УДК 51-74

Ю.Н. Добровольский, ст. преподаватель.
Донецкий национальный технический университет

Расширение группы методов поиска аналитического решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта)

Предложена новая серия аналитических методов для решения задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде. Приведены теоретические сведения и практические аспекты применения методов.

Ключевые слова: метод обобщенного и функционального разделения переменных, метод расщепления: решение в виде функции сложного аргумента линейного относительно аргумента x, квадратичного относительно аргумента x, решение в виде функции зависящей от параметра ξ, линейного относительно аргумента x и t.

Введение

В работе [1] предложено пять аналитических методов: простейший метод разделения переменных, поиск решения в неявном виде, поиск решения в виде квадратичной функции относительно аргумента x, поиск решения путем дифференцирования, поиск решения в параметрической форме.

В данной статье предлагается общий подход к поиску аналитических методов для решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде.

Идея всех методов состоит в следующем:

а) данное дифференциальное уравнение в частных производных рассматривается как функционально-дифференциальное равенство, переменные в котором разделены;

б) вводятся произвольные функции, зависящие от одного и того же аргумента, остальные функции линейно определяются через введенные так, чтобы они удовлетворяли данному функциональному равенству. После этого задача разбивается на более простые, что в конечном итоге приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретические основы для разработки аналитических методов решения системы дифференциальных уравнений параболического типа

Методы обобщенного разделения переменных

Структура решений с обобщенным разделением переменных

Определение1. Система функций $\boldsymbol{\varphi_i(x)}$, $\boldsymbol{i=1 \div n}$, называется линейно независимой на некотором множестве **X**, если из того, что их линейная комбинация равна нулю следует, что все $\boldsymbol{C_i=0}$

$\boldsymbol{C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)=0 \rightarrow C_1=C_2=\ldots=C_n=0}$, в противном случае система функций линейно зависима.

Определение2. Дифференциальной формой $\boldsymbol{\Pi_i(u)}$ называется выражение, представляющее собой произведения целых неотрицательных степеней функции **u** и ее частных производных $\boldsymbol{\partial_x u, \partial_t u, \partial_{xx} u, \partial_{xt} u, \partial_{tt} u, \partial_{xxx} u, \ldots}$,.

Линейные уравнения математической физики с разделяющимися переменными допускают точные решения в виде сумм

$u(x,t)=\varphi_1(x)\psi_1(t)+\varphi_2(x)\psi_2(t)+\cdots+\varphi_n(x)\psi_n(t),$ (1)

где $\varphi_i(x)\psi_i(t)$ – соответствующие частные решения. При этом функции $\varphi_i(x)$ [и функции $\psi_i(t)$] линейно независимы.

Оказывается, что многие нелинейные уравнения с частными производными вида

$f_1(x)g_1(t)\Pi_1(u)+f_2(x)g_2(t)\Pi_2(u)+\cdots+f_n(x)g_n(t)\Pi_n(u)=0$ (2)

где $\Pi_i(u)$ – дифференциальные формы, также имеют точные решения вида (1).

Определение3. Если уравнение вида (2) имеет точное решение вида (1), то такие решения будем называть решениями с обобщенным разделением переменных.

При этом функции $\varphi_i(x)$ [и функции $\psi_i(t)$] линейно зависимы.

Примеры точных решений нелинейных уравнений вида (1) для случаев n=1 и n=2 (при $\psi_1=\varphi_2=1$) рассмотрены в [1].

Замечание. Если в уравнении (2) все $f_i(x)=const$, $g_i(t)=const$, то можно искать решения более общего вида

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi)\psi_i(\eta), \quad \xi=a_1x+a_2y,$$

$$\eta=b_1x+b_2y$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – постоянные.

Общий вид функционально-дифференциальных уравнений

В общем случае после подстановки выражения (1) в дифференциальное уравнение (2) для определения функций $f_i(x)$ и $g_i(t)$ получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\Phi_1(X)\Psi_1(T)+\Phi_2(X)\Psi_2(T)+\cdots+\Phi_n(X)\Psi_n(T)=0, \qquad (3)$$

где функционалы $\Phi_i(X)$ и $\Psi_i(T)$ зависят соответственно от переменных x и t:

$$\begin{aligned}\Phi_i(X) &\equiv \Phi_i(x,\varphi_1,\varphi_1',\varphi_1'',\ldots,\varphi_n,\varphi_n',\varphi_n'')\\ \Psi_i(T) &\equiv \Psi_i(t,\psi_1,\psi_1',\psi_1'',\ldots,\psi_n,\psi_n',\psi_n'')\end{aligned}. \qquad (4)$$

Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления

Решение (3) удобно свести к последовательному решению линейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. исходная задача расщепляется на две более простых задач).

Случай четного числа слагаемых в уравнении (3), n=2k.

Можно показать (используя индукцию и метод дифференцирования или путем непосредственной проверки), что функциональное уравнение (3) имеет решение:

$$\begin{aligned}&\Phi_i(X)=C_{i1}\Phi_{k+1}(X)+C_{i2}\Phi_{k+2}(X)+\cdots+C_{ik}\Phi_{2k}(X) \quad (i=1,2,\ldots,k),\\ &\psi_{k+i}(T)=-C_{1i}\psi_1(T)-C_{2i}\psi_2(T)-\cdots-C_{ki}\psi_k(T),\\ &(i=1,2,\ldots,k),\end{aligned} \qquad (5)$$

Которое содержит k^2 произвольных постоянных C_{ij}. Функции $\Phi_{k+1}(x),\ldots,\Phi_{2k}(x)$, $\Psi_1(T),\ldots,\Psi_k(T)$, стоящие в правых частях равенств (5) задаются произвольно. Существуют также вырожденные решения, зависящие от меньшего числа постоянных.

После этого, подставим в решение (5) зависимости $\Phi_i(X)$ и $\Psi_j(T)$ из (4). В результате получим систему (обычно переопределенную) обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций $\varphi_p(x)$ и $\psi_q(t)$.

Случай нечетного числа слагаемых в уравнении (3), n=2k-1.

1^0. Функциональное уравнение (3) в случае нечетного числа слагаемых n=2k-1 имеет два различных решения, зависящих от k(k-1) произвольных постоянных. Первое из них можно получить из формул (5), положив $\Phi_{2k}\equiv 0$ и отбросив последнее выражение для Ψ_{2k}. Второе решение можно получить из первого с помощью переобозначений $\Phi_i(X)\leftrightarrow\Psi_i(T)$.

2^0. Дальнейший анализ проводится для каждого из решений по той же схеме, что и для случая четного числа слагаемых в уравнении (3).

Замечание. Важно подчеркнуть, что используемое в методе расщепления билинейное функциональное уравнение (3) при фиксированном n является одним и тем же для разных классов исходных нелинейных уравнений математической физики.

Решение простейших функциональных уравнений

Приведем решения двух простейших функциональных уравнений вида (3), которые понадобятся далее для решения системы нелинейных уравнений с частными производными, которая описывает процесс нагнетания воздуха в угольный пласт.

