

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»  
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»  
М. М. Чальцев  
18.04.2013 р.

Кафедра «Опір матеріалів і будівельна механіка»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
З САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ДО ВИКОНАННЯ  
РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ «РОЗРАХУНОК  
СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ ТА  
ЖОРСТКІСТЬ» З ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»  
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.060101  
«БУДІВНИЦТВО»)**

**10/45-2013-15**

«РЕКОМЕНДОВАНО»  
Навчально-методична комісія  
факультету  
«Автомобільні дороги»  
Протокол № 3  
від 21.11.2012 р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»  
Кафедра  
«ОМ і БМ»  
Протокол № 4  
від 14.11.2012 р.

УДК 539.41(071)

Методичні вказівки з самостійної роботи студентів до виконання розрахунково-проектувальної роботи «Розрахунок статично визначуваної балки на міцність та жорсткість» з дисципліни «Опір матеріалів» (для студентів напряму підготовки 6.060101 «Будівництво») [Електронний ресурс] / укладачі: М. М. Чальцев, Л. М. Хникін, В. О. Космак. – Електрон. дані. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2013. – 1 електрон. опт. диск (CD-R); 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 MB RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 97–2000. – Назва з титул. екрану.

Наведено короткі теоретичні відомості до розрахунку статично визначуваних балок на міцність і жорсткість та приклади виконаних завдань. Методичні вказівки містять варіанти індивідуальних завдань і додаткові матеріали.

Укладачі: Чальцев М. М., д.т.н., проф.  
Хникін Л. М., к.т.н., доц.  
Космак В. О., доц.

Відповідальний за випуск: Космак В. О., доц.

Рецензент: Крамар М. П., к.т.н., доц.  
каф. «Технічна експлуатація  
автомобілів»

©Державний вищий навчальний заклад  
«Донецький національний технічний університет»  
Автомобільно-дорожній інститут, 2013

## ЗМІСТ

1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ.....	4
2 РОЗРАХУНОК СТАТИСТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ.....	4
2.1 Короткі теоретичні відомості.....	4
2.2 Приклад розрахунку балки на міцність і жорсткість.....	10
ДОДАТОК А Балки двотаврові (згідно з ДСТУ 8239-72) .....	26
ДОДАТОК Б Варіанти індивідуальних завдань .....	27

## 1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Курс «Опір матеріалів» є однією з основних розрахункових дисциплін для студентів будівельників і служить базою для розрахунку конструкцій спеціальних дисциплін.

Виконання розрахунково-проектувальної роботи (РПР) дає можливість засвоїти й закріпити отримані в процесі її виконання теоретичні знання та практичні методи розрахунку.

## 2 РОЗРАХУНОК СТАТИСТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ

### 2.1 Короткі теоретичні відомості

З метою наочності аналізу напружено-деформованого стану балки будуються епюри: поперечних сил  $Q_y$ , згинальних моментів  $M_z$ , нормальних ( $\sigma$ ) і дотичних ( $\tau$ ) напружень, кутів повороту ( $\theta$ ) і прогинів ( $y$ ).

Для розрахунку на міцність нормальні напруження  $\sigma$  у довільній точці  $K$  поперечного перерізу балки можна обчислити за формулою (рис. 2.1).

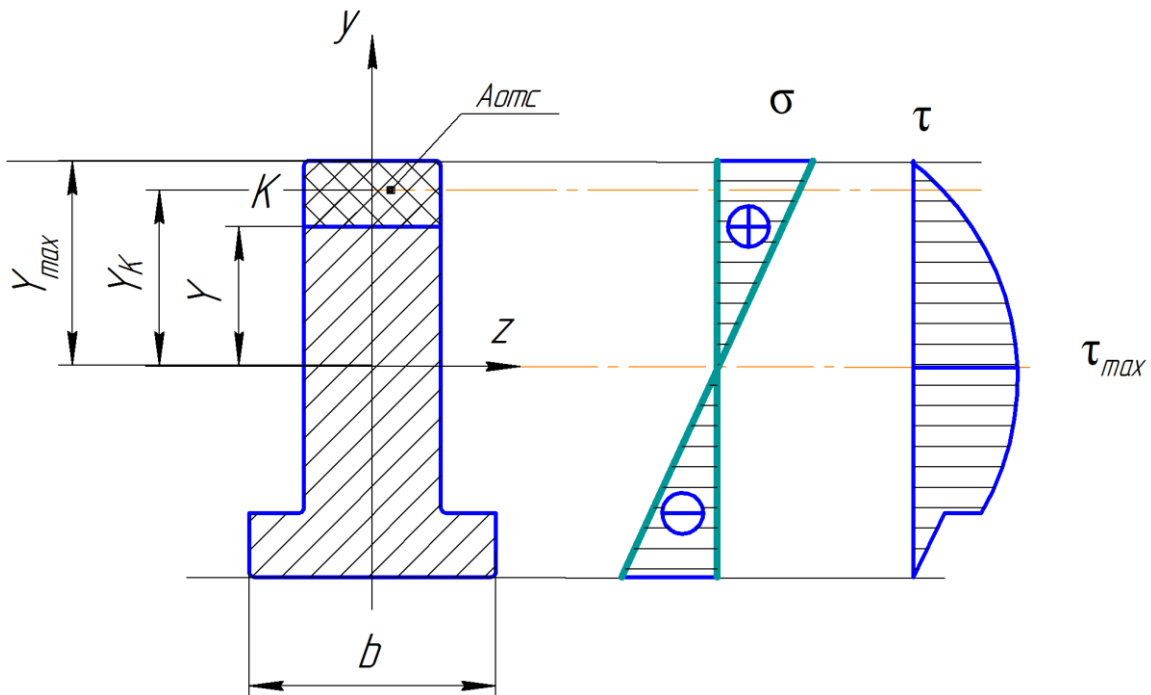


Рисунок 2.1 – Епюри нормальних ( $\sigma$ ) і дотичних ( $\tau$ ) напружень

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y_k}{I_z}, \quad (2.1)$$

де  $M_z$  – згинальний момент у перерізі, кНм;

$y_k$  – координата точки, де обчислюються нормальні напруження, м;

$I_z$  – осьовий момент інерції відносно осі  $z$ ,  $m^4$ .

Найбільші нормальні (по модулю) напруження виникають у найбільш віддалених точках перетину балки від центру ваги перерізу. Умова міцності по нормальним напруженням, для балок матеріал яких однаково чинить опір розтягуванням і стисненням, мають вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} \leq R, \quad (2.2)$$

де  $R$  – напруга, що допускається при розтягуванні (стиску), (розрахунковий опір);

$|M_z^{\max}|$  – максимальний згинальний момент на епюрі  $M_z$ ;

$W_z$  – момент опору перерізу, що визначається за формулою:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (2.3)$$

де  $y_{\max}$  – координата найбільш віддаленої точки від центру перетину. Дотичні напруження визначаються за формулою Д. І. Журавського:

$$\tau_p = \frac{Q_y \cdot S_z^{omc}}{b(y) \cdot I_z},$$

де  $b(y)$  – ширина перерізу балки на рівні точок з координатами  $y$ ;

$S_z^{omc}$  – статичний момент площі частини перерізу, що розташований вище рівня відсіченої частини:

$$S_z^{omc} = A_{omc} \cdot y_1. \quad (2.4)$$

Міцність балки по дотичним напруженням перевіряється з умови:

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_z^{\max}}{b(y) \cdot I_z} \leq R_{cp}, \quad (2.5)$$

де  $R_{cp}$  – допустиме дотичне напруження матеріалу балки; (розрахунковий опір на зріз);

$S_z^{\max}$  – статичний момент площі перерізу, що розташований вище або нижче нейтральної осі.

Балки з поперечним перерізом, в яких окремі елементи змінюються стрибкоподібно, наприклад, таврова, двотаврова балка або балка складена зі швелерів, в місці різкої зміни ширини перевіряється по теоріях міцності:

За третьою теорією  $\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R;$  (2.6)

За четвертою теорією  $\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R.$  (2.7)

У цьому випадку небезпечним є той переріз балки, де комбінація  $Q_y$  і  $M_z$  беруть досить великі значення.

З метою розрахунку балки на жорсткість будують епюри прогинів ( $y$ ) і кутів повороту ( $\theta$ ) перетинів. У балках постійної жорсткості зручно користуватися універсальними рівняннями за методом початкових параметрів:

$$y_x = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + \theta_0 \frac{x^3}{6} + \frac{\sum M(x-a_m)^2}{2} + \frac{\sum P(x-a_p)^3}{6} + \frac{\sum q(x-a_q)^4}{24} \right]$$

$$\theta_x = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[ M_0 \frac{x}{12} + \theta_0 \frac{x^2}{2} + \sum M(x-a_m) + \frac{\sum P(x-a_p)^2}{2} + \frac{\sum q(x-a_q)^3}{6} \right], \quad (2.8)$$

де  $y_0, \theta_0$  – початкові параметри, прогин і кут повороту балки на початку координат (рис. 2.2).

