,0
Цианистоводородная кислота	-29,42	3,008	1,43
Фтористоводородная кислота	-35,87	3,354	1,0
Сероводород	-31,42	3,008	1,43
Бромистый метил	-56,81	5,270	1,0
Метилизоцианат	-5,642	1,637	0,65
Диоксид азота	-13,79	1,400	2,0
Фосген	-19,27	3,686	1,0
Окись пропилена	-7,415	0,509	2,0
Диоксид серы	-15,67	2,100	1,0
Толуол	-6,794	0,408	2,5

Далее, в теории безопасности систем при ранжировании опасностей одного класса часто применяется пороговый принцип, определяющий безопасную границу опасного процесса:

$$HI_i = I_i / P_i, \quad (13.5)$$

где  $P_i$  – порог (уровень) безопасного воздействия  $i$ -того токсиканта, заданный в тех же единицах, что и количественный показатель фактора опасности  $I_i$ , например, концентрация.

В свою очередь принято, что многие тождественные опасности одного класса обладают свойством аддитивности. При оценке опасностей

данные положения позволяют пользоваться различными аддитивными индексами. Обычно, индекс опасности рассчитывается по формуле:

$$HI = \sum_{i=1}^m HI_i . \quad (13.6)$$

Если индексы опасности считают аддитивными величинами, то риски негативных эффектов и последствий находят исходя из основных положений теории вероятности.

Риски реализации опасности и нанесения ущерба объекту являются вероятностями сложных событий, в связи с чем для их определения используют теоремы сложения и умножения вероятностей событий. За конкретный период времени риски могут рассматриваться как вероятности совместных зависимых или независимых сложных событий. Риски в различные периоды времени могут определяться как вероятности возникновения несовместных событий. Сложность проблемы состоит в классификации опасных событий на множестве большого количества различных инициирующих событий, которые обусловлены множеством причинно-следственных связей.

В классическом определении риск представляет собой вероятность реализации сложного опасного события, приведшего к определенному ущербу или негативным последствиям и определяется согласно уравнения (3.19). С другой стороны риск, как вероятность реализации сложного события, связан с опасностью, которая может быть измерена или подходящим образом количественно определена, а также со временем, которое характеризует длительность воздействия опасного фактора:

$$R = R(I, \tau). \quad (13.7)$$

В определении риска на основе зависимостей (3.19) и (13.7) риск рассматривается как вероятность реализации сложного опасного события, состоящего из более простых событий [37].

Так как обычно при изучении опасностей изучается некоторое количество однородных объектов в одинаковых условиях окружающей среды, то оценку вероятностей состояния биологической системы проводят на основе зависимости (6.1). При этом состояние системы может определяться несколькими параметрами, на практике чаще всего не более двух-трех параметров. Каждая точка характеризуется набором определенных значений этих параметров и этой точке устанавливается в соответствие вероятность  $w$ , определенная эмпирически по опытным данным согласно (6.1). Оценка вероятности  $w$  проводится динамически во времени при выбранных значениях показателя  $I_i$  до достижения объектами определенной статистически значимой категории эффекта.

Таким образом, в токсикологии, в отличие от термодинамики, статистическая оценка вероятностей состояний проводится эмпирически без привлечения различных умозрительных гипотез о взаимосвязи микро- и макросостояний для системы в целом.

Покажем, что на основе использования приведенных эмпирических

закономерностей вида (6.1) – (6.3), (13.3) – (13.8) и математического аппарата системодинамики можно получить целый ряд новых закономерностей общего характера.

#### 13.4. Уравнения состояния токсикологических систем

Сегодня в процессе моделирования огромный объем количественных знаний о свойствах и закономерностях поведения различных систем обычно представляется в форме уравнений, где одни параметры системы выражаются через другие. Это своего рода ограничительное условие, определяющее поведение конкретной системы в пространстве наблюдаемых состояний. Уравнения состояния строятся на основе эмпирических данных. Такого рода уравнения, задаваемые дополнительно, независимо от содержания исследуемой задачи, в принципе должны существовать для любой системы, каковы бы ни были её индивидуальные особенности. Данный факт отражает эмпирический опыт человечества в области изучения систем. Ограничением в этом случае является возможность количественного измерения или определения параметров системы, а также построение уравнения состояния достаточной степени точности, что не всегда реализуемо на практике. Обычно уравнение состояния представляется в виде:

$$\psi_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \quad (13.8)$$

при этом всегда существует характерная ошибка, определяющая степень точности данного уравнения. Исходные идеи для построения уравнений состояния могут существенно отличаться даже для одного класса систем, однако практика показывает, что зависимости вида (13.8) могут быть построены для многих систем. Как отмечалось в четвертой главе, в термодинамике известны термические и калорические уравнения состояния, принципы построения которых различны. В токсикологии распространена методология построения зависимости «доза–эффект», во многих прикладных науках – различные балансовые уравнения и т.д.

Согласно уравнению (13.8), параметры  $z_n$ , характеризующие свойства, совокупностью которых определяется состояние системы, аналитически связаны друг с другом: с изменением одного из них изменяется, по крайней мере, еще одно.

Вследствие взаимосвязи между параметрами свойств системы для определения её состояния достаточно указать лишь некоторое число свойств. Так, термодинамическое состояние газа можно считать заданным, если указаны два параметра, например, температура и давление: значение объема определится из термического уравнения состояния  $\psi(V, P, T) = 0$ . Графически данная зависимость является уравнением поверхности, построенной относительно трех взаимно перпендикулярных осей координат, каждая из которых соответствует одному характерному параметру. Поэтому любое состояние системы, задаваемое некоторой

совокупностью числовых значений параметров, изобразится точкой, лежащей на полученной поверхности. При изменении состояния системы точка во времени перемещается по поверхности, описывая некоторую кривую, которая определяет процесс изменения состояния системы.

Таким образом, через уравнения состояния в процессе моделирования вносятся закономерности поведения реальных систем. В термодинамике применяемый математический аппарат позволяет ассоциировать эти соотношения с первым и вторым началом, благодаря чему сразу получаются феноменологические закономерности и следствия.

Уравнения состояния могут быть построены исходя из принципа транзитивности состояния систем, из которого следует, что идентичные объекты ведут себя приблизительно одинаково в одних и тех же условиях окружающей среды. Практический опыт показывает, что, скорее всего, данный принцип применим к разным классам сложных систем, которые отличаются однородностью свойств.

В основе методов, которые используют это предположение, лежит опытный факт того, что для многих сложных систем возможно применение некоторого комплексного показателя  $\theta$ , однозначно связанного со свойствами системы через уравнение (13.8). Например, в термодинамике эту роль выполняет такой параметр, как температура. Данный показатель может измеряться, рассчитываться, определяться экспериментальным путем или приниматься по соглашению на основе опытных или статистических данных. Численное задание показателя  $\theta$  однозначно определяет состояние системы или множество состояний, отличающихся зависимостью свойств. Причем это множество охватывает состояния, которые отличаются крайне различными свойствами и качественными характеристиками. Например, в термодинамике изотерма может проходить через области существования твердого тела, жидкости и газа в процессе изменения давления среды и объема тела.

Покажем возможность использования свойства транзитивности в процессе построения уравнений состояния при воздействии опасных веществ на живые организмы. Токсикология, как область знаний, крайне далека от термодинамики, как по предмету, так и методам исследований, так как изучает биологические системы. Однако, на наш взгляд, структурно-логическая схема построения моделей, используемая в термодинамике, применима и в токсикологии.

*Уравнение состояния идеальной токсикологической системы.*

Рассмотрим систему, включающую опасную воздушную среду, которая содержит вредный газ, и объект воздействия – биологические организмы. Будем считать, что теория описания такой системы должна основываться на использовании уравнений состояний. Можно построить уравнение состояния, исходя из постулата системодинамики о взаимосвязи статистических и геометрических вероятностей. Покажем, что такой же самый результат может быть достигнут при использовании логики построения моделей, применяемой в термодинамике.

Введем гипотезу существования показателя состояния  $\theta$ , определяющего уровень опасности при воздействии по комплексу параметров. Эта гипотеза имеет фундаментальное значение и подлежит проверке опытом. Будем считать, что величина  $\theta$  является мерой опасности, заданной в относительных величинах, для которой логическим аналогом в термодинамике является температура. Далее показатель  $\theta$  будем называть *индексом опасности* состояния системы.

Известно, что в термодинамике есть относительная величина – температура, которая является комплексным параметром термодинамического состояния системы и определяет уровень нагрева тела. Все эксперименты в области термодинамики тем или иным образом касаются измерений температуры. Уровень нагрева тела является относительной величиной, так как термодинамические шкалы температур привязываются к определенным опорным точкам. Построение линейных температурных шкал основано на применении метода двух точек. Например, в стоградусной термодинамической шкале (шкале Цельсия) точка кипения воды при атмосферном давлении принимается за 100 °С, а точка плавления льда – за 0°С. Как указывалось в четвертой главе, на практике применяются различные шкалы температур, например: Цельсия (°С), Фаренгейта (°F), Ренкина (°Ra), Реомюра (°R), абсолютная шкала температур Кельвина (°K). Опорные точки выбираются, исходя из факта изменения наблюдаемого качества системы, в термодинамике – это изменения фазового состояния (преимущественно агрегатного состояния вещества). Численная величина температуры измеряется с помощью термометров, применение которых основано на том, что два соприкасающихся тела (т.е. находятся в одних условиях) через некоторое время приходят к состоянию теплового равновесия и принимают одинаковую температуру. В свою очередь, если биологический объект поместить в опасную среду, то по истечении определенного времени у него возникают неблагоприятные эффекты, тем опаснее, чем опаснее окружающая среда. В термометрии, если термометр, приводимый в соприкосновение с различными телами, дает одно и то же показание, то говорят, что эти тела имеют одинаковую температуру. В свою очередь, в токсикометрии опасность среды “измеряют” с помощью особых “термометров” – живых объектов, в качестве которых чаще всего выступают белые мыши и крысы. Данные “термометры” можно градуировать по неблагоприятным эффектам на основе токсикологических экспериментов. Поэтому, если такой биоиндикатор, помещенный в воздушную среду с различными опасными газами, будет давать одинаковое показание (будет наблюдаться одинаковый негативный эффект), то можно говорить, что изучаемые среды при заданных параметрах имеют одинаковую опасность. При этом вспомним, что понятие эффекта носит в токсикологии комплексный характер и обычно учитывает целый ряд показателей и характеристик организма. Оценка опасности среды кроме этого носит вероятностный характер, поэтому, как

указывалось ранее, в токсикометрии обычно изучают данные по группе биообъектов, так как неопределенность данных в токсикологии существенно более выражена, чем в термодинамике. В связи с этим процесс «градуировки» шкал опасности будет значительно более сложен, нежели аналогичная процедура в термодинамике.

Исходя из сделанного выше пояснения, можно принять следующую логику оценки уровня опасности окружающей среды. Предположим, что опасность среды измеряется особым видом “термометров”, а именно специальным образом стандартизированными живыми объектами – биоиндикаторами, к которым выдвигаются определенные требования (по виду, полу, массе, возрасту и т.д.). Опасность шкалируется по явно выраженным негативным эффектам, которые могут возникать у этих биообъектов при действии опасной среды. Воздействие среды на различные живые объекты оценивается путем установления относительного соответствия между параметрами среды, состоянием биоиндикатора и состояниями других живых объектов. При этом в процессе анализа опасности необходимо использовать сравнительную шкалу для измерения параметров состояния опасной системы. Эта шкала является эмпирической, так как должна быть связана с оценкой появления негативных эффектов у биоиндикаторов. В процессе построения уравнения состояния, оценки опасности среды по эмпирической шкале должны связываться с параметрами окружающей среды.

Таким образом, индекс опасности состояния системы  $\theta$  также как и температура может быть относительной величиной и тоже должен привязываться к определенным опорным точкам или характерным состояниям. Без введения этой величины нельзя связать качественные признаки состояния опасной системы с параметрами окружающей среды на всей области определения воздействий, когда время и концентрация вредного вещества изменяются в широких пределах. Например, при заданных значениях времени воздействия и концентрации опасного вещества, которым соответствует определенное значение  $\theta$ , может быть получен смертельный эффект с вероятностью 5, 50 и 100%. В другой категории эффекта (например, хроническое воздействие, которое естественно менее опасное, чем смертельное) при тех же значениях  $\theta$  также можно получить определенные вероятности эффекта, характеризующего уже опасность возникновения хронического заболевания. Причем это будет наблюдаться при иных временах воздействия и концентрациях опасного вещества. Кроме того для живых организмов смертность 50% наблюдается также при безопасных значениях концентрации вредного вещества, но при среднем времени жизни биологического объекта данного вида. Поэтому для параметрического описания состояний системы необходимо использовать три параметра, а именно величину времени воздействия  $\tau$ , концентрацию вредного вещества  $C$  и индекс опасности состояния системы  $\theta$ . Кроме того для получения универсальной шкалы  $\theta$  необходимо использовать некоторое

характерное и легко констатируемое событие, например, смерть объекта. Поскольку все параметры системы “равноправны” с точки зрения задания состояния системы, то её поведение будет однозначно определено уравнением состояния вида:

$$f(\tau, C, \theta) = 0. \quad (13.9)$$

Таким образом, для решения задачи оценки опасности необходимо по аналогии с температурой ввести относительную шкалу, характеризующую опасную окружающую среду, для чего установить соответствие индекса  $\theta$  и определенных опорных точек. Например, при  $\tau = 0$  и  $C = 0$  следует принять  $\theta = 0^\circ$  опасности, а для эталонного опасного вещества и значений  $\tau$  и  $C$ , при которых наблюдается определенный выраженный эффект, принять  $\theta = 100^\circ$  или  $\theta = 1000^\circ$  опасности. Назовем данную шкалу  $\theta$  *абсолютной* и будем считать, что индекс  $\theta$  характеризует уровень опасности окружающей среды, исходя из значений величин  $\tau$  и  $C$ . Все остальные вещества необходимо “привязать” по вызываемым категориям эффектов к шкале индекса  $\theta$ . Для этого следует использовать *эмпирическую* шкалу опасности  $\varphi$ , построенную с учетом воздействий на живой объект, выступающий в качестве биоиндикатора. Эмпирическая шкала опасности должна градуироваться по негативным эффектам, которые наблюдаются у биоиндикатора при действии опасной среды. Специфику и меру опасного воздействия различных веществ в эмпирической шкале  $\varphi$  следует определить по опытным данным, получаемым при использовании определенного вида биоиндикаторов – белых мышей, как наиболее распространенных экспериментальных животных. Это позволит путем установления соответствия эмпирической шкалы опасности  $\varphi$  и абсолютной шкалы  $\theta$ , связанной с параметрами окружающей среды, получить уравнение состояния для сложной системы, опасность которой определена ингаляционными токсическими воздействиями на биоиндикаторы. После этого возможно измерение опасности в данной шкале путем оценки уровня опасности среды для характерных точек (смертность 50%, пороговые уровни и т.д.), определяющих негативные эффекты для других биологических видов (например, человека).

Для анализа экспериментальных данных и построения шкал  $\theta$  и  $\varphi$  примем в качестве опорной точки область 50% смертности мышей при определенном времени воздействия опасного вещества. В данном случае категория эффекта “смерть объекта” однозначно характеризует переход системы в новое качественное состояние. Таким образом, между двумя опорными точками (точка  $A$  “нет воздействия” ( $\tau = 0$  и  $C = 0$ ) и точка  $B$  “50% смертность объектов”) возможно построение только линейной шкалы. Значение величины  $\theta$  в точке  $B$  при заданных значениях концентрации  $C_0$  и определенном времени воздействия  $\tau_0$  определим в  $100^\circ$  опасности. Выбор величин  $C_0$  и  $\tau_0$  представляет собой важную задачу в области шкалирования опасности.



Математически уравнение состояния опасной системы может быть построено различными способами. Например, представим уравнение состояния вида (13.9) некоторой поверхностью в декартовой системе координат относительно параметров  $\tau$ ,  $C$ ,  $\theta$ . В общем случае эта поверхность, определяемая явным уравнением  $\theta = F(\tau, C)$ , будет являться линейчатой поверхностью  $n$ -мерного порядка [70], так как образуется относительно  $\theta$  прямолинейными образующими, проходящими через точку  $A (\theta = 0, \tau = 0, C = 0)$ .

Уравнение  $\theta = F(\tau, C)$  удовлетворяет также следующим условиям:

$$\text{если } \tau = 0, \text{ то } \theta = 0^\circ \text{ при любых } C; \quad (13.10)$$

$$\text{если } C = 0, \text{ то } \theta = 0^\circ \text{ при малых значениях } \tau; \quad (13.11)$$

$$\text{если } \tau = 0 \text{ и } C = 0, \text{ то } \theta = 0^\circ. \quad (13.12)$$

Обобщая все вышесказанное, а также учитывая условия (13.10) – (13.12) и раскладывая  $F(\tau, C)$  в ряд Тейлора, получим уравнение состояния опасной системы в следующем виде:

$$\theta = F(\tau, C) = B_1 \cdot \tau \cdot C + B_2 \cdot \tau^2 \cdot C + B_3 \cdot \tau \cdot C^2 + B_4 \cdot \tau^2 \cdot C^2 + \dots, \quad (13.13)$$

где  $B_i$  – постоянные коэффициенты. Если ограничиться при малых  $\{\tau \cdot C\}$  одним членом ряда в правой части равенства (13.13), то получим уравнение состояния для оценки опасности в приближенном виде:

$$\tau \cdot C = R_i \cdot \theta, \quad (13.14)$$

где константа  $R_i = 1/B_1$  должна являться индивидуальной токсической постоянной для определенного опасного вещества. Логическим аналогом уравнения (13.14) в термодинамике является уравнение Клапейрона для идеальных газов вида (4.7). В таблице 13.5 приведены основные параметры, характеризующие опасность веществ в соответствии с данными источника [87]. Если для определения токсической постоянной использовать характерное состояние, соответствующее точке  $B$ , то уравнение (13.14) представится в виде:

$$\tau \cdot C = \frac{\tau_0 \cdot C_0}{100} \cdot \theta. \quad (13.15)$$

Так как в уравнении (13.14) принят во внимание только один член ряда (13.13), то соотношение (13.15) приближенно справедливо при малых значениях комплекса  $\{\tau \cdot C\}$ . Обратим внимание на основополагающую закономерность в области токсических воздействий на живые организмы. Эта закономерность заключается в том, что при оценке воздействий опасных веществ применяется пороговый принцип, определяющий границу опасного процесса. Для большинства веществ для каждого негативного эффекта опасное или вредное воздействие на живой объект начинает наблюдаться только при достижении определенного минимального значения концентрации вредного вещества. Это значение концентрации и называется пороговым уровнем. Порог действия применительно к определенному эффекту индикаторно характеризует переход системы из безопасного в опасное состояние:

$$HC_i = \frac{C_i}{P_i}, \quad (13.16)$$

где  $P_i$  – порог (уровень) воздействия для  $i$ -того вещества, заданный в тех же единицах, что и концентрация  $C_i$ , который характеризует границу области определения заданной категории эффекта (порог хронического действия, порог смертельного действия и т.д.). При возникновении опасного воздействия данной категории эффекта  $HC_i > 1$ .

Таблица 13.5. – Опасность вредных веществ при ингаляционных токсических воздействиях на мышей.

Вещество	$CL_{50}^{20}$	$Lim_{ac}$	$Lim_{ch}$	Вещество	$CL_{50}^{20}$	$Lim_{ac}$	$Lim_{ch}$
1,3 хлорбромпропан	7260	410	45	Озон	3	1	0,8
Азота диоксид	900	--	--	Оксид углерода	2250	--	--
Аммиак	4600	--	--	Пентахлорацетон	430	20	3
Ангидрид метакриловой кислоты	440	9,8	2	Пиперидин	6200	20	2
Бензол	45000	1100	20	Сероводород	1200	20	14
Бромацетопропил ацетат	100	7	3	Сероуглерод	1040	1000	13
Бромбензол	21000	250	20	Тиофен	9400	1500	180
Гексахлорацетон	890	20	5	Толуол	32000	700	50
Гидразин	1000	15	1	Триэтиламин	6000	100	50
Диметиламин	100	5	4	Фенол	300	--	--
Диметилацетамид	17300	1230	340	Формальдегид	300	--	--
Диметилформамид	9600	1200	80	Фуран	2300	100	4
Диметилэтанолламин	3240	1200	50	Фурфурол	12220	400	50
Изопропилхлоркарбонат	230	32	9	Хлорангидрид трихлоруксусной кислоты	460	10	0,3
Дитолилметан	40	6	5	Хлористый бензил	390	100	1
Диэтиламин	5600	600	300	Хлористый метил	5300	230	20
Диэтилхлортиофосфат	700	196	20	Хлористый метилен	63000	1000	250
Диэтилэтанолламин	4880	1100	610	Хлорметилтрихлорсилан	60	10	7
Изопропилнитрит	2740	300	5	Цианамид кальция	369	90	10
Диоксан	43000	500	100	Цианистый бензил	100	7	3
Метилфуран	8290	75	10	Циклопентадиен	1400	5000	350
Моноизопропиламин	1920	10	3	Этиленимин	400	10	0,4

В таблице  $CL_{50}^{20}$  – половинная смертельная концентрация для белых мышей при экспозиции 120 мин и температуре 20 °С, мг/л;  $Lim_{ac}$  – пороговый уровень острого несмертельного воздействия, мг/л;  $Lim_{ch}$  – пороговый уровень хронического воздействия, мг/л.

В общем случае пороги вредных воздействий связаны со временем действия веществ. Они характерны для всех категорий эффектов (смертельный, острый, хронический), однако существует порог, при котором воздействие на живой объект на всем протяжении жизни не

является опасным. Это так называемый безопасный уровень, который для экспериментальных животных представляет собой максимально неэффективную концентрацию (*МНК*), определяемую в хроническом эксперименте. Эта величина может быть приближенно оценена по методике [26] с использованием данных о значениях предельно допустимых концентраций.

Таким образом, следует важный вывод, заключающийся в том, что воздействие на живой объект в течении всей жизни абсолютно не зависит от вида вещества при условии, что его концентрация меньше самого малого значения *МНК* среди всех изученных вредных веществ.

Следовательно, в пределе уравнение (13.14) для всего периода жизни живого объекта имеет вид:

$$\lim_{C \rightarrow 0} (\tau \cdot C) = R_i \cdot \theta. \quad (13.17)$$

Таким образом, опорную точку *B* необходимо “увязать” с состоянием, определяемым параметрами  $\tau = \tau_0$  и  $C = C_0$ , для которого наблюдается 50% смертность мышей от старости при достижении средней продолжительности жизни.

Будем считать, что в точке *B* индекс состояния системы  $\theta$  равен  $100^\circ$  опасности. За величину  $\tau_0$  примем среднее время жизни биологического вида, которое для самцов мышей составляет 24 месяца, а значение  $C_0$  определим соответственно равным *МНК*. В этом случае получим для определения величины  $R_i$  уравнение:

$$\lim_{C \rightarrow 0} (\tau \cdot C)_\theta = \lim_{C \rightarrow 0} (\tau \cdot C)_B \cdot \frac{\theta}{100}, \quad (13.18)$$

где  $(\tau \cdot C)_B$  является значением  $(\tau \cdot C)_\theta$  в опорной точке *B*. Из уравнения (13.18) получим, что:

$$R_i = \frac{1}{100} \cdot \lim_{C \rightarrow 0} (\tau \cdot C)_B. \quad (13.19)$$

Величина  $R_i$  является индивидуальной токсической постоянной, численное значение которой зависит от выбора единиц измерения для концентрации, времени и индекса  $\theta$ . Принимая для этих величин соответственно единицы измерения  $мг/м^3$ , *мин* и *градус опасности* ( $^\circ Г$ ), получим размерность коэффициента  $R_i$  в виде:  $(мг \cdot мин)/(м^3 \cdot ^\circ Г)$ .

Таким образом, индивидуальные токсические постоянные могут быть найдены экспериментальным путем.

Мы хотим построить универсальную шкалу индекса  $\theta$ , которая характерна для всех вредных веществ. Уравнение (13.14) связывает параметры токсикологической системы для определенного вещества. Поэтому соответствующая шкала индекса должна быть “привязана” как к опорным точкам, так и к виду веществ. Предположим, что имеются два вредных вещества, для которых при низких концентрациях справедливы следующие соотношения:

$$\tau_1 \cdot C_1 = R_1 \cdot \theta \quad \text{и} \quad \tau_2 \cdot C_2 = R_2 \cdot \theta.$$

Исходя из этого, для универсальной шкалы  $\theta$  при одинаковом индексе опасности имеем следующее равенство:

$$\frac{\tau_1 \cdot C_1}{(\tau \cdot C)_{1B}} = \frac{\tau_2 \cdot C_2}{(\tau \cdot C)_{2B}} = \frac{\tau_i \cdot C_i}{(\tau \cdot C)_{iB}} = const. \quad (13.20)$$

Таким образом, шкала индекса  $\theta$  должна быть также привязана к одному определенно выбранному веществу.

Для нахождения характерного значения  $\lim_{C \rightarrow 0} (C \cdot \tau)_B$  используем данные для одного из веществ, опасность которого будет условно фиксирована. Для того, чтобы в дальнейшем установить аналогии с термодинамическими свойствами веществ, это должно быть сравнительно известное неорганическое вещество. Примем для этой цели водород фосфористый ( $PH_3$ ), значение  $MHK$  которого достаточно мало по сравнению с другими опасными веществами. В результате этого для фосфористого водорода получим следующее значение токсической постоянной:

$$R_{PH_3} = \frac{1}{100} \lim_{C \rightarrow 0} (\tau \cdot C)_B = 62,208 \frac{мг \cdot мин}{м^3 \cdot \text{°Г}}.$$

Введем понятие относительной опасности вещества при низких концентрациях  $\mu_i = \frac{MHK_i}{MHK_{PH_3}}$  и назовем эту величину токсическим весом вещества. Величина  $\mu_i$  будет являться в токсикологии своего рода логическим аналогом молекулярного веса вещества в термодинамике.

Токсический вес показывает, во сколько раз при воздействии низких концентраций на протяжении всей жизни объекта данное вещество является менее опасным, чем фосфористый водород.

Из уравнения (13.20) следует, что при одинаковых индексах опасности ( $\theta$ ) и одинаковых концентрациях опасных веществ ( $C$ )  $\tau/\mu = const$ . Отметим, что это отношение не зависит от вида опасного газа или пара.

Таким образом, индивидуальная токсическая постоянная будет равна  $R_i = R_{PH_3} \cdot \mu_i$ , откуда уравнение (13.14) представится в виде:

$$C \cdot \tau = R_i \cdot \theta = \mu_i \cdot R \cdot \theta. \quad (13.21)$$

Здесь  $R$  является универсальной токсической постоянной,  $R = R_{PH_3}$ .

Индивидуальные токсические постоянные  $R_i$ , величины  $\mu_i$  и максимально неэффективные концентрации  $MHK$  для различных веществ приведены в таблице 13.6. При этом отметим, что при воздействии на уровне  $C = MHK$  и  $\tau = \tau_0$  для любых вредных веществ абсолютный индекс состояния опасной системы  $\theta = 100^\circ$  опасности. Это естественно, так как в этом состоянии наблюдается смертность 50% объектов от старости.

Теперь можно определить *идеальную* токсикологическую систему

как опасную систему, строго подчиняющуюся уравнению (13.14). При этом вредный газ термодинамически удовлетворяет законам поведения идеального газа, так как выполняется условие  $C \rightarrow 0$ .

Токсикологические эксперименты проводятся при атмосферном давлении ( $p_*$ ) и температуре около  $20^\circ\text{C}$ , поэтому, считая опасное вещество при малых концентрациях в атмосферном воздухе идеальным газом, можно записать, что:

$$p_i = C_0 \cdot R_{Ti} \cdot T, \quad (13.22)$$

где  $R_{Ti}$  – индивидуальная газовая постоянная вредного вещества, Дж/(кг·°K);  $p_i$  – парциальное давление газа, Па;  $T$  – абсолютная температура, равная  $293,15$  °K.

Уравнение (13.22) является следствием уравнения Клайперона вида:

$$p_i \cdot \nu_0 = R_{Ti} \cdot T. \quad (13.23)$$

Индивидуальную газовую постоянную  $R_{Ti}$  вычисляют на основе экспериментальных данных по плотности газа ( $\rho_*$ ) при нормальных условиях по формуле:

$$R_{Ti} = \frac{p_* \cdot \nu_*}{273,15} = \frac{p_*}{273,15 \cdot \rho_*}, \quad (13.24)$$

где  $p_* = 1,01325 \cdot 10^5$  Па, а  $\nu_*$  – удельный объем (объем 1 кг газа при давлении 1 атм. и температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ). В таблице 13.6 для основных вредных веществ приведены значения молекулярных масс ( $M_i$ ) и газовых постоянных ( $R_{Ti}$ ). С учетом (13.24) можно записать, что:

$$R_i = K \cdot \frac{C_0}{\rho_*} \cdot \frac{1}{R_{Ti}} \quad \text{или} \quad R_i \cdot R_{Ti} = \text{const}, \quad (13.25)$$

где  $\rho_*$  – плотность газа или пара, кг/м<sup>3</sup> (при давлении в 1 атм и температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ),  $C_0$  – значение максимально неэффективной концентрации для данного газа или пара, заданное в единицах измерения кг/м<sup>3</sup> ( $C_0 = \text{МНК}$ ), а константа  $K$  равна:

$$K = \frac{\tau_0 \cdot p_* \cdot 10^{-2}}{273,15} = 3,846 \frac{\text{мин} \cdot \text{Па}}{^\circ\text{K} \cdot ^\circ\text{Г}} \cdot \frac{\text{мг}}{\text{кг}}.$$

При этом  $R_{Ti}$  измеряется в Дж/(кг·°K), а  $R_i$  – мг·мин/(м<sup>3</sup>·°Г).

Соотношение (13.25) устанавливает аналогию между токсическими и термодинамическими свойствами опасного вещества через опорные точки абсолютной температурной шкалы ( $T$ ) и абсолютной шкалы индекса опасности ( $\theta$ ).

*Построение эмпирической шкалы индекса опасности для идеальной токсикологической системы*

Построим эмпирическую шкалу индекса опасности токсикологической системы  $\varphi$ , исходя из негативных эффектов, наблюдаемых у биоиндикаторов, и свяжем данную шкалу с абсолютной

шкалой индекса опасности этой системы  $\theta$ , который определяется параметрами окружающей среды вида:

$$\theta = \frac{\tau \cdot C}{R_i}. \quad (13.26)$$

В физике измерение температуры основано на принципе замещения ее как объекта измерения некоторой другой физической величиной. Примем подобный подход при построении эмпирической шкалы индекса опасности системы  $\varphi$ . В качестве объекта измерения величины  $\varphi$  используем вероятность возникновения определенной категории негативного эффекта  $w$  у биоиндикаторов, которая тесно связана с временем действия вредного вещества. При этом мы имеем возможность для различных областей воздействий построить несколько шкал величины  $\varphi$ , например, при хроническом, остром или смертельном ингаляционном воздействии, при смертельном пероральном воздействии и т.д. Другими словами, мы можем устанавливать связи между величинами  $\varphi$  и  $\theta$ , т.е. между вероятностями появления негативных эффектов у биоиндикаторов и параметрами окружающей опасной среды.

В токсикологии обработка опытных данных проводится путем установления зависимости «доза-эффект», которая определяет связь между дозой (концентрацией) и степенью выраженности эффекта в экспонируемой группе (популяции). В большинстве случаев график зависимости представляет собой линейную зависимость в координатах  $\log C$  – *пробит*. В этом случае концентрация токсиканта дается в логарифмах, а выраженность эффекта – в пробитах. Для рассматриваемой токсикологической системы пробит определяется на основе использования инверсной функции нормального распределения:

$$W = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\text{Pr}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (13.27)$$

Построим эмпирическую шкалу при смертельном ингаляционном воздействии, так как в этом случае имеются наиболее достоверные данные.

Для линии постоянной вероятности негативного эффекта ( $\text{Pr} = \text{const}$ ) справедлива закономерность вида (13.4). Среднее значение показателя  $n$  в зависимости (13.4) может быть установлено заданием двух характерных точек, определяющих среднесмертельные эффекты:

$$n = \frac{\ln \tau_0 - \ln \tau_d}{\ln C_d - \ln C_0}, \quad (13.28)$$

где  $C_d = CL_{50}^{20}$  – среднесмертельная концентрация вредного вещества;  $\tau_d = 120$  мин (табл. 13.5);  $\tau_0 = 1036800$  мин – среднее время жизни мышей (самцов);  $C_0 = \text{МНК}$ .

Вероятность смертельных эффектов  $w_s$ , связанных только с возрастом биологического объекта, при условии, что концентрация  $C \rightarrow 0$ , может быть определена как вероятность естественной смерти мышей,

которую можно представить как функцию времени. Известно, что на момент рождения вероятность смертности мышей составляет приблизительно  $w_p = 0,04 \div 0,06$  (перинатальная смертность), а в момент времени  $\tau = 24$  месяца величина вероятности естественной смертности равна  $w_0 = 0,5$ .

