УДК 519.6

AnalySys — пакет программ численного анализа динамических систем

Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю.
Донецкий национальный технический университет,
belovodskiy@cs.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Belovodskiy V.N., Suhorukov M.I. "AnalySys – a program package of numerical analysis of dynamical systems" *It is described the software oriented for analysis of some specific problems of dynamical systems. It structure and some algorithms are described.*
Key words: dynamical system, numerical analysis, stability, periodic regime, basin of attraction, Matlab.

Введение

Новые исследования в науке и технике нередко связаны с анализом динамических систем и не обходятся без серьёзных математических расчётов. Традиционное стремление к их облегчению, в настоящее время, базируется на широких возможностях современных пакетов прикладных программ. К числу известных и достаточно распространённых относятся, так называемые, интегрированные системы MathCAD, Matlab, Mathematica, Maple и др. Одной из наиболее развитых, как в математическом отношении, так и в части графического сопровождения, является система Matlab [1]. Это проработанная и проверенная временем система, построена на расширенном представлении и использовании матричных операций и формирует тот фундамент, на базе которого можно создавать инструменты для решения специальных задач анализа динамических систем. К числу таких задач можно отнести вопросы устойчивости и нахождение областей притяжения стационарных режимов, построение фазовых портретов или их фрагментов, реализация последних достижений качественной теории дифференциальных уравнений. Известны пакеты аналогичной направленности [2-4], однако широта рассматриваемой области и постоянно развивающийся математический аппарат оставляют данное направление вполне актуальным.

Разрабатываемое и описываемое ниже приложение Matlab, называемое AnalySys (Analysis of the Systems), направлено на исследование отдельных классов нелинейных систем и является развитием дипломного проекта одного из авторов. К настоящему времени разработан ряд его модулей. При формировании структуры приложения авторы исходили и продолжают исходить, как из стремления автоматизации решения отдельных задач анализа динамических систем, так и потребностей читаемых учебных курсов по нелинейной динамике.

Целью данной статьи является описание структуры приложения, сформировавшейся к настоящему времени и изложение результатов разработки его отдельных модулей.

Структура приложения

Представлена на рис. 1. Условно приложение включает в себя следующие модули:

1. Базовые системы нелинейной динамики.
2. Линейные динамические системы с периодическими коэффициентами.
3. Произвольные динамические системы.

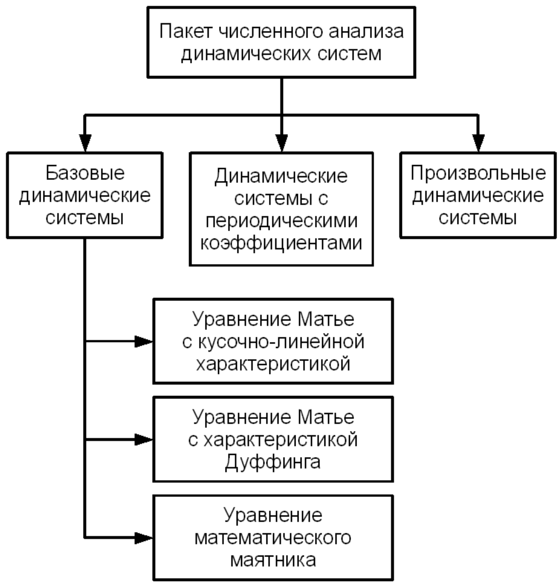

Рисунок 1 — Структура приложения

В первый модуль пока включены уравнения Матье с различными характеристиками восстанавливающих сил. Предусмотрено наличие в них и внешнего возбуждения.

Второй модуль предназначен для анализа линейных систем с периодическими коэффициентами. Он позволяет проводить численное решение соответствующих систем дифференциальных уравнений, на основе теории Флоке-Ляпунова строить их решения в виде рядов Фурье, определять мультипликаторы системы и на базе этого делать суждения об устойчивости их тривиальных решений.

Третий модуль дает возможность пользователю самостоятельно осуществлять набор систем дифференциальных уравнений и выполнять с ними базовые процедуры, — численное интегрирование и построение фазовых траекторий или их проекций. Кроме этого, модуль позволяет проводить построение областей притяжения периодических режимов.