$M, P, q$  – зосереджені моменти, сили та розподілені навантаження балки.

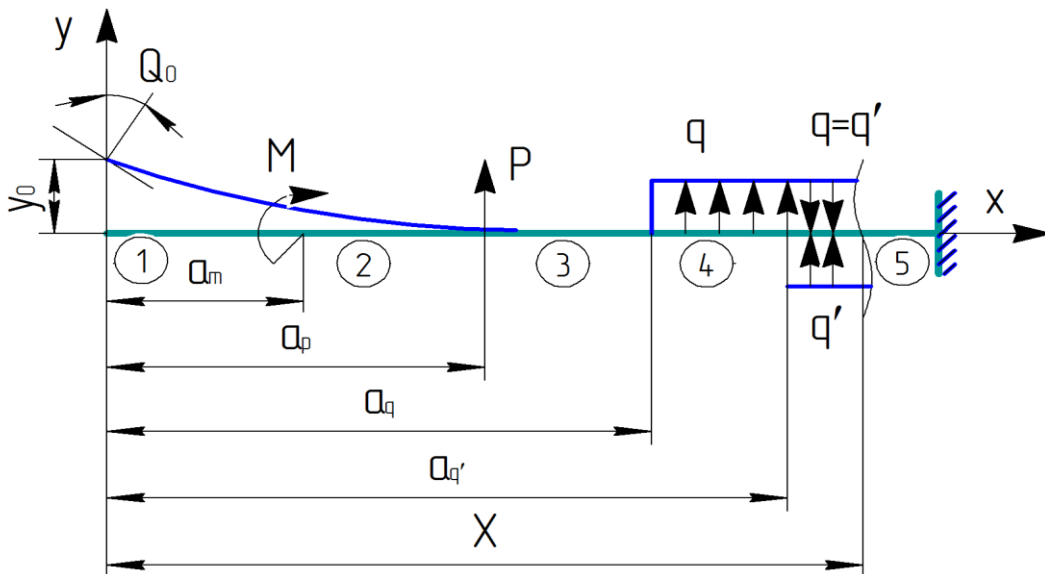


Рисунок 2.2 – До розрахунку балки за методом початкових параметрів

Знак  $\sum$  вказує на те, що однотипних силових факторів може бути декілька, оскільки вплив їх усіх має бути обліково-алгебраїчною сумою. Причому знак додання цієї суми повинен збігатися зі знаком згинального моменту, що викликаний даним силовим фактором.

При переході від однієї ділянки до другої, рівняння початкових параметрів записуються з урахуванням тих силових факторів, що розташовані зліва від поточного перетину розглянутої ділянки. Унаслідок цього виходять аналітичні вирази для прогинів і кутів повороту на кожній ділянці. Переймаючись коор-

динатами точок відповідних ділянок, можна послідовно вивчити закономірність зміни прогинів і кутів повороту на кожному з них і побудувати епюри. При цьому слід використовувати співвідношення:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}; \quad \frac{dy}{dx} = \Theta(x), \quad (2.9)$$

які дозволяють уточнити поведінку епюр на кожній ділянці. Так, якщо в деякій точці ділянки  $M_z = 0$ , тоді  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ , а це вказує на те, що ця точка є точкою перегину, де змінюється кривизна епюри прогинів, тобто опуклість на увігнутість і навпаки. Якщо в деякій точці  $\frac{dy}{dx} = \Theta = 0$ , то це вказує на наявність екстремуму функції прогину в цій точці.

При переході через точки екстремуму на епюрі прогинів повинен змінюватися знак кутів повороту. Якщо на якійсь ділянці  $M_z = 0$ , то кривизна осі балки буде дорівнювати нулю. У цьому випадку точки осі балки переміщуються, а вісь балки залишається прямолінійною. Кут повороту по всій довжині балки буде постійною величиною. Якщо на даній ділянці балки  $\frac{dy}{dx} > 0$ , то на цій ділянці функція прогинів ( $y$ ) буде зростаючою, а при  $\frac{dy}{dx} < 0$  – спадною.

Параметри  $y_0$  і  $\theta_0$  знаходять з граничних умов (рис. 2.3).

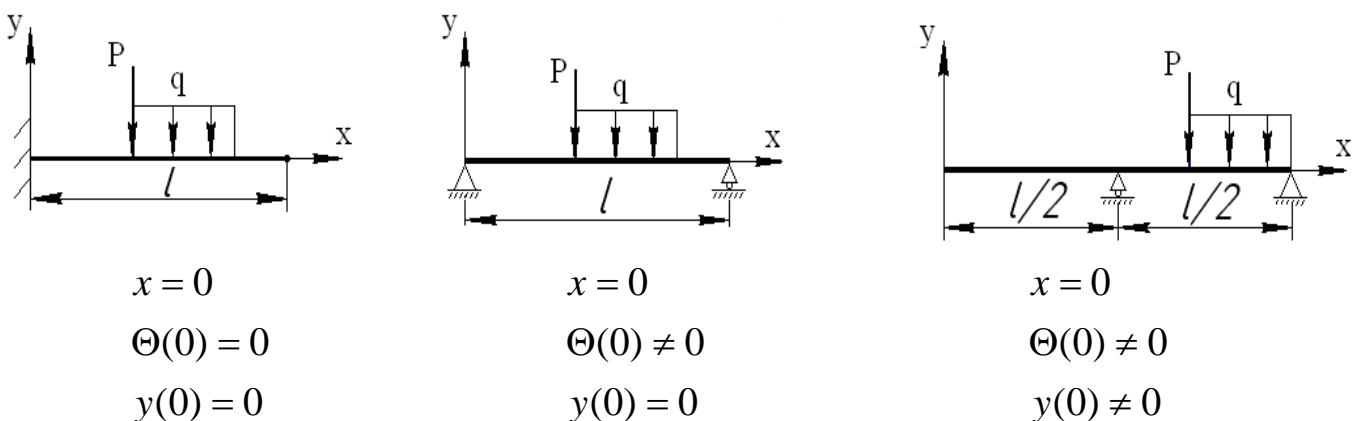


Рисунок 2.3 – До визначення початкових параметрів  $y_0, \theta_0$

Умови жорсткості балки запишемо у вигляді:

$$y_{\max} = \frac{1}{K} \leq [f], \quad (2.10)$$

де  $[f]$  – дозволений прогин балки, визначається за нормами проектування;

$l$  – довжина проекту балки,  
 $K$  – коефіцієнт, що залежить від типу споруди або машини  
 ( $K = \frac{l}{200} \dots \frac{l}{2000}$ ).

Крім методу початкових параметрів, для визначення прогинів і кутів повороту, що застосовують для балок, є також енергетичний метод. Формула О. Мора застосовується для балок зі східчасто-змінною жорсткістю й стержнів з ламаною віссю.

$$\Delta = \sum \int \frac{M_z(x) \cdot \bar{M}_z(x)}{EI_z} dx, \quad (2.11)$$

де інтегрування поширюється на довжину  $l$  ділянки балки,  $M_z(x)$ ,  $\bar{M}_z(x)$  – вираження згинальних моментів у вантажному та одиничному стані відповідно. Якщо згинальна жорсткість  $EI_z$  балки постійна, то інтегрування можна замінити виразом:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega \cdot y_c}{EI_{zi}}, \quad (2.12)$$

де  $\sum_{i=1}^n$  – підсумовування виконується по всіх ділянках системи;

$\omega$  – площа епюри вантажного стану, яка будується від зовнішнього навантаження;

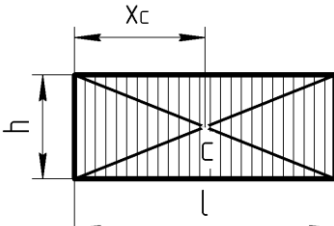
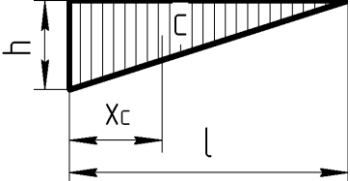
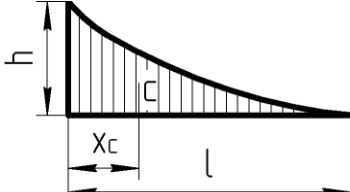
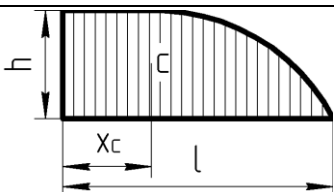
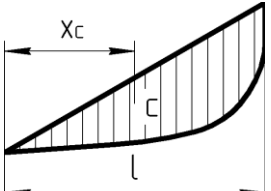
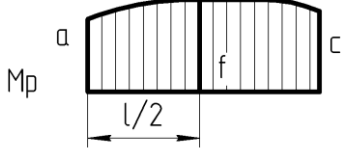
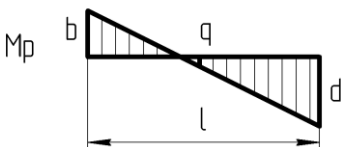
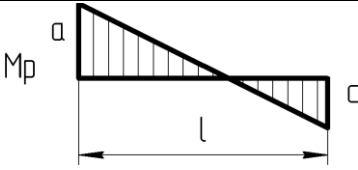
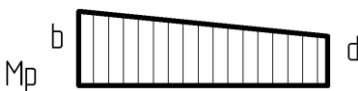
$y_c$  – ордината одиничного навантаження, що побудована від одиничної сили  $\bar{P} = 1$  або одиничного моменту  $\bar{M}_z(x) = 1$  (безрозмірних), які прикладаються в перетинах де потрібно визначити або прогин, або кут повороту відповідно. Ординати  $y_c$  обчислюються під центром ваги епюри ( $\omega$ ) вантажного стану.