Таблица 13.6. – Характеристика опасности и термодинамические свойства веществ при ингаляционных воздействиях на мышей

Вещество	$M_i$	$R_{T_i}$	$MHK$	$\mu_i$	$R_i$
1	2	3	4	5	6
1,3-бутадиен	54,1	153,68	3	500	1244,16
N-метиламин	31,07	267,59	0,18	30	31104
Азота диоксид	46,01	180,70	0,24	40	2488,32
Азота оксид	30,01	277,04	0,27	45	2799,36
Акролеин	56,07	148,28	0,18	30	1866,24
Аммиак	17,04	487,91	0,12	20	1244,16
Анилин	93,14	89,263	0,18	30	1866,24
Ацетальдегид	44,06	188,70	0,045	7,5	466,56
Бензол	78,12	106,43	0,6	100	6220,80
Бромбензол	157,01	52,952	0,18	30	1866,24
Водород бромистый	80,91	102,76	0,45	7,5	4665,6
Водород фосфористый	34,00	244,53	0,006	1,0	62,208
Водород фтористый	20,01	415,49	0,03	5	311,04
Водород цианистый	27,03	307,58	0,06	10	622,08
Диметиламин	45,08	184,43	0,03	5	311,04
Диметилацетамид	87,14	95,410	0,036	6	373,248
Диметилформамид	73,04	113,83	0,18	30	1866,24
Диметилэтанолламин	89,16	93,248	0,18	30	1866,24
Диоксан	88,10	94,370	0,42	70	4354,56
Диоксид серы	64,06	129,78	0,225	37,5	2332,80
Дитоллилметан	196,31	42,352	0,18	30	1866,24
Диэтиламин	73,14	113,67	0,15	25	1555,20
Диэтилхлортиофосфат	204,62	40,631	0,06	10	622,08
Диэтилэтанолламин	117,21	70,933	0,18	30	1866,24
Йод	253,8	32,76	0,18	30	1866,24
Кислота уксусная	60,06	138,43	0,27	45	2799,36
Метилфуран	82,11	101,25	0,09	15	933,12
Моноизопропиламин	31,07	267,59	0,045	7,5	466,56
M-хлоранилин	112,61	73,83	0,075	12,5	777,6
Нафталин	128,18	64,862	0,009	1,5	93,312
Озон	48	173,21	0,225	37,5	2332,8
Оксид углерода	28,01	296,82	9,0	1500	93312
Пиперидин	85,15	97,639	0,075	12,5	777,6
П-хлоранилин	112,61	73,83	0,06	10	622,08

Продолжение таблицы 13.6

1	2	3	4	5	6
Серная кислота	98,08	84,768	0,6	100	6220,8
Сероводород	34,08	243,96	0,048	8	497,664
Сероуглерод	76,13	109,21	0,03	5	311,04
Скипидар			3	500	31104
Спирт н-бутиловый	74,14	112,14	0,45	7,5	4665,6
Стирол	104,16	79,820	0,012	2	124,416
Толуол	92,14	90,232	2,7	450	27993,6
Трихлорэтилен	131,53	63,21	4,5	750	46656
Триэтиламин	101,22	82,138	0,63	105	6531,84
Фенол	94,12	88,334	0,018	3	186,624
Формальдегид	30,03	276,86	0,018	3	186,624
Фуран	68,08	122,12	0,06	10	622,08
Фурфурол	96,09	86,523	0,225	37,5	2332,8
Цианистый бензил	117,15	70,969	0,045	7,5	466,56
Циклопентадиен	70,14	118,53	0,3	50	3110,4
Хлор	71,00	117,10	0,18	30	1866,24
Хлорбензол	112,51	73,90	0,45	7,5	4665,6
Хлористый бензил	126,59	65,677	0,375	62,5	3888
Хлороводород	36,46	228,03	1,2	200	12441,6
Этилацетат	88,12	94,35	0,3	50	3110,4
Этилен	28,06	296,29	13,5	2250	139968
Этиленимин	43,07	193,03	0,0075	1,25	77,76

Здесь  $M_i$  – молекулярная масса вещества,  $кг/кмоль$ ;  $R_{Ti}$  – индивидуальная газовая постоянная вещества,  $Дж/кг \cdot ^\circ K$ ;  $\mu_i$  – безразмерный токсический вес вещества;  $R_i$  – индивидуальная токсическая постоянная вещества,  $(мг \cdot мин)/(литр \cdot T)$ ;  $MHK$  – максимально неэффективная (недействующая) концентрация вредного вещества,  $мг/м^3$ .

Таким образом, таблицы смертности могут служить основой для построения эмпирической шкалы индекса опасности. При этом объектом измерения будет выступать время на всем интервале жизни биоиндикатора.

На рисунке 13.2 представлена зависимость вероятности естественной смертности самцов мышей от времени, которая может быть дана в виде:

$$Pr_s = -1,64485 + 1,55806 \cdot 10^{-9} \cdot \tau^{3/2}. \quad (13.29)$$

Уравнение (13.29) построено согласно данным [112], при этом пробит определяется в соответствии с (13.27), а время задается в минутах.

Построим шкалу индекса  $\varphi$ , для чего используем линейное уравнение и две реперные точки. Так как вести измерения вероятности в пробитах неудобно, используем для этого шкалу, градуированную в градусах опасности. В качестве первой точки для градуировки шкалы примем значение  $\varphi_p = 0^\circ$  при вероятности смертельных эффектов  $w_p$  ( $Pr_p = -1,64485$ ) на начало жизни. Для упрощения определим время оценки перинатальной смертности  $\tau = 120$  мин после рождения объектов.



Вторую реперную точку эмпирической шкалы  $\varphi$  совместим с опорной точкой абсолютной шкалы  $\theta$ , для которой вероятность среднесмертельных эффектов от старости равна  $w_0 = 0,5$  ( $\text{Pr}_0 = 0$ ). Будем считать, что в этом случае  $\varphi_0 = 100$  градусов опасности. В результате получаем линейную эмпирическую шкалу индекса  $\varphi$  при  $C \rightarrow 0$  в виде:

$$\varphi = 100 + 60,7957 \cdot \text{Pr}(\tau). \quad (13.30)$$

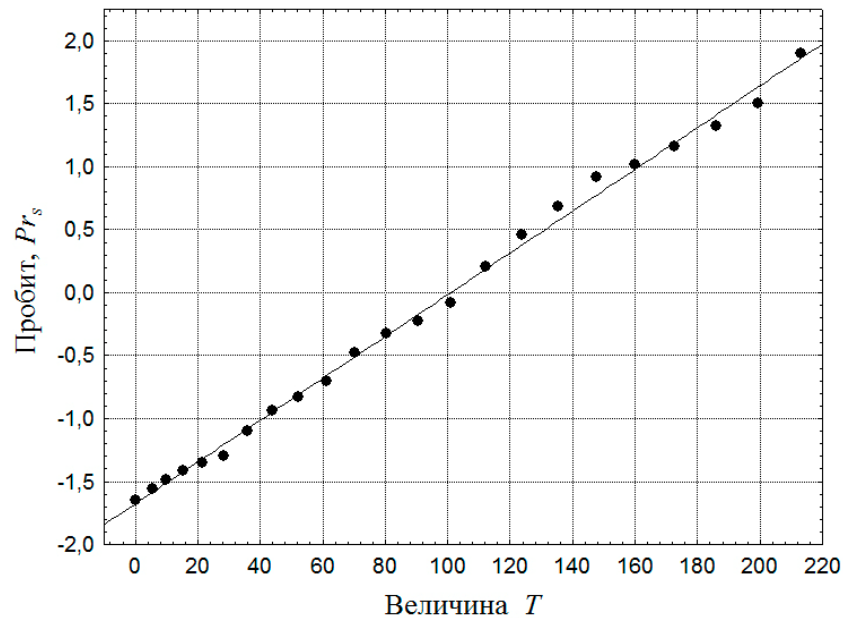


Рис. 13.2. – Зависимость вероятности  $\text{Pr}_s = f(w_s)$  естественной смертности самцов мышей от возраста ( $\tau_s$ );  $T = \tau_s^{3/2} \cdot 10^{-7}$

Для установления при низких концентрациях соответствия абсолютной шкалы  $\theta$ , определенной согласно (13.26), и эмпирической шкалы  $\varphi$  (формула (13.30)) рассмотрим воздействие в области максимально недействующих концентраций, когда опасная система является идеальной. Определяя величины  $\varphi$  и  $\theta$  как функции времени при  $C = C_0 = \text{МНК}$ , получим зависимость между абсолютной и эмпирической шкалами опасности, которая имеет вид:

$$\theta = 4,642 \cdot (\varphi + 1,2452 \cdot 10^{-4})^{2/3}, \quad \varphi \geq 0. \quad (13.31)$$

Индексы  $\theta$  и  $\varphi$  имеют одинаковую размерность градуса опасности ( $^\circ\Gamma$ ), при этом уравнение состояния (13.14) для идеальной токсикологической системы может быть представлено через индекс опасности  $\varphi$  в виде:

$$\theta = 4,642 \cdot (\varphi + 1,245 \cdot 10^{-4})^{2/3} = C \cdot \tau / R_i. \quad (13.32)$$

Результаты обработки данных для области слабых воздействий ( $C \rightarrow 0$ ) приведены на рисунке 13.3. Таким образом, понятие идеальной токсикологической системы следует рассматривать в качестве предельной закономерности для реальных процессов. При увеличении концентрации

вещества будут наблюдаться отклонения в состоянии системы от уравнения (13.14), однако для области слабых воздействий ( $C \rightarrow 0$ ) идеальная система строго подчиняется уравнению (13.32).

Если рассматривать интервалы времени, несколько удаленные от момента рождения ( $\varphi \geq 1^\circ \Gamma$ ,  $\tau \geq 1$  мес.), то со степенью точности  $1,25 \cdot 10^{-4}$  уравнение (13.32) можно представить в виде:

$$\theta = 4,642 \cdot \varphi^{2/3} = C \cdot \tau / R_i . \quad (13.33)$$

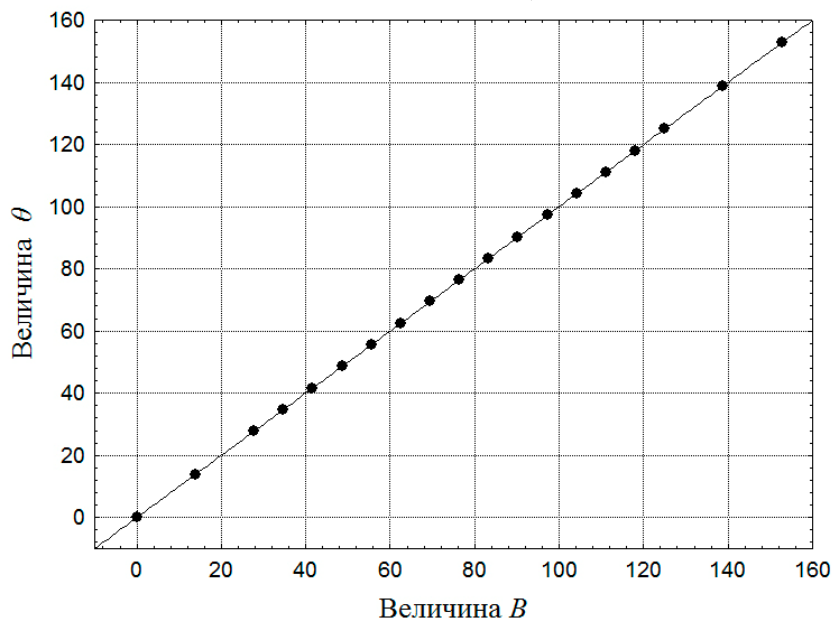


Рис. 13.3. – Зависимость между абсолютной шкалой ( $\theta$ ) и эмпирической шкалой опасности ( $\varphi$ ) для идеальной токсикологической системы,  $\theta = C \cdot \tau / R_i$ ,

$$C = МНК, \quad B = 4,642 \cdot (\varphi + 1,245 \cdot 10^{-4})^{2/3}$$

Проблема построения эмпирической шкалы индекса опасности представляет исключительный интерес, так как её решение создает реальную возможность измерения опасности путем установления связи между принудительной и естественной смертностью биоиндикатора.

#### *Универсальное уравнение состояния токсикологической системы*

В общем случае уравнение (13.32) является приближенным вне области слабых воздействий, где токсикологическая система является идеальной, и это может вносить ошибки в оценку уровня опасности.

Когда концентрация вещества  $C$  при данном времени воздействия  $\tau$  находится существенно выше  $МНК$ , а шкалой индекса опасности необходимо охватить все категории эффектов (хронический, острый и смертельный), не исключена необходимость внесения в уравнение (13.32) поправок. При определении порога хронического действия  $Lim_{ch}$  время воздействия в эксперименте составляет до 4 месяцев, а при оценке эффектов в области острых воздействий может составлять несколько часов. Аналогичные значительные изменения характерны и для пороговых значений концентраций вредных веществ при различных видах воздействий (табл. 13.5).

Таким образом, при средних концентрациях и временах действия вредных веществ могут наблюдаться отклонения от уравнения состояния, которое получено путем обработки данных для областей слабых воздействий. Для уточнения уравнения состояния можно по аналогии с термодинамикой искать уравнения регрессии в виде:

$$Z = \frac{\tau \cdot C}{R_i \cdot \theta} = f(\theta_*, C_*, \tau_*), \quad (13.34)$$

где  $\theta_* = \frac{\theta}{\theta_d}$ ;  $C_* = \frac{C}{CL_{50}^{20}}$ ;  $\tau_* = \frac{\tau}{120}$  – приведенные токсические свойства

вещества. При этом индекс  $\theta$  следует определять согласно уравнений (13.31) или (13.33). В данном случае для уточнения уравнения применяется принцип соответственных состояний. Этот метод использует положение, которое в токсикологии можно сформулировать следующим образом: токсические свойства веществ связаны с характерными свойствами для всех опасных веществ одинаково. В качестве характерной опорной точки можно использовать область 50% смертности мышей при концентрации  $CL_{50}^{20}$  и времени действия вредного вещества 2 часа (точка  $d$  имеет координаты  $\theta = \theta_d$ ;  $C_d = CL_{50}^{20}$ ;  $\tau_d = 120$ ). Данная гипотеза требует опытного подтверждения, которое основывается на возможности построения уравнений вида (13.34) для различных вредных веществ.

Другой метод позволяет получить логический аналог вириального уравнения состояния в термодинамике, для чего уравнение регрессии можно искать в виде:

$$Z = \frac{\tau \cdot C}{R_i \cdot \theta} = 1 + B_2(\theta) \cdot C + B_3(\theta) \cdot C^2 + \dots \quad (13.35)$$

Третий метод позволяет получить логический аналог уравнения Ван-дер-Ваальса. Обращая внимание на вид уравнения (13.13) и учитывая две характерные закономерности, о которых будет сказано ниже, запишем уравнение состояния в виде:

$$(C - C_r) \cdot (\tau - \tau_r) = R_i \cdot \theta. \quad (13.36)$$

Первая закономерность состоит в том, что при любом времени  $\tau$ , даже в случае если  $C = 0$ , существует определенная вероятность спонтанных эффектов, то есть реализация опасности как бы “запаздывает” при любом времени воздействия. Эта вероятность обычно определяется в хроническом эксперименте по оценке возникновения неблагоприятных эффектов в контрольной группе животных при отсутствии воздействия  $C = 0$ . Спонтанные эффекты возрастают с течением времени и достигают максимальных значений вероятности при времени, соизмеримом с биологическим возрастом вида. Принимая квадратичную зависимость эффектов во времени, получим, что  $\tau_r$  пропорционально  $\tau^2$ .

Вторая закономерность связана с тем, что для различных категорий эффектов пороги воздействия при определенном времени действия быстро

возрастают с ростом концентрации, поэтому здесь можно принять параболическую зависимость коэффициента  $C_r$  от концентрации. В результате зависимость (13.36) представим в виде:

$$(C - a \cdot C^2) \cdot (\tau - b \cdot \tau^2) = R_i \cdot \theta. \quad (13.37)$$

Уравнение (13.37) совпадает с (13.14), если в последнем случае ограничиться четырьмя членами ряда.

Таким образом, можно искать уравнение состояния в виде:

$$R_i \cdot \theta = b_1 \cdot C \cdot \tau + b_2 \cdot C \cdot \tau^2 + b_3 \cdot C^2 \cdot \tau + b_4 \cdot C^2 \cdot \tau^2 + \dots, \quad (13.38)$$

где  $b_1 = 1, 0$ ,  $b_2 = 0$ , так как при  $C \rightarrow 0$  уравнение (13.38) должно строго переходить в уравнение (13.14).

В термодинамике существуют методики построения уравнений (13.34) – (13.37), однако нет экспериментальных методик, позволяющих установить связи между вероятностью состояния системы, которая определяется по характерным событиям и параметрам окружающей среды. В токсикологии же наиболее распространенный подход основан на установлении в экспериментах соответствия вероятности возникновения негативных эффектов у биообъектов с параметрами окружающей среды. Поэтому для построения универсального уравнения состояния системы следует распространить экспериментальный метод оценки индекса опасности на всю область токсикологических воздействий.

На линии постоянной вероятности негативного эффекта ( $Pr = const$ ) значение  $\theta$  согласно (13.4) и (13.14) может быть определено из следующего условия:

$$\theta = \theta_s (C_0/C)^{n-1}. \quad (13.39)$$

Здесь  $\theta_s$  – значение  $\theta$  при  $C \rightarrow 0$ , которое определяется согласно уравнения (13.31). Предположим, что показатель  $n$  в процессе, когда наблюдается постоянная вероятность  $w = const$ , в области наблюдаемых смертельных эффектов при высоких концентрациях постоянен. В общем случае эта величина должна определяться опытным путем на всей возможной области воздействия. Для смертельных, острых и хронических эффектов в соответствующих токсикологических экспериментах показатель степени  $n$  связан с наклоном прямой, сглаживающей опытные данные в координатах  $Pr - \ln C$  и может отличаться для различных областей воздействия, а также различных токсикологических признаков. При этом в области острых и хронических эффектов необходим перевод соответствующих эмпирических шкал опасности на эмпирическую шкалу  $\varphi_s$ , определяющую смертельные эффекты.

Таким образом, каждой точке возможной области исходных параметров ( $0 \leq C < \infty$  и  $0 < \tau < \tau_0$ ) может быть поставлено в соответствие значение индекса опасности эмпирической шкалы  $\varphi$ . В свою очередь этой же точке может быть поставлено в соответствие значение индекса  $\theta$  согласно уравнения (13.26). Исходя из связи эмпирического индекса

опасности  $\varphi$  и индекса  $\theta$  возможно построение уравнения состояния токсикологической системы при любых значениях величин  $\tau$  и  $C$ .

В качестве примера, для установления соответствия индексов  $\theta$  и  $\varphi$  рассмотрим область смертельных эффектов.

Как будет показано далее, закономерность (13.4) является следствием следующего уравнения:

$$\text{Pr} - \text{Pr}_0 = \beta_\tau \cdot \ln \frac{C}{C_0} + \beta_c \cdot \ln \frac{\tau}{\tau_0}, \quad (13.40)$$

где  $\beta_c$  и  $\beta_\tau = n \cdot \beta_c$  – константы.

Перейдем к безразмерной величине пробита ( $\text{Pr}_\theta = \text{Pr}/\beta_c$ ) и примем, что  $\text{Pr}_0 = f(\tau)$  при  $C = C_0$ , тогда для оценки опасности среды:

$$\text{Pr}_\theta = f(\tau) + n \cdot \ln \frac{C}{C_0} + \ln \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (13.41)$$

В свою очередь, на линии постоянного пробита, где выполняется закономерность (13.4), при  $C \rightarrow 0$  должно выполняться условие  $\text{Pr}_s = \lim_{C \rightarrow C_0} \text{Pr}_\theta$ , где  $\text{Pr}_s$  определяется согласно (13.29). Таким образом, с

учетом (13.29) и (13.41) получаем универсальное уравнение вида:

$$\text{Pr}_\theta = \text{Pr}_s + n \cdot \ln \frac{C}{C_0} + \ln \frac{\tau}{\tau_s}. \quad (13.42)$$

Здесь  $\text{Pr}_s$  – пробит естественной смерти при данном значении  $\tau_s$ , который вычисляется по (13.29),  $\tau$  – время воздействия опасной среды.

В общем случае коэффициент  $n$  для выбранной точки  $\{C, \tau\}$  определяет некоторое поле направлений опасных процессов около этой точки и зависит от вида протекающего процесса: при постоянной концентрации ( $n = n_c$ ), при постоянном эффекте ( $n = n_{\text{Pr}}$ ), при постоянном времени ( $n = n_\tau$ , идеальный случай резкого роста концентрации) и т.д. Таким образом, в общем случае можно ввести понятие политропного опасного процесса (греч. *polytropos* – многообразный).

Уравнение (13.42) через шкалу  $\varphi$  можно представить в виде:

$$\varphi = \varphi_s + 60,7957 \left( \ln \frac{\tau}{\tau_s} + n \cdot \ln \frac{C}{C_0} \right). \quad (13.43)$$

Таким образом, для любой точки области воздействия может быть найдено значение величины  $\varphi$ , связанное с принудительной смертью объекта, через значение индекса  $\varphi_s$ , которое определяет опасность естественной смерти этого объекта в случае отсутствия негативного воздействия. При этом, если  $\tau = \tau_s$ , то на любой линии  $\tau = \text{const}$  имеем:

$$\varphi = \varphi_s + 60,7957 \cdot n_\tau \cdot \ln \frac{C}{C_0}. \quad (13.44)$$

В свою очередь, если  $\varphi = \varphi_s$  ( $\text{Pr}_\theta = \text{Pr}_s$ ), то на линии постоянной вероятности негативного эффекта время воздействия и концентрация вредного вещества связаны соотношением:

$$\tau = \tau_s \left( \frac{C_0}{C} \right)^{n_{\text{Pr}}} . \quad (13.45)$$

Как видно из (13.43) и (13.45) параметр  $n$  может быть найден как для линии  $\tau = \text{const}$ , так и для линии  $\text{Pr}_\theta = \text{const}$ . Так как данный параметр определяет направление протекания процессов в окрестности выбранного исходного состояния биообъекта, то его среднее значение может быть найдено эмпирически. Например, для точек линии  $\text{Pr}_\theta = \text{const}$   $d\{\tau = 120 \text{ мин}, C = C_d, \varphi = 100^\circ \Gamma\}$  и  $O\{\tau_s = \tau_0, C = C_0, \varphi = 100^\circ \Gamma\}$  из уравнения (13.45) получаем зависимость (13.28), откуда легко определяется значение  $n_{\text{Pr}}$  для случая среднесмертельных эффектов  $\text{Pr}_\theta = \text{Pr}_s = 0$ . В свою очередь из уравнения (13.44) для линии  $\tau = \text{const}$  и точек  $d\{\tau = 120 \text{ мин}, C = C_d, \varphi = 100^\circ \Gamma\}$  и  $p\{\tau = 120 \text{ мин}, C = C_0, \varphi = 0^\circ \Gamma\}$  получим значение  $n_\tau$ . Эмпирические значения  $n_{\text{Pr}}$  и  $n_\tau$  для различных вредных веществ приведены в таблице 13.7.

С учетом уравнений (13.29) и (13.45) мы можем построить единую однозначную шкалу индекса опасности  $\varphi$ . При этом оценки индекса опасности  $\varphi$  согласно этой шкалы должны совпадать с оценками согласно уравнения (13.44), для чего следует определить значение  $n_\tau$  для каждой линии  $\tau = \text{const}$ . Факт построения такой шкалы в виде диаграмм на основе имеющихся опытных данных иллюстрируется рисунком 13.4.

После того, как определен способ измерения величины  $\varphi$ , не представляет сложности повысить точность уравнений, характеризующих состояние опасной системы. Покажем это на примере определения негативных эффектов для области, характеризующей пороговый уровень хронического воздействия. Для данной области концентрации вредных веществ определяются значением  $\text{Lim}_{ch}$  (табл. 13.5), а время воздействия  $\tau = \tau_s$  составляет 4 месяца. Найдем значение величины  $\theta$  по уравнению (13.26), а значение индекса  $\varphi$  определим из уравнения (13.44). При этом для (13.37) сформулируем дополнительные условия: при  $C = C_0$ , имеем

$$\varphi = \varphi_s \text{ и при } \tau_s = \tau_0 \left( \frac{C_0}{C} \right)^{n_{\text{Pr}}} = 172800 \text{ мин} \rightarrow \varphi = 100^\circ \Gamma .$$

На рисунке 13.5 для 22 вредных веществ приведена регрессионная зависимость индекса  $\theta$  от индекса опасности  $\varphi$  для области, характеризующей пороговый уровень хронического воздействия. Данная зависимость имеет вид:

$$\theta = \frac{C\tau}{R_i} = \exp(2,9459 + 0,02061\varphi) . \quad (13.46)$$

Данное уравнение регрессии является значимым, при этом коэффициент корреляции достаточно высок и составляет 0,93.

Обратим внимание на то, что уравнение (13.46) имеет вид подобный уравнению, которое определяет связь между абсолютной ( $T$ ) и эмпирической ( $t$ ) температурами в термодинамике:  $T = const \cdot \exp(\int g(t)dt)$ .

Таблица 13.7. – Параметр  $n_{pr}$  уравнения (13.45), характеризующий среднесмертельные эффекты, и параметр  $n_{\tau}$  уравнения (13.44) для времени воздействия  $\tau = 120$  мин.

Вещество	$n_{pr}$	$n_{\tau}$
Азота диоксид	1,1014	0,1999
Азота оксид	1,1031	0,2002
Аммиак	0,8589	0,1559
Бензол	0,8075	0,1465
Бромбензол	0,7769	0,1410
Диметиламин	1,1174	0,2028
Диметилацетамид	0,6928	0,1257
Диметилформаид	0,8328	0,1511
Дитолилметан	1,6774	0,3044
Диэтилхлортиофосфат	0,9679	0,1756
Диметилэтанолламин	0,9251	0,1679
Диэтиламин	0,8610	0,1562
Диэтилэтанолламин	0,8880	0,1611
Диоксан	0,7857	0,1426
Диоксид серы	1,1618	0,2108
Метилфуран	0,7930	0,1439
Моноизопропиламин	0,8502	0,1543
Озон	3,4993	0,6350
Оксид углерода	1,6416	0,2979
Пиперидин	0,8005	0,1453
Сероводород	0,8950	0,1625
Сероуглерод	0,7125	0,1293
Толуол	0,9663	0,1753
Триэтиламин	0,9894	0,1795
Фенол	0,9324	0,1692
Формальдегид	0,9324	0,1692
Фуран	0,8588	0,1558
Фурфурол	0,8314	0,1509
Циклопентадиен	0,8431	0,1530
Цианистый бензил	1,1762	0,2134
Хлористый бензил	1,3048	0,2368
Этиленламин	0,8328	0,1511

Таким образом, для установления соответствия между абсолютным индексом опасности  $\theta$ , который отражает характеристики опасной среды, и эмпирическим значением индекса опасности  $\varphi$ , который связан с

вероятностью наблюдаемого смертельного эффекта у биоиндикаторов, нами использован принцип, широко применяемый в термодинамике. Этот принцип заключается в совместном рассмотрении результатов теоретического и эмпирического определения некоторого эффекта, наблюдаемого в системе. Данный эффект может быть количественно оценен как по данным опыта, так и по теоретическим данным.

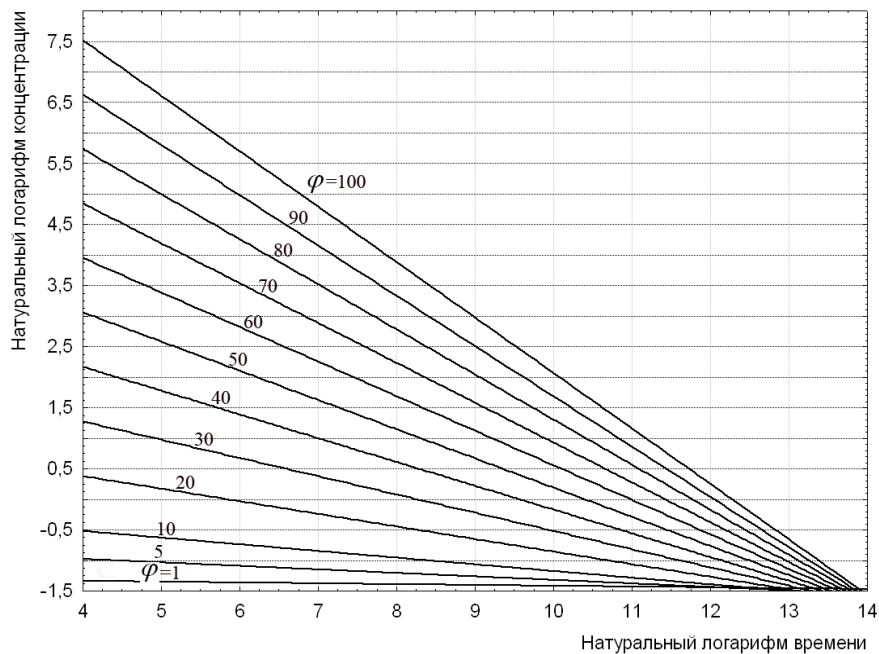


Рис. 13.4. – Диаграмма опасности диоксида азота при ингаляционных воздействиях на мышей

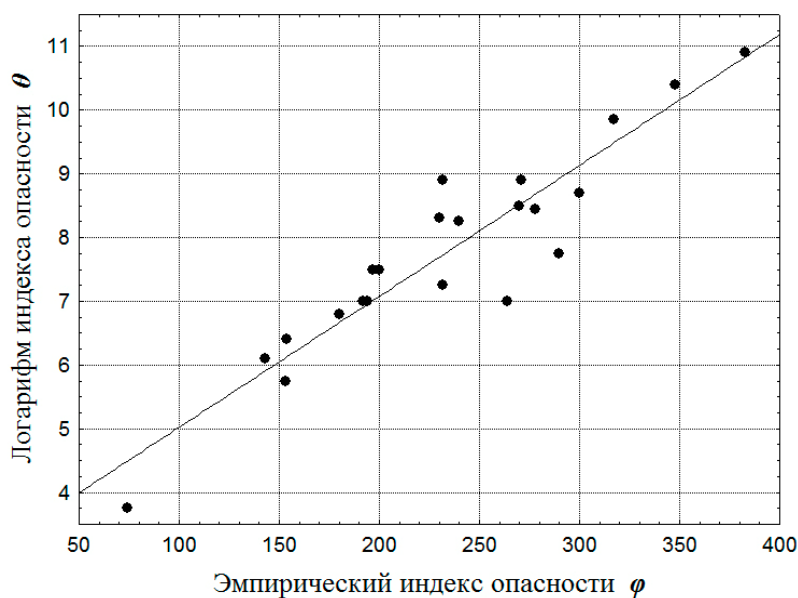


Рис. 13.5. – Зависимость абсолютного индекса опасности  $\theta = C\tau/R_i$  от эмпирического индекса опасности  $\varphi$  для области хронических воздействий

При установлении теоретической закономерности нами было использовано выражение (13.13), вытекающее из разложения уравнения состояния в ряд Тейлора при определенных граничных условиях. С другой стороны использованы опытные данные об естественной и



принудительной смертности, позволяющие оценить вероятность возникновения смертельных эффектов у биообъектов. Это дало возможность установить связь между параметрами опасной среды и вероятностью возникновения негативных эффектов у биоиндикаторов в виде уравнения состояния системы.

Таким образом, используя опытные данные по оценке смертельных воздействий, можно определить состояние системы на всей области опасных воздействий, т.е. построить эмпирическую шкалу индекса опасности. Однако построение шкалы требует наличия достоверных экспериментальных данных по негативным эффектам и значениям концентраций вредных веществ  $C$  и времени воздействия  $\tau$ .

Построение шкал индексов и диаграмм опасности для различных веществ должно проводиться с учетом обработки максимально возможного количества экспериментальных данных. Следует отметить достаточно существенную неопределенность опытных данных в токсикологии. Например, согласно [25] для оксида углерода величина  $CL_{50}^{20}$  для белых мышей равна  $2230 \text{ мг/м}^3$ , а согласно данным [87] соответствующее значение  $CL_{50}^{20}$  составляет  $3970 \text{ мг/м}^3$ . Аналогичная ситуация наблюдается и для многих других опасных веществ. Поэтому тщательное определение на основе экспериментов показателей, характеризующих опасность веществ, представляет собой важную задачу в области шкалирования опасности, так как любая шкала формируется путем установления к ней требований как к объекту стандартизации.

Предложенный метод позволяет производить оценку опасности среды путем установления связи между принудительной и естественной смертностью биоиндикаторов. Это дает возможность обобщить опытные данные и получить универсальную методику оценки опасности среды при ингаляционных воздействиях. В данном случае опасность среды оценивается по живым объектам – белым мышам. Имеется также возможность установить соответствие между различными категориями негативных эффектов путем использования данных о хронических и острых воздействиях с применением шкалы опасности возникновения смертельных эффектов у биоиндикаторов. Полученные результаты позволяют разработать универсальные диаграммы для определения опасности среды и в перспективе перейти к оценке опасности воздействий на другие живые объекты, в том числе и на человека.

Подобные диаграммы вида “ $Pr_{\theta}-\varphi$ ” будут являться логическими аналогами диаграмм “энтропия-температура”, которые применяются в термодинамике для обобщения экспериментальных данных по термодинамическим свойствам различных веществ.