Модули приложения

Новые явления в поведении нелинейных динамических систем нередко обнаруживаются и изучаются на простейших моделях. Для этого достаточно вспомнить, например, историю открытия и исследования сложных резонансов и хаотических движений. С целью облегчения этого процесса, а также, для обеспечения возможности оперативной демонстрации тех или иных особенностей, в первый модуль включены, ставшие уже классическими, следующие модели: уравнение Матье с плавной и кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы, допускающем наличие и смешанного возбуждения, а также уравнение, описывающее колебания математического маятника. Второй модуль помогает проводить исследование устойчивости периодических режимов нелинейных систем по первому приближению. Третий модуль позволяет пользователю проводить набор произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и выполнять комплекс указанных выше базовых исследований.

Модуль «Базовые системы нелинейной динамики». В этот модуль включены системы, описываемые уравнениями

1. $$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_0^2\left(a-2\mu\cos\omega_1 t\right)x+ +\frac{1}{2}k_1\left[(x-\Delta)+|x-\Delta|\right]+\frac{1}{2}k_2\left[(x+1)-|x+1|\right]= =p_0+p\cos(\omega_2 t-\varphi);$$
2. $$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_0^2\left(a-2\mu\cos\omega_1 t\right)x+\gamma x^2+\delta x^3= =p_0+p\cos(\omega_2 t-\varphi);$$
3. $$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega_0^2\left(a-2\mu\cos\omega t\right)\sin x=0.$$

и охватывает круг систем с параметрическим, силовым или смешанным возбуждением. Пользователь имеет возможность:

– устанавливать значения коэффициентов уравнения и задавать начальные условия;

– выбирать режим исследования (интегрирование и построение фазовых траекторий или их проекций);

– задавать шаг, промежуток интегрирования и выбирать метод решения из числа входящих в обеспечение MATLAB.

Соответствующие диалоговые окна этого модуля представлены на рис. 2.

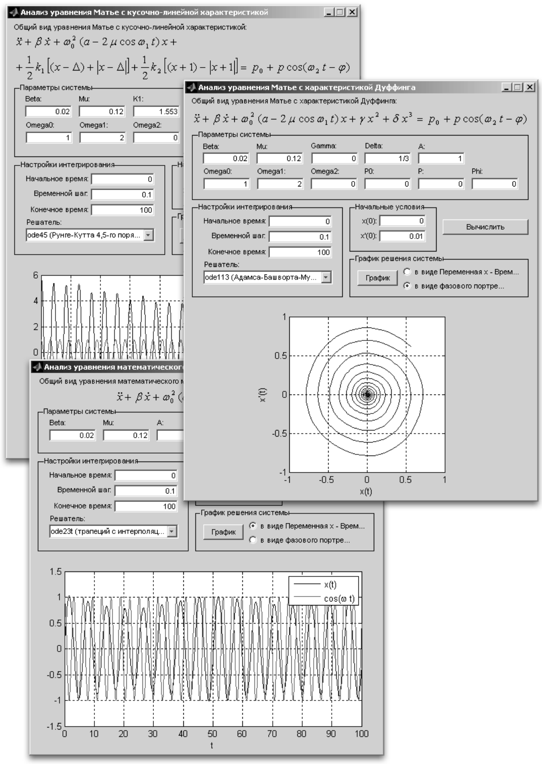

Рисунок 2 — Численный анализ базовых моделей

Модуль «Линейные динамические системы с периодическими коэффициентами». В данном модуле система линейных дифференциальных уравнений задаётся в виде

$$x=A(t)x, \qquad (1)$$

где $A(t+T)=A(t)$, $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{nn}$, $x=(x_1,\dots x_n)'$, $'$ — обозначает операцию транспонирования. Матрица $X(t)$ порядка $n\times n$, состоящая из линейно независимых решений системы (1) и удовлетворяющая условию

$$X(0)=E,$$

где E, — единичная матрица, называется матрицантом системы. Значение матрицанта в момент $t=T$, т.е. матрица $X(T)$, называется матрицей монодромии системы. Собственные значения $\rho_1,\dots\rho_n$ матрицы $X(T)$ называются мультипликаторами системы. Они имеют определяющее влияние на характер устойчивости тривиального решения системы. А именно, если все $|\rho_i|<1$, то оно является асимптотически устойчивым, если, по крайней мере, один из мультипликаторов по модулю больше единицы, — то неустойчиво. При наличии матрицанта произвольное решение $x(t)$ системы можно представить в виде:

$$x(t) = X(t)\,x_0,$$

где x_0, — вектор начальных условий.