1^0. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1+\Phi_2\Psi_2+\Phi_3\Psi_3=0 \qquad (6)$$

где все Φ_i – функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i – функции другого аргумента, имеет два решения:

$$\begin{aligned}&\Phi_1=A_1\Phi_3,\ \Phi_2=A_2\Phi_3,\ \Psi_3=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2\\ &\Psi_1=A_1\Psi_3,\ \Psi_2=A_2\Psi_3,\ \Phi_3=-A_1\Phi_1-A_2\Phi_2\end{aligned} \qquad (7)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные. Функции в правых частях равенств (7) считаются произвольными.

2^0. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1+\Phi_2\Psi_2+\Phi_3\Psi_3+\Phi_4\Psi_4=0, \qquad (8)$$

где все Φ_i – функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i – функции другого аргумента, имеет решение:

$$\begin{aligned}&\Phi_1=A_1\Phi_3+A_2\Phi_4,\ \ \Phi_2=A_3\Phi_3+A_4\Phi_4,\\ &\Psi_3=-A_1\Psi_1-A_3\Psi_2,\ \ \Psi_4=-A_2\Psi_1-A_4\Psi_2,\end{aligned} \qquad (9)$$

зависящее от четырех произвольных постоянных A_m[см. решение (5) при k=2 $C_{11}=A_1$, $C_{12}=A_2$, $C_{21}=A_3$, $C_{22}=A_4$]. Функции в правых частях равенств (9) считаются произвольными.

Уравнение (8) имеет также два других решения, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$\begin{aligned}&\Phi_1=A_1\Phi_4,\ \Phi_2=A_2\Phi_4,\ \Phi_3=A_3\Phi_4,\\ &\Psi_4=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2-A_3\Psi_3\\ &\Psi_1=A_1\Psi_4, \Psi_2=A_2\Psi_4, \Psi_3=A_3\Psi_4,\\ &\Phi_4=-A_1\Phi_1-A_2\Phi_2-A_3\Phi_3\end{aligned} \qquad (10)$$

<u>Метод №1</u>. Метод расщепления.

Рассмотрим модельную систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=T\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left[u\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=T\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left[v\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}=T\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left[w\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]\\ \dfrac{\partial T}{\partial t}=-u\,\dfrac{\partial T}{\partial x}\end{cases}, \qquad (11)$$

которая описывает процесс нагнетания воздуха в угольный пласт. При предположениях сделанных в [1], надо решать первое уравнение системы (11).

$$\frac{\partial u}{\partial t}=T_0\,\frac{\partial}{\partial x}\left[u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \qquad (12)$$

Решение ищем в виде

$$u=u(z),\ \text{где } z=\varphi(t)x+\psi(t) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\left(\varphi'(t)x+\psi'(t)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\varphi(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\varphi(t)=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\varphi^2(t).$$

Подставим найденные производные в (12), получим:

$u'_z(x\varphi'+\psi')=T_0[u'^2_z\varphi^2+u\cdot u''_{zz}\varphi^2]$,

разделим последнее уравнение на u'_z, получим

$(x\varphi'+\psi')=T_0\varphi^2[\frac{u'^2_z}{u'_z}+\frac{u\cdot u''_{zz}}{u'_z}]$, из уравнения (13) выразим $x=\frac{z-\psi}{\varphi}$, получим

$\frac{z}{\varphi}\varphi'-\frac{\psi}{\varphi}\varphi'+\psi'=T_0\varphi^2[u'_z+\frac{u\cdot u''_{zz}}{u'_z}]$, применяя формулы расщепления (7), будем иметь:

$$\phi_1=\frac{\varphi'}{\varphi},\quad \phi_2=-\frac{\psi}{\varphi}\varphi'+\psi',\quad \phi_3=-T_0\varphi^2$$

$$\psi_1=z,\quad \psi_2=1,\quad \psi_3=u'_z+\frac{u\cdot u''_{zz}}{u'_z} \qquad (14)$$

$\Phi_1=A_1\Phi_3, \Phi_2=A_2\Phi_3, \Psi_3=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2$ (15)
$\Psi_1=A_1\Psi_3,\ \Psi_2=A_2\Psi_3,\ \Phi_3=-A_1\Phi_1-A_2\Phi_2$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=-A_1T_0\varphi^2\quad (16),\quad -\frac{\psi}{\varphi}\varphi'+\psi'=-A_2T_0\varphi^2\quad (17),$$

$$u'_z+\frac{u\cdot u''_{zz}}{u'_z}=-A_1z-A_2\quad (18).$$

Решаем уравнение (16), полученное решение подставим в (17), определим ψ(t).

$$\frac{\varphi'}{\varphi^3}=-A_1T_0\Rightarrow\int\frac{d\varphi}{\varphi^3}=-A_1T_0\int dt\Rightarrow\frac{1}{\varphi^2}=2A_1T_0t+C_1$$

$$\Rightarrow\quad \varphi=\frac{1}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}$$

$$\varphi'=-A_1T_0\varphi^3=-A_1T_0\frac{1}{\sqrt{(2A_1T_0t+C_1)^3}}\quad\Rightarrow$$

$$\psi'=\frac{\psi}{\varphi}\varphi'-A_2T_0\varphi^2\quad\Rightarrow$$

$$\psi'=-A_1T_0\cdot\frac{\psi}{2A_1T_0t+C_1}-A_2T_0\varphi^2\quad\Rightarrow$$

$$\psi'+\frac{A_1T_0}{2A_1T_0t+C_1}\psi=-\frac{A_2T_0}{2A_1T_0t+C_1}$$

Последнее уравнение решаем как линейное относительно ψ.

$$\psi=u\cdot v\quad\Rightarrow\quad\psi'=u'v+uv'\quad\Rightarrow$$

$$u'v+uv'+\frac{A_1T_0}{2A_1T_0t+C_1}uv=-\frac{A_2T_0}{2A_1T_0t+C_1}$$

$$u'v+u(v'+\frac{A_1T_0}{2A_1T_0t+C_1}v)=-\frac{A_2T_0}{2A_1T_0t+C_1}$$

$$\Rightarrow\quad v'+\frac{A_1T_0}{2A_1T_0t+C_1}v=0$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{A_1T_0}{2A_1T_0t+C_1}v\quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{dv}{v}=-A_1T_0\int\frac{dt}{2A_1T_0t+C_1}\Rightarrow\ln|v|=-\frac{1}{2}\ln|2A_1T_0t+C_1|$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dt}\frac{1}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}=-\frac{A_2T_0}{2A_1T_0t+C_1}$$

$$\int du=-A_2T_0\int\frac{dt}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}\Rightarrow u=\frac{-A_2}{A_1}\sqrt{2A_1T_0t+C_1}+C_2$$

$$\psi=uv=\frac{1}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}\left(\frac{-A_2}{A_1}\sqrt{2A_1T_0t+C_1}+C_2\right)=$$

$$=\frac{C_2}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}-\frac{A_2}{A_1}$$

Решаем уравнение (18). Из-за присутствия z порядок уравнения понизить нельзя. Поэтому ищем решение в виде квадратичной функции относительно z, а потом применяем метод неопределенных коэффициентов.

$$u=Az^2+Bz+C\quad\Rightarrow\quad u'=2Az+B,\quad u''=2A.$$

Найденные производные подставляем в уравнение 18).