Під  $\Delta$  слід розуміти прогин або кут повороту, в залежності від цього й обирається одиничний стан; (при визначенні прогину – одинична сила, ( $\bar{P} = 1$ ), при визначенні кута повороту – одинична пара, ( $\bar{M}_z = 1$ )). Цей метод запропонований А. М. Верещагіним у 1925 році.

Для обчислення переміщень за способом Верещагіна потрібно знати вираження площ і відстаней до центрів ваги тих фігур, які найчастіше зустрічаються в епюрах моментів. Ці дані наведено в табл. 2.1.



Таблиця 2.1 – Визначення площ вантажних епюр та їх центрів ваги

Фігури	Площа епюр, $\omega$	$x_c$ – координата центра епюри
	$lh$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{l}{3}$
	$\frac{lh}{3}$	$\frac{l}{4}$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{8}l$
	$\frac{2}{3}lh = \frac{ql^3}{12}$ $q^* = \text{const}$	$\frac{l}{2}$
 		$\sum \omega y_i = \frac{l}{6}(ab + 4fq + cd)$
 		$\sum \omega y_i = \frac{l}{6}(2ab + 2cd + ad + bc)$ формула Сімпсона – Карнаухова

Тут  $a, b, c, d, f, q$  – ординати епюр вантажних і одиничних моментів зі своїми знаками.

## 2.2 Приклад розрахунку балки на міцність і жорсткість

Для заданої балки (рис. 2.4) побудувати епюри поперечних сил  $Q_y$  і згинальних моментів  $M_z$ . Провести підбір перерізу балки з умови міцності за нормальними напруженнями та виконати повну перевірку міцності балки (з третьої теорії міцності). Застосовуючи метод початкових параметрів, визначити кути повороту й прогини трьох перерізів у прольоті та на кінцях консолей. Перевірити балку на жорсткість, для цього графічно або аналітично визначити максимальний прогин і порівняти його з допустимим, якщо виявиться  $y_{\max} > [y]$ , підібрати переріз балки за умовою жорсткості. Перевірити отримані результати, застосовувавши будь-який інший спосіб визначення деформацій: прогин і кут повороту кінця консолі – за формулою Мора, решта переміщення – за способом Верещагіна. Використовуючи дані визначення кутів повороту й прогинів та епюру згинальних моментів, побудувати епюри кутів повороту та прогинів. У розрахунку прийняти: допустимі нормальні напруження  $R = 160$  МПа, допустимі дотичні напруження  $R_{cp} = 100$  МПа, модуль пружності першого роду  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, допускається прогин  $[\delta] = \frac{I}{500} l = \frac{I}{500} \cdot 4 = 0,008$  м.

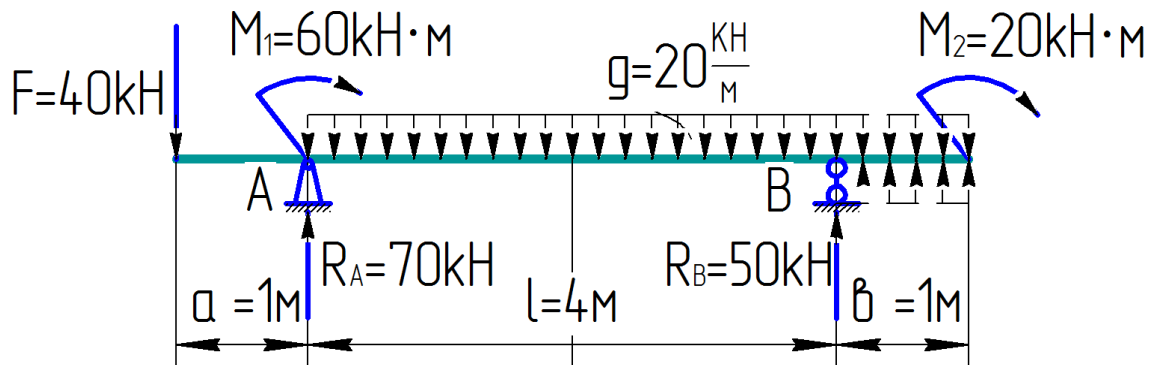


Рисунок 2.4 – До розрахунку статично визначуваної балки на міцність і жорсткість

1. Побудова епюр  $Q_y$  та  $M_z$ .

1.1 Визначення реакцій опор балки.

$$\sum M_B = 0; \quad -F(a+l) + M_1 + R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M_2 = 0$$

$$R_A = \frac{F(a+l) - M_1 + q \frac{l^2}{2} - M_2}{l} = \frac{40(1+4) - 60 + 20 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 20}{4} = 70 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot a + M_1 + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot l + M_2 = 0;$$

$$R_B = \frac{-F \cdot a + M_1 + q \cdot \frac{l^2}{2} + M_2}{l} = \frac{-40 \cdot 1 + 60 + 20 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{2} + 20}{4} = 50 \text{ кН.}$$

Перевірка:  $\sum Y = 0$ ;  $-F + R_A - q \cdot l + R_B = 0$ ;  
 $-40 + 70 - 20 \cdot 4 + 50 = 0$ .

1.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів. Запишемо рівняння поперечних сил  $Q_y$  і згинальних моментів  $M_z$ :

а) ділянка 1  $0 \leq x_1 \leq a = 1 \text{ м}$ ;

$$Q_y = -F = -40 \text{ кН};$$

$$M_z = -F \cdot x_1 = -40 \cdot x_1; \quad M_{z, x_1=0} = 0;$$

$$M_{z, x_1=a} = -40 \cdot 1 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

б) ділянка 2  $0 \leq x_2 \leq a + l$ ;

$$O_y = -F + R_A - q(x_2 - a) = -40 + 70 - 20(x_2 - 1) = 30 - 20(x_2 - 1);$$

$$Q_{y, x_2=a} = 30 - 20(1 - 1) = 30 \text{ кН};$$

$$Q_{y, x_2=a+l} = Q_{y, x_2=5} = 30 - 20(5 - 1) = -50 \text{ кН};$$

$$M_z = -F \cdot x_2 + R_A \cdot (x_2 - a) + M \frac{q \cdot (x_2 - a)}{2} =$$

$$= -\frac{20(x_2 - 1)^2}{2} + 70(x_2 - 1) - 40 \cdot x_2 + 60;$$

$$M_{z, x_2=1} = -\frac{20}{2}(1 - 1)^2 + 70(1 - 1) - 40 \cdot 1 + 60 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z, x_2=5} = -\frac{20}{2}(5 - 1)^2 + 70(5 - 1) - 40 \cdot 5 + 60 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Визначимо  $M_{z, \max}$