В целом модуль предоставляет следующие возможности:

1. ввод коэффициентов матрицы $A(t)$;
2. построение матрицы монодромии $X(T)$;
3. нахождение мультипликаторов системы, их графическое отображение относительно единичной окружности, построение графической зависимости мультипликаторов от одного из указанных параметров системы;
4. вычисление матрицанта, визуализация его отдельных решений;
5. построение матрицанта в виде «ряда», получение матричных коэффициентов A_n, B_n разложения, сравнительный анализ этого разложения с результатом численного нахождения $X(t)$, его визуализация.

Отметим, что порядок рассматриваемой системы ограничивается ресурсами компьютера. Возможности по управлению вычислительным процессом в части выбора шага дискретизации и интегрирующего решателя здесь также сохраняется.

Диалоговые окна пользователя демонстрируются на рис. 3, 4.

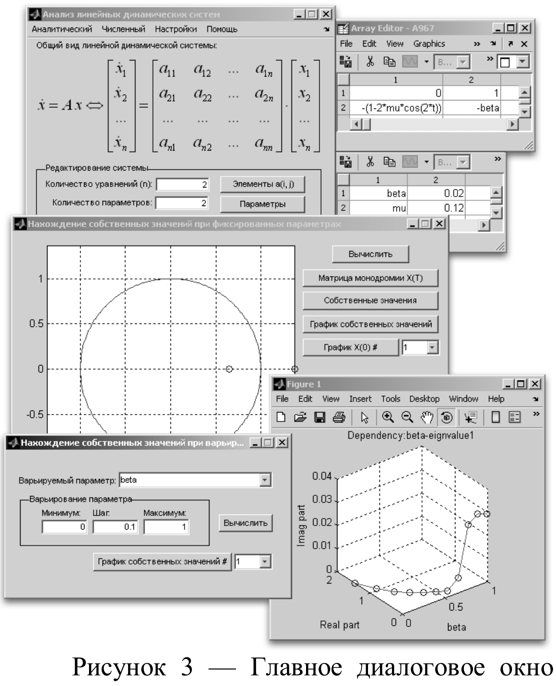

Рисунок 3 — Главное диалоговое окно модуля, расчёты мультипликаторов

Модуль «Произвольные динамические системы». Позволяет выполнять базовые операции (численное интегрирование, построение и визуализация фазовых траекторий или их проекций) над системами дифференциальных уравнений, вводимых пользователем. Модуль разработан на базе пакета TOOLBOX MATDS [2, 3] с адаптацией к пакету AnalySys и переработкой интерфейса. Не были адаптированы такие возможности MATDS как построение отображения Пуанкаре и определение показателей Ляпунова. Диалоговое окно модуля и пример расчета представлены на рис. 5.