$$2Az+B+\frac{(Az^2+Bz+C)\cdot 2A}{2Az+B}=-A_1z-A_2\quad\Rightarrow$$

$$(2Az+B)^2+(Az^2+Bz+C)\cdot 2A=-(A_1z+A_2)(2Az+B)\quad\Rightarrow$$

$$4A^2z^2+4ABz+B^2+2A^2z^2+2ABz+2AC=$$

$$=-2AA_1z^2-A_1Bz-2AA_2z-A_2B\quad\Rightarrow$$

$$6A^2z^2+6ABz+B^2+2AC=-2AA_1z^2-(A_1B+2AA_2)z-A_2B$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$z^2:6A^2=-2AA_1\Rightarrow 3A=-A_1\Rightarrow A=-\frac{A_1}{3}$$

$$z^1:6AB=-(A_1B+2AA_2)\Rightarrow B=\frac{-2AA_2}{6A+A_1}=$$

$$=\frac{2A_1A_2}{3(-2A_1+A_1)}==-\frac{2}{3}A_2$$

$$z^0:\quad B^2+2AC=-A_2B\Rightarrow C=\frac{-A_2B-B^2}{2A}=$$

$$=\frac{\frac{2}{3}A_2^2-\frac{4}{9}A_2^2}{-\frac{2}{3}A_1}=-\frac{2}{9}A_2^2\frac{3}{2A_1}=-\frac{A_2^2}{3A_1}$$

$$A=-\frac{1}{3}A_1,\quad B=-\frac{2}{3}A_2,\quad C=-\frac{1}{3}\frac{A_2^2}{A_1}$$

Таким образом получено решение:

$$u(z) = -\frac{1}{3}A_1 z^2 - \frac{2}{3}A_2 z - \frac{1}{3}\frac{A_2^2}{A_1},$$

$$z = \varphi(t)x + \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2A_1T_0t + C_1}}x + \frac{C_2}{\sqrt{2A_1T_0t + C_1}} - \frac{A_2}{A_1}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что u(x,t) есть решение уравнения (12).

Метод №2. Метод расщепления.

Решение ищем в виде u=u(z), где $z=\varphi(t)x^2+\psi(t)$ (19).

Проделывая выкладки, аналогичные в методе №1, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\left(\varphi'(t)x^2 + \psi'(t)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\cdot 2x\varphi(t) \qquad . \qquad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot 2x\varphi(t) + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot 2\varphi(t) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}4x^2\varphi^2(t) + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot 2\varphi(t)$$

Подставим найденные производные в (12), получим:

$$u'_z(x^2\varphi' + \psi') = T_0[u_z'^2 4x^2\varphi^2 + u(u''_{zz}4x^2\varphi^2 + u'_z 2\varphi)] \;,$$

разделим последнее уранение на u'_z, получим

$$x^2\varphi' + \psi' = T_0[4x^2\varphi^2 u'_z + \frac{u}{u'_z}(4x^2\varphi^2 u''_{zz} + 2\varphi u'_z)]$$

из уравнения (19) выразим $x^2 = \frac{z-\psi}{\varphi}$, получим

$$\varphi'\cdot\frac{z-\psi}{\varphi} + \psi' = T_0[u'_z\cdot\frac{4(z-\psi)}{\varphi}\cdot\varphi^2 +$$

$$+\frac{u}{u'_z}\cdot(\frac{4(z-\psi)}{\varphi}\cdot\varphi^2 u''_{zz} + 2\varphi\cdot u'_z)] \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}z - \frac{\varphi'\psi}{\varphi} + \psi' = T_0[4u'_z(z\varphi - \varphi\psi) +$$

$$+\frac{u}{u'_z}(4u''_{zz}(z\varphi - \varphi\psi) + 2\varphi u'_z)] \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}z - \frac{\varphi'\psi}{\varphi} + \psi' = T_0[4u'_z z\varphi - 4u'_z\varphi\psi +$$

$$+\frac{4uu''_{zz}z\varphi}{u'_z} - \frac{4uu''_{zz}\varphi\psi}{u'_z} + 2\varphi u'_z] \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi}z - \frac{\varphi'\psi}{\varphi} + \psi' = 4T_0[z\varphi(u'_z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z}) -$$

$$-\varphi\psi(u'_z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z}) + \frac{1}{2}\varphi u'_z]. \qquad (21)$$

Это уравнение можно представить в виде функционального уравнения (8), где

$$\phi_1 = \frac{\varphi'}{\varphi},\quad \phi_2 = -\frac{\varphi'\psi}{\varphi} + \psi',\quad \phi_3 = -4T_0\varphi,$$

$$\phi_4 = 4T_0\varphi\psi,$$

$$\psi_1 = z, \psi_2 = 1, \psi_3 = z(u'_z z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z}) + \frac{1}{2}u, \psi_4 =$$

$$= (u'_z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z}). \qquad (22)$$

Применяя формулы расщепления (9), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\varphi'}{\varphi} = A_1(-4T_0\varphi) + A_2 4T_0\varphi\psi = -4T_0\varphi(A_1 - A_2\psi) \\ -\frac{\varphi'\psi}{\varphi} + \psi' = A_3(-4T_0\varphi) + A_4 4T_0\varphi\psi) = -4T_0\varphi(A_3 - A_4\psi) \\ z(u'_z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z}) + \frac{1}{2}u = -A_1 z - A_3 \\ u'_z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z} = -A_2 z - A_4 \end{cases}, \qquad (23)$$

Автором установлено, что совместное решение третьего и четвертого уравнения системы (23) в виде квадратичной функции относительно аргумента z не существует, поэтому u=Az+B, где A и B – коэффициенты подлежащие определению.

$u' = A,\quad u'' = 0.$

Подставляя найденные производные в третье и четвертое уравнения системы (23), будем иметь:

$$zA + \frac{1}{2}(Az + B) = -A_1 z - A_3 \Rightarrow A = -\frac{2}{3}A_1,\quad B = -2A_3.$$

$$A = -A_2 z - A_4 \quad\Rightarrow\quad A = -A_4 = -\frac{2}{3}A_1,\quad A_2 = 0.$$

Покажем, что при таком выборе коэффициентов:

$A = -\frac{2}{3}A_1,\quad B = -2A_3,\quad A_2 = 0,\quad A_4 = \frac{2}{3}A_1$ и A_3 произвольное, совместное решение первого и второго уравнения системы существует и найдем его вид.

Решаем первое уравнение системы (23).