Систематизация опытных данных даст возможность в перспективе предсказывать значения предельно допустимых концентраций вредных веществ, используя методологию, которая подобна по логике представления, методологии определения термодинамических свойств веществ.

Таким образом, показана возможность применения логических принципов и методов построения моделей, принятых в термодинамике, при разработке уравнений состояния систем для качественно иной области исследований, в данном случае – токсикологии.

### **13.5. Основные соотношения и дифференциальные уравнения токсикологии**

Данный раздел посвятим выводу основных соотношений и дифференциальных уравнений для токсикологии, которые являются логическими аналогами соответствующих закономерностей в термодинамике. Этим на практике покажем реальную возможность применения предложенных методов в науке, в основе которой лежит нефизическая теория.

Эмпирические данные свидетельствуют о том, что токсикологические системы при внешних воздействиях и различных значениях параметров свойств в состояниях, для которых справедливо условие  $w = const$ , обладают одним качеством – заданной категорией тяжести эффекта с четко определенной вероятностью возникновения этого эффекта. Данная вероятность находится согласно уравнения (6.1) по частоте возникновения характерных событий.

Наряду с температурой в термодинамике широко используется понятие энтропии. Как указывалось в четвертой главе одна из формулировок второго закона термодинамики, предложенная Больцманом, излагается в виде: природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным. Следствием этого является то, что энтропия тесно связана с вероятностью состояния системы (9.19). Соотношение вида  $s = const$  указывает на то, что в таком процессе вероятность состояния системы не меняется, т.е.  $w = const$ .

Все сказанное выше, а также обобщение эмпирических закономерностей вида (13.3) – (13.7) позволяет нам сформулировать для токсикологических систем первый постулат системодинамики в виде: токсикологические системы обладают квазистатической функцией состояния применительно вероятности состояния этих систем. Исходя из этого, вероятность состояния системы определяется согласно (6.1) и представляется в виде  $w = W(\tau, z_1, z_2, \dots, z_n)$ . При этом вероятность связана с состоянием системы, которое соответствует некоторому качественному признаку, связанному с определенным характерным событием. Практически эта зависимость означает, что система при различных значениях параметров в данных состояниях обладает одним качеством – заданной категорией тяжести эффекта с четко определенной вероятностью возникновения этого эффекта. Важным является то, что функция состояния может быть найдена по эмпирическим данным.

Состояния токсикологической системы с постоянной вероятностью характеризуются следующим тождеством:

$$Pr = \alpha + \beta_{\tau} \cdot \ln C + \beta_c \cdot \ln \tau = const. \quad (13.47)$$

Исходя из эмпирической зависимости (13.3), покажем, что в основе состояний системы с постоянной вероятностью эффекта лежит также и закономерность (13.4), где особенности различных категорий тяжести эффектов (хроническое, острое несмертельное или смертельное) определены постоянными этого уравнения. Будем считать, что закономерность (13.4) имеет универсальный характер для этих категорий, а комплексный показатель опасности  $Pr$  существует и ему присуща закономерность аддитивности в виде:

$$Pr(X) = Pr(\tau) + Pr(C), \quad (13.48)$$

где величина  $X$  является мультипликативной функцией длительности воздействия  $\tau$  и концентрации вредного вещества  $C$  для определенной категории тяжести эффекта. В этом случае функциональный вид величины  $Pr$  определяется из решения дифференциального уравнения:

$$Pr''(X) \cdot X + Pr'(X) = 0. \quad (13.49)$$

Уравнение (13.49) получают дифференцированием зависимости (13.48) с учетом (13.4) по  $\tau$  и  $C$ . Согласно [50] решение (13.49) представляется в виде:  $Pr = \alpha + \beta \cdot \ln X$ . Тогда на линии, образованной движением фигуративной точки, которая обладает свойством постоянной вероятности состояния системы и при выполнении условия (13.4), функция  $Pr$  будет иметь вид:

$$Pr = \alpha + n \cdot \beta_c \cdot \ln C + \beta_c \cdot \ln \tau = const. \quad (13.50)$$

Из полученного результата следует, что существование показателя опасности вида (13.3) уже определяется закономерностью (13.4). Аналогичным образом в термодинамике уравнение адиабаты вида  $p \cdot v^k = const$  определяет вид функции энтропии, которая является аддитивной величиной и также описывается логарифмической функцией относительно термодинамических параметров [31, 81]. В работе [81, стр. 29] представлен аналогичный вывод зависимостей, определяющих закономерности адиабатного процесса в термодинамике. Поэтому, если в каком-либо процессе изменения состояний системы устанавливается общая закономерность вида  $z_1^n \cdot z_2 = const$ , то для описания поведения системы может быть использован аналогичный математический аппарат.

Закономерность (13.4) определена однозначностью функции вероятности состояния системы при условии, что  $w = const$ . Если принять гипотезу, что существует функция вероятности для всех состояний системы, характеризующихся одной категорией тяжести эффекта, следующего вида

$$w = W_k(Pr), \quad (13.51)$$

то зависимость вида (13.50) следует из принципа, что при заданных условиях система не может одновременно находиться в двух разных состояниях. Это обосновано опытными данными и следует из эмпирической закономерности (13.3), где заданной вероятности состояния системы соответствует значение пробита  $Pr$ , которое связано с параметрами системы.

Вероятность состояний системы, определенная по характерным событиям, и её связь с параметрами состояния через эмпирическую функцию состояния  $Pr$  – это та основа, на базе которой могут быть получены основные соотношения. Функция  $Pr$  является полным дифференциалом, т.к. согласно (13.3) получим:

$$dPr = \beta_{\tau} \cdot \frac{dC}{C} + \beta_c \cdot \frac{d\tau}{\tau}. \quad (13.52)$$

На основе признака Эйлера для пфаффовых форм имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\beta_{\tau}}{C} \right)_C = \frac{\partial}{\partial C} \left( \frac{\beta_c}{\tau} \right)_{\tau} = 0.$$

Смысл того, что величина  $dPr$  является полным дифференциалом (функцией состояния) заключен в том, что получение негативного эффекта для объекта воздействия не зависит от пути перехода объекта из состояния 1 в состояние 2. В качестве примера – смертельный эффект для заданных условий с определенной вероятностью (состояние 2) может быть достигнут разными путями перехода из состояния 1 в состояние 2.

Непосредственно измерить показатель опасности  $Pr$  нельзя, однако его можно определить расчетным путем через эмпирическое значение вероятности состояния. Для оценки опасности процессов представляет интерес не абсолютное значение показателя  $Pr$ , а его изменение при воздействиях. Поэтому необходимо пользоваться относительным значением  $Pr$ , заданным от некоторой выбранной точки отчета. Если известно значение  $Pr_0 = Pr(C_0, \tau_0)$  для начальной области той или иной категории эффекта, то комплексный показатель опасности с другими параметрами (например, при концентрации вредного вещества  $C$  и длительности воздействия  $\tau$ ) может быть определен из следующего соотношения:

$$Pr(\tau, C) = Pr_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \left( \frac{\partial Pr}{\partial \tau} \right)_C d\tau + \int_{C_0}^C \left( \frac{\partial Pr}{\partial C} \right)_{\tau} dC. \quad (13.53)$$

Первый интеграл в правой части этого уравнения представляет собой величину показателя опасности при изменении времени воздействия от  $\tau_0$  до  $\tau$ . Второй интеграл представляет собой величину показателя опасности при изменении значения концентрации опасного вещества от  $C_0$  до  $C$ . При этом для областей воздействий, которые характеризуют одну категорию эффекта, справедливы следующие уравнения:

$$\left( \frac{\partial Pr}{\partial C} \right)_{\tau} = \frac{\beta_{\tau}}{C} \quad \text{и} \quad \left( \frac{\partial Pr}{\partial \tau} \right)_C = \frac{\beta_c}{\tau}. \quad (13.54)$$

В этом случае изменение комплексного показателя опасности, с учетом (13.3), будет иметь следующий вид:

$$Pr - Pr_0 = \beta_{\tau} \cdot \ln \frac{C}{C_0} + \beta_c \cdot \ln \frac{\tau}{\tau_0}, \quad (13.55)$$

где  $C_0, \tau_0$  – некоторые начальные значения концентрации и времени

воздействия, характеризующие получение определенной категории тяжести эффекта с заданной вероятностью, например, смертельный эффект с вероятностью 5%. Таким образом, в качестве величины  $Pr_0$  можно задавать значение этого показателя для определенных порогов воздействия соответствующей категории тяжести эффекта.

Из данных результатов следуют определенные аналогии с термодинамическими методами расчета энтропии вещества. По крайней мере, при определении показателя опасности  $Pr$  может быть использована аналогичная логическая схема расчетов. Обратим внимание на то, что в показатель  $Pr$  входит величина времени, а также на то, что  $Pr$  в определении (6.2) – величина безразмерная. По аналогии с энтропией вещества, пробит  $Pr$  может быть представлен размерной величиной, так как это сделано далее.

Рассмотрим теперь всю область возможных воздействий на живой объект  $\Psi(0 \leq \tau < \tau_0; 0 \leq C < \infty)$ , где  $\tau_0$  – средняя продолжительность жизни биологического вида. Предположим существование на всей области определения концентрации и времени воздействия однозначной функции вероятности состояния системы, которая комплексно охватывает все категории тяжести неблагоприятных эффектов.

Так как уравнения вида (13.3) задаются для определенной категории тяжести эффекта, возникает необходимость построения более общих уравнений, например, уравнений следующего вида:

$$Pr = \alpha(\theta) + \beta_{\tau}(\theta) \cdot \ln C + \beta_c(\theta) \cdot \ln \tau. \quad (13.56)$$

В этом случае возможна оценка вероятности состояния системы по характерным событиям, наблюдаемым на всей области определения переменных  $\tau$  и  $C$ , например, по смертельным эффектам. Другими словами, функция вероятности состояния определяется по наиболее тяжелому эффекту – смертности объектов. Естественно, что в данном случае смертность является следствием как принудительных причин (например, опасного уровня загрязнения воздуха), так и естественных факторов (например, преклонного возраста объекта). На основе такой оценки возможно установление соответствия между различными видами эффектов, которые могут наблюдаться в области  $\Psi$ .

Введем уравнение (13.56) формально. При этом предположим, что величина  $Pr$  может иметь размерность. В данном случае переменная  $\theta$  представляет собой индекс опасности состояния системы – относительный количественный показатель, комплексно характеризующий уровень опасности окружающей среды при воздействии.

Для дальнейших выводов используем простейшее эмпирическое уравнение состояния токсикологической системы (13.26), которое было получено в предыдущем разделе. Уравнения (13.3) и (13.26) дают возможность установить связь между статистическими и геометрическими вероятностями системы, т.е. применить второй постулат системодинамики.

Таким образом, в рамках данного исследования мы подошли к

построению некоторого уравнения сохранения, которое может быть определено по аналогии с термодинамикой, как первое начало. Пока не делаем никаких предположений относительно этого уравнения и попробуем вывести его из имеющихся эмпирических соотношений.

Определим с учетом уравнений (13.3) и (13.26) количество воздействия в следующем виде:

$$dQ = \theta \cdot dPr = \theta \cdot \left( \beta_\tau \cdot \frac{dC}{C} + \beta_c \cdot \frac{d\tau}{\tau} \right) = \frac{1}{R_i} (\beta_\tau \cdot \tau \cdot dC + \beta_c \cdot C \cdot d\tau). \quad (13.57)$$

Преобразуя данное уравнение, получим следующее соотношение:

$$dQ = dU + C \cdot d\tau, \quad (13.58)$$

где величина  $dU$  равна:  $dU = \frac{1}{R_i} (\beta_\tau \cdot \tau \cdot dC + \beta_c \cdot C \cdot d\tau) - C \cdot d\tau$ .

Применяя к последнему уравнению признак Эйлера для пфаффовых форм, получим, что  $dU$  является полным дифференциалом (функцией состояния) при выполнении следующего условия:

$$\beta_c - \beta_\tau = R_i. \quad (13.59)$$

Легко показать, что в этом случае  $dU = \beta_\tau \cdot d\theta$ ,  $d(U + C \cdot \tau) = \beta_c \cdot d\theta$  и  $n = \beta_\tau / \beta_c$ , а величины  $dU$  и  $d(U + C \cdot \tau)$  зависят только от индекса опасности  $\theta$ . В результате в нашем случае получен логический аналог уравнения Майера в термодинамике.

Обратим внимание на то, что мы пока умышленно не вводим никаких новых определений, так как суть величин  $U$  и  $(U + C \cdot \tau)$  далека от соответствующих аналогов (энергия и энтальпия) в термодинамике. Например, размерности этих величин задаются как  $[мг \cdot мин / м^3]$ , а уравнение (13.59) является определенной формой закона сохранения массы и определяет интенсивность поглощения вредного вещества живым объектом.

Известно, что для каждого биологического вида имеются характерные показатели, отличающие данный вид от других видов. При оценке риска ингаляционных воздействий широко используют осредненные для живых объектов одного вида такие показатели как скорость дыхания  $V$  [ $м^3 / мин$ ] и масса живого объекта  $M$  [ $кг$ ], а также средняя продолжительность жизни биологического вида  $\tau_0$  [ $мин$ ]. Стандартные значения этих величин приведены, например, в [71]. Умножив (13.59) на постоянную величину  $\gamma = V/M$ , представим это уравнение в виде закона сохранения дозы:

$$d\bar{Q} = d\bar{U} + \bar{I} \cdot d\tau, \quad (13.60)$$

где  $\bar{Q} = Q \frac{V}{M}$ ,  $\bar{U} = U \frac{V}{M}$ ,  $\bar{I} = C \frac{V}{M}$ , при этом  $\bar{Q}$  и  $\bar{U}$  имеют размерность дозы [ $мг / кг$ ], а  $\bar{I}$  – интенсивности дозы [ $мг / (кг \cdot мин)$ ].

После того, как показана справедливость уравнения (13.58), легко

вывести целый ряд других дифференциальных соотношений. Например, логические аналоги термодинамических уравнений Максвелла в токсикологии могут быть получены из уравнений  $dU = \theta \cdot dPr - C \cdot d\tau$ ,  $d(U + C \cdot \tau) = \theta \cdot dPr + \tau \cdot dC$  и др. в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)_{Pr} &= -\left(\frac{\partial C}{\partial Pr}\right)_{\tau}; & \left(\frac{\partial \theta}{\partial C}\right)_{Pr} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial Pr}\right)_{C}; \\ \left(\frac{\partial C}{\partial \theta}\right)_{\tau} &= \left(\frac{\partial Pr}{\partial \tau}\right)_{\theta}; & \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)_{C} &= -\left(\frac{\partial Pr}{\partial C}\right)_{\theta}. \end{aligned} \quad (13.61)$$

Из соотношения (13.3) с учетом (13.26) можно получить следующие уравнения:

$$Pr = \alpha' + \beta_{\tau} \cdot \ln \theta + (\beta_c - \beta_{\tau}) \cdot \ln \tau, \quad (13.62)$$

$$Pr = \alpha'' + \beta_c \cdot \ln \theta - (\beta_c - \beta_{\tau}) \cdot \ln C, \quad (13.63)$$

где  $\alpha'$  и  $\alpha''$  – некоторые постоянные. Из уравнений (13.62) и (13.63) можно получить:

$$\beta_{\tau} = \theta \cdot \left(\frac{\partial Pr}{\partial \theta}\right)_{\tau} \quad \text{и} \quad \beta_c = \theta \cdot \left(\frac{\partial Pr}{\partial \theta}\right)_{C}. \quad (13.64)$$

Дальше легко получить все другие логические аналоги уравнений термодинамики, которые изложены, например, в [92].

Из приведенного материала видны определенные системные аналогии в построении моделей в термодинамике и токсикологии. Нами практически разработан математический аппарат токсикологии на основе использования эмпирической зависимости (13.3) применительно к вероятности состояний системы, а также простейшего уравнения состояния вида (13.26).

Сформулируем основные определения для полученных величин и приведем их размерности. При этом придется дать новые названия некоторым величинам. Используемые в разделе величины сведены в таблицу 13.8.

Ранее используемый индекс опасности при токсикологическом воздействии  $\theta$  назван *вирулентурой* – от слова вирулентный (*лат. virulentus* – ядовитый), что означает болезнетворный, способный вызвать заболевание или смерть. Данная величина является индексом, она определяет уровень опасности среды по комплексу опасных свойств и его шкала строится путем градации возможной области воздействия. Градация – это постепенный переход от одной ступени (этапа, эффекта) к другому, расчленение переходного процесса на последовательно расположенные области. Единица измерения величины  $\theta$  – градус опасности (*gradus* – ступень).

Каждый живой организм в заданном состоянии обладает внутренней мерой, определяющей его жизнеспособность, упрощенно говоря «жизненной силой». Для оценки опасности это может быть общая мера жизнеспособности, относительное изменение которой следует вести от состояния «смерть объекта». Поэтому назовем эту меру *вирулентностью*, и определим ее как общую меру жизненной активности объекта.

Вирулентность  $\bar{U}$  может комплексно характеризовать состояние живого объекта при токсическом воздействии. Как было показано выше, вирулентность является функцией состояния и величина  $d\bar{U}$  представляет собой полный дифференциал. Поэтому изменение вирулентности  $\Delta\bar{U}$  в каком-либо токсическом процессе зависит только от ее значений в начальном  $\bar{U}_1$  и конечном  $\bar{U}_2$  состояниях и не зависит от характера этого процесса или от значений вирулентности в промежуточных состояниях данного процесса.

Химическое воздействие опасной окружающей среды на живой объект осуществляется путем поглощения им определенной дозы вредного вещества. Доза – это форма переноса вирулентности между живым объектом и опасной средой. Поглощение дозы вредного вещества приводит к изменению вирулентности объекта. Доза является функцией токсического процесса и определяется произведением интенсивности дозы  $\bar{I}$  на время воздействия. Не всякое поглощение дозы может привести к явно выраженному негативному воздействию на живой организм. В данном случае наличие воздействия мы понимаем как изменение негативного эффекта, т.е. необратимый дрейф состояния живого объекта в шкале качеств и увеличение вероятности появления негативных эффектов. В этом случае дифференциал пробита положителен и отличен от нуля, а количество воздействия определено соотношением  $dQ = \theta \cdot dPr$ . Поэтому второй формой изменения вирулентности является количество воздействия  $\bar{Q}$ , приводящее к изменению негативного эффекта у объекта.

Таким образом, воздействие и доза не являются видами вирулентности, а представляются формами ее переноса. Первая величина определяет получение негативного эффекта объектом и, следовательно, нанесение ему ущерба, а вторая величина характеризует влияние внешних условий на живой объект.

Производная от количества воздействия  $\bar{Q}$  по вирулентуре, в каком-либо токсическом процессе названа *вируемкостью*:

$$B = dQ/d\theta.$$

Логическим аналогом этой величины в термодинамике является теплоемкость. Все другие определения сведены в таблицу 13.8.

В заключение раздела сформулируем начала системодинамики для токсикологии. В этом случае первый закон вида (13.60), определяющий количественную сторону процессов в токсикологии, имеет фундаментальное значение и гласит:

- вирулентность является функцией состояния и ее изменение не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;
- бесконечно малое изменение вирулентности является полным дифференциалом.

Второй закон, определяющий качественную сторону процессов в токсикологии, можно сформулировать в виде:



- необратимость токсических процессов определена вероятностными закономерностями возникновения неблагоприятных событий, которые наблюдаются во времени, исходя из причинно-следственных связей;
- пробит является однозначной функцией состояния и его изменение не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;
- бесконечно малое изменение количества воздействия в токсическом процессе, деленное на вирулентуру, является полным дифференциалом пробита.

Таблица 13.8. – Основные используемые величины и их размерности

Величина	Обозначение	Размерность
Концентрация	$C$	$мг/м^3$
Время	$\tau$	$мин$
Масса биологического объекта	$M$	$кг$
Скорость дыхания объекта	$V$	$м^3/мин$
Биопоказатель вида	$\gamma = V/M$	$м^3/(мин \cdot кг)$
Вирулентура – уровень опасности при воздействии	$\theta$	$^{\circ}Г, градус опасности$
Пробит (размерный)	$Pr$	$мг \cdot мин/м^3 \cdot ^{\circ}Г$
Вирулентность	$\bar{U}$	$мг/кг$
Количество воздействия	$\bar{Q}$	$мг/кг$
Доза	$\bar{I} \cdot \tau$	$мг/кг$
Интенсивность дозы	$\bar{I}$	$мг/(кг \cdot мин)$
Удельная вирулентность	$U = \bar{U}/\gamma$	$мг \cdot мин/м^3$
Удельное воздействие	$Q = \bar{Q}/\gamma$	$мг \cdot мин/м^3$
Вируемкость	$B = d\bar{Q}/d\theta$	$мг/(кг \cdot ^{\circ}Г)$
Вируемкость при постоянном времени	$B_{\tau}$	$мг/(кг \cdot ^{\circ}Г)$
Вируемкость при постоянной концентрации	$B_c$	$мг/(кг \cdot ^{\circ}Г)$
Удельная вируемкость	$\beta = B/\gamma$	$мг \cdot мин/м^3 \cdot ^{\circ}Г$
Удельная вируемкость при постоянном времени	$\beta_{\tau} = B_{\tau}/\gamma$	$мг \cdot мин/м^3 \cdot ^{\circ}Г$
Удельная вируемкость при постоянной концентрации	$\beta_c = B_c/\gamma$	$мг \cdot мин/м^3 \cdot ^{\circ}Г$
Индивидуальная токсическая постоянная вещества	$R_i$	$мг \cdot мин/м^3 \cdot ^{\circ}Г$

Таким образом, путем логической аналогии на основе применения термодинамического метода нами построен понятийно-категорийный и математический аппарат для описания токсических воздействий на живые объекты. Предложена система обоснования первого и второго начала в токсикологии. При этом существующий аппарат термодинамики открывает значительные возможности для математического описания токсических процессов.

## Глава четырнадцатая

# СИСТЕМОДИНАМИКА И ПРОБЛЕМЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

### 14.1 Термодинамика идеального газа

В классической термодинамике на протяжении всей истории ее становления всегда выделялись две крупные проблемы. Первая из них – это проблема энтропии и развитие различных систем обоснования ее существования. Данному вопросу уделено множество работ и исследований, дискуссии не утихают до настоящего времени, хотя их острота уже значительно сгладилась, т.к. вопрос существования энтропии – это общепринятый фундаментальный принцип естествознания. В термодинамике гипотеза о существовании энтропии – неоспоримый факт, тесно связанный со вторым началом. Однако существование энтропии, фундаментальный принцип ее возрастания и связь этих положений с необратимостью процессов в природе, так и не были полностью изучены. В чем суть необратимости – это пока и сегодня не до конца решенная задача термодинамики. Качественно суть необратимости вроде бы ясна, количественно уловить ее содержание не удается. Проблема «обратимые – необратимые процессы» даже удивляет своей неразрешимостью в течении очень длительного времени по меркам современной науки. Известный тезис Планка, что вместе с необратимостью «стоит и падает вся термодинамика» говорит о том, насколько важен данный вопрос.

Вторая проблема – это наличие времени в уравнениях классической термодинамики. Как отмечает ряд авторов, классическая термодинамика по своей сути является термостатикой. Опираясь термодинамическими процессами, которые протекают во времени, классическая термодинамика не дает ответа на вопрос о месте времени в своей теории. Введя понятие равновесного процесса, который является уж слишком абстрактной идеализацией реальности, теория термодинамики не отвечает на вопрос: в чем суть принципиальных отличий равновесного процесса от квазистатического процесса, и как последний связан с квазистационарным процессом. И в квазистатическом и в квазистационарном процессах при любом варианте описания должно присутствовать время. Вот пример типичного пояснения сути проблемы «равновесные – неравновесные процессы» [50, стр. 46]. «Любой процесс становится равновесным, если скорость осуществления этого процесса стремится к нулю. В тоже время любой неравновесный процесс является необратимым, а всякий равновесный процесс является процессом обратимым. Иными словами, причина необратимости реальных процессов заключается в их неравновесности. Действительно, бесконечно медленное (квазистатическое) проведение процесса делает этот процесс обратимым».

В данном варианте пояснения проблемы понятие необратимости заменяется неравновесностью, которая, в свою очередь, связывается с нарушением квазистатичности. Как видно, в место одного понятия

необратимости введено в употребление еще два понятия, однако это совсем не делает изучаемую проблему более ясной. Для квазистатичных процессов (бесконечно медленных процессов) можно не учитывать производные изменения параметров относительно абсолютного времени, но это не дает ответа на вопрос о месте и необходимости присутствия времени в теории классической термодинамики. Мы не можем влиять на скорость осуществления большинства необратимых процессов, поэтому предполагая возможность их квазистатического протекания, мы тем самым уходим от опыта в область крайне умозрительных и гипотетических предположений. Очень сложно представить существование квазистатических процессов плавления веществ простым трением (опыты Деви), квазистатических процессов в опытах Джоуля с падающим грузом или в опытах по экспериментальному исследованию адиабатических процессов (например, опыты Клемана, Люммера, Партингтона и др.). Следует отметить, что множество экспериментальных обоснований в термодинамике вовсе не связано с осуществлением очень медленных (равновесных, квазистатических) процессов [84]. В лучшем случае можно говорить об осуществлении квазистационарных процессов. Поэтому, в общем суть проблемы необратимости не зависит от того, медленно или сравнительно быстро осуществляется процесс. Необратимость связана с формированием статистических закономерностей при осуществлении процессов и нарушением принципа равновозможности в окрестности состояний системы. А нарушение равновозможности определяется, в первую очередь, видом процесса и его статистическими особенностями, а потом уже скоростью осуществления его во времени.

Так как нами ранее было установлено, что энтропия непосредственно связана с системным временем, которое, в свою очередь, зависит от абсолютного времени, а существование энтропии вытекает как следствие из существования функции состояния системы, то можно согласиться с А.А. Гухманом об соотношении основных принципов термодинамики [31]. Он утверждал, что принцип существования энтропии представляет совершенно самостоятельное положение, которое ни в какой мере не связано с принципом возрастания энтропии. Подобный вывод следует также и из исследований Т.А. Афанасьевой-Эренфест.

Чтобы подойти к пониманию в последующих главах указанных выше проблем, обратимся к понятию идеального газа. Модель идеального газа является крайне важной в термодинамике, так как этот газ является эталонным объектом для разработки шкал термометров и создания процедур сравнения состояний различных веществ с состояниями идеального газа по факту измерения температуры, в качестве которой изначально принимается идеально-газовая температура.

Будем исходить только из существующих опытных фактов, так как формирование основ термодинамики всегда было связано с феноменологическим подходом. В термодинамике идеальным газом считается газ, параметры которого строго подчиняются эмпирическому

уравнению Клапейрона вида  $p \cdot \nu = R_i \cdot T_*$ , где  $T_*$  является температурой, определяемой по идеально-газовой шкале. Из данного экспериментального факта нам интересен вывод о зависимости состояния газа от давления  $p$  и удельного объема  $\nu$ , а также то, что при низких давлениях параметры состояний некоторых простых реальных газов подчиняются уравнению Клапейрона. Зная только величины давления и удельного объема, мы можем выделить некоторое семейство состояний идеального газа, которое обладает общими признаками по факту справедливости зависимости  $p \cdot \nu = C$ , где  $C$  – константа.

Следующий опытный факт термодинамики связан с существованием понятий количества теплоты, температуры и теплоемкостей, которые тесно связаны между собой. Количество теплоты ( $Q$ ) – это физическая величина, показывающая, какая энергия передана телу в результате теплообмена. Температура ( $T$ ) – параметр состояния, установленный опытным путем и характеризующий тепловое состояние термодинамической системы. Температура представляет собой меру отклонения состояния системы от состояния теплового равновесия эталонного тела, в качестве которого принимают идеальный газ. Для газов теплоемкость обычно равна:

$$c_l = \frac{dQ_l}{dT_l}, \quad (14.1)$$

и она представляет собой количество теплоты, необходимое для изменения температуры термодинамической системы на один градус в некотором процессе  $l$ . Важным здесь является то, что существуют способы количественного измерения данных величин в опыте. В качестве температуры в уравнении (14.1), в общем случае, используют абсолютную температуру, которая тесно связана с идеально-газовой температурой. При этом понятие абсолютной температуры распространяют на все термодинамические системы в целом.

Исходя из приведенных данных, можно утверждать, что количество теплоты и температура каким-то образом связаны с давлением и удельным объемом идеального газа.

Таким образом, исходные опытные факты позволяют сделать следующие утверждения:

а) существует некоторый универсальный параметр состояния идеального газа, который называется абсолютной температурой и который связан с давлением и удельным объемом идеального газа, т.е.  $T = T(\nu, p)$ . Пока кроме возможности существования такого параметра не делаем больше никаких дополнительных предположений;

б) изменение количества теплоты  $Q$  в произвольном процессе  $l$  зависит от изменения абсолютной температуры и, как следствие, от изменений давления и удельного объема.

Теперь предположим, что некоторая величина  $Q$ , о физической природе которой мы ничего не утверждаем, кроме справедливости

приведенных выше положений, зависит от величин  $p$  и  $v$  и образует на плоскости  $pOv$  непрерывное скалярное поле. Тогда данная величина может быть представлена в виде:

$$dQ = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv + \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp \quad (14.2)$$

или с учетом (14.1) как

$$dQ = c_p \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv + c_v \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp. \quad (14.3)$$

Возможность представления величины  $dQ$  в виде (14.3) определена понятиями функции двух переменных и обоснована известным объемом эмпирических данных. Уравнение (14.3) не является уравнением в полных дифференциалах, так как для него нарушается справедливость признака

Эйлера:  $c_p \left( \frac{\partial^2 T}{\partial v \partial p} \right) \neq c_v \left( \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} \right)$ . Только в случае, если в окрестности

произвольного состояния системы результат осуществления процессов обладает свойством равновозможности ( $c_l = c_v = c_p = const$ ), то величина  $dQ$  будет полным дифференциалом.

Пфаффова форма двух переменных вида (14.3) всегда имеет интегрирующий множитель.

Поэтому предположим, что данное уравнение имеет интегрирующий множитель, который зависит от некоторой известной функции  $\eta(v, p)$ . Необходимым и достаточным условием существования для уравнения (14.3) интегрирующего множителя, зависящего только от функции  $\eta(v, p)$ , является справедливость следующего соотношения [58, стр. 34]:

$$\frac{c_p \left( \frac{\partial^2 T}{\partial v \partial p} \right) - c_v \left( \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} \right)}{c_v \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right) \frac{\partial \eta}{\partial v} - c_p \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right) \frac{\partial \eta}{\partial p}} = \zeta(\eta), \quad (14.4)$$

где  $\zeta(\eta)$  – некоторая функция, зависящая только от  $\eta(v, p)$ , а величины  $c_l$  принимаются в окрестности произвольного состояния термодинамической системы постоянными. При справедливости условия (14.4) интегрирующий множитель может быть представлен в виде:

$$\mu = \exp \left( \int \zeta(\eta) d\eta \right). \quad (14.5)$$

Так как функцию  $\eta(v, p)$  мы можем подбирать произвольно, то определим условия, при которых в качестве функции  $\eta(v, p)$  может быть выбрана функция  $T(v, p)$ , т.е.  $\eta(v, p) = T(v, p)$ . В этом случае соотношение (14.4) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v \partial p} + \zeta(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = 0, \quad (14.6)$$

Данное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных может быть решено с помощью метода Фурье. Будем искать нетривиальные решения уравнения (14.6) в виде произведения  $T(v, p) = \eta_1(v) \cdot \eta_2(p)$ . Подставляя данное выражение в (14.6) получим

$$\eta_1'(v) \cdot \eta_2'(p) + \zeta(T) \cdot \eta_1'(v) \cdot \eta_2(p) \cdot \eta_1(v) \cdot \eta_2'(p) = 0 \quad \text{или} \\ 1 + \zeta(T) \cdot \eta_1(v) \cdot \eta_2(p) = 0. \quad (14.7)$$

Из уравнения (14.7) получаем, что  $\zeta(T) = -\frac{1}{\eta_1(v) \cdot \eta_2(p)} = -\frac{1}{T}$ , в этом

случае интегрирующий множитель равен:

$$\mu = \exp\left(-\int \frac{dT}{T}\right) = \frac{C}{T}, \quad (14.8)$$

где  $C$  – постоянная. Для приведения уравнения (14.3) к уравнению в полных дифференциалах, достаточно знать один какой-либо интегрирующий множитель. Поэтому, принимая для простоты  $C = 1$ , в результате получаем, что  $\mu = \frac{1}{T}$ , где универсальный параметр состояния  $T$  следует искать в классе функций вида  $T(v, p) = \eta_1(v) \cdot \eta_2(p)$ . В этом случае интегрирующий множитель будет обратно пропорционален произведению произвольных функций, одна из которых зависит только от удельного объема  $v$ , а другая – только от давления  $p$ . Таким образом, можно построить бесконечное множество функций вида  $T(v, p) = \eta_1(v) \cdot \eta_2(p)$ , которые могут быть определены как абсолютная температура идеального газа. Естественно, что теплоемкости (14.1) будут непосредственно зависеть от выбранного вида функции  $T$ .