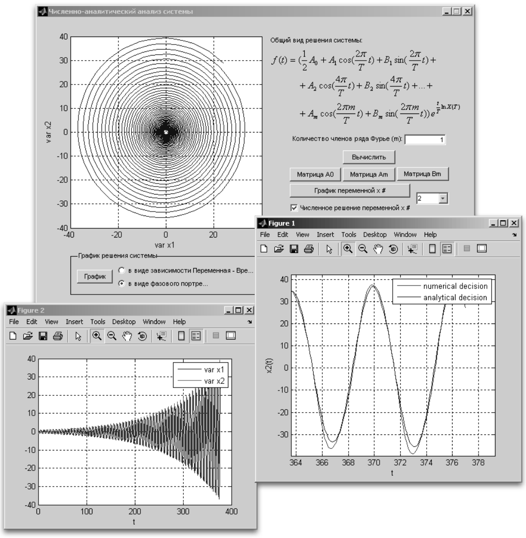

Рисунок 4 — Построение матрицанта, визуализация составляющих его решений

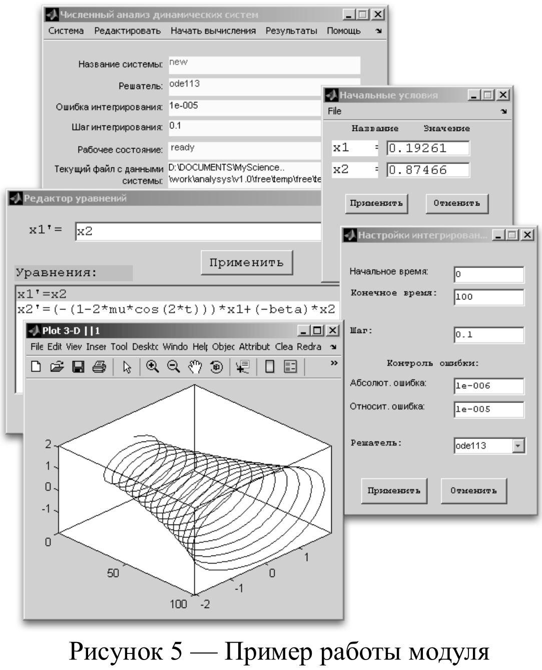

Рисунок 5 — Пример работы модуля

Построение областей притяжения периодических режимов

Построение областей притяжения является одной из важных задач теории динамических систем. Существует ряд подходов в этом направлении, к числу основных можно отнести следующие [6, 7]. Устанавливается спектр периодических режимов при данных соотношениях параметров, выделяются неустойчивые из них и после перехода в исходной системе к «отрицательному» времени с использованием отображения Пуанкаре определяются сепаратрисы, проходящие через неустойчивые неподвижные точки, которые, по существу, и делят пространство начальных условий на ряд зон, — областей притяжения. Другой подход ориентирован на предварительном сведении первоначально неавтономной системы к автономной с использованием метода медленно меняющихся амплитуд (Ван-дер-Поля, усреднения), выделения её неподвижных седловых точек и последующего построения сепаратрисных кривых. Однако следует отметить, что достаточно объемлющая информация о стационарных режимах нередко отсутствует или имеются сомнения в её полноте, а требования в части используемых методов могут оказаться обременительными. Более естественной представляется такая постановка задачи: известен отдельный периодический режим и необходимо определить его область притяжения или, по крайней мере, оценить запас устойчивости. И представляется целесообразной следующая последовательность её решения, ориентированная на использование вычислительной техники.

Проводится анализ устойчивости данного периодического режима в первом приближении. Если режим неустойчив, то исследование, по существу, исчерпано, о чем и формируется соответствующее сообщение. Если же режим устойчив, то в фазовом пространстве задаётся неподвижная точка, соответствующая исследуемому режиму, и зона поиска начальных условий, принадлежащих области притяжения. После этого производится сканирование этой зоны с заданным шагом и численное интегрирование соответствующей системы дифференциальных уравнений. Сходимость численного решения к исследуемому режиму устанавливается по параллельно вычисляемому спектральному составу или по сходимости последовательности контрольных точек, генерируемых отображением Пуанкаре, к неподвижной точке.

Анализ устойчивости может быть выполнен в автоматизированном режиме на базе теории Флоке-Ляпунова путём построения матрицы монодромии и нахождения мультипликаторов для уравнения в вариациях, а глобальное сканирование зоны поиска в перспективе, может быть заменено более экономными процедурами построения границ с использованием методов интерполяции.

Программа, реализующая сформулированные предложения организована следующим образом.

Задаётся система дифференциальных уравнений и назначается метод её интегрирования, указывается гармонический состав исследуемого режима и его период T. Задаётся промежуток интегрирования $[t_0; t_0 + NT]$, число NP, где $h = \dfrac{T}{NP}$ — шаг интегрирования, начальная точка в фазовом пространстве или в его сечении (неподвижная точка), область сканирования в виде прямоугольника, с центром в неподвижной точке, шаг сканирования и допустимые погрешности δ_1 и δ_2. Первая из них контролирует момент установления режима, вторая, — представляет собой критерий идентичности сравниваемых гармонических составов.

Алгоритм анализа области сканирования работает следующим образом. Производится выбор пробной (начальной) точки из заданной зоны сканирования и выбор метода интегрирования системы дифференциальных уравнений. После чего система уравнений решается заданным методом и с заданным шагом. Параллельно проводится спектральный анализ численного решения на каждом промежутке равным периоду T до тех пор, пока «соседние» разложения по норме будут отличаться не более чем на заданное отклонение δ_1, т.е. пока не произойдёт завершение переходного процесса при численном решении дифференциального уравнения.

После этого производится сравнение последнего полученного спектрального состава с заданным. Если составы отличаются по норме не более, чем на величину δ_2, то выбранная начальная точка принадлежит области притяжения заданного режима. В качестве нормы здесь выбран один из вариантов $p-$нормы, а именно, $p = \infty$, т.е., $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Алгоритм повторяется для следующей начальной точки из зоны сканирования.

После анализа всех точек зоны сканирования они выводятся на фазовую плоскость с пометкой (например, цветом) какой области притяжения принадлежит каждая точка. Так можно получить графическое преставление о существующих, для данной динамической системы, областях притяжения.