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -4T_0\varphi A_1 \Rightarrow \int\frac{d\varphi}{\varphi^2} = -4T_0A_1\int dt \Rightarrow -\frac{1}{\varphi} = -4T_0A_1t - C_1$$

$$\Rightarrow\quad \varphi = \frac{1}{4T_0A_1t + C_1}$$

Решаем второе уравнение системы (23), как линейное относительно функции ψ.

$$\psi' + (-\frac{\varphi'}{\varphi} - 4A_4T_0\varphi)\psi = -4A_3T_0\varphi \qquad (24)$$

$$\psi = uv \quad\Rightarrow\quad \psi' = u'v + uv' \Rightarrow$$

$$u'v + uv' + (-\frac{\varphi'}{\varphi} - 4A_4T_0\varphi)uv = -4A_3T_0\varphi \quad\Rightarrow$$

$$u'v + u(v' + (-\frac{\varphi'}{\varphi} - 4A_4T_0\varphi)v) = -4A_3T_0\varphi \quad\Rightarrow$$

$$v' - (\frac{\varphi'}{\varphi} + 4A_4T_0\varphi)v = 0$$

$$\frac{dv}{dt}=(\frac{\varphi'}{\varphi}+4A_4T_0\varphi)v\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=\int(\frac{\varphi'}{\varphi}+4A_4T_0\varphi)dt$$

$$\Rightarrow\quad \ln|v|=\int\frac{d\varphi}{\varphi}+4A_4T_0\int\varphi dt$$

$$\ln|v|=\ln|\varphi|+\ln e^{4A_4T_0\int\varphi dt}\quad\Rightarrow\quad v=\varphi e^{4A_4T_0\int\varphi dt}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{du}{dt}\varphi e^{4A_4T_0\int\varphi dt}=-4A_3T_0\varphi\quad\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dt}=-4A_3T_0e^{-4A_4T_0\int\varphi dt}\Rightarrow u=-4A_3T_0\int e^{-4A_4T_0\int\varphi dt}dt+C_2$$

$$\psi=uv=\varphi e^{4A_4T_0\int\varphi dt}(-4A_3T_0\int e^{-4A_4T_0\int\varphi dt}dt+C_2)\qquad(25)$$

Подставим в полученное решение определенную выше функцию $\varphi=\dfrac{1}{4T_0A_1t+C_1}$, для этого вычислим интегралы в решении (25).

$$\int\varphi dt=\int\frac{1}{4T_0A_1t+C_1}dt=\frac{1}{4T_0A_1}\int\frac{d(4T_0A_1t+C_1)}{4T_0A_1t+C_1}=$$

$$=\frac{1}{4T_0A_1}\ln|4T_0A_1t+C_1|+\ln|C_3|$$

$$e^{4A_4T_0\int\varphi dt}=e^{4A_4T_0\ln|C_3(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{4T_0A_1}}|}=$$

$$=e^{\ln|C_3(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{4A_4T_0}{4T_0A_1}}|}=C_3(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{A_4}{A_1}}=C_3(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{2}{3}}$$

$$-4A_3T_0\int e^{-4A_4T_0\int\varphi dt}dt=-4A_3T_0\int C_3^{-1}(4T_0A_1t+C_1)^{-\frac{2}{3}}dt=$$

$$=\frac{-4A_3C_3T_0}{4T_0A_1}\int C_3^{-1}(4T_0A_1t+C_1)^{-\frac{2}{3}}d(4T_0A_1t+C_1)=$$

$$=\frac{-3A_3}{A_1C_3}(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{3}}$$

Подставим вычисленные интегралы в (25), получим:

$$\psi=\frac{1}{4T_0A_1t+C_1}C_3(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{2}{3}}(\frac{-3A_3}{A_1C_3}(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{3}}+$$
$$+C_2)$$

$$\psi=\frac{C_3}{(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{3}}}(\frac{-3A_3}{A_1C_3}(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{3}}+C_2)=$$
$$=\frac{-3A_3}{A_1}+\frac{C_2C_3}{(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{3}}}$$

Таким образом получено решение уравнения (12)

$$u(z)=-\frac{2}{3}A_1z-2A_3,\quad z=\varphi(t)x^2+\psi(t)=\frac{x^2}{4T_0A_1t+C_1}+$$
$$+\frac{C_2C_3}{(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{3}}}-\frac{3A_3}{A_1}$$

Правильность решения проверено средствами VBA.

Замечание. Если искать решение, зависящее от трех произвольных констант, то надо применить формулы (10). В результате получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\varphi'}{\varphi}=4T_0A_1\varphi\psi\\ \dfrac{-\varphi'\psi}{\varphi}+\psi'=4T_0A_2\varphi\psi\\ -4T_0\varphi=4T_0A_3\varphi\psi\\ u'+\dfrac{uu''}{u'}=-A_1z-A_2-A_3(u'z+\dfrac{uu''z}{u'}+\dfrac{1}{2}u)\end{cases}\qquad(26)$$

Из третьего уравнения системы, $\psi=-\dfrac{1}{A_3}$, подставим ψ в первое уравнение, будем иметь:

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2}=-4T_0\frac{A_1}{A_3}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{d\varphi}{\varphi^2}=-4T_0\frac{A_1}{A_3}\int dt\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\varphi}=-4T_0\frac{A_1}{A_3}t-C_1\quad\Rightarrow\varphi=\frac{1}{4T_0\dfrac{A_1}{A_3}t+C_1}.$$

Подставим ψ во второе уравнение:

$$-\frac{\varphi'}{\varphi}(-\frac{1}{A_3})=4T_0A_2(-\frac{1}{A_3})\varphi$$

$$\frac{-\varphi'}{\varphi}=4T_0A_2\varphi\quad\Rightarrow\quad\int\frac{d\varphi}{\varphi^2}=-4T_0A_2\int dt\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\varphi}=-4T_0A_2t-C_2\Rightarrow\quad\varphi=\frac{1}{4T_0A_2t+C_2}.$$

Для совместного решения первого, второго и третьего уравнения необходимо, чтобы

$$\frac{A_1}{A_3}=A_2,\quad C_1=C_2,\quad и\quad A_3\neq0.$$

Решение четвертого уравнения системы (26) ищем в виде $u=Az^2+Bz+C$.

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$A=0,\quad B=-\frac{2A_1}{3A_3},\quad C=-\frac{2A_1}{3A_3^2}.$$

Таким образом получено решение:

$$u=-\frac{2A_1}{3A_3}z-\frac{2A_1}{3A_3^2},\quad z=\frac{x^2}{4T_0\dfrac{A_1}{A_3}t+C_1}-\frac{1}{A_3}.$$

Проверка правильности решения также выполнена средствами VBA.

Метод №3. Метод расщепления.

Рассматриваем уравнение (12). Ищем точные решения вида

$u=u(z)$, $z=\varphi(x)+\psi(t)$. (27)

В результате получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\psi'(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\varphi'(x) \qquad (28)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\varphi'^2+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\varphi''.$$

Подставим найденные производные в (12), получим:

$$u'_z\psi'_t=T_0[u'^2_z(\varphi'_x)^2+u(u''_{zz}(\varphi'_x)^2+u'_z\varphi''_{xx})], \qquad (29)$$

разделим последнее уранение на u'_z, получим

$$\psi'_t=T_0[u'_z(\varphi'_x)^2+\frac{uu''_{zz}(\varphi'_x)^2}{u'_z}+u\varphi''_{xx}]. \qquad (30)$$

Обозначим $Q(z)=u'_z+\frac{uu''_z}{u'_z}$, где u=u(z), (31)

тогда уравнение (30) запишется

$$\psi'_t=T_0[u\varphi''_{xx}+(\varphi'_x)^2Q(z)]. \qquad (32)$$

Дифференцируя (32) по x, имеем

$$T_0[\varphi'''_{xxx}u+u'_z z'_x\varphi''_{xx}+2\varphi'_x\varphi''_{xx}Q(z)+(\varphi'_x)^2Q'_z z'_x]=0 \quad\Rightarrow$$

$$\varphi'''_{xxx}u+\varphi'_x\varphi''_{xx}[u'_z+2Q(z)]+(\varphi'_x)^3Q'_z=0 \quad . \qquad (33)$$