$$\frac{dM_z}{dx} = -20(x_2 - 1) + 70 - 40 + 0 = -20 \cdot x_2 + 20 + 30 = 0;$$

$$x_2 = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ м};$$

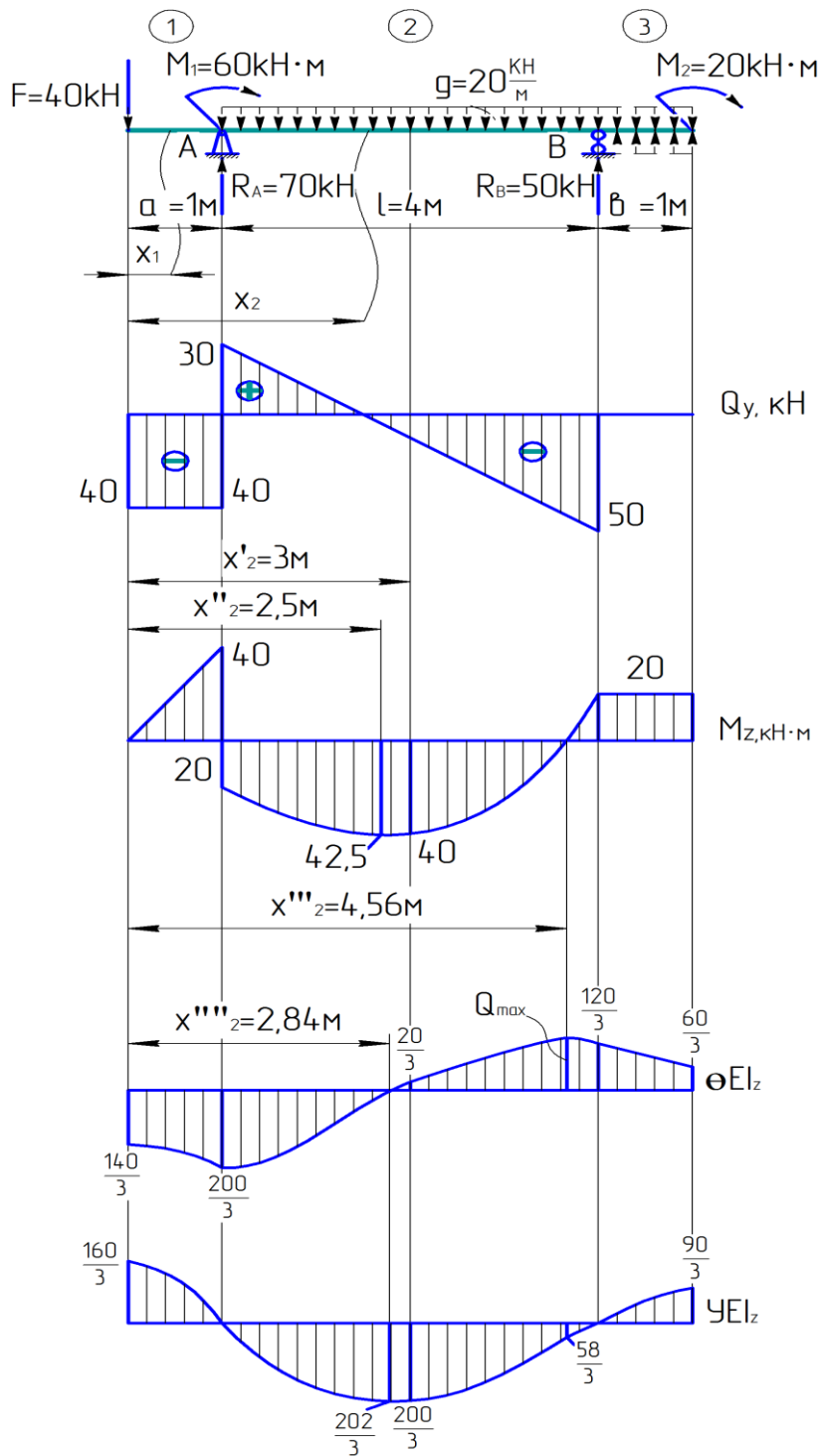


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема та епюри внутрішніх зусиль і переміщень

$$M_{z\max} = M_{z, x_2=2,5\text{m}} = -10(2,5-1)^2 + 70(2,5+1) - 40 \cdot 2,5 + 60 = 42,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Визначимо переріз, в якому  $M_z = 0$

$$M_z = -F \cdot x_2 + R_A(x_2 - a) + M_1 - q \frac{(x_2 - a)^2}{2} = 0;$$

$$-40x_2 + 70x_2 - 70 + 60 - \frac{20}{2}(x_2 - 1)^2 = 0; \quad x_2^2 - 5 \cdot x_2 + 2 = 0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння, отримаємо  $x_2 = 4,56$  м.

Вирахуємо значення  $M_z$  у середньому перерізі прольоту, тобто при

$$x_2 = \frac{1}{2} + a = 2 + 1 = 3 \text{ м.}$$

$$M_{zx_2=3\text{м}} = -\frac{20(3-1)^2}{2} + 70(3-1) - 40 \cdot 3 + 60 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

в) ділянка 3  $0 \leq x_3 \leq e = 1$  м; (справа наліво)

$$Q_y = 0; \quad M_z = -M_2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

## 2. Підбір перерізу двотаврової балки

Так як  $M_{z_{\max}} = 42,5$  кН·м, то з умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} \leq R \Rightarrow W_z^{mp} = \frac{|M_z^{\max}|}{R} = \frac{42,5 \cdot 10^{-3}}{160} = 266 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 266 \text{ см}^3.$$

За сортаментом для двотаврової балки № 22а (ГОСТ 8239-72)

$$W_z^{mp} = 254 \text{ см}^3$$

$$\frac{\sigma_{\max} - R}{R} \cdot 100 \% = \frac{W_z - W_{z_{N22a}}}{W_{z_{N22a}}} \cdot 100 \% = \frac{266 - 254}{254} \cdot 100 \% = 4.7 \% < 5 \% .$$

Для двотавру № 24

$$W_z^{mp} = 289 \text{ см}^3$$

$$\frac{\sigma_{\max} - R}{R} \cdot 100 \% = \frac{W_z - W_{z_{N24}}}{W_{z_{N24}}} \cdot 100 \% = \frac{266 - 289}{289} \cdot 100 \% = -8 \% .$$

Приймаємо двотавр № 22а, в якого

$$W_z = 254 \text{ см}^3; \quad I_z = 2790 \text{ см}^4; \quad S_z^o = 143 \text{ см}^3; \quad h = 22 \text{ см};$$

$$b = 12 \text{ см}; \quad t = 0,89 \text{ см}; \quad d = 0,54 \text{ см.}$$

Максимальне нормальне напруження в крайньому волокні небезпечного перерізу

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z_{\max}}}{W_z} = \frac{42,5 \cdot 10^{-3}}{254 \cdot 10^{-6}} = 163 \text{ МПа.}$$

## 2.1 Перевірка міцності балки за дотичними напруженнями:

$$Q_{y_{\max}} = 50 \text{ кН.}$$

Перевіряємо міцність двотаврової балки по дотичним напруженням використовуючи формулу Журавського:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y_{\max}} \cdot S_{z_{\max}}^o}{d \cdot I_z} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{0,54 \cdot 10^{-2} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 47,5 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа.}$$

Міцність балки по дотичним напруженням забезпечена.

## 2.2 Перевірка міцності балки за головними напруженнями.

Щодо головних напружень несприятливим є переріз над лівою опорою (при підході до неї ліворуч), в якому  $M_z = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$  та  $Q_y = 40 \text{ кН}$ . Побудуємо епюри нормальних і дотичних напружень у цьому перерізі.

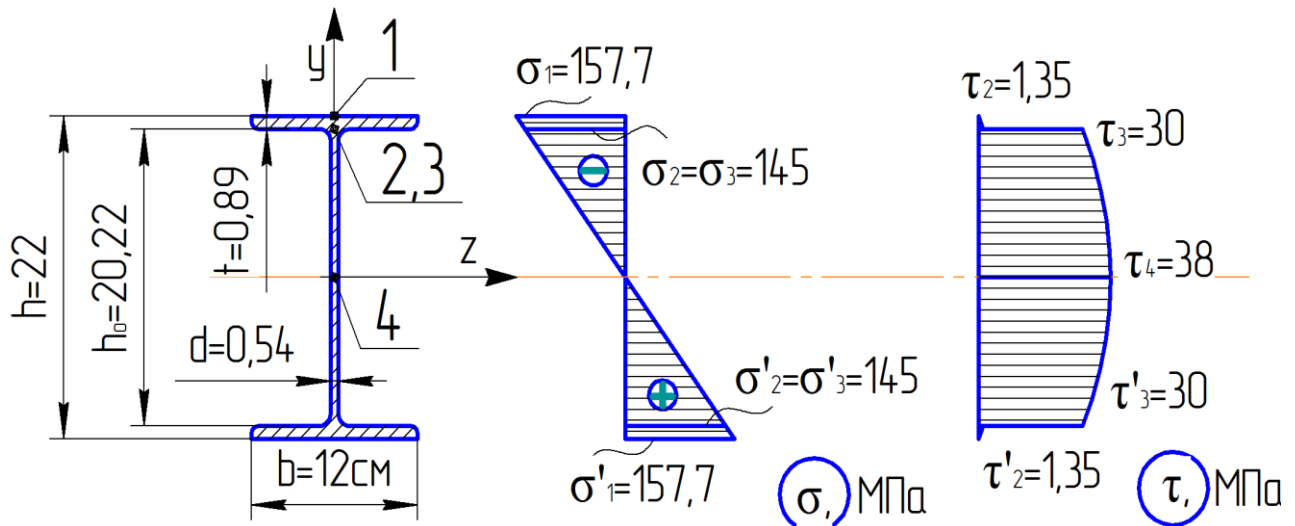


Рисунок 2.6 – Епюри  $\sigma$  та  $\tau$  для двотаврового перерізу

Нормальне напруження у довільній точці, що знаходиться на відстані  $y$  від нейтральної осі:

$$Y = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{2790 \cdot 10^{-8}} \cdot y = 1434y;$$

$$\sigma_{y=0} = 0; \quad \sigma_{y=\frac{h}{2}} = \sigma = \sigma_1 = 1434 \cdot 0,11 = 157,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{y=\frac{h_0}{2}} = \sigma'_2 = \sigma'_3 = 1434 \cdot 0,1011 = 145 \text{ МПа.}$$