Все полученные до этого места результаты определяются только опытными фактами термодинамики о возможности взаимосвязи количества теплоты и температуры вида (14.1) и сделанными ранее предположениями (а) – (б). Теперь мы можем привлечь опытные факты об уравнении состояния идеального газа.

Эмпирически найденное уравнение Клапейрона  $p \cdot v = R_i \cdot T_*$ , которое является уравнением состояния идеального газа, устанавливает связь температуры, определенной по идеально-газовой шкале, и удельного объема и давления газа. Данное уравнение входит в класс функций  $T(v, p) = \eta_1(v) \cdot \eta_2(p)$  и является наиболее простой зависимостью, причем установленной опытным путем. Здесь отметим, что в качестве абсолютной температуры  $T = T(v, p)$  вовсе не обязательно использовать идеально-газовую шкалу и модель идеального газа – это одна из многих возможностей, хотя достаточно наглядная и изученная. Можно построить и согласовать с опытными данными другую модель вида

$T(\nu, p) = \eta_1(\nu) \cdot \eta_2(p)$  при этом увязать с одной стороны величину  $T(\nu, p)$  с давлением и удельным объемом газа, а с другой стороны – с термометрическим параметром свойства некоторого термометрического вещества, например, сопротивлением платинового термометра, и использовать полученную модель в уравнении (14.3). Однако, такие модели будут более сложными и не всегда они могут быть представлены в аналитическом виде.

Принимая в качестве величины  $T$  температуру идеально-газовой шкалы  $T_*$ , которая входит в эмпирическое уравнение Клапейрона, получим зависимость (14.3) в виде:

$$dQ = c_p \frac{p}{R_i} d\nu + c_v \frac{\nu}{R_i} dp. \quad (14.9)$$

Таким образом, абсолютную температуру  $T$  можно задать как величину тождественно равную температуре, определяемой по идеальной газовой шкале, т.е.  $T = T_*$ .

Из уравнения (14.9) при известном интегрирующем множителе  $\mu = 1/T$  определим полный дифференциал:

$$ds = \frac{dQ}{T} = c_p \frac{d\nu}{\nu} + c_v \frac{dp}{p}; \quad s - s_0 = c_p \cdot \ln\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) + c_v \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right), \quad (14.10)$$

который в термодинамике является энтропией состояния идеального газа.

Таким образом, если  $\mu = \frac{1}{T}$  – интегрирующий множитель, а  $s(\nu, p)$  – соответствующий ему интеграл уравнения (14.3), то всякий интегрирующий множитель  $\mu_*$  этого уравнения дается формулой

$\mu_* = \frac{\phi(s)}{T}$ , а соответствующий интеграл равен  $U_* = \phi(s)$ , где  $\phi(s)$  –

произвольная непрерывно дифференцируемая функция, причем  $\phi'(s) = \phi(s)$ . Исходя из этого, величину  $dQ$  можно представить в виде  $dQ = (T/\phi(s)) dU_*$ . Таким образом, для идеального газа мы всегда можем преобразовать скалярное поле величины  $Q$  в потенциальное поле некоторой другой величины.

Теперь введем в рассмотрение величину  $du = c_v \cdot dT$ , которую определим как энергию идеального газа. Величина  $du$  является полным дифференциалом, так как величина  $dT$  – полный дифференциал по определению. Представим (14.9) в виде уравнения сохранения энергии:

$$dQ = du_* + p \cdot d\nu, \quad (14.11)$$

где  $u_*$  – некоторая величина. Учитывая (12.9), получим:

$$du_* = \frac{c_p - R_i}{R_i} \cdot p \cdot d\nu + \frac{c_v}{R_i} \cdot \nu \cdot dp. \quad (14.12)$$

Предположим, что  $du_*$  является полным дифференциалом, тогда

применяя признак Эйлера, можно показать, что  $du_*$  есть полный дифференциал при условии:  $c_p - c_v = R_i$ . Последнее соотношение представляет собой известное уравнение Майера для идеального газа, при справедливости которого величина  $du_*$  тождественно равна  $du$ :

$$du_* = du = \frac{c_v}{R_i} d(p \cdot v) = c_v \cdot dT. \quad (14.13)$$

Таким образом, уравнение (14.11) представляется через энергию идеального газа в виде:

$$dQ = du + p \cdot dv. \quad (14.14)$$

Если не накладывать жестких условий на взаимосвязь величин  $c_p$ ,  $c_v$  и  $R_i$ , то величина  $du_*$  не будет полным дифференциалом. Вполне естественно, что на основе опытных данных надо еще показать справедливость следующего положения: для всей области определения состояний реальных газов при низких давлениях уравнение Майера всегда выполняется. Однако, опытные данные термодинамики указывают на то, что для реальных газов данное соотношение можно использовать только как приближенное уравнение.

В теории идеального газа обычно требуют строгого выполнения условия  $c_p - c_v = R_i$ , тем самым вводится в употребление некоторая абстрактная модель идеального газа. Только для простых газов при низких давлениях их термодинамические параметры соответствуют данной модели. Модель идеального газа является крайне важной в теории термодинамики, так как температура, определенная согласно этой модели, используется для относительных сопоставлений состояний различных термодинамических систем с состояниями идеального газа, для которого возможно аналитическое определение всех термодинамических параметров. Другими словами, создается моделирующая среда для термометрических измерений. Именно поэтому идеально-газовая температурная шкала получила широкое признание в термометрии.

Зная уравнение состояния идеального газа, а также уравнения (14.9), (14.10) и (14.14) легко определить все остальные зависимости для идеального газа, которые применяются в термодинамике, и тем самым полностью аналитически описать основной эталонный объект термодинамики – идеальный газ.

## 14.2 К аксиоматике классической термодинамики

В естествознании основная цель любой аксиоматики – это, опираясь на известные определения и опытные факты и вводя ограниченное количество аксиом, логически получить математические зависимости для основных законов теории. В классической термодинамике аксиоматически построенная система изложения теории актуальна, в первую очередь, для термодинамических систем со многими параметрами состояния, т.е с  $n$  степенями свободы.



Зададимся следующим вопросом: можно ли в термодинамике сформулировать закон сохранения энергии и принцип существования энтропии теоретическим путем? Ответ на этот вопрос крайне актуален и его решение может лежать в системе взглядов и научных представлений системодинамики. Таким образом, цель данного раздела – предложить новую систему изложения теории классической термодинамики, которая бы использовала феноменологические положения и аксиомы, связанные с опытными фактами, и позволяла бы в виде следствий получить закон сохранения энергии и принцип существования энтропии, а также определить область применения данных соотношений.

### ***Понятия и определения***

Будем рассматривать простые термодинамические системы, состоящие из химически неизменных газов и жидкостей. Далее используем следующие известные определения и понятия.

Под термодинамической системой понимаем совокупность макроскопических тел и полей физической природы, которые представляют собой целостный объект и взаимодействуют как между собой, так и с окружающей средой. Все другие тела, которые находятся за пределами границ системы, представляем окружающей (внешней) средой. Считаем известными определения интенсивных и экстенсивных свойств веществ: массы, плотности, объема, удельного объема, силы, давления, концентрации и т.д., на понятии температуры далее остановимся отдельно. Определим состояние системы как совокупность ее термодинамических свойств, параметры которых формируются под действием условий окружающей среды в конкретный момент времени. Дадим определение также равновесному состоянию – состояние, к которому приходит система при неизменных внешних условиях и в котором параметры свойств системы остаются постоянными. Предположим, что каждое состояние системы однозначно определено значениями всех ее параметров  $z_k$ . Число независимых параметров свойств  $z_k$  (в общем случае  $n$ ), значения которых полностью и однозначно определяют данное состояние системы в каждый момент времени, обычно называют термодинамической степенью свободы системы. Предположим также, что при совершении во времени некоторого произвольного процесса  $l$  параметры свойств термодинамической системы всегда представимы параметрическими уравнениями относительно абсолютного времени  $\tau$ :

$$z_1 = z_1(\tau), z_2 = z_2(\tau), \dots, z_n = z_n(\tau). \quad (14.15)$$

Исходя из этого, будем рассматривать только те термодинамические системы, для которых возможно осуществление процессов, отличающихся существованием и непрерывностью функций вида (14.15). Непрерывную кривую в  $n$ -мерном пространстве, образованную уравнениями (14.15), будем называть линией термодинамического процесса.

Далее используем также понятия термодинамических функций [31, 92]. Функцией состояния (функцией точки) будем называть величину,

значения которой при изменении состояния системы в термодинамическом процессе не зависят от процесса перехода системы из одного состояния в другое и определяются только начальным и конечным состоянием. Математически функция состояния системы является общим интегралом, ее дифференциал в термодинамическом процессе является полным дифференциалом. Функцией процесса (функцией линии) будем называть величину, значения которой при изменении состояния системы в термодинамическом процессе зависят от того, по какому пути идет процесс. Дифференциал такой функции не является полным дифференциалом.

### **Опытные факты**

Закон сохранения энергии для термодинамики является тем краеугольным камнем, на котором строится вся ее теория и формулируется весь ее математический аппарат. Исходя из поставленной цели данного раздела, понятие энергии и энтропии должны быть обоснованы в виде следствий аксиоматически построенной теории. Поэтому далее мы не будем использовать эмпирически установленный закон сохранения энергии и положение о независимости внутренней энергии от объема, которые были получены опытным путем для простых термодинамических систем. По этой же причине нельзя для обоснования энтропии использовать идеи Карно и Клаузиуса, связанные с обратимыми термодинамическими циклами, и подход Каратеодори, основанный на принципе адиабатической недостижимости. В обоих этих случаях, в том или ином виде, применяется закон сохранения энергии. Аналогично, в методе аксиоматического изложения теории термодинамики, который был предложен Фальком [120], изначально постулируется существование метрической переменной – энергии системы.

Идею изложения теории термодинамики свяжем с опытным фактом существования температуры. Далее покажем, что если для любых состояний термодинамической системы выдвинуть гипотезу существования некоторой функции вида  $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , которую назовем абсолютной температурой, то при дополнительных предположениях вполне возможно установление закономерностей, характеризующих поведение такой системы.

В четвертой главе указывалось, что для определения понятия температуры обычно используется свойство транзитивности термодинамического равновесия. Данное эмпирическое положение состоит в том, что когда две системы находятся в термическом равновесии с третьей, то они состоят в равновесии и друг с другом. При этом условие равновесия для систем представляется в виде:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = F_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_n), \quad (14.16)$$

где  $z_k$  и  $z'_k$  – соответственно параметры первой и второй систем.

Если вторую систему использовать как термометр и рассматривать значение функции  $\theta = F_1(z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$  как температуру, то условие

равновесия означает, что первая система находится в равновесии с термометром, если для состояний системы существует зависимость:

$$\theta = F(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (14.17)$$

В термодинамике факт существования уравнения вида (14.17) подтверждается множеством опытных данных. Исходя из этого, эмпирической температурой называют установленную опытным путем меру отклонения состояния изучаемой термодинамической системы от состояния теплового равновесия эталонного тела, которое находится при стандартизированных условиях. Соответствующее эталонное тело называется термометром. В зависимости от того, какое эталонное тело принимают в качестве термометра, различают разные шкалы эмпирических температур. При этом идеально-газовая шкала представляет собой частную форму эмпирической шкалы. Термометрические измерения в данной шкале связаны с применением термометра, где используется эталонное тело – идеальный газ.

Сегодня существует несколько общепринятых способов измерения температуры. В термометрии для измерений используют идеально-газовую шкалу температур или шкалы температур, например, стоградусную шкалу, однозначно связанные с ней. Исходя из этого, уравнение (14.17) представляется в виде:

$$T_* = F_*(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (14.18)$$

Основополагающий опытный факт термодинамики заключается в существовании функции температуры вида (14.18) для множества систем, которые находятся в различных равновесных состояниях. Обобщение опытных данных привело к утверждению, что для любой физической системы всегда существует некоторая функциональная зависимость между температурой и остальными параметрами, характеризующими состояние этой системы, которую называют уравнением состояния системы.

Не всегда по опытным данным удается построить аналитическую зависимость вида (14.18), но в численном виде уравнение состояния существует практически всегда. Данное уравнение означает, что каждое состояние термодинамической системы однозначно оценивается по сравнению с состоянием термометра, в основу которого, по большому счету, положена модель идеального газа. При этом, система и термометр всегда находятся в одних и тех же условиях по отношению к окружающей среде. Именно поэтому, уравнение состояния идеального газа имеет важное значение, так как идеально-газовая температура  $T_* = p \cdot \nu / R_i$  входит в левую часть уравнения (14.18) и измерения температуры позволяют количественно характеризовать семейства состояний термодинамических систем по факту их теплового состояния.

Следующим опытным фактом является существование понятия количества тепла и теплоемкостей. Количество теплоты ( $Q$ ) – это физическая величина, характеризующая процесс теплообмена между термодинамической системой и окружающей средой. Теплоемкость ( $c_l$ )

вводится в физике в качестве особого рода величины, которая является одной из теплофизических характеристик вещества. Имеется множество методов определения теплоемкостей газов, твердых тел и жидкостей в опыте [84]. Уравнение, определяющее количество теплоты, необходимое для изменения температуры тела в процессе  $l$ , обычно представляют относительно эмпирической температуры и теплоемкости тела в виде:

$$c_l = \left( \frac{dQ}{d\theta} \right)_l. \quad (14.19)$$

Не будем останавливаться на природе теплоты, а примем экспериментальный факт существования некоторой величины  $Q$ , которая изменяется при увеличении или уменьшении температуры тела и характеризует процесс термических взаимодействий.

Необходимость введения данной величины в оценку результатов опыта связана с тем, что в процессе изменения состояния системы всегда взаимодействуют три объекта – термодинамическая система, термометр и окружающая среда. Уравнение (14.18) отражает взаимодействие термодинамической системы с термометром. В свою очередь, уравнение (14.19) отражает особенности взаимодействия термодинамической системы с окружающей средой, причем эти особенности определяются как состоянием системы, так и направлением процесса изменения состояния системы при ее взаимодействии с окружающей средой.

Следует отметить, что в общем случае физических величин, характеризующих взаимодействие системы с окружающей средой, может быть несколько. Каждой такой величине будет соответствовать физическое взаимодействие определенного вида (рода), поэтому термическое взаимодействие – это только один из многих видов взаимодействий. Изменение таких величин рассматривается как специфический эффект, через который проявляется взаимодействие данного вида [31]. Вопрос о принципах классификации и выявлении отличий для различных видов взаимодействий выходит за рамки данного исследования и должен изучаться отдельно. Однако, все сказанное далее можно распространить на некоторые другие виды взаимодействий системы с окружающей средой.

#### ***Аксиоматика изложения теории***

Пусть каждое равновесное состояние термодинамической системы однозначно характеризуется  $n$  независимыми переменными  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , причем область определения для каждой переменной распространяется на всю положительную числовую ось  $z_k(0, \infty)$ .

Построим среду моделирования в виде пространства координат  $\Omega$ , где координатные оси соответствуют независимым переменным  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Пусть в пространстве  $\Omega$  имеется замкнутая область  $\Omega_n$  некоторого множества точек  $M$ . Область  $\Omega_n$  будем называть пространством состояний системы. Таким образом,  $\Omega_n$  будем рассматривать как многомерное пространство точек  $M$ , каждая из

которых соответствует некоторому состоянию системы.

Аксиоматическое изложение теории может быть выполнено различными путями, однако наиболее целесообразным является постулирование существования многомерного уравнения состояния системы, которое численно может быть представлено относительно идеально-газовой температуры. Исходя из этого, каждой точке  $M\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  пространства состояний  $\Omega_n$  поставим в соответствие значение эмпирической температуры  $\theta = T_*$ , которое определяется из опыта. Это позволяет ввести несколько аксиом для эмпирической температуры и возможности скалярного представления температуры в каждой точке пространства состояний системы.

1. Пусть в пространстве состояний системы  $\Omega_n$  каждой точке  $M$  поставлено в соответствие действительное число  $\theta$ , которое будем называть эмпирической температурой.

2. Величина  $\theta(M)$  является функцией точки и образует скалярное поле, которое является непрерывным в области  $\Omega_n$ .

Данные аксиомы отражают опытные факты термодинамики, связанные с понятием температуры. Так как эмпирическая температура является функцией точки, то скалярное поле величины  $\theta(M)$  представляет собой потенциальное поле. Вводя аксиомы 1 и 2, мы умышленно ограничиваемся термодинамическими системами, обладающими непрерывным пространством состояний. Каждая система может иметь множество состояний, однако, в общем случае, как отмечал Фальк, эти множества не обязательно должны быть непрерывными и в принципе могут состоять из конечного числа состояний. Однако, изучение пространств состояний с многосвязными областями, сложной топологией и особыми точками пока явно преждевременно, причем для таких случаев вряд ли будет справедлив закон сохранения энергии, который мы хотим установить. Кроме того, существует требование непрерывности линий термодинамических процессов, которое выражается в уравнениях (14.15).

Следующей особенностью термодинамических систем является то, что любая система всегда представляется в совокупности с окружающей средой, которая оказывает непосредственное влияние на переходы между состояниями системы. Данные переходы обычно представляются как термодинамические процессы. Поэтому различные процессы, которые осуществляются между некоторым произвольным состоянием  $M$  и любым другим состоянием в области  $\Omega_n$ , будут отличаться между собой по интенсивности взаимодействия системы с окружающей средой. Подобные процессы должны характеризоваться непрерывностью последовательности состояний во времени, т.е. точка  $M$  в некотором термодинамическом процессе будет описывать непрерывную кривую. Это указывает на то, что мы предполагаем существование уравнений вида (14.15) не только для параметров свойств, но и для эмпирической температуры  $\theta = \theta(\tau)$ .

Две первые аксиомы относятся к термодинамическим системам, их состояниям и взаимодействию системы с термометром, однако они не определяют сущности переходов между состояниями, так как, вводя поле эмпирической температуры  $\theta = \theta(M)$  и понятие непрерывного термодинамического процесса, мы априори предполагаем, что возможны любые переходы между различными состояниями системы. Однако, из практики известно, что это не так. Не все процессы в окрестности произвольного состояния системы могут быть осуществлены или обладают равной возможностью реализации. Осуществление процессов определяется как состоянием системы, так и условиями ее взаимодействия с окружающей средой. Для того, чтобы логически обосновать возможность осуществления процессов как непрерывного перехода между двумя состояниями системы  $M$  и  $M'$  при наличии взаимодействия системы с окружающей средой, необходимо введение дополнительных аксиом. Изложим данные аксиомы в следующем виде.

3. Пусть в пространстве состояний системы  $\Omega_n$  каждой точке  $M$  одновременно с эмпирической температурой поставлено в соответствие множество действительных чисел  $c_l$ , которые будем называть теплоемкостями.

4. Величины  $c_l$  в окрестности любой точки  $M$  являются функциями процесса. Если в окрестности точки  $M$  осуществляется термодинамический процесс  $l$ , то для линии  $l$  справедливо соотношение  $dQ = c_l \cdot d\theta$ , причем величину  $dQ$  определим как элементарное количество теплоты.

Данные аксиомы отражают опытные факты термодинамики, связанные с осуществлением термодинамических процессов.

Покажем, что аксиом (1) – (4) достаточно для обоснования принципа существования энтропии и справедливости закона сохранения энергии. Для этого используем гипотезу, что скалярное поле температуры может быть аналитически описано в окрестности произвольного состояния системы.

Выберем в области  $\Omega_n$  произвольную точку  $M$ . Будем считать, что вблизи данной точки осуществляется элементарный термодинамический процесс, в результате которого состояние системы изменяется от начального  $M$  до конечного состояния  $M'$ . В качестве эмпирической температуры будем использовать идеально-газовую температуру, т.е.  $\theta = T_*$ . Для задания скалярного поля эмпирической температуры  $T_* = \theta(M)$  как функции независимых переменных  $z_1, z_2, \dots, z_n$  необходимо определить функцию точки. Предположим, что в окрестности точки  $M$  скалярное поле температуры может быть с достаточной точностью приближено аналитической функцией вида  $T_* = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Тогда в процессе изменения состояния системы элементарное количество теплоты можно представить в виде:

$$dQ = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{z_2 \dots z_n} \left( \frac{\partial T}{\partial z_1} \right)_{z_2 \dots z_n} dz_1 + \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{z_1, z_3 \dots z_n} \left( \frac{\partial T}{\partial z_2} \right)_{z_1, z_3 \dots z_n} dz_2 + \dots$$

$$\dots + \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{z_1, \dots, z_{n-1}} \left( \frac{\partial T}{\partial z_n} \right)_{z_1, \dots, z_{n-1}} dz_n \quad \text{или} \quad (14.20)$$

$$dQ = c_1 \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z_1} \right)_{z_2 \dots z_n} dz_1 + c_2 \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z_2} \right)_{z_1, z_3 \dots z_n} dz_2 + \dots + c_n \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z_n} \right)_{z_1, \dots, z_{n-1}} dz_n.$$

Основное отличие скалярного поля эмпирической температуры  $T_*$  от аналитической функции  $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , которую определим как абсолютную температуру, состоит в том, что скалярное поле  $T_*$  не связано с выбором системы координат, а функция  $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$  связана с выбором координатных осей для независимых переменных  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Хотя величины  $T_*$  и  $T$  в точке  $M$  равны между собой, эмпирическая температура  $T_*$  представляет собой скаляр, а абсолютная температура – функцию  $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$  в виде аналитического выражения.

Для решения задачи, поставленной в данном разделе, сформулируем следующую лемму.

Пусть задано уравнение Пфаффа вида (14.20) и пусть известно, что в любой окрестности любой точки  $M$  пространства состояний системы  $\Omega_n$  абсолютная температура  $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$  может быть представлена в виде произведения функций, зависящих от параметров свойств  $T = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)$ . Тогда для уравнения (14.20) обязательно существует интегрирующий делитель, который обращает данное уравнение в полный дифференциал.

Покажем, что интегрирующим делителем уравнения (14.20) будет функция абсолютной температуры  $T = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)$ . Подставив данную функцию в (12.20) и деля это уравнение на  $T$ , получим:

$$ds = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{\varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)} [c_1 \cdot \varphi_1'(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n) dz_1 + \dots$$

$$\dots + c_2 \cdot \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2'(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n) dz_2 + \dots + c_n \cdot \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n'(z_n) dz_n].$$

После сокращений из данного соотношения получаем:

$$ds = \frac{dQ}{T} = c_1 \cdot \frac{\varphi_1'(z_1)}{\varphi_1(z_1)} dz_1 + c_2 \cdot \frac{\varphi_2'(z_2)}{\varphi_2(z_2)} dz_2 + \dots + c_n \cdot \frac{\varphi_n'(z_n)}{\varphi_n(z_n)} dz_n. \quad (14.21)$$

Интегрируя уравнение (12.21), представим общий интеграл в виде:

$$s - s_0 = c_1 \cdot \ln \left( \varphi_1 \left( \frac{z_1}{z_{10}} \right) \right) + c_2 \cdot \ln \left( \varphi_2 \left( \frac{z_2}{z_{20}} \right) \right) + \dots + c_n \cdot \ln \left( \varphi_n \left( \frac{z_n}{z_{n0}} \right) \right), \quad (14.22)$$

где  $s_0, z_{10}, \dots, z_{n0}$  – параметры опорного состояния.

Величину  $s$  называют *энтропией* системы и она определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. При этом энтропия

является общим интегралом уравнения (14.20) и характеристической функцией пространства состояний системы. В параметрическом представлении энтропия является длиной дуги векторной линии некоторого поля направлений, порождаемого величиной  $Q$ . Для любого процесса в окрестности произвольного состояния  $M$  дифференциалы функций  $Q$  и  $s$  пропорциональны:  $dQ = T \cdot ds$ . Однако, все это справедливо, если функция абсолютной температуры представима в виде мультипликативной функции относительно параметров термодинамических свойств вида  $T = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)$ . В этом случае для абсолютной температуры справедливо следующее свойство:

$$\frac{\partial T}{\partial z_k} = \frac{T}{\varphi_k(z_k)} \cdot \varphi'_k(z_k), \quad (14.23)$$

которое будем использовать в дальнейших выводах.

Покажем, что на основе полученных результатов, как следствие, может быть сформулирован закон сохранения энергии. Представим зависимость (14.21) в виде:

$$dQ = T \cdot ds = c_n dT + (T \cdot ds - c_n dT). \quad (14.24)$$

Определим энергию системы как  $du = c_n dT$ . Используя (14.21) и (14.23) и представляя  $dT$  в виде суммы частных дифференциалов относительно параметров свойств  $z_k$ , преобразуем (14.24) к виду:

$$\begin{aligned} T \cdot ds = du + r \cdot (\alpha_1 \cdot \varphi'_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_{n-1}(z_{n-1}) dz_1 + \dots, \\ \dots + \alpha_2 \cdot \varphi_1(z_1) \cdot \varphi'_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_{n-1}(z_{n-1}) dz_2 + \dots, \\ \dots + \alpha_{n-1} \cdot \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi'_{n-1}(z_{n-1}) dz_{n-1}), \end{aligned} \quad (14.25)$$

где  $\alpha_1 = 1$ ;  $\alpha_k = \frac{c_k - c_n}{c_1 - c_n}$ ;  $r = \frac{(c_1 - c_n) \cdot T_0}{\varphi_1(z_{10}) \cdot \varphi_2(z_{20}) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_{n0})}$ .

Здесь  $T_0, z_{10}, \dots, z_{n0}$  – параметры опорного состояния, с помощью которого абсолютная температура может быть представлена в виде  $T = T_0 \frac{\varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)}{\varphi_1(z_{10}) \cdot \varphi_2(z_{20}) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_{n0})}$ . Так как значение абсолютной температуры  $T_0$  в опорной точке принимается условно, то его можно определить таким образом, чтобы коэффициент  $r$  был равен единице, тогда  $T_0 = \frac{\varphi_1(z_{10}) \cdot \varphi_2(z_{20}) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_{n0})}{c_1 - c_n}$ . Уравнение (14.25) является аналогом

известного закона сохранения энергии для случая  $n$  переменных.

Энтропия  $s$  и энергия системы  $u$  являются функциями состояния системы. Можно показать, что уравнение для энтропии и уравнение сохранения энергии в термодинамике для двух переменных являются частными случаями уравнений (14.21) и (14.25).

Для двух параметров свойств, если абсолютную температуру можно представить в виде  $T = \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) = \frac{z_1 \cdot z_2}{R}$ , энтропия будет равна:



$$s - s_0 = c_1 \cdot \ln\left(\frac{z_1}{z_{10}}\right) + c_2 \cdot \ln\left(\frac{z_2}{z_{20}}\right). \quad (14.26)$$

Если принять  $z_1 = \nu$ ;  $z_2 = p$  и  $c_1 = c_p$ ;  $c_2 = c_\nu$ , то уравнение (14.22) будет иметь вид выражения энтропии идеального газа (14.10). В свою очередь, уравнение (14.25) будет иметь вид:

$$T \cdot ds = du + p d\nu, \quad (14.27)$$

где энергия системы равна  $du = c_\nu dT$ . Данное уравнение имеет вид классического уравнения сохранения энергии, которое количественно характеризует первое начало в термодинамике.

Таким образом, принцип существования энтропии является следствием постулирования существования поля эмпирической температуры. Данный принцип самым тесным образом связан с гипотезой приближения поля температуры в окрестности любого состояния системы аналитической мультипликативной функцией, а также с опытным фактом возможности определения теплоемкостей для процессов изменения состояния системы. Количественное выражение для закона сохранения энергии в термодинамике также является прямым следствием справедливости данных положений.

Следует также отметить, что, если в окрестности некоторой точки  $M$  существует непрерывное поле эмпирической температуры, которое можно приблизить аналитической мультипликативной зависимостью, то справедливость принципа существования энтропии и закона сохранения энергии является доказанным фактом. Если поле эмпирической температуры не существует, то оба эти положения утрачивают достоверность. Этим определяется область применения данных положений, причем вид и особенности скалярного поля эмпирической температуры, которые являются результатом опыта, будут определять возможности реализации процессов в пространстве состояний  $\Omega_n$ .

В свою очередь, сформулированная теория никак не определяет направление процессов изменения состояний системы. Хотя для различных процессов в окрестности любой точки  $M$  теплоемкости по определению могут отличаться между собой, закон возрастания энтропии никак не связан с принципом существования энтропии и законом сохранения энергии. Принцип возрастания энтропии не может быть сформулирован в рамках данного аксиоматического изложения теории. Необходимы дополнительные постулаты, которые бы характеризовали преобладающее направление формирования естественных процессов. Подобные положения могут вытекать только из опыта и определяться статистическими закономерностями развития процессов. Суть системодинамического метода как раз и направлена на формулировку этих феноменологических вероятностных закономерностей.

### 14.3 Термический коэффициент полезного действия многомерного цикла Карно

Исходя из результатов предыдущей главы, естественно возникает вопрос о математическом описании многомерных процессов. Если система является непрерывно действующей и осуществляет замкнутый процесс, причем количество изменяющихся переменных в уравнении  $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , в общем случае, больше двух, то речь будет идти о совершении рабочим телом многомерного процесса или цикла. Даже для идеального газа можно говорить об многомерном цикле, если в процессе его совершения изменяется давление, объем и масса газа. Обычно такие системы относят к системам с переменным количеством вещества [93]. Многомерные системы давно изучаются в термодинамике. Теория таких систем основана на обобщенном уравнении сохранения энергии для термодинамических систем, совершающих помимо работы расширения другие виды работы [93]. К многомерным процессам относят термодинамические процессы в магнетиках, диэлектриках, сверхпроводниках и при деформации, процессы, осуществляемые над газом или жидкостью в поле тяготения, термодинамические процессы в гальванических элементах и т.д.

Будем использовать понятия и определения, принятые в термодинамике теплосиловых циклов [1]. Известно, что в общем виде первый закон термодинамики ( $dq = du + dl + dl_*$ ) распространяется на многомерные системы [93]. Здесь  $dl_* = \zeta \cdot dg$  – работа любой обобщенной силы  $\zeta$  при изменении соответствующей обобщенной координаты  $g$ . Если обозначить количество тепла, подводимое к рабочему телу в цикле, через  $q_1$ , а количество тепла, отводимое от рабочего тела в цикле, – через  $q_2$ , то термический коэффициент полезного действия (к.п.д.) будет равен:

$$\eta_T = \frac{q_1 - q_2}{q_1}, \quad (14.28)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  – количество теплоты в расчете на 1 кг рабочего тела.

Целью данного раздела является установление справедливости выражения для термического к.п.д. многомерного обратимого цикла Карно, который состоит из двух изотерм  $T(z_1, z_2, \dots, z_n) = const$  и двух адиабат  $s(z_1, z_2, \dots, z_n) = const$ . Для наглядности задачи рассмотрим трехмерный цикл Карно, однако отметим, что аналогичные результаты легко получить и для циклов большей размерности.

Предположим, что изменение энергии рабочего тела пропорционально изменению абсолютной температуры  $du = c_3 \cdot dT$ . Уравнение сохранения энергии для трех переменных может быть представлено в виде:

$$dq = c_3 \cdot dT + \alpha_1 \cdot p \cdot g \cdot dv + \alpha_2 \cdot v \cdot g \cdot dp. \quad (14.29)$$

Из данного уравнения для изотермического процесса получаем  $dq = \alpha_1 \cdot p \cdot g \cdot dv + \alpha_2 \cdot v \cdot g \cdot dp$ , откуда в случае представления абсолютной

температуры простой мультипликативной зависимостью  $\nu \cdot p \cdot g = R \cdot T$ , исключая величину  $g$  и интегрируя, получим:

$$q_{I-II} = R \cdot T \cdot \left( \alpha_1 \cdot \ln \left( \frac{\nu_{II}}{\nu_I} \right) + \alpha_2 \cdot \ln \left( \frac{p_{II}}{p_I} \right) \right). \quad (14.30)$$

Здесь индексы  $I$  и  $II$  относятся соответственно к начальной и конечной точкам процесса. Аналогично для адиабатного процесса получаем  $\alpha_1 \cdot p \cdot g \cdot d\nu + \alpha_2 \cdot \nu \cdot g \cdot dp = -c_3 \cdot dT$ , откуда деля это уравнение почленно на  $\nu \cdot p \cdot g = R \cdot T$  и интегрируя, получим:

$$\left( \frac{\nu_{II}}{\nu_I} \right)^{\frac{\alpha_1 \cdot R}{c_3}} \cdot \left( \frac{p_{II}}{p_I} \right)^{\frac{\alpha_2 \cdot R}{c_3}} = \frac{T_I}{T_{II}}. \quad (14.31)$$

Используем (14.30) и (14.31) для определения термического к.п.д. цикла Карно. Для изотермических процессов (1–2) и (3–4) соответственно от состояния  $T_1 = T(\nu_1, p_1, g_1)$  до состояния  $T_1 = T(\nu_2, p_2, g_2)$  и от состояния  $T_2 = T(\nu_3, p_3, g_3)$  до состояния  $T_2 = T(\nu_4, p_4, g_4)$  выражения для величин  $q_1$  и  $q_2$  будут иметь вид:

$$q_1 = R \cdot T_1 \cdot \left( \alpha_1 \cdot \ln \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} \right) + \alpha_2 \cdot \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \right); \quad (14.32)$$

$$q_2 = R \cdot T_2 \cdot \left( \alpha_2 \cdot \ln \left( \frac{\nu_3}{\nu_4} \right) + \alpha_2 \cdot \ln \left( \frac{p_3}{p_4} \right) \right). \quad (14.33)$$

Подставляя эти соотношения в уравнение для термического к.п.д. цикла Карно (14.28) и учитывая, что согласно (14.31):

$$\left( \frac{\nu_3}{\nu_2} \right)^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\alpha_2} = \left( \frac{\nu_4}{\nu_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{p_4}{p_1} \right)^{\alpha_2} \quad \text{и} \quad \left( \frac{\nu_3}{\nu_4} \right)^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{p_3}{p_4} \right)^{\alpha_2} = \left( \frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\alpha_2},$$

получим выражение для к.п.д. многомерного цикла Карно в виде:

$$\eta_T = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (14.34)$$

Из уравнения (14.34) следует справедливость выражения для к.п.д. обратимого цикла Карно, который состоит из двух изотерм и двух адиабат и совершается в многомерном пространстве переменных.