Применяем формулы расщепления в форме (7). Для этого положим:

$$\psi_1=u'_z+2Q,\quad \psi_2=Q'_z,\quad \psi_3=u,\quad \phi_1=\varphi'_x\varphi''_{xx},$$
$$\phi_2=(\varphi'_x)^3,\quad \phi_3=\varphi'''_{xxx} \quad .$$

Получим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u'_z+2Q=2A_1u \\ Q'_z=A_2u \\ \varphi'''_{xxx}=-2A_1\varphi'_x\varphi''_{xx}-A_2(\varphi'_x)^3 \end{cases}, \qquad (34а)$$

$$\begin{cases} \varphi'_x\varphi''_{xx}=A_1\varphi'''_{xxx} \\ (\varphi'_x)^3=A_2\varphi'''_{xxx} \\ u=-A_1(u'_z+2Q)-A_2Q'_z \end{cases}. \qquad (34б)$$

Первые два уравнения системы (34а) линейны и не зависят от третьего уравнения. Найдем их общее решение.

Из первого уравнения системы: $Q=A_1u-\frac{1}{2}u'_z$,

продифференцируем это уравнение и подставим во второе уравнение системы, получим:

$$Q'_z=A_1u'_z-\frac{1}{2}u''_{zz},\ \Rightarrow\ A_1u'_z-\frac{1}{2}u''_{zz}=A_2u\ \Rightarrow$$
$$u''-2A_1u'+2A_2u=0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2-2A_1k+2A_2=0$$
$$k_{1,2}=A_1\pm\sqrt{A_1^2-2A_2}.$$

Таким образом получено общее решение первых двух уравнений системы (34а).

$$u=\begin{cases} e^{A_1z}(B_1e^{kz}+B_2e^{-kz}) \quad при \quad A_1^2>2A_2, \\ e^{A_1z}(B_1+B_2z) \quad при \quad A_1^2=2A_2,\ Q=A_1u-\frac{1}{2}u'_z, \\ e^{A_1z}[B_1\sin(kz)+B_2\cos(kz)] \quad при \quad A_1^2<2A_2, \\ k=\sqrt{|A_1^2-2A_2|} \end{cases} \qquad (35)$$

Но с другой стороны $Q(z)=u'_z+\frac{uu''_z}{u'_z}$, решаем

уравнение $A_1u-\frac{1}{2}u'_z=u'_z+\frac{uu''_z}{u'_z}$

$$\frac{uu''_z}{u'_z}+\frac{3}{2}u'_z=A_1u,\ u'=p(u),\ u''=p'p\Rightarrow p'u+\frac{3}{2}p=A_1u$$

$$\Rightarrow\quad p'+\frac{3}{2}\frac{p}{u}=A_1$$

$$p=u_1v_1,\quad p'=u'_1v_1+u_1v'_1,\quad u'_1v_1+u_1v'_1+\frac{3}{2}\frac{u_1v_1}{u}=A_1\quad\Rightarrow$$

$$u'_1v_1+u_1(v'_1+\frac{3}{2}\frac{v_1}{u})=A_1\quad\Rightarrow\quad\frac{dv_1}{du}=-\frac{3}{2}\frac{v_1}{u}$$

$$\Rightarrow\quad\int\frac{dv_1}{v_1}=-\frac{3}{2}\int\frac{du}{u}\quad\Rightarrow\quad\ln|v_1|=-\frac{3}{2}\ln|u|$$

$$\Rightarrow\quad v_1=u^{-\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{du_1}{du}u^{-\frac{3}{2}}=A_1\quad\Rightarrow\quad u_1=A_1\int u^{\frac{3}{2}}du$$

$$\Rightarrow\quad u_1=\frac{2}{5}A_1u^{\frac{5}{2}}+C_1\quad\Rightarrow\quad p=u_1v_1=(\frac{2}{5}A_1u^{\frac{5}{2}}+C_1)u^{-\frac{3}{2}}$$

$$p=\frac{2}{5}A_1u+C_1u^{-\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dz}=\frac{2}{5}A_1u+C_1u^{-\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{\frac{2}{5}A_1u+C_1u^{-\frac{3}{2}}}=\int dz\quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{5u^{\frac{3}{2}}du}{2A_1u^{\frac{5}{2}}+5C_1}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{A_1}\int\frac{d(2A_1u^{\frac{5}{2}}+5C_1)}{2A_1u^{\frac{5}{2}}+5C_1}=z+C_2\quad\Rightarrow$$

$$\ln|2A_1u^{\frac{5}{2}}+5C_1|=A_1(z+C_2)$$

$$2A_1u^{\frac{5}{2}}+5C_1=e^{A_1(z+C_2)}\quad\Rightarrow\quad u^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2A_1}(e^{A_1(z+C_2)}-5C_1)$$

$$u=[\frac{1}{2A_1}(e^{A_1(z+C_2)}-5C_1)]^{\frac{2}{5}}. \qquad (36)$$

Теперь надо выяснить при каких B_1, B_2 и k, решение (35) совпадает с решением (36). Для этого положим в первом уравнении системы (35): $B_1=0$, тогда уравнение запишется

$$u=B_2e^{(A_1-k)z}\quad при\quad A_1^2>2A_2.$$

Очевидно в (36) надо положить $C_1=C_2=0$. Отсюда получаем зависимости:

$$B_2=[\frac{1}{2A_1}]^{\frac{2}{5}},\ A_1-k=\frac{2}{5}A_1\Rightarrow k=A_1-\frac{2}{5}A_1=\frac{3}{5}A_1,$$

поскольку $k=\sqrt{A_1^2-2A_2}$, получим уравнение:

$$\sqrt{A_1^2-2A_2}=\frac{3}{5}A_1 \quad\Rightarrow\quad A_1^2-2A_2=\frac{9}{25}A_1^2 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{16}{25}A_1^2=2A_2 \quad\Rightarrow\quad A_1^2=\frac{25}{8}A_2$$

при этом выполняется условие $A_1^2>2A_2$.

Если $A_1^2=2A_2$, то надо положить во втором уравнении системы (35), $B_2=0$, $A_1=\frac{2}{5}$, тогда $A_2=\frac{2}{25}$

Если $A_2=0$, то из первого уравнения системы (35) и (36) следует $A_1=0$, этот случай малоинтересен.