Дотичне напруження у довільній точці, що знаходиться на відстані  $y$  від нейтральної осі

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^o}{d \cdot I_z};$$

$$\tau_1 = \frac{Q_y \cdot S_z^o}{b \cdot I_z} = -\frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 0}{12 \cdot 10^{-2} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 0;$$

$$\tau_2 = \frac{Q_y \cdot S_z^o}{b \cdot I_z} = -\frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 113 \cdot 10^{-8}}{12 \cdot 10^{-2} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = -1,35 \text{ МПа};$$

де

$$S_z^o = b \cdot t \cdot \frac{(h-t)}{2} = 12 \cdot 10^{-2} \cdot 0,89 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{(22-0,89)}{2} \cdot 10^{-2} = -113 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\tau_3 = \frac{Q_y \cdot S_z^o}{d \cdot I_z} = -\frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 113 \cdot 10^{-6}}{0,54 \cdot 10^{-2} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = -30 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 = \frac{Q_y \cdot S_z^o}{d \cdot I_z} = -\frac{40 \cdot 10^{-3} \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{0,54 \cdot 10^{-2} \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = -38 \text{ МПа},$$

$$\text{де } S_z^o = S_{z_{\max}}^o = 143 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

За отриманими значеннями побудовані епюри  $\sigma$  та  $\tau$  (див. рис. 2.6). Найбільш небезпечною точкою в несприятливому перерізі є точка 3. У цій точці

$$\sigma'_3 = |\sigma_3| = 145 \text{ МПа};$$

$$\tau'_3 = \tau_3 = -30 \text{ МПа}.$$

За третьою теорією міцності

$$\sigma'''_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{145^2 + 4 \cdot (-30)^2} \approx 157 \text{ МПа} \langle [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Прийнятий переріз задовольняє умовам міцності по дотичним і по головним напруженням.

3. Визначення переміщень методом початкових параметрів (МПП).

Формули кутів поворотів перерізів та прогинів балки по МПП можна записати в такому вигляді:

$$EI_z \theta = EI_z \theta_0 + \sum \frac{M(x-a_M)^1}{1!} + \sum \frac{F(x-a_P)^2}{2!} + \sum \frac{q(x-a_q)^3}{3!} - \sum \frac{q'(x-a_{q'})^3}{3!};$$

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot \frac{x}{1!} + \sum \frac{M(x-a_M)^2}{2!} + \sum \frac{F(x-a_P)^3}{3!} + \sum \frac{q(x-a_q)^4}{4!} -$$

$$- \sum \frac{q'(x-a_{q'})^4}{4!},$$

де  $y_0, \theta_0$  – геометричні початкові параметри на початку координат;  
 $m, F, q, q'$  – силові фактори;  
 $a_m, a_p, a_q, a_{q'}$  – координати перерізу, в яких прикладені відповідні силові фактори.

Знаходимо величини початкового кута повороту  $\theta_0$  і прогину  $y_0$ , помножені на  $EI_z$ , за умови, що при

- 1)  $x = a = 1$  м;  $y = 0$ ;
- 2)  $x = a + c = 5$  м;  $y = 0$ ;

$$1) EI_z y_{x=1 \text{ м}} = 0 = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot \frac{1}{1!} + \frac{M(1-1)^2}{2!} - \frac{F(1-0)^3}{3!} - \frac{R_A(1-1)^3}{3!};$$

$$EI_z y_0 + EI_z \theta_0 + 0 - \frac{P}{6!} + 0 = 0; \quad EI_z y_0 + EI_z \theta_0 = \frac{20}{3};$$

$$2) EI_z y_{x=5 \text{ м}} = 0 = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot \frac{5}{1!} + \frac{M(5-1)^2}{2!} - \frac{P(5-0)^3}{3!} - \frac{R_A(5-1)^3}{3!} -$$

$$- \frac{q(5-1)^4}{4!};$$

$$EI_z y_0 + 5EI_z \theta_0 + \frac{60 \cdot 4^2}{2} + \frac{40 \cdot 5^3}{6} + \frac{70 \cdot 4^3}{6} - \frac{20 \cdot 4^4}{24} = 0;$$

$$EI_z y_0 + 5EI_z \theta_0 = -\frac{540}{3}.$$

Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} EI_z y_0 + EI_z \theta_0 = \frac{20}{3}; \\ EI_z y_0 + 5EI_z \theta_0 = -\frac{540}{3}; \end{cases} \begin{cases} EI_z y_0 = \frac{20}{3} - EI_z \theta_0; \\ \frac{20}{3} - EI_z \theta_0 + 5EI_z \theta_0 = -\frac{540}{3}; \end{cases}$$

$$EI_z \theta_0 = -\frac{140}{3}; \quad EI_z y_0 = \frac{20}{3} - \left(-\frac{140}{3}\right) = \frac{160}{3}.$$



$$\text{Отже, } EI_z y_0 = \frac{160}{3}; \quad EI_z \theta_0 = -\frac{140}{3}.$$

Формули (рівняння) за якими визначають переміщення довільного перерізу будь-якої ділянки набувають вигляду:

$$EI_z \theta_0 = -\frac{140}{3} - \frac{40x^2}{2} \Big|_{0 \leq x \leq 1 \text{ м}} + \frac{70}{2} (x-1)^2 + 60(x-1) - \\ - \frac{20}{6} (x-1)^3 \Big|_{1 \leq x \leq 5 \text{ м}} + \frac{20}{6} (x-5)^3 \Big|_{5 \leq x \leq 6 \text{ м}};$$

$$EI_z y_0 = \frac{160}{3} - \frac{140}{3} x - \frac{40}{6} x^3 \Big|_{0 \leq x \leq 1 \text{ м}} + \frac{70}{6} (x-1)^3 + \frac{60(x-1)^2}{2} - \\ - \frac{20}{24} (x-1)^4 \Big|_{1 \leq x \leq 5 \text{ м}} + \frac{20}{24} (x-5)^4 \Big|_{5 \leq x \leq 6 \text{ м}}.$$

Для визначення переміщень перерізів 1-ї ділянки слід користуватися членами рівняння, що розташовані ліворуч від вертикальної риски з індексом 1. Для другої ділянки необхідно брати складові до межі з індексом 2, для третьої – з індексом 3.

Визначаємо  $EI_z \theta$  та  $EI_z y$  у таких перерізах:

$$EI_z \theta_{x=1 \text{ м}} = -\frac{140}{3} - \frac{40}{2} \cdot 1^2 = -\frac{200}{3};$$

$$EI_z \theta_{x=a+\frac{1}{2}} = EI_z \theta_{x=3 \text{ м}} = -\frac{140}{3} - \frac{140}{2} \cdot 3^2 + \frac{70}{2} (3-1)^2 + 60(3-1) - \\ - \frac{20}{6} (3-1)^3 = \frac{20}{3};$$

$$EI_z \theta_{x=a+1} = EI_z \theta_{x=5 \text{ м}} = -\frac{140}{3} - \frac{40}{2} \cdot 5^2 + \frac{20}{2} (5-1)^2 + 60(5-1) - \\ - \frac{20}{6} (5-1)^3 = \frac{120}{3};$$

$$EI_z \theta_{x=a+l+b} = EI_z \theta_{x=6 \text{ м}} = -\frac{140}{3} - \frac{40}{2} \cdot 6^2 + \frac{70}{2} (6-1)^2 + 60(6-1) - \\ - \frac{20}{6} (6-1)^3 + \frac{20}{6} (6-5)^3 + \frac{50}{2} (6-5)^2 = \frac{60}{3};$$

$$EI_z y_{x=a+\frac{l}{2}} = \frac{160}{3} - \frac{140}{3} \cdot 3 - \frac{40}{6} \cdot 3^3 + \frac{70}{6} (3-1)^3 + \frac{60}{2} (3-1)^2 - \frac{20}{24} (3-1)^4 = -\frac{200}{3};$$

$$EI_z y_{x=a+1+b} = EI_z y_{x=6 \text{ м}} = \frac{160}{3} - \frac{140}{3} \cdot 6 - \frac{40}{6} \cdot 6^3 + \frac{70}{6} (6-1)^3 + \frac{60}{2} (6-1)^2 - \frac{20}{24} (6-1)^4 + \frac{20}{24} (6-5)^4 + \frac{50}{6} (6-5)^3 = \frac{90}{3};$$

$$EI_z y_{x=4,56 \text{ м}} = \frac{160}{3} - \frac{140}{3} \cdot 4,56 - \frac{40}{6} \cdot 4,56^3 + \frac{70}{6} (4,56-1)^3 + \frac{60}{2} (4,56-1)^2 - \frac{20}{24} (4,56-1)^4 = -\frac{58}{3}.$$