В литературе гипотетически обсуждаются различные предложения о создании преобразователей энергии, использующих многомерные циклы. При существующем уровне знаний теоретически реализация таких циклов по крайней мере не запрещена, однако на практике основная проблема связана с реальностью эффективного и устойчивого рабочего тела, состояния которого удовлетворяют многомерному уравнению состояния  $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . С ростом сложности системы и числа переменных необратимость процессов возрастает, поэтому проблематично будет создать такое рабочее тело.

## 14.4 Несколько слов о парадоксе Гиббса

Сущность парадокса Гиббса привлекает внимание физиков в течении многих десятилетий. Существует множество различных точек зрения, посвященных данной проблеме [29, 60, 81, 103]. Один ряд авторов считает, что данный парадокс неразрешим в рамках термодинамики, другие авторы связывают данную проблему с особыми свойствами энтропии и нарушением теоремы об аддитивности энтропии, третьи говорят о том, что теорема о возрастании энтропии не имеет отношения к процессам самодиффузии. Существуют также и другие точки зрения. Мы хотели бы обратить внимание на то, что суть парадокса Гиббса может быть связана с необоснованным применением непрерывных зависимостей термодинамики к описанию дискретных результатов опыта. Некоторые авторы придерживались именно такой точки зрения [60].

В рамках системодинамики парадокс Гиббса может быть истолкован исходя из аналогий вероятностной оценки значений энтропии. Прежде, чем перейти к обсуждению этого вопроса, кратко изложим суть данной проблемы. Для этого рассмотрим смешение различных идеальных и химически нейтральных газов при одном давлении и одной температуре. Соответствующий вывод зависимостей приведем согласно известной работе П. Шамбадала [103, стр. 218].

Предположим, что резервуар, разделенный перегородкой на две части 1 и 2, содержит по обе стороны перегородки два различных газа, которые находятся при одной температуре  $T$  и одном давлении  $p$ . Если устранить перегородку, то начнется процесс самодиффузии и через некоторое время в резервуаре образуется однородная смесь. При диффузии газов давление и температура остаются неизменными, поэтому нет изменения и внутренней энергии. Парадокс Гиббса связан с изменением энтропии смеси.

Традиционный ответ на вопрос об изменении энтропии в этом случае: смешение газов влечет за собой увеличение энтропии. Показывается это следующим образом. Пусть  $m_1$  и  $m_2$  – соответственно массы газов 1 и 2,  $R_1$  и  $R_2$  – индивидуальные газовые постоянные,  $c_{p1}$  и  $c_{p2}$  – удельные теплоемкости данных газов при постоянном давлении. В первоначальных условиях энтропии газов  $S_1$  и  $S_2$  задаются выражениями [50, 103]:

$$\begin{aligned} S_1 - S_{10} &= m_1 \cdot \left( c_{p1} \ln \frac{T}{T_0} - R_1 \ln \frac{p}{p_0} \right); \\ S_2 - S_{20} &= m_2 \cdot \left( c_{p2} \ln \frac{T}{T_0} - R_2 \ln \frac{p}{p_0} \right). \end{aligned} \quad (14.35)$$

Полная сумма энтропий двух газов до смешения равна сумме  $S = S_1 + S_2$ . Так как температура  $T$  не изменяется, то после смешения увеличение энтропии совокупности двух газов определяется формулой:

$$\Delta S = m_1 R_1 \ln \frac{p}{p_1} + m_2 R_2 \ln \frac{p}{p_2}, \quad (14.36)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – парциальные давления газов после смешения. Значения парциальных давлений  $p_1$  и  $p_2$  могут быть найдены из соотношения:

$$\frac{V}{p} = \frac{V_1}{p_1} = \frac{V_2}{p_2}, \quad \text{откуда}$$

$$\Delta S = \frac{p}{T} \cdot \left( V_1 \ln \frac{V}{V_1} + V_2 \ln \frac{V}{V_2} \right), \quad (14.37)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – первоначальные объемы газов 1 и 2, а  $V$  – полный объем газов.

Таким образом, как видно из (14.37) смешение газов приводит к увеличению энтропии смеси, значение которой не зависит от природы идеальных газов. Следовательно формула (14.37) должна быть справедлива, когда газы 1 и 2 одинаковы, откуда следует, что при смешении двух масс одного и того же газа при одинаковых давлениях и температурах энтропия увеличивается, что противоречит уравнениям (14.35). Именно этот вывод известен как «парадокс Гиббса».

Если исходить из аналогий с системодинамикой, то хотелось бы обратить внимание на одну существенную проблему классической термодинамики – абсолютно не ясно вероятность какого характерного события принимается за основу при оценке энтропии. Энтропия газа вычисляется косвенно по параметрам состояния термодинамической системы и значениям теплоемкостей, например [81]:

$$s_1 - s_0 = c_p \ln \frac{p}{p_0} + c_v \ln \frac{v}{v_0}. \quad (14.38)$$

При этом данная проблема «переносится» в опыт по определению значений теплоемкостей или изучается в статистической термодинамике.

Если в качестве характерных событий при оценке энтропии принимать наблюдаемые значения скоростей или кинетических энергий молекул, то очевидно, что при смешении газов скорости молекул разных газов будут иметь различные параметры распределения, даже в случае, если вид распределений одинаков (см. (6.15-6.17)). Распределение вероятности совокупного сложного события может быть оценено только в опыте. Исходные более простые совместные события не обязательно будут независимыми, что приведет к нарушению аддитивности энтропии. В классической термодинамике данный вопрос не изучается, тщательных опытов, которые бы оценивали «кажущуюся» теплоемкость смесей газов и совпадение расчетных и опытных данных, не так уж и много. Поэтому проблема парадокса

Гиббса связана с необоснованным применением расчетных зависимостей термодинамики к модельной ситуации, которая не проверена на опыте.

Подобная задача возникает и в других областях знаний при оценке вероятностей сложных событий, например в токсикологии. Однако, решается она путем наблюдения совместных событий в опыте.

Рассмотрим два опасных химически не реагирующих между собой газа, которые оказывают негативное влияние на живой объект. Если говорить о смертельных эффектах, то в качестве характерного события при оценке опасности принимается смертность биологических объектов как для каждого газа в отдельности, так и для смеси этих газов. Аналогично, при оценке хронических эффектов в качестве характерного события принимаются биологически значимые изменения и отклонения от нормы показателей организма, которые могут привести к заболеваниям.

Вероятность негативных эффектов для каждого газа в отдельности согласно (6.2) определяется в опыте путем построения зависимостей для пробита при наблюдаемой частоте неблагоприятных событий:

$$Pr ob_1 = \alpha_1 + \beta_{1\tau} \cdot \ln C + \beta_{1c} \cdot \ln \tau, \quad (14.39)$$

$$Pr ob_2 = \alpha_2 + \beta_{2\tau} \cdot \ln C + \beta_{2c} \cdot \ln \tau, \quad (14.40)$$

В свою очередь, вероятность негативных эффектов для смеси газов определяется в аналогичном опыте путем установления зависимости:

$$Pr ob_{mix} = \alpha_m + \beta_{m,\tau} \cdot \ln C + \beta_{m,c} \cdot \ln \tau. \quad (14.41)$$

Исходя из данных наблюдений, все известные опасные газы и парообразные вещества делят на четыре группы: вещества, для которых при совместном присутствии в атмосферном воздухе установлен эффект суммации биологического действия; вещества, для которых установлен эффект неполной суммации биологического действия; вещества, для которых установлен эффект усиления (потенцирования) биологического действия; вещества, отличающиеся эффектом независимого биологического действия.

Первая группа веществ отличается комбинированным действием, когда пробиты уравнений (14.39) и (14.40) аддитивны, т.е.  $Pr ob_{mix} = Pr ob_1 + Pr ob_2$ . Это наиболее обширная группа веществ. Вторая и третья группы веществ характеризуется соответственно зависимостями  $Pr ob_{mix} < Pr ob_1 + Pr ob_2$  и  $Pr ob_{mix} > Pr ob_1 + Pr ob_2$ . Четвертая группа веществ не дает возможности выделить сложное событие, которое бы характеризовало общее биологическое действие, т.е. воздействия веществ приводят к абсолютно разным биологическим изменениям и вероятности неблагоприятных событий оцениваются раздельно.

Аналогичным образом проблема парадокса Гиббса может быть изучена и в термодинамике, однако при этом следует четко определить вероятность какого характерного события принимается за основу при оценке энтропии в опыте.

## Глава пятнадцатая

### ВРЕМЯ КАК ПРЕДМЕТ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной главе попытаемся обобщить ранее полученные результаты и проанализировать несколько дискуссионных идей, возникших в процессе работы над книгой. Эти идеи касаются процессов и явлений, наблюдаемых в природе и обществе, принятых подходов при их моделировании и сущности модельных представлений времени. Любая модель – это упрощенное описание объекта моделирования, которое отражает уровень наших знаний о явлении или процессе. Здесь сразу возникает противоречие между сложностью явления и условной простотой модели. И. Пригожин отмечал, что законы физики должны учитывать *возможность* [75]. Следует отметить, что в физике при построении моделей процессов возможность учитывается, однако понимается она в узком смысле – как равновозможность, причем это касается также и представлений о времени. На уровне построения физических моделей физика очень часто работает с простыми симметриями – однородность, изотропность, изоморфность, в основу которых, по большому счету, положена равновозможность состояний.

В системах, где есть условия для формирования равновозможных состояний, любые процессы изменения свойств обратимы. Необратимость проявляется в системах, где формируются неравновозможные события, наблюдается выраженное искривление абсолютного пространства свойств и нарушается потенциальность вектора эволюции. Таким образом, необратимость связана с нарушением симметрий и является следствием существования статистических закономерностей. Не имея модельных представлений времени с учетом статистических закономерностей, которые свойственны системам, сложно понять природу времени и предложить модели для его описания.

Для того, чтобы как-то классифицировать существующие системы по факту наблюдаемых статистических закономерностей необходимо выделить некоторый класс систем как основу для относительных сравнений. Используем для этого понятие хаотических систем. Этим мы подчеркиваем роль хаоса как категории в современной науке, для которого строго определения пока нет. Мы можем предположить, что хаотическими являются системы, в которых при любых процессах изменения свойств формируются независимые и равновозможные состояния. Хаотические системы отличаются равномерными распределениями характерных событий и обладают самыми простыми статистическими закономерностями, для которых возможно модельное представление, исходя из особенностей формирования массовых однородных случайных событий. В хаотических системах вектор эволюции является потенциальным, а абсолютное пространство свойств не искривленным. Такие системы можно назвать системами «однородного» качества. По своей сути хаотические системы являются, что ни есть, «мертвыми»

системами, так как феномену жизни не свойственна равновозможность состояний, ему свойственна необратимость, где отсутствует свойство равновозможности. Не исключено, что именно здесь может проходить определенная грань между мертвой и живой материей.

Современная математическая теория хаоса изучает, скорее всего, псевдохаотические системы. Если исходить из аналогий, то разница между хаотическими и псевдохаотическими системами такая же, как между случайными и псевдослучайными числами или величинами.

Сложно пока сказать, существуют ли в природе абсолютно хаотические системы или это только идеализация, своего рода моделирующая среда. Даже для идеального газа в термодинамике принцип равновозможности состояний несколько нарушается, так как изохорная и изобарная теплоемкости не равны между собой. Однако ценность понятия «хаотическая система» может быть в том, что именно с ним может быть связан ответ на вопрос: а что такое, собственно говоря, течение времени, если исходить из сути этого явления как некоторого феномена?

Очевидно, что необратимость определяет природу специфического изменения времени в связи, с чем скорость течения времени (дление по Бергсону) в разных классах систем может быть различна. Поэтому хаотические системы могут выступать некоторым «эталоном» в процедуре определения скорости течения времени при формировании неравновозможных событий. Однако, чтобы пойти этим путем требуется изучить логические подходы и различные способы представления времени, своего рода концептуальные модели, и попытаться установить между ними связь. Необходимость этого следует из того, что модельные представления времени в разных разделах физики достаточно запутаны. Если не просто ответить на вопрос: что мы определяем, измеряя температуру или энергию, то на вопрос: что определяется в процессе измерения или представления времени в хронометрии, классической механике, теории относительности и т.д., дать однозначный ответ значительно сложнее. Поэтому, актуальным является изучение способов модельного представления времени.

Ранее была высказана гипотеза, что в абсолютном пространстве свойств некоторой системы, отличающимся признаком равновозможности, может быть принята модель равномерного и однородного течения времени, причем, как видно из анализа равновозможных шкал раздела 8.3, скорости течения времени даже в таких системах, скорее всего, будут определяться классом системы. С подобным представлением времени тесно связана известная концептуальная модель абсолютного времени Ньютона, которой соответствует однородная и равномерная шкала измерений, построенная на основе периодических физических процессов. Естественно, что с помощью этой шкалы могут изучаться процессы формирования событий и изменения состояний с течением времени в любых системах, поэтому в моделях времени эта шкала, как величина, должна присутствовать.



В системах, где признак равновозможности нарушается, модели времени должны отражать неравномерность и неоднородность его течения. При этом в основу модельных представлений должны быть положены принципы реляционной концепции времени, когда время представляет собой систему причинно-следственных отношений между событиями и является проявлением свойств различных классов систем и происходящих с ними изменений, которые отражаются также в соответствующих событиях.

### **15.1 Аналогии между системодинамикой и теорией относительности**

Системодинамика решает проблему модельного представления времени в рамках реляционной концепции путем принятия гипотезы инвариантности вероятностей состояния системы, полученных в опыте, относительно координат свойств и установления связи между статистическими и динамическими закономерностями в процессе наблюдения событий. В этом плане системодинамика в чем-то близка по логике изложения методологических положений с теорией относительности, суть которой состоит в утверждении о неизменности определенных физических величин при изменении других физических величин. Тем самым теория относительности вводит разделение физических величин на меняющиеся и неизменные, которые, в свою очередь, получили общее название инвариантов.

Принцип относительности органически присущ логике построения системодинамики на уровне описания закономерностей. Если опыт показывает, что некоторая физическая, биологическая, общественная и т.п. величина или характеристика остается неизменной в ходе некоторого процесса или явления, несмотря на изменение систем отсчета параметров свойств, то такая величина может быть уподоблена инварианту в пространстве этих свойств. В данном случае инвариантность следует понимать не только в узком смысле – как постоянство определенной величины, но и в более широком смысле – как существование некоторой многомерной поверхности, устойчивой области многомерного пространства или определенного объекта или образа. Поэтому сущность относительности в системодинамике состоит в том, что инвариантная величина, как объект измерения, оценки или представления, реально и объективно неизменна. Для функции состояния системы  $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$  это означает, что изменение значения вероятности  $w$  при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 не зависит от преобразования координат в абсолютном пространстве свойств, так как принцип устойчивости относительных частот объективен и не зависит от того, каким способом определяются и измеряются свойства систем. То есть, скалярное поле вероятности не зависит от выбора координатной системы. По большому счету, это необходимо понимать следующим образом.

Пусть имеется пространство, отнесенное к системе прямоугольных координат  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , а также другое пространство с системой координат  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  (не обязательно прямоугольных). Рассмотрим две области  $\Omega_z$  и  $\Omega_\xi$  в этих пространствах, ограниченные соответственно поверхностями  $S_z$  и  $S_\xi$ . Допустим, что данные пространства связаны между собой взаимно однозначным непрерывным соответствием  $z_k = z_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Поэтому каждой точке  $M_z$  области  $\Omega_z$  однозначно соответствует точка области  $\Omega_\xi$ , причем точкам поверхности  $S_z$  отвечают именно точки поверхности  $S_\xi$  и наоборот. Если с каждой точкой  $M_z$  области  $\Omega_z$  связана некоторая скалярная или векторная величина  $U$ , то в области  $\Omega_z$  задано поле этой величины  $U = U(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Очевидно, что при строгой однозначности соответствия между областями  $\Omega_z$  и  $\Omega_\xi$  поле величины  $U$  существует в обеих областях и не зависит от выбора координатной системы. Отсюда вытекает несколько выводов, существенных для развития методов моделирования в общей теории систем, которые мы будем обсуждать ниже.

Теперь проведем некоторые аналогии. Рассмотрим изменение функции меры согласно ранее полученному уравнению (10.7), которое представим в следующем виде:

$$dU = d\left(\frac{z_1^2}{2 \cdot c_1} + \frac{z_2^2}{2 \cdot c_2} + \dots + \frac{z_n^2}{2 \cdot c_n}\right) = 0. \quad (15.1)$$

Предположим, что изучается множество движущихся пространственных инерциальных трехмерных систем (объектов), которые мы признаем равноправными. Поставим задачу формального получения из (15.1) уравнений, по которым можно найти значения координат и времени в некоторой инерциальной системе по отношению к другой системе – известные лоренцовы преобразования.

Выделим из множества две произвольные системы  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$ . Предположим, что наблюдение за состоянием систем осуществляется из системы  $XYZ$ , которую будем считать неподвижной, а пространство изучаемых систем – изотропным и однородным. Примем в качестве параметров свойств систем координаты их положения в трехмерном пространстве, для системы  $XYZ$  – это  $z_1 = x$ ,  $z_2 = y$  и  $z_3 = z$ , а для системы  $X'Y'Z'$  – это  $z_1 = x'$ ,  $z_2 = y'$  и  $z_3 = z'$ . Далее для системы  $XYZ$  выберем начало отсчета, размещенное в точке  $O$  с координатами  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $z = 0$ . Аналогично, для системы  $X'Y'Z'$  начало отсчета зададим в точке  $O'$  ( $x' = 0$ ,  $y' = 0$  и  $z' = 0$ ). Пусть система  $X'Y'Z'$  движется относительно системы  $XYZ$  со скоростью  $v$  вдоль оси  $OX$ , т.е. система  $X'Y'Z'$  скользит осью  $X'$  по оси  $X$ , а координаты  $y$  и  $y'$ , а также координаты  $z$  и  $z'$  совпадают. В начальный момент времени (до начала движения) точки  $O$  и  $O'$  также совпадают.

Для общего случая из уравнения (15.1) определим меру системы  $XYZ$  по отношению к ее началу отсчета, для которого примем значение  $U(0, \dots, 0) = 0$ :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{z_1^2}{c_1} + \frac{z_2^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2}{c_n} \right). \quad (15.2)$$

Аналогичным образом, мера системы  $X'Y'Z'$  по отношению к началу отсчета  $O'$  будет иметь следующий вид:

$$U' = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{z_1'^2}{c_1'} + \frac{z_2'^2}{c_2'} + \dots + \frac{z_n'^2}{c_n'} \right). \quad (15.3)$$

Сохраняя общепринятые в теории относительности представления, введем следующие обозначения для системы  $XYZ$ , имея в виду, что мера системы  $U$  и величины  $c_k$  положительны, а пространство изотропно и однородно, в результате получим:

$$U = t^2 \text{ и } c_1 = c_2 = \dots = c_n = c^2/2. \quad (15.4)$$

После преобразований уравнение (15.2) примет вид:

$$c^2 \cdot t^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (15.5)$$

В системе  $X'Y'Z'$ , которая движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v$ , уравнение (15.3) с учетом аналогичных обозначений имеет вид:

$$c^2 \cdot t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (15.6)$$

Также как и в теории относительности, определим величины  $t$  и  $t'$  как время, регистрируемое соответственно в системе  $XYZ$  и системе  $X'Y'Z'$ , при этом мы считаем также, что  $c = c'$ .

Уравнения (15.5) и (15.6) в теории относительности получают, представляя фронт распространения светового сигнала в системах отсчета  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$ . В результате из условий однородности и изотропности пространства и времени, а также принципа постоянства скорости света  $c = c'$  в обеих системах  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$ , следует вывод для преобразований координат и времени в разных инерционных системах [95]. Согласно этого достаточно известного вывода показывают, что уравнение распространения света (15.6) преобразуется в (15.5) при переходе  $X'Y'Z' \rightarrow XYZ$  только в том случае, когда координаты  $x$  и время  $t$  связаны с координатами  $x'$  и временем  $t'$  движущейся системы  $X'Y'Z'$  соотношениями [95, стр. 32]:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (15.7)$$

Соотношения (15.7) используются совместно с уравнениями для координат  $y' = y$  и  $z' = z$ .

Известно, что соотношения (15.7) образуют группу лоренцевых преобразований, из которой получаются все практически важные следствия теории относительности.

Таким образом, на основе использования уравнений для меры систем вида (15.2) и (15.3) в результате известных предположений и простого вывода можно формально получить преобразования Лоренца. В этом есть определенная логическая связь системодинамики со специальной теорией относительности. Однако обратим внимание на то, что в основу системодинамики положен исключительно феноменологический подход, при котором опыт признается единственно возможной основой для создания теорий. Поэтому будем осторожно относиться к гипотетическим моделям, для которых отсутствуют опытные данные, полученные в процессе прямого наблюдения. Исторически специальная теория относительности [105, 106] связана с рядом парадоксов и проблематичных суждений [9, 17, 94, 95], по некоторым ее положениям до сих пор не утихают дискуссии.

Теперь хотелось бы остановиться на нескольких предположениях дискуссионного характера, которые вытекают из приведенного материала.

1. Теория относительности является физической теорией пространства и времени, которая учитывает существующую между ними взаимосвязь геометрического характера [94, 95]. В основу построения моделей положен принцип равновозможности выбора состояний системы, поэтому закономерности теории относительности относятся к классу динамических закономерностей.

2. Обратим внимание на то, что в обозначениях (15.4) квадрат времени был принят равным мере состояния системы. Время, согласно уравнений (15.2) – (15.6), определено (введено) как комплексный параметр, исходя из изменения пространственных свойств движущейся инерционной системы. Данное представление времени коренным образом отличается от модели абсолютного времени Ньютона, которое исторически имеет свою шкалу  $\tau$ , реализованную в опыте, исходя из периодического физического процесса. Причем, для такой системы будет существовать своя мера, связанная с изменением свойств. Другими словами «часы» для измерения времени в обоих случаях будут иметь различную природу, и, естественно, разные шкалы измерений. Отсюда следует, что модели времени и физические реализации шкал для этих моделей условно связаны между собой, так как отражают только уровень наших знаний о явлении.

3. Исходя из сказанного выше, системы определения (измерения) времени в представлениях специальной теории относительности и современной хронометрии относятся к разным фундаментальным представлениям реляционной концепции времени. Сегодня исходная шкала времени в теории относительности в «неподвижной» инерциальной системе отсчета формируется из тождественности с абсолютной шкалой времени, т.е.  $t = \tau$ . Аналогично, в подвижной инерциальной системе координат  $t' = \tau'$  – ведь «время есть то, что измеряется часами» (Эйнштейн). Насколько правомерно подобное априори принятое допущение в теории относительности не оговаривается, опытом данная гипотеза никак не

подтверждена. С другой стороны, как видно из (15.5), время  $t$  не связано с периодическим изменением свойств системы и может быть определено через координаты движения. Получается, что время в теории относительности определено как-бы два раза, причем разными способами. Поэтому только опыт может подтвердить реальность замедления периодического физического процесса (хода часов) в инерциальной материальной системе, которая движется со скоростью, близкой к скорости света.

Скорее всего, парадоксы теории относительности связаны с тем, что гипотетические модели не в полной мере отражают физическую реальность процессов и сформулированы на недостаточно обширной опытной базе.

Для того, чтобы показать обоснованность высказанных предположений, изложим различные модельные представления времени в реляционной концепции времени и попытаемся установить их взаимосвязь.

## 15.2 Модели реляционного представления времени

В реляционных моделях времени процесс измерения длительностей основывается на наблюдениях за последовательностями событий. Если мы работаем с множеством статистических последовательностей однородных событий или их характеристических величин, то таким последовательностям можно поставить в соответствие основные свойства времени: упорядоченность и наблюдаемую особенность событий, а также необратимость времени. Естественно, что не все последовательности событий равнозначны и значимы при изменениях состояний систем. Кроме того, для любой произвольной последовательности можно разделить события на произошедшие в прошлом, наблюдаемые в настоящем и ожидаемые в будущем. Все зависит от выбора точки отсчета (некоторого события) на выделенной последовательности. Если точка отсчета сдвигается в настоящее, то все события находятся в прошлом, а событий будущего пока нет. Если точку отсчета привязать к некоторому характерному событию прошлого, то будем иметь ретроспективную последовательность событий прошлого до настоящего момента. В данных случаях только события прошлого и настоящего являются объективными и наблюдаемыми в опыте.

Используем стандартизированную последовательность регулярных событий периодического физического процесса, которую принимаем за шкалу измерений времени, причем данная шкала является шкалой интервалов, и она наиболее близка в физической реализации к модели абсолютного времени Ньютона.

Если выбрать последовательность событий, которые непосредственно отражают эволюционные процессы в системе, то очень часто можно определить характерное начальное событие (например, рождение или возникновение объекта, момент воздействия, начало

наблюдения и накопления данных, возникновение качественных изменений и т.д.). Данное событие может быть принято в качестве начала отсчета. Если сравнить данную последовательность со шкалой абсолютного времени и отметить на ней начальное событие, то шкала времени в этом случае переходит в шкалу отношений, так как имеется абсолютное начало отсчета, принятое для данной системы. Другими словами, абсолютное время «привязывается» к изучаемой системе.

Представление абсолютного времени Ньютона является самой простой моделью в реляционной концепции времени. Данная модель стандартизирована, имеет общепринятую шкалу и единицы измерений, а также эмпирически наиболее обоснована в хронометрии. Шкала абсолютного времени построена на генерации регулярных последовательностей событий, которые реализуются в атомных часах, использующих периодический физический процесс, связанный с излучением изотопа цезия.. Эта шкала времени моделирует равномерное и однородное течение модельного времени и формирует равновозможную модельную среду для сравнений и сопоставлений изучаемых последовательностей событий относительно регулярных событий часов.

Используем данную шкалу для построения оси времени в абсолютном пространстве свойств. Кроме того, так как эта шкала привносится в систему извне, то время измерения по этой шкале не зависит от свойств изучаемой системы и представляет собой независимую переменную. Представим шкалу абсолютного времени в виде стандартизированной величины  $\tau$ , которая распространена на всю числовую ось  $\tau(0, \infty)$  и имеет стандартные единицы измерения. В результате построим шкалу для измерения времени в однородном пространстве. Выберем некоторую значимую последовательность характерных событий и начальное событие для изучаемой группы объектов, которое будем считать началом отсчета времени ( $\tau = 0$ ) по шкале времени  $\tau$ . По данной последовательности будем оценивать распределение вероятностей состояния системы. Предположим, что в начальный и все последующие моменты времени  $\tau$  до настоящего момента у нас существует многомерное абсолютное пространство свойств изучаемых объектов, которые относятся к одному классу. Если выбранный ноль шкалы абсолютного времени совместить с началом отсчета абсолютного пространства свойств, то получим координатную систему, где изучаемые объекты могут быть представлены точками в многомерном пространстве  $(n + 1)$ -переменной (рис. 15.1). Таким образом, мы можем представить время, измеряемое по абсолютной шкале, как некоторое абсолютное свойство системы, которое отражает особенности изменения системы по шкале абсолютного времени  $\tau$ , в сравнении с изменением состояния часов.

Рассмотрим функцию состояния системы вида (7.1), которую представим в виде  $w = W(\tau, z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Распространим результаты девятой главы на рассматриваемый случай.

Пусть имеется пространство наблюдаемых состояний системы  $\Omega_{n+1}$ , где координатные оси соответствуют абсолютному времени  $\tau$  и атрибутивным переменным  $z_1, z_2, \dots, z_n$   $(n+1)$ -мерного абсолютного пространства свойств  $\Omega$ , которое включает  $\Omega_{n+1}$ . Каждой точке  $M(\tau, z_1, z_2, \dots, z_n)$  данного пространства состояний системы поставлено в соответствие значение абсолютного индекса  $T$ , который линейно пропорционален геометрической вероятности, определенной по величине абсолютного времени  $\tau$  и параметрам свойств системы  $z_k$ .

Расширим действие аксиом 1 и 2 из девятой главы на изучаемый случай, и будем считать справедливой зависимость (9.2), в результате получим соотношения, аналогичные (9.3):

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = c_\tau \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial w}{\partial z_1} = c_1 \frac{\partial T}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial w}{\partial z_2} = c_2 \frac{\partial T}{\partial z_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial w}{\partial z_n} = c_n \frac{\partial T}{\partial z_n}. \quad (15.8)$$

Исходя из свойств геометрической вероятности и соотношений (15.8), получим следующее уравнение:

$$\frac{\tau}{p \cdot c_\tau} \cdot \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{z_1}{p \cdot c_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_1} + \frac{z_2}{p \cdot c_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_2} + \dots + \frac{z_n}{p \cdot c_n} \cdot \frac{\partial w}{\partial z_n} = T, \quad (15.9)$$

откуда характеристики уравнения (15.9) определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$p \cdot c_\tau \frac{d\tau}{\tau} = p \cdot c_1 \frac{dz_1}{z_1} = p \cdot c_2 \frac{dz_2}{z_2} = \dots = p \cdot c_n \frac{dz_n}{z_n} = \frac{dw}{T} = ds, \quad (15.10)$$

где  $p = n + 1$ . Отсюда легко определить энтропию системы:

$$ds = c_\tau \frac{d\tau}{\tau} + c_1 \frac{dz_1}{z_1} + c_2 \frac{dz_2}{z_2} + \dots + c_n \frac{dz_n}{z_n}, \quad (15.11)$$

а также все последующие зависимости, полученные в главах 9 и 10, однако уже с учетом вхождения абсолютного времени  $\tau$  в исходные зависимости в виде некоторого универсального свойства системы.

Аналогичный результат можно получить также методом, изложенным в разделе (14.2), постулируя аналитическое представление абсолютного индекса системы в окрестности произвольной точки  $M(\tau, z_1, z_2, \dots, z_n)$  пространства состояний  $\Omega_{n+1}$  в виде произведения функций  $T = \varphi_\tau(\tau) \cdot \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(z_n)$ , считая при этом, что для самого простого случая  $\varphi_\tau(\tau) = \tau$  и  $\varphi_k(z_k) = z_k$ .

Из уравнения (15.11) с учетом (9.32) получим уравнение для определения системного времени через энтропию состояния системы:

$$\omega - \omega_0 = \varphi_*(s - s_0) = \gamma_0 + \gamma_\tau \cdot \ln(\tau) + \gamma_1 \cdot \ln(z_1) + \dots + \gamma_n \cdot \ln(z_n). \quad (15.12)$$

Данное уравнение часто применяется при использовании метода пробит-анализа в процессе обработки опытных данных, для которых существует выраженная зависимость от времени.

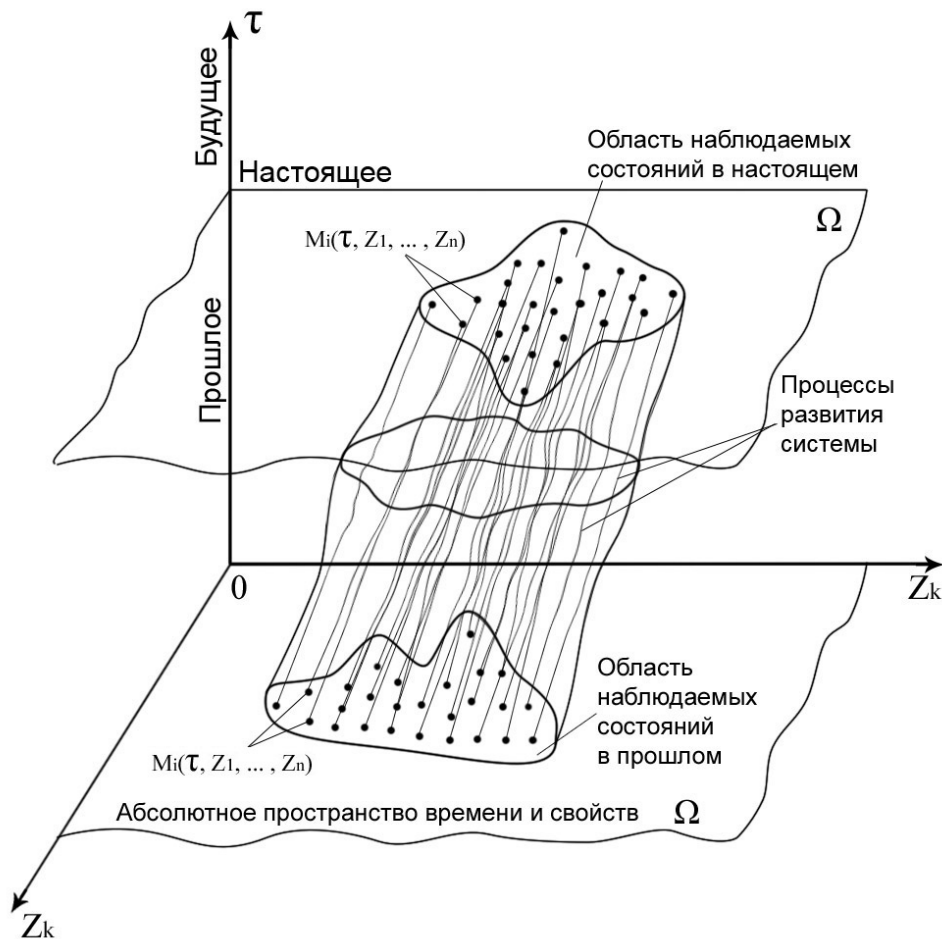


Рис. 15.1 – Абсолютное пространство свойств системы в ретроспективе абсолютного времени

В случае, если функция состояния системы явно от времени не зависит, то мы приходим к зависимостям девятой главы, когда абсолютное время  $\tau$  выступает параметром в пространстве  $n$  измерений.