Решение последнего уравнения системы (34а) ищем в виде:

$$\varphi=A_0\ln|C_1x+C_2| \quad\Rightarrow\quad \varphi'=\frac{A_0C_1}{C_1x+C_2},$$

$$\varphi''=-\frac{A_0C_1^2}{(C_1x+C_2)^2},\quad \varphi'''=\frac{2A_0C_1^3}{(C_1x+C_2)^3}$$

Подставим в уравнение, будем иметь:

$$\frac{2A_0C_1^3}{(C_1x+C_2)^3}-2A_1\frac{A_0^2C_1^3}{(C_1x+C_2)^3}+A_2\frac{A_0^3C_1^3}{(C_1x+C_2)^3}=0\Rightarrow$$

$$A_2A_0^2-2A_1A_0+2=0$$

$$(A_0)_{1,2}=\frac{A_1\pm\sqrt{A_1^2-2A_2}}{A_2}=\frac{A_1\pm k}{A_2}=\frac{A_1\pm\frac{3}{5}A_1}{A_2} \quad\Rightarrow$$

$$(A_0)_1=\frac{2}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2},\quad (A_0)_2=\frac{8}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2}$$

Таким образом получено решение:

$$u=\begin{cases}\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z}\ \text{при}\ A_1^2>2A_2,\ A_1^2=\frac{25}{8}A_2\\ \left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}z}\ \text{при}\ A_1^2=2A_2,\ A_1=\frac{2}{5},\ A_2=\frac{2}{25}\end{cases} \qquad (37)$$

Установлено, что второе решение системы (37) не обеспечивает совпадения (35) и (36).

$$\varphi(x)=\left[\begin{array}{l}\frac{2}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2}\ln|C_1x+C_2|\\ \frac{8}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2}\ln|C_1x+C_2|\end{array}\right. \qquad (38)$$

Покажем, что при $A_0=\frac{8}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2}=\frac{5}{A_1}$ можно исключить x и z из уравнения (32) :

$$\varphi(x)=\frac{5}{A_1}\ln|C_1x+C_2|,\quad \varphi'(x)=\frac{5}{A_1}\cdot\frac{C_1}{C_1x+C_2},$$

$$\varphi''(x)=-\frac{5}{A_1}\cdot\frac{C_1^2}{(C_1x+C_2)^2}$$

$$Q=A_1u-\frac{1}{2}u'=A_1\cdot\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}A_1\cdot\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z}=$$

$$=\frac{4}{5}A_1\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z}$$

Подставим найденные функции в уравнение (32), получим

$$\psi'_t=T_0\left[\begin{array}{l}\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z}\cdot\left(-\frac{5}{A_1}\right)\cdot\frac{C_1^2}{(C_1x+C_2)^2}+\\ +\frac{25}{A_1^2}\cdot\frac{C_1^2}{(C_1x+C_2)^2}\cdot\frac{4}{5}A_1\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z}\end{array}\right]$$

$$\psi'_t=\frac{15}{A_1}T_0\frac{C_1^2}{(C_1x+C_2)^2}\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z}$$

$$e^{\frac{2}{5}A_1z}=(e^z)^{\frac{2}{5}A_1}=(e^{\varphi+\psi})^{\frac{2}{5}A_1}=(e^{\frac{5}{A_1}\ln|C_1x+C_2|}\cdot e^{\psi})^{\frac{2}{5}A_1}=$$

$$=(C_1x+C_2)^2e^{\frac{2}{5}A_1\psi}$$

$$\psi'_t=\frac{15}{A_1}T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}\frac{C_1^2}{(C_1x+C_2)^2}(C_1x+C_2)^2e^{\frac{2}{5}A_1\psi}=$$

$$=\frac{15}{A_1}T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2e^{\frac{2}{5}A_1\psi}\quad\Rightarrow$$

$$\int e^{-\frac{2}{5}A_1\psi}d\psi=\frac{15}{A_1}T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2t+C^*\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{5}{2A_1}e^{-\frac{2}{5}A_1\psi}=\frac{15}{A_1}T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2t+C^*\quad\Rightarrow$$

$$e^{-\frac{2}{5}A_1\psi}=-6T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2t+C^*\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{2}{5}A_1\psi=\ln|-6T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2t+C^*|\quad\Rightarrow$$

$$\psi=-\frac{5}{2A_1}\ln|-6T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2t+C^*| \qquad (39)$$

Таким образом получено решение:

$$u=\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z},\quad z=\frac{8}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2}\ln|C_1x+C_2|-$$

$$-\frac{5}{2A_1}\ln|-6T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2t+C^*| \qquad (40)$$

$$\text{при}\quad A_1^2>2A_2,\quad A_1^2=\frac{25}{8}A_2.$$

Проверка была выполнена аналитическим методом.

Решая совместно первое и второе уравнение системы (34б), получим уравнение:

$$\frac{1}{A_1}\varphi'_x\varphi''_{xx} = \frac{1}{A_2}(\varphi'_x)^3, \text{ замена } \quad \varphi' = p(\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi'' = p'p \quad \Rightarrow \frac{1}{A_1}p'p^2 = \frac{1}{A_2}p^3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{A_1}{A_2}p \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = \frac{A_1}{A_2}\int d\varphi \Rightarrow \ln|p| = \frac{A_1}{A_2}\varphi + \ln|C_1|$$

$$\Rightarrow \quad p = C_1 e^{\frac{A_1}{A_2}\varphi} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = C_1 e^{\frac{A_1}{A_2}\varphi} \quad \Rightarrow \quad \int e^{-\frac{A_1}{A_2}\varphi}d\varphi = C_1\int dx \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{A_2}{A_1}e^{-\frac{A_1}{A_2}\varphi} = C_1x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \frac{A_2}{A_1}\ln\left|\frac{A_2}{-A_1(C_1x+C_2)}\right|. \qquad (41)$$

Подставляя решение (41) в первое уравнение системы (34б), найдем зависимость между постоянными A_1 и A_2. Для этого вычислим $\varphi'_x, \varphi''_{xx}, \varphi'''_{xxx}$.

$$\varphi'_x = -\frac{A_2C_1}{A_1}\cdot\frac{1}{(C_1x+C_2)}, \quad \varphi''_{xx} = \frac{A_2C_1^2}{A_1}\cdot\frac{1}{(C_1x+C_2)^2},$$

$$\varphi'''_{xxx} = -\frac{2A_2C_1^3}{A_1}\cdot\frac{1}{(C_1x+C_2)^3}$$

$$\varphi'_x\varphi''_{xx} = -\frac{A_2^2C_1^3}{A_1^2}\cdot\frac{1}{(C_1x+C_2)^3},$$

$$A_1\varphi'''_{xxx} = -A_1\frac{2A_2C_1^3}{A_1}\cdot\frac{1}{(C_1x+C_2)^3} = -2A_2C_1^3\cdot\frac{1}{(C_1x+C_2)^3}$$

Отсюда следует, что $\frac{A_2^2}{A_1^2} = 2A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 2A_1^2$

Решение последнего уравнения системы (34б) ищем в виде $u = e^{\lambda z}$, где $\lambda \equiv$const.

$$u' = \lambda e^{\lambda z}, \quad u'' = \lambda^2 e^{\lambda z}, \quad Q(z) = u'_z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z} =$$

$$= \lambda e^{\lambda z} + \frac{e^{\lambda z}\lambda^2 e^{\lambda z}}{\lambda e^{\lambda z}} = 2\lambda e^{\lambda z}, \quad Q'_z = 2\lambda^2 e^{\lambda z}.$$