На рис. 6 в качестве иллюстрации приводятся области притяжения, построенные для резонансных решений уравнения

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos t$$

при $k = 0{,}2$, $B = 0{,}3$ с использованием данного метода. Режимы x_1 и x_3, помеченные цифрами 1, 3, устойчивы и имеют вид [6]

$$x_1 = 0{,}067\sin t - 0{,}310\cos t + 0{,}001\sin 3t - 0{,}001\cos 3t,$$

$$x_3 = 0{,}988\sin t + 0{,}684\cos t + 0{,}021\sin 3t - 0{,}061\cos 3t,$$

режим

$$x_2 = 0{,}671\sin t - 0{,}744\cos t + 0{,}026\sin 3t + 0{,}022\cos 3t$$

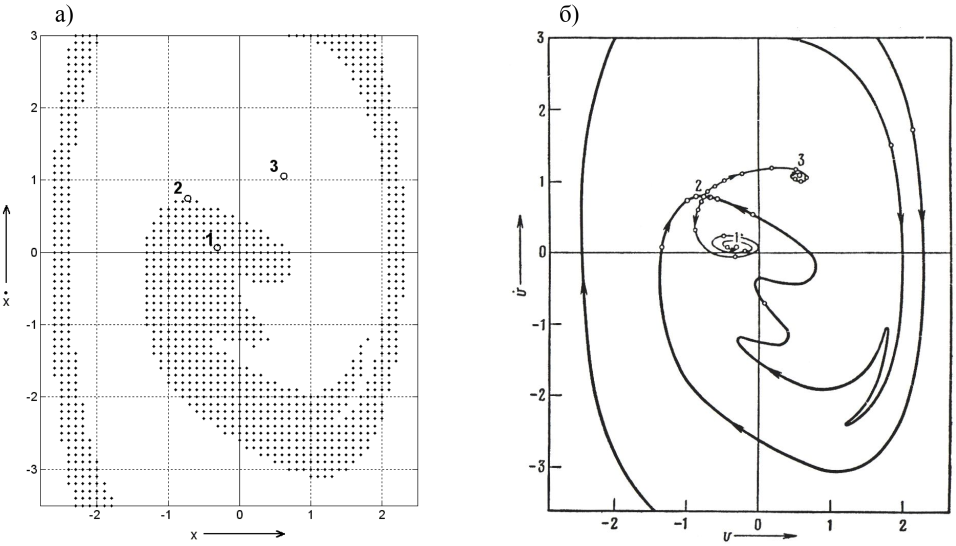

Рисунок 6 — Пример построения области притяжения: а) с использованием предложенной методики; б) заимствованный из [6]

неустойчив. Были приняты следующие настройки программы: метод интегрирования — ode45 (Рунге-Кутта 4-5-го порядка), $T = 2\pi$, $t_0 = 0$, $NT = 120$, $NP = 60$, неподвижная точка — $(-0{,}311; 0{,}069)$, область сканирования — $\left(x = \overline{-2{,}8\,..\,2{,}5};\quad \dot{x} = \overline{-3{,}5\,..\,3{,}0}\right)$, шаг сканирования равный 0,1, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}01$. Там же, для сравнения, показана область, заимствованная из [6] и построенная по описанной выше методике, — путём построения сепаратрис с использованием отрицательного времени.

Заключение

К настоящему времени разработан модуль, содержащий комплект типовых моделей нелинейной динамики, а также модули анализа устойчивости, реализующие теорию Флоке-Ляпунова и один из алгоритмов построения областей притяжения. Разработка пакета продолжается. Однако в силу автономности составляющих его частей он активно используется в учебных целях при проведении исследований. Безусловно, авторы заинтересованы в контактах, как с разработчиками аналогичных продуктов, так и с потенциальными потребителями.

Литература

1. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis. – http://www.scientificweb.com/ncrunch. – München, Germany, 2004. – 40 p.
2. Говорухин В.Н. TOOLBOX MATDS для численного анализа динамических систем. – Труды Второй Всероссийской научной конференции «Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB». – М.: ИПУ РАН, 2004, с. 522-525.
3. MATDS – MATLAB based program for dynamical systems investigation. – http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/index_ru.htm.
4. Zakrzhevsky M., Ivanov Y., Frolov V. NLO: Universal Software for Global Analysis of Nonlinear Dynamics and Chaos // Proceeding of the 2nd European Nonlinear Oscillations Conference. Prague, 1996. – p. 261-264.
5. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. – 720 с.
6. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
7. Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. – М.: Мир, 1973. – 336 с.