Таким образом, представлены две модели реляционной концепции времени – абсолютное время Ньютона и системное время, а также зависимость между ними. Системное время определяется через энтропию состояния, в которую абсолютное время входит в виде одного из свойств системы, так как время  $\tau$  является одной из величин, характеризующих происходящие в системе изменения. Так как системное время  $\omega$  является общим интегралом (функцией точки) для функции состояния системы, то можно построить бесконечное множество шкал системного времени.

Теперь по аналогии с теорией относительности, принимая во внимание (15.2), определим третью реляционную модель времени через меру системы:

$$t^2 = U = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\tau^2}{c_\tau} + \frac{z_1^2}{c_1} + \frac{z_2^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2}{c_n} \right). \quad (15.13)$$

В уравнении (15.13) принято, что  $U = 0$  при  $\tau = 0$  и  $z_k = 0$ . При этом в уравнении (15.13) мы отдельно для наглядности выделяем абсолютное время  $\tau$  как параметр свойства. Это можно было бы не делать, считая, что  $z_1 = \tau$ .



Чтобы не путать различные способы представления времени, определим величину  $t$  как относительное время, в отличие от абсолютного времени  $\tau$  и системного времени  $\omega$ . Все три способа представления времени основаны на динамических закономерностях и в их основе лежит равновозможность изменения свойств в пространстве состояний системы. В свою очередь, определяя величину  $t$  как относительное время, мы имеем в виду пока только то, что подобная величина использовалась в теории относительности и получила название времени.

Зависимость вида (15.5), которая принята в теории относительности для времени при ограниченной скорости распространения взаимодействия, является частным случаем уравнения (15.13). В основе данного уравнения лежит условие, что  $w = const$  ( $dw = 0$ ,  $ds = 0$ ), т.е. оно справедливо только для случая, если рассматривается поведение системы при неизменном качестве, которое оценивается по характерным событиям, отражающим развитие системы. При этом считается, что функция состояния системы  $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$  не зависит от абсолютного времени  $\tau$ , т.е.  $c_\tau \rightarrow \infty$ .

При условии, что функция состояния системы от абсолютного времени  $\tau$  не зависит, а параметры свойств системы  $z_k$  – зависят, получим аналогичное (15.2) уравнение вида:

$$t^2(\tau) = U(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{z_1^2(\tau)}{c_1} + \frac{z_2^2(\tau)}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2(\tau)}{c_n} \right), \quad (15.14)$$

где параметры свойств представлены параметрически в шкале абсолютного времени  $\tau$ .

Теперь определим четвертую реляционную модель времени, построив вектор эволюции системы для уравнения (15.9):

$$\Gamma(\tau, z_1, z_2, \dots, z_n, w) = \frac{\tau}{p \cdot c_\tau} \cdot \mathbf{e}_\tau + \frac{z_1}{p \cdot c_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{z_n}{p \cdot c_n} \cdot \mathbf{e}_n + T \cdot \mathbf{e}_{n+1}. \quad (15.15)$$

Данное уравнение связано со следующим уравнением Пфаффа:

$$\frac{\tau}{c_\tau} d\tau + \frac{z_1}{c_1} dz_1 + \frac{z_2}{c_2} dz_2 + \dots + \frac{z_n}{c_n} dz_n + p \cdot T \cdot dw = 0. \quad (15.16)$$

При изучении последовательностей равновозможных событий статистические и геометрические вероятности равны между собой  $T = w$ , поэтому данное уравнение Пфаффа интегрируемо, при этом общий интеграл будет иметь вид:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\tau^2}{c_\tau} + \frac{z_1^2}{c_1} + \frac{z_2^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2}{c_n} + p \cdot w^2 \right). \quad (15.17)$$

В свою очередь, если изучаются статистические последовательности неравновозможных событий, то при существовании связи  $T = \mathcal{G}(w)$  между статистическими и геометрическими вероятностями, уравнение Пфаффа также будет иметь общий интеграл:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\tau^2}{c_\tau} + \frac{z_1^2}{c_1} + \frac{z_2^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2}{c_n} \right) + p \cdot \int_0^w \mathcal{G}(w) dw. \quad (15.18)$$

Вполне возможен случай, когда не будут наблюдаться явные связи между статистическими и геометрическими вероятностями, в связи с чем уравнение Пфаффа (15.16) не интегрируемо. Следствием этого является отсутствие возможности определения величины  $\Phi$  и связанной с ней величины, которая может выступать одной из характеристик времени.

Прежде, чем выполнить анализ результатов данной главы, введем обозначение  $p \cdot \int_0^w \mathcal{G}(w) dw = t_w^2$  и определим величину  $t_w$  как собственное

время, а величину  $t$  определим через функцию  $\Phi = t^2$  как относительное время. Тогда получим аналог первой формы инварианта лоренцевых преобразований, так называемый интервал собственного времени:

$$t_w^2 = t^2 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\tau^2}{c_\tau} + \frac{z_1^2}{c_1} + \frac{z_2^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2}{c_n} \right). \quad (15.19)$$

Меняя знак в выражении (15.19), можно получить аналог второго инварианта лоренцевых преобразований, так называемый пространственно-подобный интервал.

Исходя из всего сказанного выше видно, что мера системы  $U$  является потенциальной скалярной функцией пространства состояний системы относительно свойств, а величина  $\Phi$  – потенциальной скалярной функцией относительно свойств и статистических вероятностей. Однако, можно ли считать величину  $t$ , квадрат которой равен величине  $U$  или величине  $\Phi$ , временем? Скорее всего, данная величина может выступать одной из характеристик времени. В теории относительности время  $t$  явно не определяется, в связи с чем оно является параметром неизвестной природы. Нами показано, что относительное время  $t$  коренным образом отличается от абсолютного времени  $\tau$ , эти величины имеют разную природу и, естественно, что при построении систем измерений для них должны быть созданы разные шкалы. Для величины  $\tau$  существует общепризнанная система и шкала измерений, для величины  $t$  такой шкалы нет, и такая задача в физике даже не ставилась. Глубоко не вдаваясь в суть проблемы, Эйнштейн ответил на вопрос о природе времени очень просто: время есть то, что измеряется часами. Таким образом, в самом начале постановки всей задачи принято, что величины  $t$  и  $\tau$  тождественно равны между собой в любой координатной системе как неподвижной, так и движущейся. Однако, шкала величины  $\tau$  построена на использовании периодических процессов, генерирующих регулярные события, а шкала величины  $t$  должна быть разработана с учетом генерации событий, основанных на использовании процессов равномерного и прямолинейного движения материальных тел со скоростями, соизмеримыми со скоростями света. В последнем случае пока нет даже идей, как это можно сделать, не говоря уже об устройствах для измерений. Только в одном случае

изменения величин  $t$  и  $\tau$  линейно пропорциональны – это когда другие свойства системы в наблюдаемом процессе не изменяются, а величина  $c_\tau$  постоянна. Кроме того, величина  $\tau$  изначально по определению аддитивна и соответствует в абсолютном пространстве свойств (внешней системе координат) понятию системы положительных скалярных величин, т.е. обладает свойствами транзитивности, коммутативности и монотонности сложения, возможности реализации деления и т.д. Этого не скажешь о величине  $t$ , так как эта скалярная функция нелинейна относительно параметров свойств, хотя и вводится через величину  $\Phi$ , которая аддитивна во внутренней системе координат, где внешние параметры свойств преобразуются в естественные координаты системы.

Подводя итог всему выше сказанному, можно отметить, что величина  $\tau$  не будет зависеть от скорости перемещения координатной системы, так как согласно принципу относительности: «Законы, по которым изменяются состояния систем не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояний относятся». В свою очередь, величина  $t$  будет зависеть от скорости перемещения координатной системы, так как ее значение определяется свойствами наблюдаемого объекта. Таким образом, часы, измеряющие время по шкале  $\tau$ , будут идти одинаково во всех инерциальных системах отсчета, а часы, измеряемые время по шкале  $t$ , будут идти медленнее в движущихся инерциальных системах отсчета, причем в первом и втором случае – это устройства различной природы.

Следует также сказать несколько слов об привилегированных системах координат. В классической механике и теории относительности, где в модельной ситуации рассматриваются практически все объекты Вселенной, невозможно найти такую систему координат, так как нельзя выделить привилегированное событие и аналогичную точку отсчета в пространстве на фоне бесконечного множества объектов. Так как системодинамика суть феноменологическая наука, основанная на опыте, то для конкретной наблюдаемой системы, состоящей из множества однородных объектов, подобное выделение возможно. Причем «привилегированная система координат» рассматривается как моделирующая среда. Поэтому выражение «абсолютное пространство свойств» предполагает существование для подобной среды начального привилегированного события и привилегированной точки отсчета свойств. Практически это система с нулевыми значениями параметров свойств среди наблюдаемой группы объектов. Системодинамика по предмету своих исследований не ставит перед собой всеобщих задач и модельных ситуаций, которые выходят за область наблюдаемого опыта, например, мир как целое, модели Вселенной и т.д. Область исследований ограничивается моделями только наблюдаемых объектов и явлений.

В заключение сформулируем несколько важных дискуссионных вопросов в области построения моделей реляционного представления времени, которые требуют решения в свете дальнейших исследований.

1. Самый важный вопрос дискуссии связан с проблемой: какая величина или система величин наиболее полно отображает наблюдаемые изменения объектов во времени и может выступать адекватной оценкой времени? В данном разделе речь велась об абсолютном  $\tau$ , системном  $\omega$ , относительном  $t$  времени и т.д. Естественно, что такой сложный феномен, как время, может характеризоваться множеством величин и параметров. Для внешней системы координат величиной для оценки времени выступает абсолютное время  $\tau$ , которое стандартизировано и имеет свою шкалу измерений. Для внутренней системы координат, привязанной к группе наблюдаемых объектов, такая однозначная оценка пока не выработана, поэтому пока и нет смысла говорить о возможных шкалах измерений. Так как подобные шкалы будут привязаны к конкретным классам систем или классам событий, становится ясна сложность такой задачи. Системное время  $\omega$  может выступать оценкой изменений во времени, так как непосредственно связано с линиями энтропии вектора эволюции системы, который характеризует как количественные, так и качественные изменения в системе. С относительным временем  $t$  все обстоит несколько сложнее. Дело в том, что мера системы  $U$  представляет собой скалярную потенциальную функцию. Это возможно в случае, если поле вектора эволюции системы потенциально. Для случая неравновозможных событий потенциальность вектора эволюции нарушается. Поэтому, исходя из определения меры состояния системы, когда изменение количественных характеристик системы происходит при сохранении ее качества, может не существовать семейства поверхностей  $U = const$ , ортогональных векторным линиям энтропии. В этом случае можно вместо скалярной функции  $U$  построить скалярную потенциальную функцию  $\Phi$  согласно (10.17) – (10.18), зависящую от значений статистической вероятности и характеризующую необратимость наблюдаемых процессов. Поверхность уровня данной функции не будет ортогональна векторным линиям энтропии. Кроме того, данный путь приводит к множеству моделей реляционного представления времени и соответствующих способов оценок времени и ставит много вопросов для дискуссии.

2. Ранее уже несколько раз поднимался вопрос о необходимости разработки классификации (таксономии) различных наблюдаемых событий, что является необходимым условием для понимания природы времени. При построении теории системодинамики, функции состояния систем определялись для сложных событий, которые не связаны между собой причинно-следственными закономерностями. Однако, в системе уравнений (7.1) вероятности событий  $w_j$  могут быть зависимы между собой, исходя из причинно-следственных связей исходных событий, отражающих развитие системы. События также могут отличаться по своей значимости, а также видам вероятностных распределений. Поэтому необходимо уметь определять в опыте причинно-следственные связи для сложных событий, а также соответствующие вероятности и сравнивать полученные результаты с расчетными оценками, которые дает теория вероятности. Исследования

должны охватывать изучение систем по факту формирования самых разных значимых событий, свойственных различным системам. На основе сравнения распределений с эталонными и использования понятия меры, как общей характеристики изменений, могут быть построены нетрадиционные системы измерения времени.

3. Для понимания природы времени важно существование классификации не только наблюдаемых событий, но и различных изучаемых систем. Системодинамика изучает преимущественно системы, которые медленно развиваются во времени и для которых справедливо свойство устойчивости относительных частот наблюдаемых событий. Естественно, что в природе существуют системы с быстроменяющимися процессами изменения состояний, для которых свойство устойчивости относительных частот может не выполняться и для которых невозможно определить функции распределения вероятностей. Не исключено, что такие системы составляют основную массу объектов и процессов в природе и обществе. Характеристика систем по факту наблюдаемых статистических закономерностей является важной задачей исследований. Не менее важным является разработка методов для относительных сравнений вероятностных характеристик наблюдаемых систем с характеристиками модельных систем, которые мы определили ранее как хаотические. Один из таких методов был предложен автором в разделе 8.3 при построении шкал системного времени.

### **15.3 Сущность логических парадоксов специальной теории относительности**

Логические парадоксы специальной теории относительности (СТО) связаны с противоречием, возникающим между реальным физическим явлением и предложенной моделью этого явления, а также некорректным определением понятия времени.

Наиболее известными парадоксами теории относительности являются сокращение движущихся масштабов в направлении движения и замедление хода движущихся часов. Первый парадокс, в общем случае, является следствием второго парадоксального вывода.

Из положений СТО вытекает, что события, одновременные относительно неподвижной координатной системы, не одновременны при рассмотрении их из координатной системы, движущейся относительно этой системы [105, 106]. Данный вывод вытекает из уравнений Лоренца (15.7) и является основным логическим парадоксом СТО, который получил название «парадокса часов». Во втором уравнении (15.7), в случае если события отделены расстоянием, наличие в числителе члена  $(v \cdot x)/c^2$  приводит к выводу о нарушении одновременности событий в движущейся системе. В своей работе А. Бергсон, автор известной концепции времени, уделил много внимания данному парадоксу, который вытекает из

противоречивости исходных положений специальной теории относительности [17]. Позиция Бергсона и основные результаты его работы достаточно ясно и кратко представлены Г. Аксеновым в статье [9]. Гипотетический «парадокс часов», распространенный на живые организмы, породил известный в популярной литературе «парадокс близнецов». Популяризация теории относительности привела к множеству проблематичных образов и утверждений, которые поражают воображение, однако слабо обоснованы, так как прямой опыт их подтверждения отсутствует.

Ранее отмечалось, что утверждение А. Эйнштейна, что «время есть то, что измеряется часами», не является определением и никак не раскрывает природу времени. Здесь возникает обширный предмет обсуждения, начиная от вопроса – что это за «часы»? до вопроса – а можно ли вообще измерять «особое время» в движущейся координатной системе, где присутствует наблюдатель? Ведь мы пока не можем поставить такой опыт с материальным телом, имеющим скорость, соизмеримую со скоростью света. Эйнштейн утверждал, что «всякая система отсчета имеет свое особое время» (что в целом абсолютно верно, если любую координатную систему рассматривать не как математическую абстракцию, а как материальную систему, обладающую свойствами и качествами, изменения которых регистрирует наблюдатель). Однако, он не дал ответа на вопросы – в чем суть понятия времени; каким образом оно характеризуется, как и чем измеряется в разных системах; как задаются и сравниваются шкалы времени; тождественны ли шкалы «особого» (собственного) времени во множестве различных координатных систем с физическим временем явлений; правомерно ли вообще считать, что собственное время в разных системах с различными свойствами – это одна и та же величина; почему привносимые наблюдателем извне «часы» (например, атомные), должны отражать собственное время системы и замедляться в движущейся системе; эффект замедления времени – это физическая реальность или модельная абстракция; если этот эффект – физическая реальность, то какова природа замедления времени; если этот эффект – абстракция, то где проходит граница между физикой и применением математики в СТО?

Образно, суть данной проблемы мы видим в том, что из логических и математических моделей (уравнений Максвелла), которые с определенным приближением описывают некоторое физическое явление, установлено, что «нечто», как говорил А. Пуанкаре, подчинено определенной закономерности, например, преобразованиям Лоренца. В нашей реальной действительности (в области опыта и практики) это «нечто» с определенным допущением можно связать с некоторой величиной, которая условно называется временем и характеризуется измерительной шкалой, общепринятой в хронометрии, например, атомной шкалой. Данная шкала широко применяется в практической деятельности человека для измерения моментов и длительностей событий с помощью

системы измерений, основанной на атомных часах. Причем данная величина отражает только отдельные особенности всей необъятной проблемы, связанной с феноменом времени. Мы не можем с полной уверенностью утверждать, что уравнения Максвелла, которые относятся к классу моделей математической физики, отражают все реальные свойства электромагнитного поля.

В гипотетической ситуации движущейся материальной системы со скоростью, соизмеримой со скоростью света, принимается гипотеза (которую, нельзя на данном этапе науки и практики подтвердить прямым опытом), что это «нечто» является той же самой величиной с той же самой шкалой измерения и теми же самыми часами для измерения длительностей («нечто» и величина тождественно равны). Естественно, что в процессе моделирования следствием этого является то, что модельная закономерность явления в одних условиях для одной величины переносится на другую величину в иных условиях. В результате, как итог модельного описания, возникает парадокс замедления хода движущихся часов, который переносится на реальность физических явлений.

В данном случае абсолютно прав А. Бергсон: Эйнштейн принял способ описания систем за действительность, а результат описания – за реальность, уверяя всех, что так устроен мир, что время в нем зависит от скорости перемещения [9, 17].

Покажем, что метод системодинамики позволяет предложить варианты модельных описаний четырехмерного пространства-времени, в которых логические парадоксы СТО полностью отсутствуют. Будем придерживаться взглядов А. Бергсона на всю проблему СТО и представлений А. Пуанкаре о принципе относительности: «Уравнения электромагнитного поля не изменяются в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть преобразованиями Лоренца; две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют собой, таким образом, точное изображение одна другой». Оба ученых полностью исключали присутствие наблюдателей в движущихся координатных системах.

Будем также четко отделять само физическое явление от модельного представления этого явления, предполагая всегда, что любая модель – это по своей сути упрощенное представление о реальном объекте или явлении. Причем создание модели всегда осуществляется в несколько этапов: установление и обобщение феноменологических закономерностей явления; принятие основных положений, гипотез и допущений; разработка модели; адаптация параметров модели по результатам опыта; проверка адекватности и достоверности модели сравнением с опытными данными.

Примем постулаты, которые используются в теории относительности, относятся к окружающему пространству, времени и физическим явлениям и являются общепринятыми феноменологическими фактами, связанными с наблюдениями систем:

1. Пространство является изотропным в связи, с чем все пространственные направления равноправны.

2. Пространство и время однородны, т.е. наблюдается независимость свойств пространства и времени от выбора начальных точек отсчета (начала координат и начала отсчета времени).

3. Соблюдается принцип относительности – полное равноправие всех инерционных систем отсчета (физические явления в инерционных системах протекают одинаково).

Также как и в главе 15.1, предположим, что изучается множество движущихся пространственных инерциальных трехмерных систем (объектов), которые мы признаем равноправными, исходя из сформулированного принципа относительности. Выделим из данного множества произвольную систему  $XYZ$ , которую будем считать неподвижной. Предположим, что наблюдение за состоянием систем осуществляется из системы  $XYZ$ , причем окружающее физическое пространство отнесем к системе прямоугольных координат  $x, y, z$ . Начало отсчета координат разместим в точке  $O$ , которую свяжем непосредственно с системой  $XYZ$ , считая, что координаты точки  $O$  равны:  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $z = 0$ .

Следуя представлениям Бергсона, будем считать, что наблюдатель присутствует в неподвижной системе  $XYZ$  и отслеживает течение времени, используя общепринятые и стандартизированные процедуры измерения времени с помощью часов. Как утверждал Бергсон, наблюдатель является носителем «дления», которое можно оценивать часами, причем куда бы наблюдатель не переносил систему отсчета, он всегда несет систему принятого измерения времени с собой. Поэтому, пусть в системе  $XYZ$  расположены неподвижные по отношению к системе часы для измерения времени, например, атомные часы. Течение времени будем измерять по шкале абсолютного времени в виде стандартизированной равномерной величины  $\tau$ , которая оценивается этими часами. Начало наблюдений примем за начальное событие для изучаемой группы объектов, которое будем считать началом отсчета времени ( $\tau = 0$ ) по шкале времени  $\tau$ . Также как и в теории относительности, определим понятие события местом (т.е. тремя координатами  $x, y, z$  в неподвижной системе отсчета), где оно произошло, и временем  $\tau$ , когда оно произошло. Например, факт наблюдения местоположения объекта есть событие, которое происходит в четырехмерном пространстве, причем пространственные координаты определяют положение точки, где произошло событие, а время определяет момент наблюдения события по времени системы  $XYZ$ .

Относительно неподвижной системы  $XYZ$  построим систему четырехмерных координат пространства-времени  $\{\tau, x, y, z\}$ . Тогда множество движущихся объектов может быть представлено точками в четырехмерном абсолютном пространстве координат  $\tau, x, y, z$  (рис. 15.1). В четырехмерном пространстве событие обычно изображается точкой, называемой *мировой точкой*. Изменение координат точки с течением времени означает движение



по некоторой кривой, называемой в теории относительности *мировой линией*. В специальной теории относительности, если время рассматривается как одна из координат четырехмерного пространства, то его называют *координатным* временем, мы же его будем называть абсолютным временем, как это было принято в системодинамике.

Каждая система будет осуществлять процесс равномерного и прямолинейного движения в трехмерном пространстве  $\{x, y, z\}$  с постоянной скоростью. При этом координаты будут описывать процесс движения  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$ ,  $z(\tau)$ . В свою очередь, если изучаемое абстрактное четырехмерное пространство-время евклидово, то каждая точка (объект) описывает в процессе движения в этом пространстве линию, которая является прямой.

Практический опыт человечества показывает, что наблюдаемое физическое пространство в неподвижной системе координат является евклидовым. Поэтому примем описанное выше абстрактное четырехмерное пространство-время за основную среду моделирования. Учитывая четырехмерное обобщение евклидовой геометрии, введем в рассмотрение абсолютный индекс  $S$ , который равен квадрату инварианта пространственно-временного интервала:

$$S = \rho^2 = \tau^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (15.20)$$

Пока мы не говорим о единицах измерения величин  $\tau, x, y, z$ , так как на этапе разработки модели нас интересует математический формализм получения модельного описания.

Таким образом, пусть имеется пространство наблюдаемых состояний системы  $\Omega_4$ , где координатные оси соответствуют абсолютному времени  $\tau$  и пространственным координатам  $x, y, z$  четырехмерного абсолютного пространства свойств  $\Omega$ , которое включает  $\Omega_4$ . Пространство  $\Omega_4$  будем рассматривать как многомерное пространство точек  $M$ , каждая из которых соответствует некоторому состоянию системы. Каждой точке  $M(\tau, x, y, z)$  данного пространства состояний системы поставлено в соответствие значение абсолютного индекса  $S$  согласно (15.20). В данном пространстве как результат опыта наблюдаются процессы прямолинейного и равномерного движения  $N$  систем.

Введем в рассмотрение следующие аксиомы, которые относятся к пространству как к среде моделирования.

1. Пусть в пространстве состояний системы  $\Omega_4$  каждой точке  $M$  поставлено в соответствие действительное положительное число  $S$ , которое будем называть индексом пространства-времени.

2. Величина  $S(M)$  является функцией точки и образует скалярное поле, которое является непрерывным в области  $\Omega_4$ .

Вспомним приведенное ранее утверждение А. Пуанкаре, что в природе «...существует нечто, остающееся постоянным. Даная формулировка охватывает как закон сохранения энергии, так и закон

сохранения массы. Это «нечто» представляет собой математическую функцию, физический смысл которой интуитивно не ясен» [80]. Исходя из этого, рассмотрим некоторую функцию состояния системы, которую представим в виде  $W = W(\tau, x, y, z)$ . На этапе разработки модели предположим, что скалярная функция  $W$  существует, причем пока не будем останавливаться на природе этой величины. Просто считаем, что существует однозначная связь данной величины с фактами физического опыта, которые отражают результаты движения системы.

Для величины  $W$  примем следующую аксиому.

3. Если в окрестности точки  $M$  объект осуществляет физическое движение, то для траектории движения  $l$  справедливо соотношение  $dW = c_l \cdot dS$ , при этом величина  $c_l$  является функцией процесса.

Согласно данной аксиомы, в окрестности точки  $M$  имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = c_\tau \frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = c_s \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = c_s \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = c_s \frac{\partial S}{\partial z}. \quad (15.21)$$

Здесь при обозначении величины  $c_s$  принято, что физическое пространство является изотропным, в связи с чем  $c_s = c_x = c_y = c_z$ . Кроме того, для рассматриваемого случая, исходя из однородности пространства-времени, величины  $c_s$  и  $c_\tau$  можно принять константами.

Учитывая, что индекс  $S$  является однородной функцией второй степени вида  $\alpha^2 \cdot S = S(\alpha \cdot \tau, \alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$ , из соотношений (15.21) и свойств однородной функции получим следующее уравнение:

$$\frac{\tau}{2 \cdot c_\tau} \cdot \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{x}{2 \cdot c_s} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{y}{2 \cdot c_s} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{z}{2 \cdot c_s} \cdot \frac{\partial W}{\partial z} = S, \quad (15.22)$$

откуда характеристики уравнения (15.22) определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$2 \cdot c_\tau \frac{d\tau}{\tau} = 2 \cdot c_s \frac{dx}{x} = 2 \cdot c_s \frac{dy}{y} = 2 \cdot c_s \frac{dz}{z} = \frac{dW}{S} = ds. \quad (15.23)$$

Из данных уравнений легко определить энтропию состояния системы:

$$ds = \frac{1}{2} \cdot \left( c_\tau \frac{d\tau}{\tau} + c_s \frac{dx}{x} + c_s \frac{dy}{y} + c_s \frac{dz}{z} \right). \quad (15.24)$$

Уравнение (15.22) приводит к следующему уравнению Пфаффа:

$$\frac{\tau}{c_\tau} d\tau + \frac{x}{c_s} dx + \frac{y}{c_s} dy + \frac{z}{c_s} dz + 2 \cdot S \cdot dW = 0. \quad (15.25)$$

Если рассматривать поверхность уровня для величины  $W = W(\tau, x, y, z)$ , то  $dW = 0$  и уравнение (15.25) приводится к полному дифференциалу, для которого общий интеграл будет иметь вид:

$$U(\tau, x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\tau^2}{c_\tau} + \frac{x^2}{c_s} + \frac{y^2}{c_s} + \frac{z^2}{c_s} \right). \quad (15.26)$$

Здесь принято, что  $U(0, 0, 0, 0) = 0$ . Уравнение (15.26) представляет поверхность в четырехмерном пространстве-времени  $\Omega_4$  и, следовательно, решениям уравнения Пфаффа соответствует потенциальное семейство поверхностей, ортогональных векторным линиям энтропии  $s$ . Можно показать, что при сформулированных допущениях величина  $W$  образует скалярное поле. Поэтому поверхности (15.26) представляют собой поверхности уровня  $W = const$  для скалярного поля величины  $W = W(\tau, x, y, z)$ , причем через каждую точку  $M$  пространства  $\Omega_4$  проходит одна поверхность уровня.

Так как величина  $W$  образует скалярное поле, то значение этой величины в каждой точке пространства не зависит от выбора системы координат. В свою очередь, величина  $U = U(\tau, x, y, z)$  является математической функцией, описывающей криволинейную координатную сетку, поэтому математические выражения для описания поверхностей уровня зависят от выбора системы координат.

Теперь выберем из множества систем произвольную систему  $X'Y'Z'$ , которая движется равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$  вдоль оси  $OX$  системы  $XYZ$ , и будем считать ее «неподвижной» системой отсчета с началом координат в точке  $O'$  и четырехмерными координатами  $\tau', x', y', z'$ . Также считаем, что в начальный момент времени  $\tau = 0$  начало координат и направления всех осей системы  $X'Y'Z'$  совпадали с началом координат и направлениями осей системы  $XYZ$ . Тогда, общий интеграл  $U'$  системы  $X'Y'Z'$  для случая изотропного и однородного пространства-времени, будет иметь вид, аналогичный (15.26):

$$U'(\tau', x', y', z') = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\tau'^2}{c_\tau} + \frac{x'^2}{c_s} + \frac{y'^2}{c_s} + \frac{z'^2}{c_s} \right). \quad (15.27)$$

Здесь также принято, что  $U'(0, 0, 0, 0) = 0$ , так как в начальный момент времени точки  $O$  и  $O'$  совпадают.

Так как после изменения системы отсчета наблюдатель находится в точке  $O'$ , то время  $\tau'$  в системе  $X'Y'Z'$  измеряется по той же самой шкале, что и в системе  $XYZ$ , поэтому  $\tau' = \tau$ . Исходя из этого, для систем  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$  преобразования координат связаны между собой взаимно однозначным соответствием, которое осуществляется по формулам:

$$\tau' = \tau; \quad x' = x - v \cdot \tau; \quad y' = y; \quad z' = z. \quad (15.28)$$

Известно, что данные формулы являются преобразованиями Галилея, которые преобразуют координаты материальной точки при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Различные координатные сетки систем отсчета лишь по-разному отображают одно и то же пространство, где задано скалярное поле величины  $W = W(M)$ . Поэтому связь между ортогональной криволинейной

координатной сеткой в одной «неподвижной» системе координат с ортогональной криволинейной сеткой в другой «движущейся» системе координат не может быть произвольной.

Определим эту связь для величин  $U = U(\tau, x, y, z)$  и  $U'(\tau', x', y', z')$ , учитывая формулы преобразования координат (15.28). Так как мы рассматриваем одни и те же поверхности уровня ( $dW = 0, W = const$ ) для величины  $W = W(M)$  в различных системах координат, то уравнение Пфаффа для системы  $X'Y'Z'$  будет иметь вид:

$$\frac{\tau'}{c_\tau} d\tau' + \frac{x'}{c_s} dx' + \frac{y'}{c_s} dy' + \frac{z'}{c_s} dz' = 0. \quad (15.29)$$

Интегрирование (15.29) приводит к выражению (15.27). В свою очередь, заменяя в (15.29) переменные и учитывая, что из (15.28)  $d\tau' = d\tau$ ,  $dx' = d(x - v \cdot \tau)$ ,  $dy' = dy$  и  $dz' = dz$ , получим общий интеграл в виде:

$$U(\tau, x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\tau^2}{c_\tau} + \frac{(x - v \cdot \tau)^2}{c_s} + \frac{y^2}{c_s} + \frac{z^2}{c_s} \right). \quad (15.30)$$

Делая обратную замену переменных согласно (15.28), получаем естественно опять уравнение (15.27). Таким образом, при переходе от «неподвижной» к «движущейся» системе координат и обратно мы используем только преобразования Галилея.

Теперь ясно видна суть логического парадокса «часов» специальной теории относительности. Раскроем сущность этого парадокса, используя для наглядности те же обозначения, что и в разделе 15.1:

$$U = t^2, \quad U' = t'^2 \quad \text{и} \quad c_s = c^2/2, \quad \text{а также} \quad \lambda = c_s/c_\tau = c^2/(2 \cdot c_\tau), \quad (15.31)$$

тогда уравнения (15.26) и (15.27) будут иметь вид:

$$\lambda \cdot \tau^2 + x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = 0, \quad (15.32)$$

$$\lambda \cdot \tau'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \cdot t'^2 = 0. \quad (15.33)$$

В частном случае, когда значения скалярного поля величины  $W = W(M)$  не зависят явно от времени  $\tau$ , величина  $c_\tau \rightarrow \infty$ , откуда  $\lambda = 0$ . Из (15.32) и (15.33) имеем следствия в виде выражений, которые в СТО являются исходными уравнениями движения фронта световой волны и из которых получают известные преобразования Лоренца:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = 0, \quad (15.34)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \cdot t'^2 = 0. \quad (15.35)$$

В специальной теории относительности величина  $t$  называется координатным временем, величина  $t'$  – *собственным* временем, которое измеряется часами, жестко связанными с движущейся системой, а величина абсолютного времени  $\tau$  вообще не принимается во внимание.