Подставим вычисленные производные в уравнение

$$e^{\lambda z} = -A_1(\lambda e^{\lambda z} + 4\lambda e^{\lambda z}) - 2A_2\lambda^2 e^{\lambda z} = e^{\lambda z}(-5A_1\lambda - 2A_2\lambda^2)$$

$$\Rightarrow \quad 2A_2\lambda^2 + 5A_1\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5A_1 \pm \sqrt{25A_1^2 - 8A_2}}{4A_2} = \frac{-5A_1 \pm \sqrt{25A_1^2 - 16A_1^2}}{8A_1^2} =$$

$$= \frac{-5A_1 \pm 3A_1}{8A_1^2} = \frac{-5 \pm 3}{8A_1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{1}{A_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{4A_1}$$

Таким образом получено решение:

$$u_1 = e^{-\frac{1}{A_1}z}, \quad u_2 = e^{-\frac{1}{4A_1}z}$$

Подставляя

$$u = e^{-\frac{1}{A_1}z}, \quad u' = -\frac{1}{A_1}e^{-\frac{1}{A_1}z}, \quad u'' = \frac{1}{A_1^2}e^{-\frac{1}{A_1}z}, \quad Q = u'_z + \frac{uu''_{zz}}{u'_z} =$$

$$= -\frac{2}{A_1}e^{-\frac{1}{A_1}z}$$

в (32) получим уравнение для определения $\psi(t)$.

$$\psi'_t = T_0[u\varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2 Q(z)] = T_0[e^{-\frac{1}{A_1}z}\cdot\frac{2A_1C_1^2}{(C_1x+C_2)^2} +$$

$$+ \frac{4A_1^2C_1^2}{(C_1x+C_2)^2}\cdot(-\frac{2}{A_1}e^{-\frac{1}{A_1}z})]$$

$$\psi'_t = \frac{-6T_0A_1C_1^2e^{-\frac{1}{A_1}z}}{(C_1x+C_2)^2} = \frac{-6T_0A_1C_1^2e^{-\frac{1}{A_1}(\varphi+\psi)}}{(C_1x+C_2)^2} = \frac{-6T_0A_1C_1^2(e^{\varphi}e^{\psi})^{-\frac{1}{A_1}}}{(C_1x+C_2)^2}$$

$$\psi'_t = \frac{-6T_0A_1C_1^2[(\frac{-2A_1}{C_1x+C_2})^{2A_1}e^{\psi}]^{-\frac{1}{A_1}}}{(C_1x+C_2)^2} \quad \Rightarrow \quad \psi'_t = -\frac{3}{2}\frac{T_0C_1^2}{A_1}e^{-\frac{\psi}{A_1}} \quad \Rightarrow$$

$$\int e^{\frac{\psi}{A_1}}d\psi = -\frac{3}{2}\frac{T_0C_1^2}{A_1}\int dt \quad \Rightarrow \quad A_1e^{\frac{\psi}{A_1}} = -\frac{3}{2}\frac{T_0C_1^2}{A_1}(t+C_3) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\psi}{A_1} = \ln\left|-\frac{3}{2}\frac{T_0C_1^2}{A_1^2}(t+C_3)\right| \Rightarrow \quad \psi = A_1\ln\left|-\frac{3}{2}\frac{T_0C_1^2}{A_1^2}(t+C_3)\right|$$

Таким образом получено решение:

$$u = e^{-\frac{1}{A_1}z}, \quad z = 2A_1\ln\left|\frac{-2A_1}{(C_1x+C_2)}\right| + A_1\ln\left|-\frac{3}{2}\frac{T_0C_1^2}{A_1^2}(t+C_3)\right| \qquad (42)$$

Проверено, если $u = e^{-\frac{1}{4A_1}z}$, то $\psi \equiv$const, что случай малоинтересен.

Проверка была выполнена аналитическим методом.

Замечание. Если функциональные коэффициенты в (33) переопределить таким образом:

$$\phi_1 = \varphi'''_{xxx}, \quad \phi_2 = \varphi'_x\varphi''_{xx}, \quad \phi_3 = (\varphi'_x)^3, \quad \psi_1 = u,$$

$$\psi_2 = u'_z + 2Q(z), \quad \psi_3 = Q'_z$$

то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi'''_{xxx} = A_1(\varphi'_x)^3 \\ \varphi'_x\varphi''_{xx} = A_2(\varphi'_x)^3 \\ Q'_z = -A_1u - A_2(u'_z + 2Q(z)) \end{cases}. \qquad (43)$$

Первые два уравнения (43) совместны в двух случаях:

$$A_1 = A_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = B_1x + B_2, \quad A_1 = 2A_2^2$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{A_2}\ln|B_1x + B_2| \qquad . \quad (44)$$

Первое уравнение в (44) в конечном итоге приводит к решению уравнения (12) типа бегущей волны $u=u(B_1x+B_2t)$, а второе решение (44) – к решению вида $u=u(x^2/t)$. В этих случаях функция u в уравнении (12) произвольна.

Метод №4. Метод расщепления.

Решение ищем в виде функции сложного аргумента:

u=u(z), z=φ(ξ)+ψ(t), ξ=x+at, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}(\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}+\psi'_t)=\frac{\partial u}{\partial z}(\varphi'_\xi a+\psi'_t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial z}\varphi'_\xi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot(\frac{\partial z}{\partial \xi})^2\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot(\frac{\partial z}{\partial \xi})^2+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot(\varphi'_\xi)^2+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\varphi''_{\xi\xi}$$

Подставим вычисленные производные в уравнение (12)

$$u'_z(\varphi'_\xi a+\psi'_t)=T_0[u'^2_z(\varphi'_\xi)^2+u(u''_{zz}\cdot(\varphi'_\xi)^2+ +u'_z\cdot\varphi''_{\xi\xi})]. \quad (45)$$

В дальнейшем следуем методу №3. Делим уравнение (45) на u'_z

$$\varphi'_\xi a+\psi'_t=T_0[u'_z(\varphi'_\xi)^2+\frac{uu''_{zz}\cdot(\varphi'_\xi)^2}{u'_z}+u\cdot\varphi''_{\xi\xi})]. \quad (46)$$

Обозначим $Q(z)=u'_z+\frac{uu''_z}{u'_z}$, где u=u(z), тогда уравнение (46) запишется

$$a\varphi'_\xi+\psi'_t=T_0[u\varphi''_{\xi\xi}+(\varphi'_\xi)^2Q(z)]. \quad (47)$$

Дифференцируя (47) по x, имеем

$$a\varphi''_{\xi\xi}\xi'_x=T_0[u'_z\varphi'_\xi\xi'_x\varphi''_{\xi\xi}+u\varphi'''_{\xi\xi\xi}\xi'_x+2\varphi'_\xi\varphi''_{\xi\xi}\xi'_xQ(z)+ +(\varphi'_\xi)^2Q'_z\varphi'_\xi\xi'_x]\ \Rightarrow$$

$$-a\varphi''_{\xi\xi}+T_0[u\varphi'''_{\xi\xi\xi}+\varphi'_\xi\varphi''_{\xi\xi}[u'_z+2Q(z)]+ +(\varphi'_\xi)^3Q'_z]=0. \quad (48)$$

Полученное функционально-дифференциальное уравнение (48) с двумя параметрами ξ и z можно рассматривать как функциональное уравнение (8). Его решение строится по формулам (9) и позволяет записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций u=u(z), φ=φ(ξ).