#### 4. Визначення переміщень за формулою Мора.

При плоскому згині балок формула Мора має вигляд:

$$\Delta_{ip} = \sum \int_0^1 \frac{M_{zp} \cdot \bar{M}_z dx}{EI_z}$$

і визначення переміщень виконується в наступному порядку:

- 1) записуємо вираз  $M_{zp}$  як функції координати довільного перерізу;
- 2) розглядаємо додатковий стан системи; за напрямком шуканого переміщення прикладаємо відповідну йому одиничну силу або одиничний момент;
- 3) записуємо вираз  $\bar{M}_z$  від одиничної сили (одиничного моменту) як функцію координати довільного перерізу;
- 4) вирази зусиль  $M_{zp}$  та  $\bar{M}_z$

Визначимо прогин початкового перерізу:

1. Вираз  $M_{zp}$  як функції  $X$  довільного перерізу записаний на с. 13 та с.14.
2. Розглядаємо додатковий стан балки. У початковому перерізі докладаємо одиничну безрозмірну силу (рис. 2.7).

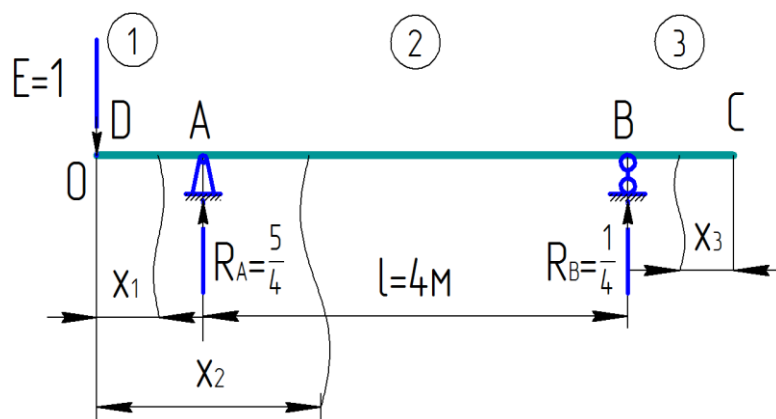


Рисунок 2.7 – Розрахункова схема одиничного стану для визначення прогину перерізу  $O$

1. Записуємо вираз для цього стану:

1 ділянка:  $\bar{M}_z = -1 \cdot x_1 = -x_1;$   
 $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$

2 ділянка:  $\bar{M}_z = -1 \cdot x_2 + \frac{5}{4}(x_2 - 1) = -x_2 + \frac{5}{4}(x_2 - \frac{5}{4}) = \frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{4};$   
 $1 \leq x_2 \leq 5 \text{ м.}$

3 ділянка:  $\bar{M}_z = 0;$   
 $0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м.}$

$$y_o = \frac{1}{EI_z} \left[ \int_0^1 (-40 \cdot x_1)(-x_1) dx_1 + \int_1^5 \left[ -\frac{20}{2}(x_2 - 1) + 70(x_2 - 1) - 40x_2 + 60 \right] dx_2 + \int_5^6 \left( \frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{4} \right) dx_2 + 0 \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_z} \left[ 40 \int_0^1 x_1^2 dx_1 + \int_1^5 (-10x_2^2 + 50x_2 - 20) \left( \frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{4} \right) dx_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_z} \left[ 40 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^1 + \int_1^5 \left( -\frac{10}{4}x_2^3 + \frac{100}{4}x_2^2 - \frac{270}{4}x_2 + \frac{100}{4} \right) dx_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{40}{3} x_1^3 \Big|_0^1 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x_2^4}{4} \Big|_1^5 + \frac{25}{3} \cdot x_2^3 \Big|_1^5 - \frac{270}{4 \cdot 2} x_2^2 \Big|_1^5 + 25x_2 \Big|_1^5 \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{40}{3} - \frac{5}{8}(5^4 - 1^4) + \frac{25}{3}(5^3 - 1^3) + 25(5 - 1) \right] = -\frac{160}{3EI_z}.$$

Знак «мінус» показує, що дійсне переміщення розглянутого перерізу  $u_0$  протилежно напрямку одиничної сили.

Визначимо кут повороту початкового перерізу:

1. Вираз  $M_{zp}$  такий як і в попередньому випадку.

2. Розглядаємо додатковий стан балки. У початковому перерізі докладаємо одиничний безрозмірний момент (рис. 2.8).

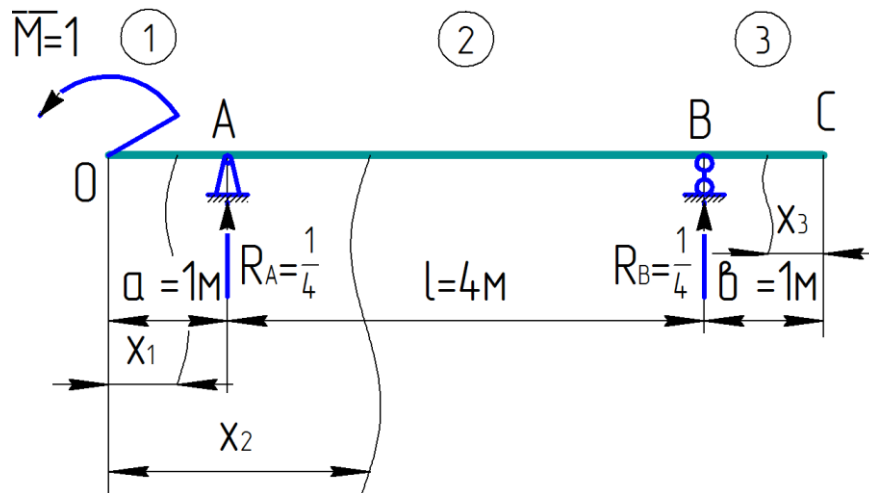


Рисунок 2.8 – Розрахункова схема одиничного стану для визначення кута повороту перерізу  $O$

3. Записуємо вираз для цього стану:

1 ділянка:  $\bar{M}_z = -1;$

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$$

2 ділянка:  $\bar{M}_z = -1 + \frac{1}{4}(x_2 - 1) = -1 + \frac{x_2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x_2}{4} - \frac{5}{4};$

$$1 \leq x_2 \leq 5 \text{ м.}$$

3 ділянка:  $\bar{M}_z = 0;$

$$5 \leq x_3 \leq 6 \text{ м.}$$

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{EI_z} \left[ \int_0^1 (-1)(-40 \cdot x_1) dx_1 + \int_1^5 \left[ -10x_2^2 + 50x_2 - 20 \right] \left( \frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{4} \right) dx_2 \right] = \\ &= \frac{1}{EI_z} \left[ \frac{40}{2} x_1^2 \Big|_0^1 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x_2^4}{4} \Big|_1^5 + \frac{25}{3} \cdot x_2^3 \Big|_1^5 - \frac{135}{2 \cdot 2} x_2^2 \Big|_1^5 + 25x_2 \Big|_1^5 \right] = \\ &= \frac{1}{EI_z} \left[ 20 - \frac{5}{8} \cdot 5^4 + \frac{5}{8} \cdot 1^4 + \frac{25}{3} \cdot 5^3 - \frac{25}{3} \cdot 1^3 - \frac{135}{4} \cdot 5^2 + \frac{135}{4} \cdot 1^2 + 25 \cdot 5 - 25 \cdot 1 \right] = -\frac{140}{3EI_z}. \end{aligned}$$

Знак «мінус» показує, що напрям кута повороту початкового перерізу  $\theta_0$  протилежний напрямку одиничного моменту.

## 5. Визначення переміщень за способом Верещагіна.

Спосіб Верещагіна для визначення переміщень зводиться до так званого перемножування епюр від заданого навантаження (дійсної або вантажної епюри) на одиничне. Переміщення (кут повороту або прогин) дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, що розташований під центром тяжіння епюри від заданого зовнішнього навантаження. Якщо вантажна епюра має складний вигляд, то її треба розбити на прості фігури, для яких легко визначити площу й положення центру тяжіння. При цьому треба кожен з площ помножити на ординату одиничної епюри під центром тяжіння відповідної площі. Загальна формула визначення переміщень за способом Верещагіна має вигляд:

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\omega_p \cdot y_c}{EI_z}; \quad EI_z \Delta_{ip} = \sum \omega_p \cdot y_c.$$

Для знаходження прогину в довільному перерізі, на додаток до побудованої вже епюри від зовнішнього навантаження, будуємо епюру моментів від одиничної сили, що прикладена в місці шуканого прогину (якщо визначається кут повороту, то у відповідному перерізі прикладається одиничний момент).