В соответствии с известным выводом, который приводится во многих учебниках (например, в книге [95], стр. 32), из уравнений (15.34) – (15.35) достаточно просто получают преобразования Лоренца, которые представляются формулами (15.7) и связывают между собой координатное

и собственное время системы. На самом деле в процессе движения в уравнениях (15.34) – (15.35) координаты  $x, y, z$  являются функциями абсолютного времени  $\tau$ , а координаты  $x', y', z'$  – функциями абсолютного времени  $\tau'$ , при этом шкалы  $\tau$  и  $\tau'$ , которые отражают принятый в хронометрии способ измерения времени, абсолютно тождественны между собой при переходе из одной системы отсчета к другой.

В процессе построения теории Эйнштейн практически принял ошибочную гипотезу, что математические функции  $U = t^2$  и  $U' = t'^2$ , которые описывают поверхности уровня некоторой величины, являются наблюдаемым координатным и собственным временем системы. При этом принято, что данные математические функции однозначно характеризуют физическое время любых явлений и отражают изменение свойств систем с течением времени. Как было показано в разделе 15.2, может существовать несколько различных реляционных моделей времени, поэтому при разработке теории необходимо было доказать на опыте, что координатное и собственное время, в том виде в каком эти величины приняты в СТО, однозначно отражают природу времени.

Вторая логическая ошибка СТО состоит в том, что абсолютные времена в системах  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$  (величины  $\tau$  и  $\tau'$ , которые регистрируются наблюдателем и отражают физику периодических процессов часов) не взаимно тождественны. Эйнштейном практически принято предположение, что величина  $\tau$  тождественна координатному времени, а величина  $\tau'$  тождественна собственному времени системы. Образно говоря принято, что «модель первична, а реальность вторична».

Указанные выше две логические ошибки приводят к тому, что закономерности, полученные на модели, переносятся на реальность физических явлений и считается, как говорил А. Бергсон, что так устроен мир, что время в нем зависит от скорости перемещения.

Отметим, что мы пока ведем дискуссию практически только на этапе разработки математической модели системы и еще даже не подошли к этапу адаптации параметров модели по результатам опыта и тем более этапу проверки ее адекватности и достоверности путем сравнения результатов моделирования с опытными данными.

Обратим также внимание на то, что при построении исходной модели не привлекался постулат о постоянстве скорости света. Вывод был основан только на том, что величина  $c_s = c^2/2$  постоянна в связи с изотропностью пространства, однако отсюда абсолютно не следует то, что постоянная, которая обозначена значком  $c$ , это скорость света. Привлечение данной величины осуществляется при выборе единиц измерения и создании шкал времени и расстояния. Определяя секунду, как время, равное 9192631770 периодам излучения соответствующего перехода между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия 133, а метр – как путь, проходимый светом в вакууме за время в  $1/299792458$  секунды, устанавливается соответствие между расстоянием и

временем и в модель вводится скорость света. Построение шкал измерений является первым шагом при адаптации параметров модели по результатам опыта. Здесь отметим, что постулаты об изотропности пространства и однородности пространства и времени приняты для упрощения модельного представления явления. В общем случае, они вовсе не обязательны, так как величины  $c_s$  и  $c_t$  можно рассматривать как непрерывные функции пространства и времени, при этом уравнение (15.22) также имеет решение.

Последние два этапа создания модели должны быть также связаны с обоснованием на основе опытных данных справедливости принятых гипотез, например, проверки факта существования функции  $W$ , оценки допущения о постоянстве параметров модели, разработкой систем оценки и измерения величин и т.д. Однако, мы не ставим таких задач, так как целью раздела было теоретически раскрыть логические парадоксы специальной теории относительности. Данные задачи являются предметом исследований физики и выходят из области исследований системодинамики, так как связаны с физическим опытом.

Таким образом, в предложенном варианте модельного описания четырехмерного пространства-времени отсутствуют логические парадоксы СТО. Все сказанное выше указывает на то, что данные парадоксы – результат принятого Эйнштейном при моделировании способа описания систем и логических ошибок, вытекающих из некорректного представления времени. Естественно, что никакого замедления хода обычных часов в движущейся координатной системе не будет. Наши математические абстракции не могут изменять реальную действительность. Кроме того, на данном этапе развития науки и практики, данные парадоксы во многом являются следствием невозможности проведения прямого опыта по проверке положений СТО и осуществления сравнения результатов моделирования с результатами этого опыта. Только этим можно объяснить тот удивительный факт, что парадоксы СТО присутствуют в естествознании уже более ста лет, прочно вошли в формализм современной науки и воспринимаются догматически, несмотря на обширную критику некоторых исходных положений.

#### **15.4 Реляционно-полевая модель представления времени**

Четырехмерное пространство-время, исходя из его представления в виде пространства Минковского, является лишь одной из возможных моделей реальности, причем не самой удачной. Последние годы начинает формироваться новая концепция времени, которая связана с физическими изменениями и в которой время представляет собой лишь математическую величину, не обладающую физическим смыслом. Данный вопрос интенсивно дискутируется, однако, то что в течении почти сто лет идея представления времени как четвертого измерения не принесла особого

прогресса в понимании природы времени, становится уже распространенным утверждением.

Покажем, что в рамках системодинамики может быть предложена реляционно-полевая модель времени, где время представляет собой меру материальных движений и является проявлением свойств объектов и происходящих с ними изменений. Таким образом, цель данного раздела – предложить вариант представления времени в виде многомерного скалярного поля меры наблюдаемых материальных движений. С этой целью используем понятие меры как функции пространства состояний, выражающей единство качественной и количественной определенности системы. Также предполагаем, что существует некоторая универсальная комплексная характеристика, которая может быть выражена через параметры свойств объекта (системы) и которая будет тесно связана со временем.

### ***Понятия и определения***

Будем рассматривать объекты и системы различных классов (физические, биологические, социальные и т.д.), которым свойственно многообразие форм материальных движений. В самом общем виде под материальным движением будем подразумевать любое наблюдаемое изменение или взаимодействие объектов. Особо подчеркиваем, что суть любых движений выражается в изменениях состояний объектов. Исходя из этого, известный афоризм Гераклита «Нельзя дважды войти в одну и ту же реку» образно отражает сущность всех наблюдений, связанных со временем. Любые объекты, процессы и явления необратимо изменяются с течением времени. Даже самые простые циклические процессы, например, ход часов или периодические вспышки света, необратимы и постоянно требуют затрат энергии на поддержания, иначе они закономерно затухают. Из сказанного следует, что в природе невозможно *абсолютно точное и полное* повторение состояний объектов во времени. Это основное суждение, которое мы априори принимаем за фундаментальное объективное свойство феномена времени.

Примем следующие определения и понятия. Причем используем определения седьмой главы и приведем их для удобства и наглядности.

*Система (объект)* – совокупность взаимосвязанных элементов, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих некоторую целостность, единство. *Класс систем (объектов)* – множество однотипных объектов, обладающих общими свойствами и качественными признаками. *Свойство* – атрибутивная характеристика, которая отражает некоторый существенный и неотъемлемый признак или отличительную особенность объекта. *Параметр* свойства – количественная величина, характеризующая свойство объекта и имеющая числовое значение.

Под *состоянием* объекта (системы) будем подразумевать совокупность его свойств и их текущих значений, которые формируются под действием внешних и внутренних условий в конкретный момент наблюдения за поведением объекта. Считаем также известными все определения для различных свойств: местоположения, направления,

длины, площади, формы, объема, массы, плотности, упругости, скорости, цвета, численности, рождаемости, смертности, стоимости и т.д.

Введем следующие дополнительные определения. *Событие* – любой наблюдаемый факт, связанный с материальными движениями, который выражается в изменении состояния объекта (системы). *Последовательность* событий – последовательный ряд однородных событий, происходящих одно за другим в определенные моменты наблюдения, которые могут быть пронумерованы в нарастающем порядке. Введем также понятие *одновременности* – существование разных событий в один и тот же момент наблюдения. Это позволяет нам использовать понятия раньше и позже для событий, которые характеризуют материальные движения. Будем предполагать, что изменения состояний объектов отражаются в соответствующих событиях, которые регистрируются в наблюдаемых процессах. Поэтому определим *процесс* как закономерное изменение состояния объекта в последовательные моменты наблюдения, связанное с материальными движениями. Нас, в первую очередь, будут интересовать последовательности однородных событий, которые свойственны определенному классу объектов, постоянно регистрируются в процессе длительного наблюдения за этими объектами и отражают эволюционные изменения в их состояниях.

Таким образом, свойства будут являться основными характеристиками состояния объекта, а наблюдаемые последовательности событий – основными характеристиками процесса. Свойства и события в процессе наблюдения отражают в совокупности состояние объекта и все происходящие с ним изменения. При этом считаем, что в любой момент наблюдения состояние объекта однозначно определено значениями всех его параметров  $z_k$  (в общем случае  $n$ ), а процесс – регистрируемыми событиями  $A_j$  (в общем случае  $m$ ). Предположим, что при совершении произвольного процесса  $l$ , в котором изменяется состояние объекта, параметры свойств всегда измеряемы, а события всегда регистрируемы.

Далее функцией состояния (функцией точки) будем называть величину, значения которой при изменении состояния в наблюдаемом процессе не зависят от процесса перехода объекта из одного состояния в другое и определяются только начальным и конечным состоянием объекта. В свою очередь, функцией процесса (функцией линии) будем называть величину, значения которой при изменении состояния объекта зависят от того, по какому пути идет процесс. При этом состояния объектов при моделировании будут изображаться точками многомерного пространства, а процессы изменения состояния – линиями этого пространства.

### ***Опытные факты***

Идею создания реляционно-полевой модели представления времени свяжем с опытным фактом существования возможности измерения времени. Данное положение состоит в том, что когда за произвольным объектом ведется полное наблюдение, то можно говорить о том, что в





Исходя из этого, назовем *эмпирическим временем* установленную опытным путем сравнительную меру одновременности событий для процессов материальных движений различных объектов. В зависимости от того, какой объект и реализуемый им процесс будет принят в качестве часов, может существовать несколько различных шкал измерения времени. Далее будем использовать атомную шкалу времени. Измерения времени в данной шкале связаны с применением физического процесса, использующего факт периодического излучения атома изотопа цезия 133. Сегодня атомная шкала является основной шкалой измерения времени в практической деятельности человека.

Следующим опытным фактом является то, что очень часто один и тот же процесс изменения состояния объекта в зависимости от внешних и внутренних условий может протекать с различной интенсивностью. Для любого объекта и любого его свойства мы всегда можем определить скорость процесса, связанного с материальными движениями. Поэтому, исходя из опытных данных, в любом наблюдаемом процессе изменения параметра свойства можно задать скорость процесса, которая не обязательно будет постоянной:

$$c_{z_k^{(q)}} = \left( \frac{dz_k^{(q)}}{d\tau} \right)_{l_z}. \quad (15.37)$$

Возможность определения в опыте величины  $c_{z_k^{(q)}}$  приводит к обобщенному феноменологическому наблюдению. Этот важный опытный факт, вытекающий из практики человека, связан с ходом времени, о котором мы образно говорим, что «время течет». Ход времени приводит к тому, что наблюдаемые события настоящего становятся событиями прошлого, а произошедшие события прошлого отодвигаются еще глубже во времени. Сегодня практически во всех физических моделях времени данный опытный факт никак не учитывается. Для того, чтобы показать течение измеряемого нами времени необходимо задать некоторую величину, систему отсчета, реальную или абстрактную среду, по отношению к чему можно было бы показать необратимое течение времени. Для определенного класса объектов подобная величина (среда) должна формироваться из опыта. Поэтому, чтобы учесть факт течения времени и возможность задания в совокупности скорости изменения параметров свойств в произвольном процессе, следует использовать гипотезу о существовании некоторой величины  $W$ , которая тесно связана с течением времени и однозначно характеризует процессы материальных движений для данного класса (классов) объектов. По аналогии с логикой построения термодинамики, где есть понятие количества теплоты, назовем данную величину *количеством материального воздействия (количество воздействия)* и будем считать, что эта величина комплексно характеризует изменения в состоянии объектов. Будем также считать, что количество воздействия тесным образом связано с изменениями меры пространства

состояний, выражающей единство качественной и количественной определенности объекта (класса объектов). Примеры построения такой величины для отдельных систем были даны в предыдущих главах.

По аналогии с термодинамикой и системодинамикой, для любого процесса материального движения  $l$  подобные эмпирические уравнения, связывающие величину  $W$  с эмпирическим временем  $\tau$ , могут быть представлены в виде:

$$c_l = \left( \frac{dW}{d\tau} \right)_l. \quad (15.38)$$

В каждом конкретном случае по опытным данным необходима проверка гипотезы существования величины  $W$ , которая характеризует данный род материального движения, а также разработка системы измерения или оценки данной величины. Отметим, что это не простая задача, требующая накопления множества опытных данных. Однако, только после этого и при наличии системы оценки величины  $W$ , можно говорить о возможном определении величин  $c_l$ , которые будут отражать темпоральную интенсивность разных процессов в различных условиях.

#### *Аксиоматика изложения теории*

Рассмотрим некоторую область трехмерного пространства, где расположено множество объектов различных классов, число которых равно  $p$  и которые находятся в отношениях и связях между собой. Так как системодинамика опирается на феноменологический подход, то считаем, что все объекты наблюдаемы в опыте, который является единственно возможной основой для создания и проверки теорий. Для упрощения будем считать, что изучаемое множество объектов счетное, причем каждый объект может иметь признак, отличающий его от других объектов. Данный признак будем обозначать в виде верхнего индекса в скобках, который будет представлять номер объекта. Пусть каждое состояние любого объекта в самом общем случае однозначно характеризуется  $n$  независимыми переменными  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , причем область определения для каждой переменной распространяется на всю положительную числовую ось  $z_k(0, \infty)$ , а системы измерения переменных стандартизованы. Начало отсчета для переменных выбирается таким образом, чтобы соответствовать нулевым значениям параметров свойств.

Рассматриваем существование объектов только в материальных движениях (состояния объектов должны изменяться с течением времени), причем подчеркиваем, что мы изучаем преимущественно естественные (самопроизвольные) процессы, связанные с изменением и развитием систем. Состояния наблюдаемых объектов различных классов могут характеризоваться или всеми переменными сразу или только некоторыми из них, причем каждая переменная отражает некоторое свойство изучаемых объектов. При этом, в частном случае, координаты объектов, определяющие их положение в трехмерном пространстве, также являются параметрами свойств, которые характеризуют местоположение объекта.

Построим среду моделирования в виде пространства координат  $\Omega$ , где координатные оси соответствуют независимым переменным  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Пусть в пространстве  $\Omega$  имеется замкнутая область  $\Omega_n$  некоторого множества точек  $M$ . Область  $\Omega_n$  будем называть наблюдаемым пространством состояний. Процесс абстрактного моделирования, в отличие от процесса реального наблюдения, мы можем соотносить с бесконечным количеством объектов и их состояний, поэтому будем считать, что точки  $M$  непрерывно заполняют область  $\Omega_n$ . Таким образом,  $\Omega_n$  будем рассматривать как многомерное пространство точек  $M$ , каждая из которых соответствует определенному состоянию и которому может соответствовать некоторый объект, не обязательно существующий в реальности (наблюдаемый в опыте).

Так как в опыте мы рассматриваем ограниченное количество объектов, равное числу  $p$ , то на начало наблюдений в области  $\Omega_n$  мы можем отобразить  $p$  точек  $M^{(q)}$ , каждая из которых соответствует состоянию определенного  $q$ -того наблюдаемого объекта. Каждый объект осуществляет некоторый процесс материального движения из прошлого в настоящее, поэтому с течением эмпирического времени  $\tau$  каждая точка  $M^{(q)}$  будет описывать многомерную кривую. Назовем эту кривую в многомерном пространстве по аналогии со специальной теорией относительности *мировой линией*, тогда каждому объекту будет соответствовать своя мировая линия. Кроме того, классу объектов будет соответствовать свой спектр мировых линий. Каждой линии, а также всему спектру линий в целом будут соответствовать последовательности событий, отражающие эволюционные изменения в объектах.

Хотя определение параметров свойств изучаемых объектов чаще всего осуществляется дискретно в заданные моменты наблюдения, однако для упрощения задачи будем считать, что мировые линии непрерывны. Так же как и в четырнадцатой главе, мы условились рассматривать непрерывное пространство состояний, хотя, как утверждал Фальк, множества состояний не обязательно должны быть непрерывными и, в принципе, могут состоять из конечного числа состояний, которые свойственны различным классам объектов.

Свойство необратимости времени и факты наблюдения существующих объектов во времени закономерно приводят к представлениям о непрерывности мировых линий. Данные линии не имеют особых и кратных точек. Первый случай характеризуется тем, что для линии процесса производные всех параметров свойств по времени одновременно равны нулю, второй случай – тем, что одна и та же точка  $M$  может отвечать двум и более значениям эмпирического времени  $\tau$ .

Аксиоматическое изложение теории будем основывать на постулировании существования многомерного поля эмпирического времени. Исходя из этого, каждой точке  $M\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  пространства

состояний  $\Omega_n$  поставим в соответствие значение времени  $\tau$ . Это позволяет ввести аксиомы для эмпирического времени и возможности его скалярного представления в каждой точке пространства  $\Omega_n$ .

1. Пусть в пространстве состояний  $\Omega_n$  каждой точке  $M$  поставлено в соответствие действительное положительное число  $\tau$ , которое будем называть эмпирическим временем.

2. Величина  $\tau(M)$  является функцией точки и образует скалярное поле, которое является непрерывным и упорядоченным в области  $\Omega_n$ .

Данные аксиомы отражают опытные факты, которые сегодня связаны с понятием времени и возможностью его измерения. Так как эмпирическое время является функцией точки, то скалярное поле величины  $\tau(M)$  представляет собой поле, через каждую точку  $\tau(M)$  которого в пространстве состояний  $\Omega_n$  проходит только одна поверхность уровня. Во всех точках поверхности уровня значение величины  $\tau$  является одинаковым. Это следует из того, что один и тот же объект не может находиться в двух временах одновременно. Таким образом, из данной модели следует, что если протекает процесс (изменяются свойства объекта), то при возрастании эмпирического времени должен изменяться, как минимум, хотя бы один параметр свойства объекта.

Исходя из последовательности событий часов, все поверхности уровня могут быть пронумерованы в нарастающем порядке. Поэтому каждой поверхности уровня может быть присвоено значение величины  $\tau$ , которое возрастает с течением эмпирического времени. По аналогии с эмпирической температурой в термодинамике, в определенной области пространства  $\Omega_n$  наблюдения, выполненные в шкале эмпирического времени, «присваивают» всем поверхностям уровня определенные значения величины  $\tau$ , в зависимости от последовательности однородных событий, которые генерируются в часах. Таким образом, линию процесса часов в пространстве  $\Omega_n$  условно можно рассматривать как мировую линию. Другими словами, текущие значения величины  $\tau$  в шкале времени *упорядочивают* поверхности уровня. Тем самым, в определенной и достаточно узкой области пространства  $\Omega_n$ , задается однородное и равномерное течение времени, исходя из мировой линии часов, однако это абсолютно не значит, что такое течение времени характерно для всего наблюдаемого пространства состояний. В зависимости от особенностей объектов спектры мировых линий в различных областях пространства могут иметь свои закономерности относительно эмпирического времени, однако неуклонное возрастание (необратимость) времени – это фундаментальная особенность для всех поверхностей уровня. Таким образом, мы рассматриваем только определенный (и достаточно узкий) класс многомерных геометрических пространств, которые могут быть упорядочены временем.

Различные процессы, которые осуществляются между некоторым произвольным состоянием  $M$  и любым другим близлежащим состоянием в области  $\Omega_n$ , будут отличаться между собой по интенсивности осуществления материальных движений. Для того, чтобы логически обосновать возможность осуществления процессов как непрерывного перехода между двумя ближайшими состояниями любого объекта, при построении модели времени необходимо введение новых аксиом.

Исходя из этого, рассмотрим функцию количества материального движения, которую представим в виде  $W = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Предположим, что скалярная функция  $W$  существует и пока не будем останавливаться на природе этой величины. Просто считаем, что имеется однозначная связь данной величины с фактами наблюдений или опыта, которые отражают результаты материальных движений, связанных с изменениями состояний объектов определенного класса. Данная функция, наряду с эмпирическим временем, также будет отражать особенности осуществления процессов в окрестности любого состояния.

Изложим данные аксиомы в следующем виде.

3. Пусть в пространстве состояний системы  $\Omega_n$  каждой точке  $M$  одновременно с эмпирическим временем поставлено в соответствие множество действительных чисел  $c_l$ , которые будем называть темпоральностями процессов изменения состояния объектов.

4. Величины  $c_l$  являются функциями процесса. Если в окрестности любой точки  $M$  объект осуществляет некоторый процесс материального движения  $l$ , то для линии процесса  $l$  справедливо соотношение  $dW = c_l \cdot d\tau$ , причем величину  $W$  определим как воздействия, которое комплексно характеризует интенсивность процессов при изменении состояния объекта.

В целом, на абстрактном уровне предварительное вербальное описание реляционно-полевой модели времени завершено. Целью описания являлся учет при создании модели некоторых основных свойств времени. Введя понятие одновременности и, абстрактно связав его с поверхностью уровня эмпирического времени, которой в момент времени  $\tau$  соответствуют наблюдаемые свойства объекта и соответствующие регистрируемые события, мы тем самым, обеспечили формализацию понятий «раньше» и «позже». Так как можно пронумеровать поверхности уровня эмпирического времени в нарастающем порядке с помощью часов, то тем самым учтено свойство времени, связанное с его способностью упорядочивать события. Свойство течения времени было учтено введением особой величины, по отношению к которой можно отразить становление событий во времени. Необходимость этого связана с тем, что течение времени нельзя смоделировать по отношению к самому себе. Универсальность времени отражена представлением мировых линий объектов любой природы в общем наблюдаемом пространстве состояний.

Свойство необратимости времени обеспечено тем, что мировые линии объектов строго формируются только в порядке возрастания эмпирического времени, и ни один объект не может наблюдаться одновременно в двух и более временах.

Теперь для построения реляционно-полевой модели представления времени используем гипотезу, что скалярное поле эмпирического времени может быть аналитически описано в окрестности произвольной точки  $M$ . Будем считать, что вблизи точки  $M$  осуществляется процесс изменения состояния некоторого объекта. Для задания скалярного поля эмпирического времени  $\tau = \tau(M)$  как функции независимых переменных  $z_1, z_2, \dots, z_n$  необходимо определить функцию точки. Предположим, что в окрестности любой точки скалярное поле эмпирического времени может быть с достаточной точностью приближено аналитической функцией вида  $\tau(M) = t(M)$ , причем  $t(M) = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Данную функцию при разработке модели следует задать.

В настоящее время в области опытного изучения свойств времени практически отсутствуют феноменологические закономерности, которые могли бы иметь общесистемный смысл и позволяли бы обобщать опытные данные на уровне зависимостей. Поэтому выбор функций  $t = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$  может осуществляться исходя из имеющихся представлений об осуществлении различных процессов движения или из существующих гипотез в специальной теории относительности, термодинамике, системодинамике, описательных науках и т.д. Естественно, что разные виды функций  $t = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$  могут соответствовать объектам и системам различной природы, а также различным областям пространства  $\Omega_n$ . В данном случае, чтобы сузить область исследований, будем использовать функции  $t = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , входящие в класс однородных аналитических функций.

Определим аналитическую функцию  $t = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$  как некоторый абсолютный индекс пространства состояний  $\Omega_n$ . Основное отличие скалярного поля эмпирического времени  $\tau(M)$  от индекса  $t = t(z_1, z_2, \dots, z_n)$  состоит в том, что скалярное поле  $\tau$  не связано с выбором системы координат, а функция  $t(z_1, z_2, \dots, z_n)$  связана с выбором координатных осей для независимых переменных  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Все это позволяет с учетом зависимостей (9.2) и свойств однородной функции получить уравнение:

$$\frac{z_1}{p \cdot c_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_1} + \frac{z_2}{p \cdot c_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_2} + \dots + \frac{z_n}{p \cdot c_n} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_n} = t(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (15.39)$$

где  $p$  – степень однородности функции  $t$ . Характеристики данного уравнения определяются системой дифференциальных уравнений:

$$p \cdot c_1 \frac{dz_1}{z_1} = p \cdot c_2 \frac{dz_2}{z_2} = \dots = p \cdot c_n \frac{dz_n}{z_n} = \frac{dW}{t} = ds. \quad (15.40)$$

В свою очередь, уравнение Пфаффа для (15.39) будет иметь вид:

$$\frac{z_1}{c_1} dz_1 + \frac{z_2}{c_2} dz_2 + \dots + \frac{z_n}{c_n} dz_n + p \cdot t \cdot dW = 0. \quad (15.41)$$

Для того, чтобы решить поставленную задачу необходимо задать вид абсолютного индекса  $t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , далее для разных условий определить функцию  $W = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$  и потом по опытным данным идентифицировать разработанную модель.

Здесь возможны различные подходы, связанные с созданием различных моделей описания абсолютного индекса.

*Вероятностная среда моделирования времени*

Будем считать, что модельное представление времени может быть связано с вероятностями наблюдаемых событий, которые отражают эволюцию объектов и характеризуют процессы, свойственные мировым линиям объектов. Тогда по аналогии с системодинамикой введем в рассмотрение величину  $t$ , которая зависит от геометрической вероятности точки многомерного пространства. Распространив зависимость для индекса  $t$  на всю область изменения величины, получим:

$$t = \alpha_t \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n}{R}, \quad (15.42)$$

где  $R = z_{10} \cdot z_{20} \cdot \dots \cdot z_{n0}$ ,  $\alpha_t$  – постоянная шкалирования,  $z_{10}, \dots, z_{n0}$  – параметры опорного состояния. Теперь в окрестности любой точки  $M$  свяжем количество воздействия  $W$  теоретической линейной зависимостью со статистической вероятностью  $w$  событий, характерных для мировой линии. В этом случае будем иметь:

$$W = \alpha_w \cdot \frac{w}{w_0}, \quad (12.43)$$

где  $w_0$  – вероятность событий для условий принятого опорного состояния;  $\alpha_w$  – некоторый коэффициент пропорциональности между величинами  $W$  и  $w$ .

Проведя преобразования, получим из (15.40) энтропию состояния:

$$s - s_0 = c_1 \cdot \ln\left(\frac{z_1}{z_{10}}\right) + c_2 \cdot \ln\left(\frac{z_2}{z_{20}}\right) + \dots + c_n \cdot \ln\left(\frac{z_n}{z_{n0}}\right), \quad (15.44)$$

где  $s_0, z_{10}, \dots, z_{n0}$  – параметры опорного состояния.

При значении изменения величины  $dW = 0$  из уравнения (15.41) может быть определена математическая функция  $U$ , которая ранее получила название меры пространства состояний  $\Omega_n$ :

$$U(z_1, z_2, \dots, z_n) - U_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{z_1^2 - z_{10}^2}{c_1} + \frac{z_2^2 - z_{20}^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2 - z_{n0}^2}{c_n} \right). \quad (15.45)$$

Для любой мировой линии объекта при возможности представления ее уравнения в параметрическом виде относительно эмпирического времени уравнение (15.39) может быть решено. Далее мы приходим практически к результатам девятой и десятой глав, где излагается



математический аппарат системодинамики, а также к результатам двенадцатой главы, где дан пример решения подобной задачи.

*Геометрическая среда моделирования времени*

Несколько иные результаты могут быть получены, если рассматривать многомерное пространство  $\Omega_n$ , как геометрическое пространство. Будем считать, что многомерное пространство состояний  $\Omega_n$  эвклидово. Тогда введем в рассмотрение величину  $t$ , которую назовем абсолютным индекс пространства:

$$t = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2, \quad (15.46)$$

Если составить характеристики для уравнения (15.39), то получим энтропию состояния в виде:

$$s - s_0 = \frac{2}{n} \left( c_1 \cdot \ln \left( \frac{z_1}{z_{10}} \right) + c_2 \cdot \ln \left( \frac{z_2}{z_{20}} \right) + \dots + c_n \cdot \ln \left( \frac{z_n}{z_{n0}} \right) \right), \quad (15.47)$$

а мера пространства состояний может быть представлена следующим образом:

$$U(z_1, z_2, \dots, z_n) - U_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{z_1^2 - z_{10}^2}{c_1} + \frac{z_2^2 - z_{20}^2}{c_2} + \dots + \frac{z_n^2 - z_{n0}^2}{c_n} \right). \quad (15.48)$$

где  $s_0, U_0, z_{10}, \dots, z_{n0}$  – параметры опорного состояния.

Далее можно получить результаты, аналогичные тем, которые были приведены в десятой главе книги и в предыдущих разделах данной главы.

Таким образом, можно предложить различные варианты реляционно-полевых моделей представления времени. Идейно теория таких моделей тесно связана с математическим аппаратом термодинамики. Отметим, что структурно-логическое единство моделей времени с калорическими моделями термодинамики подтверждает провидческую идею П. Шамбадала: «Чтобы установить различие между прошлым и будущим, мы должны обратиться не к хронометрам, а к термометрам» [103]. Для термодинамических систем подобная задача сводится к изучению совместных решений дифференциальных уравнений для поля температуры  $T$  и поля времени  $t$  применительно к определенной мировой линии, заданной в параметрическом виде относительно времени:

$$\frac{z_1}{p_q \cdot c_{1,T}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z_1} + \frac{z_2}{p_q \cdot c_{2,T}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z_2} + \dots + \frac{z_n}{p_q \cdot c_{n,T}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial z_n} = T(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (15.49)$$

$$\frac{z_1}{p_w \cdot c_{1,t}} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_1} + \frac{z_2}{p_w \cdot c_{2,t}} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_2} + \dots + \frac{z_n}{p_w \cdot c_{n,t}} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_n} = t(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (15.50)$$

Здесь уже видно целое новое направление для исследований.

Кроме этого крайне важным направлением исследований является эмпирическое изучение особенностей и феноменологическое представление полевой структуры времени. Как правило, в многомерном пространстве  $\Omega_n$  поле эмпирического времени  $\tau$  для различных спектров мировых линий будет неоднородно. Однородность и равномерность

эмпирического времени является частным случаем и может наблюдаться только для отдельных классов объектов и процессов, например, для мировых линий часов. Здесь уже видна сущность меры и энтропии пространства состояний  $\Omega_n$ . Данные величины представляют собой математические функции, которые характеризуют криволинейную ортогональную сетку для эмпирического поля времени. Эти потенциальные функции универсальны, так как они свойственны всему пространству состояний  $\Omega_n$  и являются криволинейными координатами этого пространства. В свою очередь, поле эмпирического времени, которое описывается функцией  $t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , не будет потенциальным. Таким образом, мера и энтропия пространства состояний могут выступать универсальными характеристиками времени. Поэтому, относительно этих величин следует изучать особенности и закономерности распределения поля эмпирического времени в различных областях пространства  $\Omega_n$ . Также уже очевидно, что часов для определения времени и соответствующих шкал для его измерения должно быть достаточно много. Для разных областей пространства  $\Omega_n$  должны быть разработаны или предложены часы различной природы для определения времени. Это позволит оценить полевую структуру времени и выявить особенности формирования мировых линий для различных классов объектов.

Однако сложность задачи модельного представления времени состоит в том, что теория должна опираться на множественные опытные данные для объектов и систем самой разной природы. В области изучения феномена времени практикой пока не выработаны феноменологические закономерности, которые позволили бы обоснованно выбрать функции для описания и методы для измерения абсолютного индекса, предложить методы оценки или измерения количества материального движения, определить темпоральности различных процессов, свойственных объектам и системам различных классов. Очевидно, что получение, накопление и обработка опытных данных о времени должны касаться, в первую очередь, естественных процессов для всех основных классов объектов и систем. Уже видна обширность такой задачи, так как для объектов различной природы необходимо изучить множество спектров мировых линий и, в каждом конкретном случае, получить такой же объем опытных данных, который был собран в термодинамике при изучении термодинамических процессов почти за двести лет.

Поэтому, в будущем понять суть природы времени можно будет по мере накопления опытных данных о развитии и изменении объектов и систем различной природы. В области изучения феномена времени накопление опытных фактов, а не построение множества гипотетических моделей, первостепенно в повестке дня. Эта задача сегодня является самой актуальной в изучении природы времени.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вот и наступил момент, когда надо очень кратко подвести итоги. В процессе подготовки этой книги я попытался найти ответы на некоторые важные вопросы методологии термодинамики, системного анализа и общей теории систем. Читатель может сам судить, на сколько это удалось. Основная идея изложения была связана с универсальностью термодинамики, выделяющей ее из многих других теорий.

Как было показано ранее, если существует опытный факт того, что для некоторой системы можно выдвинуть гипотезу существования некоторого показателя вида  $w = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , то вполне возможно установление закономерностей, которые характеризуют изменение состояний этой системы. В данной работе в качестве такого показателя принято многомерное распределение вероятностей некоторой случайной величины, а также распределение эмпирического времени. Для многих эволюционно развивающихся систем различной природы такие распределения существуют. В термодинамике таким показателем выступает абсолютная температура  $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ . Все это говорит о возможности построения для многих классов систем математической теории их развития. Аналогии между термодинамикой и системодинамикой крайне важны, так как позволяют придать импульс развитию общей теории систем и применить при исследовании и моделировании систем апробированные естественнонаучные методы.