$$\phi_1=-a\varphi''_{\xi\xi},\quad \phi_2=T_0\varphi'''_{\xi\xi\xi},\quad \phi_3=T_0\varphi'_\xi\varphi''_{\xi\xi},\quad \phi_4=T_0(\varphi'_\xi)^3$$

$$\psi_1=1,\quad \psi_2=u,\quad \psi_3=u'_z+2Q(z),\quad \psi_4=Q'_z \quad (49)$$

$$\begin{cases}-a\varphi''_{\xi\xi}=A_1T_0\varphi'_\xi\varphi''_{\xi\xi}+A_2T_0(\varphi'_\xi)^3\\ T_0\varphi'''_{\xi\xi\xi}=A_3T_0\varphi'_\xi\varphi''_{\xi\xi}+A_4T_0(\varphi'_\xi)^3\\ u'_z+2Q(z)=-A_1\cdot 1-A_3u\\ u'_z=-A_2\cdot 1-A_4u\end{cases}. \quad (50)$$

Очевидно, что первые два уравнения системы (50) имеют совместное решение, если $\varphi'_\xi=const\neq 0,\ и\ A_2=A_4=0$, но при таких A_2 и A_4 решение последнего уравнения системы (50) не существует.

Если $\varphi'_\xi=0$, то A_1, A_2, A_3, A_4 – любые и u(z) – любая.

Выводы и прогнозные предложения.

Таким образом, к пяти методам, рассмотренным в [1], добавляется еще четыре метода из данной статьи.

Метод №1.

$$u(z)=-\frac{1}{3}A_1z^2-\frac{2}{3}A_2z-\frac{1}{3}\frac{A_2^2}{A_1},\quad z=\varphi(t)x+\psi(t)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}x+\frac{C_2}{\sqrt{2A_1T_0t+C_1}}-\frac{A_2}{A_1}$$

Метод №2.

$$u(z)=-\frac{2}{3}A_1z-2A_3,\quad z=\varphi(t)x^2+\psi(t)=\frac{x^2}{4T_0A_1t+C_1}+$$

$$+\frac{C_2C_3}{(4T_0A_1t+C_1)^{\frac{1}{3}}}-\frac{3A_3}{A_1}$$

или

$$u=-\frac{2A_1}{3A_3}z-\frac{2A_1}{3A_3^2},\quad z=\frac{x^2}{4T_0\frac{A_1}{A_3}t+C_1}-\frac{1}{A_3}$$

Метод №3.

$$u=\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}e^{\frac{2}{5}A_1z},\quad z=\frac{8}{5}\cdot\frac{A_1}{A_2}\ln|C_1x+C_2|-$$

$$-\frac{5}{2A_1}\ln\left|-6T_0\left[\frac{1}{2A_1}\right]^{\frac{2}{5}}C_1^2t+C^*\right|$$

$$при\quad A_1^2>2A_2,\quad A_1^2=\frac{25}{8}A_2.$$

Метод №4.

Если, $\varphi'_\xi=const\neq 0,\ и\ A_2=A_4=0$ то решение не существует.

Если $\varphi'_\xi=0$, то A_1, A_2, A_3, A_4 – любые и u(z) – любая.

Решение остальных уравнений системы (11) определяется как в [1].

Какому методу отдать большее предпочтенье, может показать только их практическое применение.

На завершающем этапе для полного исследования и поиска аналитического решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде, надо применить тест **Фукса – Ковалевской – Пенлеве**, что будет содержанием следующей статьи.

Список литературы

1. Добровольский Ю.Н. Поиск аналитического решения модельной задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта) / Ю.Н. Добровольский

// Наукові праці ДонНТУ. Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка». – 2013. – Вип. 1(17). – С.85-93.

2. Павлыш В.Н. Численное решение задачи о напорной фильтрации газовой смеси в сплошной среде (на примере пневмообработки угольного пласта) / В.Н. Павлыш, Ю.Н. Добровольский // Збірник науково-методичних робіт ДонНТУ, кафедра "Вища математика". – 2005. – Вип. 3. – С.170-177.

3. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных / Э. Камке. – М.:Наука, 1966. – 320 с.

Надійшла до редакції 21.01.2014

Ю.М. ДОБРОВОЛЬСЬКИЙ
Донецький національний технічний університет

РОЗШИРЕННЯ ГРУПИ МЕТОДІВ ПОШУКУ АНАЛІТИЧНОГО РІШЕННЯ МОДЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПРО НАПІРНУ ФІЛЬТРАЦІЮ ГАЗОВОЇ СУМІШІ В СУЦІЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ (НА ПРИКЛАДІ ПНЕВМООБРОБКИ ВУГІЛЬНОГО ШАРУ)

Запропоновано нову серію аналітичних методів для рішення завдання про напірну фильтрацию газової суміші у суцільному середовищі. Наведено теоретичні відомості й практичні аспекти застосування методів.

Ключові слова: метод узагальненого й функціонального поділу змінних, метод розщеплення: рішення у вигляді функції складного аргументу лінійного щодо аргументу x, квадратичного щодо аргументу x, рішення у вигляді функції залежної від параметра ξ, лінійного щодо аргументу x і t.

Yu.N. DOBROVOLSKY
Donetsk National Technical University

EXPANSION OF A GROUP OF METHODS OF SEARCH OF AN ANALYTICAL SOLUTION OF THE MODEL TASK ABOUT THE PRESSURE HEAD FILTRATION OF THE GAS MIX IN THE CONTINUOUS ENVIRONMENT (ON THE EXAMPLE OF PNEUMOPROCESSING OF COAL LAYER).

A new series of analytical methods for the solution of the task of pressure head filtration of a gas mix in the continuous environment begun in [1] is offered. Theoretical data and practical aspects of application of methods are provided. In work [1] five analytical methods were offered: the simplest method of division of variables, solution search implicitly, solution search in the form of square function concerning argument x, solution search by differentiation, solution search in a parametrical form. In this article a general approach to the search of analytical methods for the solution of a model task on pressure head filtration of a gas mix is offered. The idea of all methods consists in the following:
a) this differential equation in private derivatives is considered as functional and differential equality, the variables in which are divided;
b) any functions depending on the same argument are entered, other functions linearly are defined through the entered ones so that they satisfy the given functional differential equality; after that the task breaks into simpler ones that finally leads to a system of ordinary differential equations.
Method No. 1. Method of the generalized and functional division of variables. The solution of the equation in the form of a function of a complex argument which is presented in the form of the sum of two functions of argument of t, one of which linearly depends on x, is looked for. Method No. 2. Splitting method. The solution of the equation in the form of a function of a complex argument which is presented in the form of the sum of two functions of argument of t, one of which quadratically depends on x, is looked for. Method No. 3. Splitting method. The solution of the equation in the form of a function of a complex argument which is presented in the form of the sum of two functions of various arguments is looked for. Method No. 4. Splitting method. The solution of the equation in the form of a function of a complex argument which is presented in the form of the sum of two functions one of which depends on parameter ξ is looked for. The solution of other equations of system (11) is defined as in [1]. Only practical application can show which method should be preferred. At the final stage for full research and the search of an analytical solution of a model task about pressure head filtration of a gas mix in the continuous environment it is necessary to apply Fuchs – Kovalevsky – Painleve test, and that will be the subject of the next article.