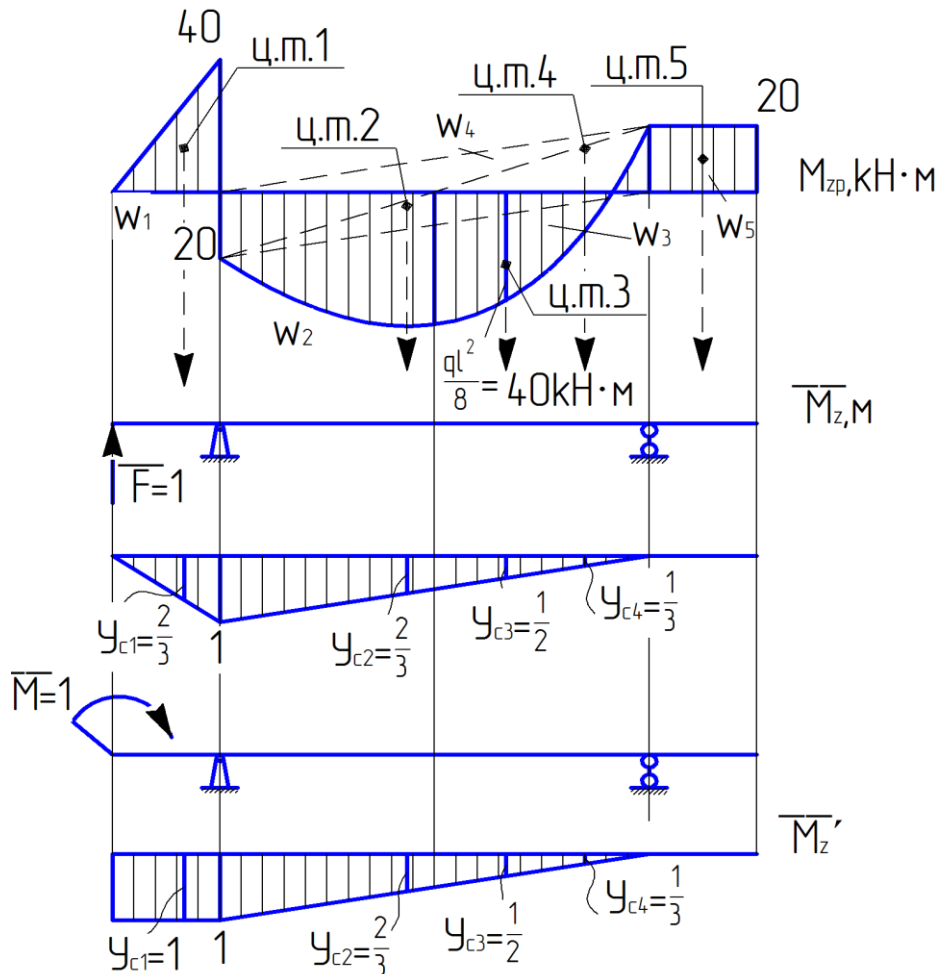


Рисунок 2.9 – Визначення прогину  $y_0$  і кута повороту  $\theta_0$  від заданого навантаження

$$EI_z y_0 = \sum \omega_i \cdot y_{ci} = \omega_1 \cdot y_{c1} + \omega_2 \cdot y_{c2} + \omega_3 \cdot y_{c3} + \omega_4 \cdot y_{c4} + \omega_5$$

$$y_{c5} = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{160}{3}.$$

$$EI_z \theta_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 40 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{120}{3}.$$

Додатні значення  $EI_z y_0$  та  $EI_z \theta_0$  пояснюються правильним вибором напрямів одиничної сили й моменту.

Обчислювати переміщення можна простіше, якщо при перемножуванні епюр складного контура (як на ділянці 2) застосовувати формулу Сімпсона – Карнаухова. Результат перемножування епюр на ділянці довжиною  $l$ , рівний:

$$\frac{l}{6}(ac + 4fq + bd),$$

де  $l$  – довжина ділянки балки;

$a, b$  – крайні ординати епюри від заданого навантаження;

$c, d$  – крайні ординати одиничної епюри;

$f, q$  – ординати посередині ділянки на обох епюрах (див. рис. 2.10).

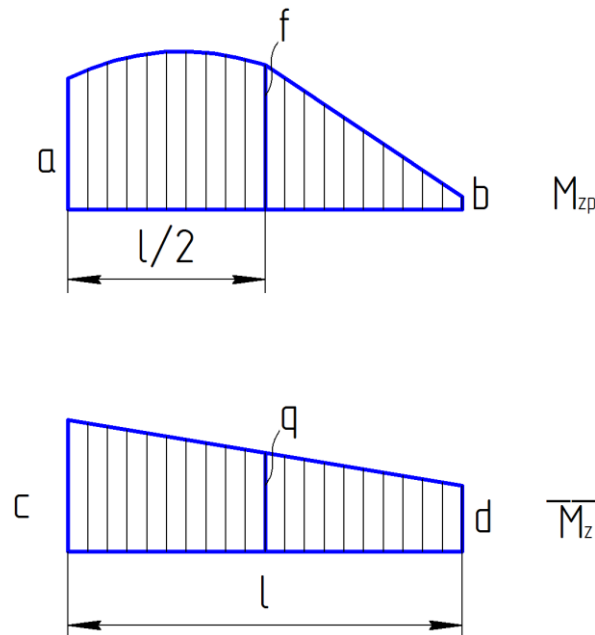


Рисунок 2.10 – Визначення переміщень за формулою Сімпсона – Карнаухова

$$EI_z y_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{160}{3};$$

$$EI_z \theta_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 40 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} = \frac{120}{3}.$$

Обчислимо кути повороту наступних перерізів балки: опорних, посередині балки, на правому кінці. Заздалегідь розрахуємо значення моментів від заданого навантаження в перерізах при  $x = a + \frac{1}{4}$  і при  $x = a + \frac{3}{4}l$ .

$$M_z \Big|_{x=a+\frac{1}{4}} = M_{x=2\text{ м}} = -\frac{20}{2}(2-1)^2 + 70(2-1) - 40 \cdot 2 + 60 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_z \Big|_{x=a+\frac{3}{4}l} = M_{x=4\text{ м}} = -\frac{20}{2}(4-1)^2 + 70(4-1) - 40 \cdot 4 + 60 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