Метод системодинамики расширяет возможности системного анализа и общей теории систем и позволяет учитывать фундаментальные закономерности, которые имеют статистическую природу и свойственны различным классам объектов и систем. Системодинамика, как и термодинамика, опирается на феноменологический подход, при котором опыт признается единственно возможной основой для создания теорий, а в основе методологии этих наук лежит аксиоматический (дедуктивный) метод, определяющий логический вывод частных положений из общих.

На данном этапе научная значимость метода, в первую очередь, связана с возможностью построения моделей биологических, экологических и социальных систем, а также формулировкой новых подходов в построении алгоритмов интеллектуального анализа данных, которые учитывают фундаментальные закономерности изменения и развития систем.

Уже видны все сложности этого пути, которые определены медленным накоплением систематизированных опытных данных и крайне ограниченной конвергенцией разных областей знаний. Однако, будущее в области моделирования систем лежит в синтезе методологий самых различных наук.

*Г. Аверин, 2008 – 2014 гг.*

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютное начало отсчета 167, 191  
— пространство свойств 174, 196, 355  
Абсолютный индекс 167, 183, 220, 266  
— развития системы 266  
Абсолютная плотность статистической вероятности 229  
Адиабатическая недостижимость 122
- Безопасный уровень (порог) 311  
Биоиндикатор 306, 307, 308, 314, 316, 318, 324, 325
- Вектор** 31, 40  
— единичный 32, 41  
— потенциальный 47  
— эволюции 234, 239, 355, 365  
Векторная линия 48, 222, 224, 236, 348  
— поверхность 57, 58  
Векторное произведение 43  
Величина 16  
— переменная 17, 73  
— постоянная 17, 45, 235  
— случайная 73, 80, 81  
— — дискретная 74  
— — непрерывная 74  
— — нормированная 86  
Вероятность 66, 332, 333  
— геометрическая 67, 151, 152, 207  
— классическая 67, 93, 118  
— состояния 97, 117, 153, 161, 168  
— статистическая 68, 74, 150, 166, 184  
— термодинамическая 93, 97, 116, 118  
Вещество термометрическое 312  
Вируемость 332, 333  
— удельная 353  
Вирулентность 331, 332  
— удельная 332  
Вирулентура 333  
Вихрь вектора 48  
Взаимодействие 95, 104, 111  
— потенциал 96  
— род 96  
Воздействие 65, 105, 137, 139, 171, 300  
— количество 123, 330, 382, 388  
— объект 171, 300  
— острое 139  
— смертельное 139  
— удельное 333  
— хроническое 139
- Время 11, 355  
— абсолютное 174, 191, 362  
— биологическое 195  
— внутреннее 195  
— геологическое 192  
— координатное 373  
— органическое 195  
— относительное 195, 365, 366  
— системное 198, 199, 207, 208, 364, 368  
— собственное 195, 366, 370  
— таксонометрическое 195  
— эмпирическое 381  
Всемирный банк 262
- Глобалистика 249  
Голономность 210  
Гомеостаз 181, 300  
Градиент функции 45  
Граница области 22
- Детерминизм 11, 127  
Дивергенция поля 53  
Дисперсия 77, 79, 83  
Дифференциал 24, 25,  
Длина переменной дуги 38  
Доза 290, 293, 295
- Зависимость  
— доза-эффект 293, 295, 296, 302  
— мультипликативная 265
- Закон  
— взаимосвязи энтропии и времени 228  
— Гей-Люссака 102  
— Максвелла 157, 164  
— перехода количественных изменений в качественные 135, 136, 190, 218  
— распределения 76, 89, 164  
— сохранения энергии 189, 225, 242, 341  
— Шарля 102
- Закономерность  
— динамическая 129, 131, 157  
— статистическая 90, 128, 129, 130, 133
- Идеальный газ 101, 103, 110, 162, 336  
Изменение эволюционное 171  
Измерение 17, 172  
— абсолютное 173  
— относительное 173  
Изоморфизм 135  
Инвариантность дифференциала 26

- Индекс** 256  
 — человеческого развития 256  
 — абсолютный 266  
 — опасности 303, 307  
 — развития статистический 268  
 — развития эмпирический 266  
**Индетерминизм** 127  
**Индикатор** 256  
 — валового внутреннего продукта 258  
 — образования 256  
 — продолжительности жизни 256  
**Интеграл** поверхностный 50, 51, 52  
**Интегральная поверхность** 59  
**Интегрирующий делитель (множитель)** 64, 122, 208, 337, 347  
**Интеллектуальный анализ данных** 253  
**Интервал**  
 — пространственно-временной 373  
 — собственного времени 366  
**Испытание** 65
- Касательная** 31, 33  
**Качество** 275  
**Класс систем** 170, 379  
**Класс опасности** 297  
**Компонент** 94  
**Корреляционная функция** 83  
 — взаимная 85  
 — нормируемая 86
- Линия ветвления** 60  
 — мировая 384  
**Логит-анализ** 140
- Максимально неэффективная концентрация** 316  
**Математическое ожидание** 71, 83  
**Медиана** 77  
**Мера** 191, 226, 227, 235, 236, 331, 359  
 — вероятностная 68, 132, 176  
 — единица 17, 101  
 — пространства состояний 189, 227  
**Метод**  
 — аксиоматический 120  
 — ансамблей 117  
 — системодинамики 244  
 — термодинамики 273  
 — характеристик 221  
**Мода** 77  
**Модель** 109, 125, 128
- Наблюдение** 156, 170
- Направляющие косинусы** 34, 36, 41  
**Необратимость** 189, 196, 352  
**Нормаль** 32, 35
- Область**  
 — закрытая 22  
 — определения функции 16  
 — открытая 22  
**Огибающая** 39  
**Окружающая среда** 93, 171, 299  
**Опасный фактор** 300  
**Опыт**  
 — острый 139  
 — подострый 139  
 — хронический 139  
**Относительная частота события** 68  
**Оценка**  
 — комплексная 250  
 — стратегическая 260
- Парадокс**  
 — Гиббса 352  
 — теории относительности 356, 359  
**Параллелепипед**  
 —  $n$ -мерный 20  
**Параметр** 175, 177  
 — термодинамический 97  
**Параметрическое семейство** 41  
**Параметр** 166, 171, 172, 379  
**Паритет покупательной способности** 259  
**Переменная** 23  
 — атрибутивная 171  
 — зависимая 16  
 — независимая 16  
**Плоскость** 19  
**Поверхность** 32  
 — состояний 107  
 — уровня 45, 219  
**Показатель изоэнтропии** 120  
**Полный дифференциал** 24, 49, 122, 209, 332  
**Поле** 44  
 — векторное 47, 49, 234  
 — квазипотенциальное 49  
 — многомерное 44  
 — скалярное 44  
 — соленоидальное 55  
 — физическое 44, 47  
**Постоянная**  
 — Больцмана 165

- индивидуальная газовая 103, 313, 352
- индивидуальная токсическая 309, 311
- универсальная газовая 110
- универсальная токсическая 312
- Потенциал 44, 47, 49, 259
- Поток вектора 52, 54
- Поток событий 86, 87, 88, 178
  - без последействия 86
  - нестационарный 87
  - ординарный 88
  - Пальма 88
  - Пуассоновский 87
  - регулярный 88, 208
  - стационарный 86
- Предопределенность 127, 129
- Преобразование Лоренца 360
- Признак Эйлера 226, 330, 340
- Принцип
  - относительности 357, 372
  - соответственных состояний 109, 319
  - существования энтропии 224, 335, 341, 346
  - возрастания энтропии 242, 335, 349
- Приращение функции 23
  - частное 23
  - полное 24
- Пробит 138, 140, 279, 302, 314, 329, 333
- Пробит-анализ 138, 149, 213, 230, 363
- Пробит-регрессия 140
- Прогностика 249, 251
- Программа развития ООН 254, 261
- Производная 23
  - неявной функции 34
  - по направлению 45
  - сложной функции 25
  - частная 23, 24
- Пространство
  - абсолютное 174, 355
  - вероятностное 132, 175
  - $n$ -мерное 19, 20
  - событий 175
  - состояний системы 176, 267, 283, 344
  - фазовое 117
- Процесс
  - квазистатический 122, 334
  - квазистационарный 334
  - необратимый 11, 93
  - неравновесный 8, 94
  - обратимый 94
  - политропный 321
  - равновесный 94, 180, 334
  - третий принцип 171
  - термодинамический 334, 346, 354
  - токсический 289
- Пфаффова форма 64
- Работа 95, 96, 113
- Равновозможность 67, 152, 158, 355
- Радиус-вектор 31, 40, 42, 47
- Ранг развития 274
- Распределение
  - Вейбула 79, 89, 146, 147
  - вероятностное 80, 142
  - гамма 79, 146, 147, 148
  - логистическое 79, 139
  - логарифмически-нормальное 140, 147, 148
  - Максвелла 79, 157
  - нормальное 79, 157
  - Парето 146
  - Пуассона 79, 146, 157
  - равномерное 79
  - экспоненциальное 79
- Реализация случайного процесса 82
- Рейтинг 257, 262
- Риск 300, 301, 303, 330
- Свойство 170, 379
  - абсолютное 174
  - термометрическое 94
  - транзитивности 99, 137, 342
  - устойчивости частот 68, 137
- Симплекс 21
- Система 170, 379
  - адиабатная 97
  - идеальная токсикологическая 305
  - закрытая 97
  - замкнутая 97
  - квазистатическая 180
  - опасная 300
  - открытая 97
  - термодинамическая 93, 344
  - — гетерогенная 94
  - — гомогенная 94
  - хаотическая 356, 357
  - эволюционно развивающаяся 181, 189, 224
- Системодинамика 171, 242
  - второй постулат 189, 219, 224
  - второй принцип 171,
  - основное уравнение 238
  - первый постулат 98, 241
  - первый принцип 171
  - количество 181, 241, 341, 347

- Скаляр 40  
 Скалярное поле статистической вероятности 218  
 Скалярное произведение 42  
 Случайность 129  
 Случайный процесс 85, 180, 181  
 — стационарный 85, 181  
 Событие 65, 159, 167, 175  
 — достоверное 65  
 — невозможное 65  
 — сложное 66  
 — случайное 65  
 — элементарное 66  
 События 136, 164, 380  
 — зависимые 67, 71  
 — независимые 65, 75  
 — несовместные 66, 173  
 — произведение 69  
 — противоположные 70  
 — равновозможные 67, 173  
 — совместные 69  
 — сумма 69  
 Соотношение Больцмана 118, 224, 272  
 Состояние 168, 379  
 — координаты 55, 96  
 — неравновесное 93, 300  
 — равновероятное 93, 300  
 — равновесное 98, 180  
 — системы 303, 325, 341, 346  
 Среднесмертельная концентрация 314  
 Статистики 77  
 Статус 254  
 Степень свободы 96  
 Сфера  
 —  $n$ -мерная 22
- Температура 40, 98, 336, 343, 348  
 — абсолютная 115, 216, 226, 273, 313  
 — идеально-газовая 335, 340, 343  
 — эмпирическая 100, 162, 270, 343, 345  
 Темпоральность 219  
 Теорема  
 — сложения вероятностей 70  
 — умножения вероятностей 69, 70, 73  
 — центральная предельная 80  
 Теория относительности 357  
 Теплоемкость 110, 220, 312, 336, 343  
 — изобарная 356  
 — изохорная 356  
 Теплота 95, 114  
 — однозначная 17  
 — однородная 29, 220
- Термодинамика 10, 12, 91, 334, 391  
 — первый закон 91, 332, 350  
 — первый постулат 98, 326  
 — второй закон 91, 123, 228, 240, 332  
 — второй постулат 98  
 — третий закон 96  
 Термометр 99, 100, 103, 108, 109, 162  
 Токсикология 288, 289, 291, 299  
 Токсические проявления 290  
 — острые 290  
 — подострые 290  
 — хронические 290  
 Токсический вес 312, 316  
 Токсичность 289, 297  
 Точка  
 — мировая 372  
 —  $n$ -мерная мировая 372  
 — сгущения 22  
 Трансергия 227, 273
- Уравнение  
 — Ван-дер-Ваальса 103, 109, 110, 319  
 — квазилинейное в частных производных 202  
 — Клапейрона-Менделеева 110, 162, 309, 336  
 — Майера 226, 330, 340  
 — Максвелла 119, 331, 370  
 — состояния 109, 167, 304  
 — — вириальное 319  
 — — идеального газа 103, 104, 105, 109  
 — — калорическое 109  
 — — термическое 109  
 Условие  
 — полной интегрируемости 63  
 — статистической устойчивости 179, 202, 206  
 Условная вероятность 71, 73
- Формула Остроградского 53, 234  
 — полной вероятности 72  
 — Стокса 55, 234  
 — Эйлера 30  
 Функция 16, 144  
 — интегральная 74  
 — квазистатическая 180  
 —  $n$ -мерная 23  
 — многозначная 17  
 — нескольких переменных 18  
 — неявная 28  
 — международная практическая шкала температур 103

- плотности вероятности 76
- потенциальная 239
- процесса 95, 350
- распределения  $n$ -мерная 78
- сложная 25
- состояния 95, 227, 264, 268, 273, 341
- состояния системы 142, 175, 177, 348
- характеристическая 189

**Хаос** 356

**Характеристика** 58

**Цикл**

- Карно 350, 351
- к.п.д. 350, 351
- многомерный 350

**Циркуляция вектора** 47

**Шкала** 17, 166, 191, 217

- абсолютного времени 191, 213, 362
- абсолютного индекса 161, 183, 187
- идеально-газовая 103, 343
- интервалов 17, 106
- Кельвина 161
- международная температурная 101, 104

- опасности абсолютная 317
- опасности эмпирическая 317
- основная термодинамическая 101
- отношений 167, 172, 173
- порядка 167, 192
- системного времени 192, 197, 202
- стратиграфическая 192, 194
- Цельсия 161

**Энергия** 40, 95, 113, 165, 330, 348, 349

- внешняя 97
- внутренняя 97

**Энтальпия** 119

**Энтропия** 92, 111, 115, 121, 169, 193, 222, 227, 231, 241, 269, 326, 347, 390  
спектр линий 234

**Эргодическая гипотеза** 116

**Эффект** 171

- независимого действия 354
- неполной суммации 354
- потенцирования 354
- суммации 354
- токсический 289

**Явление** 65, 154



## ЛИТЕРАТУРА

1. Аверин Г.В. Об основаниях системодинамики // Збірник наук. праць: Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство. Донецьк: ДонНТУ, №1 (1), 2011. – С. 6 – 52.
2. Аверин Г.В. О фундаментальных основах системодинамики: опытные факты, методология, приложения // Интеллектуальный анализ информации, ИАИ-2011. – К.: НТУ «КПИ», 2011, С. 152 – 169.
3. Аверин Г.В. Фундаментальные модели в общей теории систем: закон перехода количественных изменений в качественные // Збірник наук. праць: Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство. Донецьк: ДонНТУ, №1(2) – 2(3), 2012. – С. 6 – 52.
4. Аверин Г.В., Звягинцева А.В., Аверин Е.Г. Методы системной динамики при анализе социально-экономического развития стран и регионов // Збірник наук. праць: Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство. Донецьк: ДонНТУ, №1(1), 2011. – С. 108 – 122.
5. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Математические модели опасности и риска в теории техногенной безопасности // Вісник Донецького університету. Сер. природн. наук. – № 2, 2005 – С. 296 – 302.
6. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Стратегическая оценка статуса Украины в современном мире по данным международных организаций. Часть 1: теория и методика оценки // Збірник наук. праць: Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство. Донецьк: ДонНТУ, №1(2) – 2(3), 2012. – С. 75 – 92.
7. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Применение методов интеллектуального анализа данных при оценке развития Украины // Сборник наук. трудов: Геотехническая механика. Днепропетровск: ИГТМ НАН Украины, вып. 112, 2013. – С. 257 – 269.
8. Аверин Г.В., Родригес А.Э., Звягинцева А.В. Направления развития информационных систем для анализа и прогнозирования глобальных процессов // Материалы 3-го Междунар. конгресса «Глобалистика – 2013». М.: МГУ, 2013. – С. 362 – 363.
9. Аксенов Г.П. К истории понятий дления и относительности. – Электр. ресурс, URL: [www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/aksyonov\\_spor\\_o\\_prirode.html](http://www.chronos.msu.ru/old/RREPORTS/aksyonov_spor_o_prirode.html) (5.01.14).
10. Александров А.А., Орлов К.А, Очков В.Ф. Теплофизические свойства рабочих веществ теплоэнергетики. – М.: МЭИ, 2009. – 224 с.
11. Анохин П.К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. – Электр. ресурс, URL: [www.galactic.org.ua/prostranstv/anohin-7-1.htm](http://www.galactic.org.ua/prostranstv/anohin-7-1.htm) (23.10.11).
12. Астрометрические звездные каталоги. – Электр. ресурс, URL: [www.astro.spbu.ru/](http://www.astro.spbu.ru/) (02.06.11).

13. Афанасьева-Эренфест Т.А. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики // Журн. прикл. физики, т. 5, 1928, вып. 3 – 4. – С. 3 – 30.
14. База данных Всемирного банка. – Электр. ресурс. URL: [www.worldbank.org/data/icp](http://www.worldbank.org/data/icp) (15.10.2009).
15. База данных ДРЧ. – Электр. ресурс. URL: [http://hdr.undp.org/reports/view\\_reports.cfm](http://hdr.undp.org/reports/view_reports.cfm) (11.10.11).
16. Базаров И.П. Термодинамика. – Изд-е 4-е. – М.: Высшая школа, 1991. – 376 с.
17. Бергсон А. Длительность и одновременность (по поводу теории Эйнштейна). – Пг.: Академия, 1923. – 154 с.
18. Берталанфи Л. Общая теория систем. Критический обзор // General Systems, Vol. VIII, 1962. – Р. 1 – 20.
19. Борн М. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1964. – С. 223 – 256.
20. Боровиков В.П., Ивченко Г.И. Прогнозирование в системе Statistica в среде Windows. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 384 с.
21. Венгеров И.Р. Хроноартефакты термодинамики. – Донецк: Норд-пресс, 2005. – 235 с.
22. Вентцель Е.С. Теория вероятности. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
23. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.
24. Вернадский В.И. Проблема Времени, Пространства и Симметрии. – Электр. архив В.И. Вернадского. – Электр. ресурс URL: <http://vernadsky.lib.ru/> (04.01.14).
25. Вредные химические вещества. Неорганические соединения элементов V-VIII групп. Справочник / Под ред. Филова В.А. – Л.: Химия, 1989. – 592 с.
26. Временные методические указания по обоснованию предельно допустимых концентраций (ПДК) загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест. – М.: Минздрав СССР, 1989. – 110 с.
27. Гейтс Б. Бизнес со скоростью мысли / Изд. 2-е, исправл. – М.: ЭКСМО-Пресс, 2001. – 480 с.
28. Гельфер М. История и методология термодинамики и статистической физики / Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1981. – 536 с.
29. Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. Серия: Классики науки. – М.: Наука, 1982. – 584 с.
30. Гоманьков А.В. Геологическое время и его измерение. – Электр. ресурс URL: [www.chronos.msu.ru/ru/relectropublications](http://www.chronos.msu.ru/ru/relectropublications) (04.01.14).
31. Гухман А.А. Об основаниях термодинамики. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 383 с.
32. Дойч Д. Структура реальности / Пер. с англ. Зубченко Н.А. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

33. Доклад “Живая планета” / Всемирный фонд дикой природы. Пер. с англ. 2006, 2008, 2010, 2012. – Электр. ресурс URL: [www.wwf.ru/resources/publ/book/436](http://www.wwf.ru/resources/publ/book/436); [www.wwf.ru/resources/publ/book/584](http://www.wwf.ru/resources/publ/book/584) (10.11.12).
34. Доклад о развитии человека 2006. Что кроется за нехваткой воды: Власть, бедность, глобальный кризис водных ресурсов / Пер. с англ. – М.: Весь мир, 2006. – 440 с.
35. Доклад о человеческом развитии 2013. Возвышение Юга: человеческий прогресс в многообразном мире. – Электр. ресурс URL: [http://hdr.undp.org/en/media/HDR\\_2011\\_RU\\_Complete.pdf](http://hdr.undp.org/en/media/HDR_2011_RU_Complete.pdf) (15.11.2013).
36. Доклады о человеческом развитии (1990 – 2013 гг.). – Электр. ресурс URL: <http://hdr.undp.org/en/reports/> (25.11.2012).
37. Дрибан В.М., Пенина Г.Г. Теория вероятностей. – Донецк: ДонГУЭТ, 2003. – 519 с.
38. Животные / Под ред. Д. Берни. – М.: Астрель, 2008. – 624 с.
39. Завельский Ф.С. Время и его измерение. – М.: Наука, 1987. – 256с.
40. Защита окружающей среды Европы. Четвертая оценка / Пер. с англ. – Копенгаген: ЕАОС, 2007. – 451 с.
41. Звягинцева А.В., Аверин Г.В. Построение уравнений состояний сложных токсикологических систем // Збірник наук. праць: Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство. Донецьк: ДонНТУ, № 1(1), 2011. – С. 57 – 70.
42. Звягинцева А.В., Аверин Е.Г. Донецкая область в мировых координатах развития человеческого потенциала // Збірник наук. праць: Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство. Донецьк: ДонНТУ, № 1(1), 2011. – С. 82 – 93.
43. Згуровский М.З. Глобальное моделирование процессов устойчивого развития в контексте качества и безопасности жизни людей (2005 – 2007/2008 годы). – К.: Политехника, 2008. – 331 с.
44. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. – М.: Иностранная литература, 1955. – 482 с.
45. Институт исследований природы времени. Каталог библиотеки семинара. – Электр. ресурс URL: [www.chronos.msu.ru/seminar/rcatalog\\_Access.html](http://www.chronos.msu.ru/seminar/rcatalog_Access.html) (12.12.13).
46. Институт исследований природы времени. Библиотека электронных публикаций. – Электр. ресурс URL: [www.chronos.msu.ru/relectropublications.html](http://www.chronos.msu.ru/relectropublications.html) (12.12.13).
47. Капица П.Л. Эксперимент, теория, практика. – М.: Наука, 1981. – 495 с.
48. Каратеодори К. К аксиоматике специальной теории относительности. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1964. – С. 167 – 187.
49. Каратеодори К. Об основах термодинамики. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1964. – С. 188 – 222.
50. Кирилин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. – М.: Энергия, 1974. – 448 с.
51. Коганов А.В. Реферативный обзор семестра «Время и энтропия»

- семинара «Изучение феномена времени». – Электр. ресурс URL: [www.chronos.msu.ru/seminar/rindex.html](http://www.chronos.msu.ru/seminar/rindex.html) (27.10.11).
52. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 119 с.
53. Костицын В.А. Эволюция атмосферы, биосферы и климата / Пер. с франц. – М.: Наука, 1984. – 96 с.
54. Кошляков И.С. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Вища школа, 1970. – 712 с.
55. Красс М.С. Моделирование эколого-экономических систем. – М.: ИНФРА-М, 2010. – 272 с.
56. Критерии оценки экологической обстановки территорий для выявления зон чрезвычайной экологической ситуации и зон экологического бедствия / Утвержд. приказом Минприроды РФ от 30.11.1992.
57. Кун Т. Структура научных революций / Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1977. – 300 с.
58. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Еругин Н.П., Штокало И.З и др. – К.: Вища школа, 1974. – 472 с.
59. Куценко С.А. Основы токсикологии. – СПб: Военно-медицинская академия им. С.М. Кирова, 2002. – 395 с.
60. Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. Парадокс Гиббса // Успехи физических наук, том 105, вып. 2, 1971. – С. 353 – 359.
61. Марк А. О случайных и детерминированных событиях. – Электр. ресурс URL: [http://samlib.ru/a/alesker\\_m/sluch\\_detern.shtml#2n](http://samlib.ru/a/alesker_m/sluch_detern.shtml#2n) (4.01.14).
62. Маршал В. Основные опасности химических производств. – М.: Мир, 1989. – 672 с.
63. Международная организация CEIP. – Эл. ресурс, URL: [www.atkearney.com](http://www.atkearney.com) (20.06.2010).
64. Математическая энциклопедия / Под ред. И.М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, т. 1 – 5, 1984.
65. Мауринь А.М. Концепция органического времени Г. Бакмана и опыт ее применения. – В кн.: Конструкции времени в естествознании: на пути к пониманию феномена времени. – М.: МГУ, 1996. – С. 83 – 95.
66. Методика вимірювання людського розвитку регіонів України. – К: НАНУ, 2001. – 36 с.
67. Методика оценки последствий аварийных выбросов опасных веществ. Методика «Токси», редакция 3.1.
68. Методика оценки эффективности деятельности органов исполнительной власти субъектов Российской Федерации / Утвержд. постановлением Правительства РФ от 15 апреля 2009 г. № 322.
69. Методологические основы прогнозирования научно-технологического развития России до 2030 г. с использованием критериев стратегических рисков / Координационный совет РАН по прогнозированию, 2009. – 27 с.
70. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. – М.: Высшая школа, 1967. – 655 с.

71. Основы оценки риска для здоровья населения при воздействии химических веществ, загрязняющих окружающую среду / Онищенко Г.Г. и др. – М.: НИИЭЧ, 2002. – 408 с.
72. Пайерлс Р. Сюрпризы в теоретической физике / Пер. с англ. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
73. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 92 с.
74. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1986. – 285 с.
75. Пригожин И. Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы / Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 208 с.
76. Пригожин И. От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках / Пер. с англ. – М.: Наука, 1985. – 328 с.
77. Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. К решению парадокса времени / Пер. с англ., Изд. 5-е испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 240 с.
78. Прогнозирование будущего. Новая парадигма / Под ред. Фетисова Г.Г. и Бондаренко В.М. – М.: Экономика, 2008. – 283 с.
79. Прогностика. Общие понятия. Объект и аппарат прогнозирования. Терминология. – М.: Наука, 1978. – 32 с.
80. Пуанкаре А. О науке / Пер. с франц. – М.: Наука, 1983. – 560 с.
81. Путилов К.А. Термодинамика. – М.: Наука, 1971. – 375 с.
82. Пфанцагль И. Теория измерений. – М.: Мир, 1976. – 248 с.
83. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей / Пер. с англ., 3-е изд. – Л.: Химия, 1982. – 592 с.
84. Робертс Д. Теплота и термодинамика / Пер. с англ. под ред. Вукаловича М.П. – М.: Изд. технико-теор. литературы, 1950. – 592 с.
85. Руководящие указания по применению экологических показателей в странах восточной Европы, Кавказа и Центральной Азии. – ООН, Нью-Йорк – Женева, 2007. – 110 с.
86. Садовский В.Н. Основания общей теории систем. – М.: Наука, 1974. – 280 с.
87. Саноцкий И.В., Уланова И.П. Критерии вредности в гигиене и токсикологии при оценке опасности химических соединений. – М.: Медицина, 1975. – 328 с.
88. Сафонов В.С., Одишария Г.Э., Швыряев А.А. Теория и практика анализа риска в газовой промышленности. – М.: Олита, 1996. – 208 с.
89. Система количественного и качественного измерения глобализации. – Электр. ресурс. URL: [www.kof.ch/globalization](http://www.kof.ch/globalization) (10.06.2010).
90. Система Climate Wikience, <http://wikience.donntu.edu.ua/>, <http://csm.donntu.edu.ua/ru/research/projects> (4.01.2014).
91. Справочное пособие по экологической оценке. Том 1 – 3. – World Bank, Washington, 1991.
92. Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики. – М.:

- Высшая школа, 1991. – 214 с.
93. Сычев В.В. Сложные термодинамические системы – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 208 с.
  94. Тейлор Э.Ф., Уиллер Дж. А. Физика пространства-времени. – М.: Мир, 1971. – 320 с.
  95. Терлецкий Я.П. Парадоксы теории относительности. – М.: Наука, 1966. – 120 с.
  96. Техническая термодинамика / Под ред. В.И. Крутова, 3-е изд-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1991. – 406 с.
  97. Фейнман Р., Лейтон Р. Фейнмановские лекции по физике. Кинетика. Теплота. Звук. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 268 с.
  98. Философский словарь / Под ред. Фролова И.Т. – М.: Политиздат, 1989. – 444 с.
  99. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Изд. 7-е. – М.: Наука, том 1 – 3, 1969.
  100. Франкфурт У. К истории аксиоматики термодинамики. – В кн.: Развитие совр. физики: Пер. с нем. – М.: Наука, 1964. – С. 257 – 292.
  101. Хазен А.М. Разум природы и разум человека. – М.: Мооблполиграфиздат, 2000. – 577 с.
  102. Хокинг С. От большого взрыва до черных дыр. Краткая история времени / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 168 с.
  103. Шамбадаль П. Развитие и приложение понятия энтропии. – М.: Наука, 1967. – 280 с.
  104. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
  105. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности. – Пг.: Научное книгоиздательство, 1923. – 123 с.
  106. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. – М.: Иностранная литература, 1955. – 160 с.
  107. Averin G.V., Rodrigues Zalipynis R.A. Discovery of synoptic patterns of climate variability and change using data mining and high performance computing / DonNTU, 2012. – Электр. ресурс. URL: [http://wikienc.donntu.edu.ua/rodrigues/publications/rodrigues\\_CRDF\\_2012.pptx](http://wikienc.e.donntu.edu.ua/rodrigues/publications/rodrigues_CRDF_2012.pptx) (23.01.12).
  108. AnAge: The Animal Ageing and Longevity Database. – Электр. ресурс. URL: <http://genomics.senescence.info/species/> (25.02.11).
  109. Bliss C. The method of probits // Science 79(2037), 1934.– P. 38–39.
  110. Cohen I. The Probabilistic Revolution. – Cambr., Mass.: MIT, 1990.
  111. Computer-Aided Thermodynamic Tables 3 / CATT 3.
  112. David E. Harrison et al. Rapamycin fed late in life extends lifespan in genetically heterogeneous mice // Nature (16 July 2009). V. 460. P. 392 – 395. Doi:10.1038/nature 08221.
  113. Gyarmati I. On the Fundamentals of Thermodynamics. – Acta Chim. Hung., 30, 147, 1962.
  114. Eddington A. The Nature of the Physical World. – Ann. Arbor: University of Michigan Press, 1958.

115. Environmental Indicators for Agriculture: Methods and Results. – OECD, Vol. 3, 2001.
116. Environmental Health Indicators: Framework and Methodologies / Prepared by D. Briggs, Occupational and Environmental Health. – WHO, 1999.
117. European Green City Index. – Эл. ресурс, URL: [www.siemens.com/greencityindex](http://www.siemens.com/greencityindex) (20.11.2013).
118. Hanneman R. and Hollingsworth J.R. Modeling and Simulation in Historical Inquiry // Historical Methods. Summer 1984. Vol. 17. № 3.
119. Hanneman R. Computer-assisted theory building. Modeling dynamic social systems. – SAGE. N.Y., 1988.
120. Falk G. Die Rolle der Axiomatik in der Physik, erläutert am Beispiel der Thermodynamik // Die naturwissenschaften, 46, 1959, № 16. – P. 480 – 486.
121. Indicators of Sustainable Development: Framework and Methodologies. – United Nations, New York, 1996.
122. Indicators of Sustainable Development: Guidelines and Methodologies. – United Nations, New York, 2001.
123. International Commission on Stratigraphy. – Электр. ресурс. URL: <http://stratigraphy.org>
124. M. Kac & J. Logan, in Fluctuation Phenomena, eds. E.W. Montroll & J.L. Lebowitz, North-Holland, Amsterdam, 1976.
125. Landsberg P.T. Main Ideas in the Axiomatics of Thermodynamics // Pure and Appl. Chem., 22, 215, 1970.
126. Landsberg P.T. On Suggested Simplification of Caratheodory's Thermodynamics // Phys. Stat. Solidi, 1, 120, 1961.
127. Mercer Human Resource Consulting. – Электр. ресурс, URL: [www.mercerhr.com/](http://www.mercerhr.com/)
128. Morowitz H. J. The Second Law of Thermodynamics. – Электр. ресурс, URL: [www.panspermia.com/seconlaw.htm](http://www.panspermia.com/seconlaw.htm) (26.02.09).
129. Nelson E., Quantum Fluctuations. – Princeton: Princeton University Press, 1985.
130. The Blacksmith Institute. – Электр. ресурс, URL: [www.smithbucklin.com/smithinstitute/](http://www.smithbucklin.com/smithinstitute/)
131. Sears F.W. Simplified Simplification of Caratheodory's Treatment Thermodynamics // Am. J. Phys., 41, 2979, 1964.
132. Snow C.P. Two Cultures and the Scientific Revolution. – Cambridge: Cambridge University Press, 1959.
133. Zemansky M.W. Kelvin and Caratheodory – a Reconciliation // Am. J. Phys., 22, 371, 1970.
134. Wehrle P. L'Univers aleatoire. – Paris: Dunod, 1956.
135. World Development Indicators (issued annually). World Bank. – Электр. ресурс, URL: [www.worldbank.org/](http://www.worldbank.org/) (10.03.10).