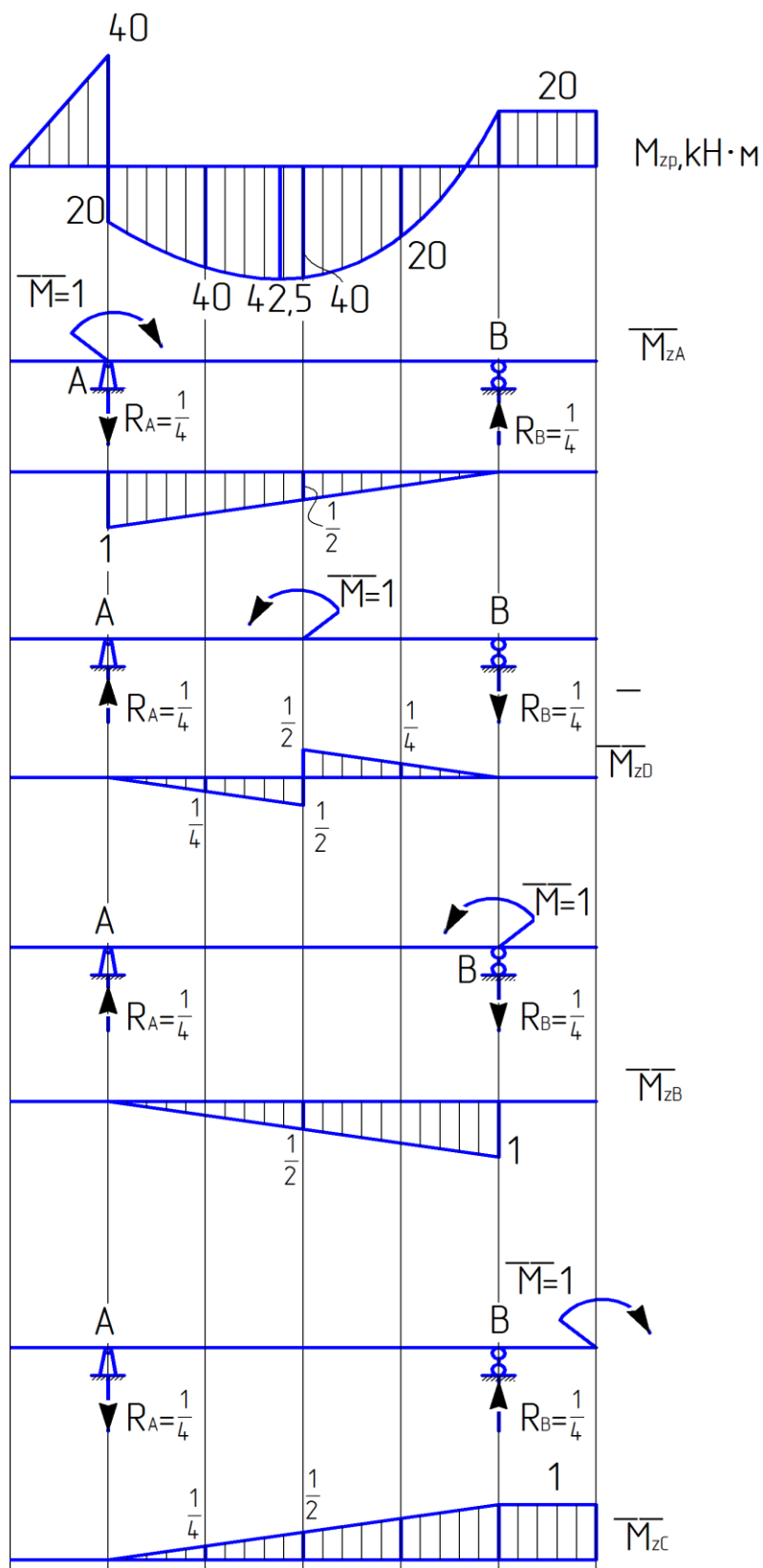


Рисунок 2.11 – Визначення кутів повороту перерізів A, D, B, C

Епюра  $M_{zp}$  від зовнішнього навантаження й необхідні одиничні епюри показано на рис. 2.11.

$$EI_z \theta_A = M_{zp} \cdot \bar{M}_{zA} = \frac{4}{6} (20 \cdot 1 + 4 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 0) = \frac{200}{3};$$

$$EI_z \theta_B = M_{zp} \cdot \bar{M}_{zB} = \frac{4}{6} (20 \cdot 0 + 4 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 1) = \frac{120}{3};$$

$$EI_z \theta_D = \frac{2}{6} (20 \cdot 0 + 4 \cdot 40 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{2}) + \frac{2}{6} (-40 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{4} + 20 \cdot 0) = \frac{20}{3};$$

$$EI_z \theta_C = \frac{4}{6} (20 \cdot 0 - 4 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2}) + 20 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{60}{3}.$$

Знак «мінус» показує, що дійсний напрям повороту перерізу буде протилежним прикладеному одиничному моменту.

Визначаємо прогини посередині балки – в перерізі  $D$  і на кінці правої консолі в перерізі  $C$  (рис. 2.12).

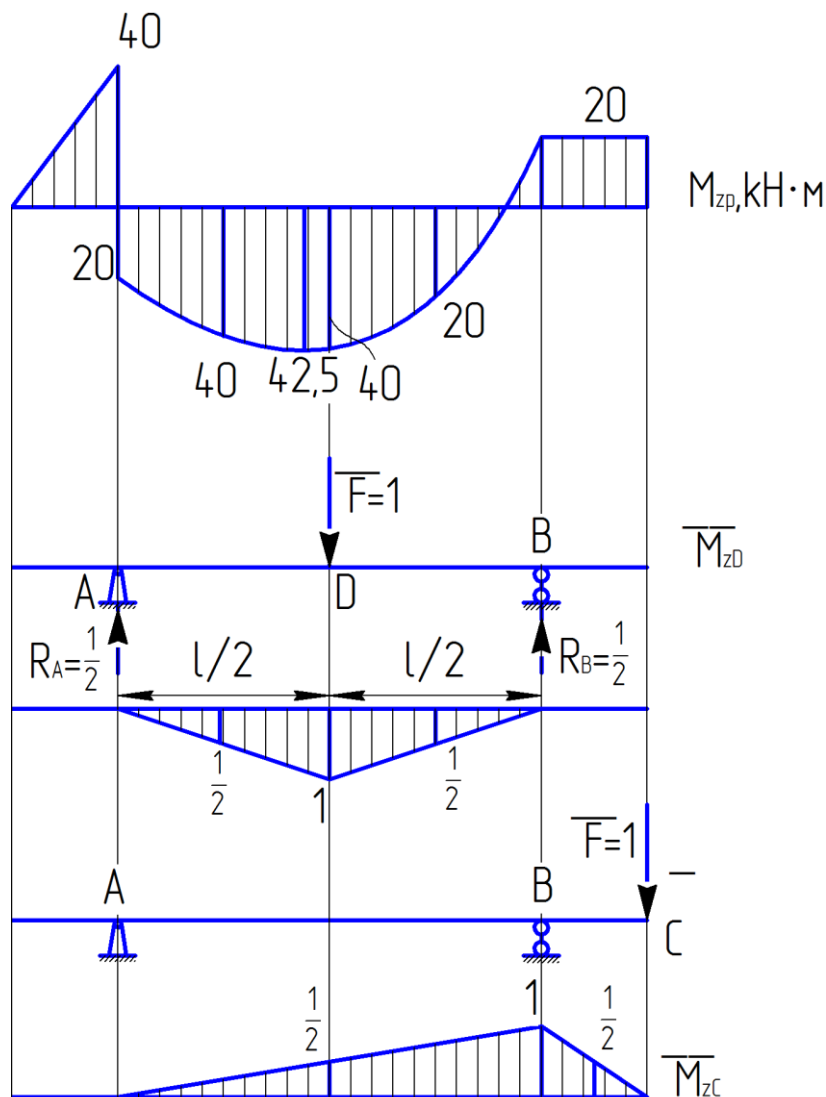


Рисунок 2.12 – Визначення прогинів балки в перерізах  $D$  і  $C$



Порівнюючи отримані значення переміщень, що вичислені способом Верещагіна, з відповідними значеннями переміщень, що отримані по МНП, робимо висновок, що похибка дорівнює 0.

За одержаними значеннями кутів повороту  $\theta$  і прогинів у будуємо відповідні епюри. У перерізі, де згинальний момент дорівнює 0, зігнута вісь балки змінює кривизну.

#### 6. Перевірка балки на жорсткість.

У прольоті балки прогин набуває найбільшого (по модулю) значення в перерізі, де  $\theta = 0$ . Використовуючи епюру  $\theta$ , визначаємо графічно переріз, де  $\theta = 0$ . Абсциса цього значення приблизно дорівнює 2,84 м.

Обчислимо  $y_{\max} = y_{x=2,84\text{ м}}$  за МПП:

$$EI_z y_{x=2,84\text{ м}} = \frac{160}{3} - \frac{140}{3} \cdot 2,84 - \frac{40}{6} \cdot 2,84^3 + 70 \frac{2,84^3}{6} + 60 \frac{2,84^2}{2} - 20 \frac{2,84^4}{24} = -\frac{202}{3}.$$

$$y_{\max} = \frac{202}{3EI_z} = \frac{202 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2790 \cdot 10^{-8}} = 0,012 \text{ м.}$$

$$1,2 \text{ см} > [y] = 0,8 \text{ см.}$$

Визначаємо необхідний момент інерції, а значить і номер двотаврової балки з умови жорсткості.

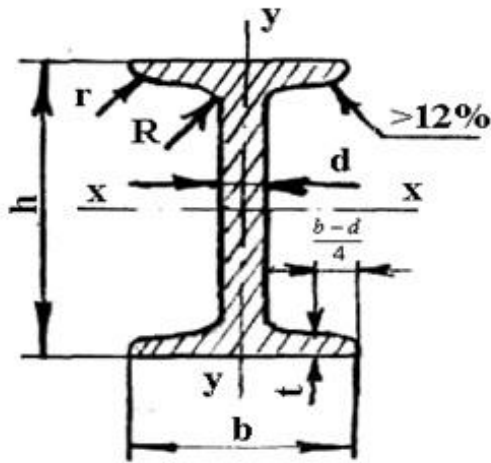
$$y_{\max} = \frac{202}{3EI_z} \leq [y];$$

$$I_z \geq \frac{202}{3E[y]} = \frac{202 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,008} = 3366 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 3366 \text{ см}^4.$$

Приймаємо двотаврову балку № 27, в якій  $I_z = 5010 \text{ см}^4$ .

Варіанти індивідуальних завдань до виконання розрахунково-проектувальної роботи видаються викладачем відповідно до додатка Б.

**ДОДАТОК А**  
**БАЛКИ ДВОТАВРОВІ (згідно з ДСТУ 8239-72)**

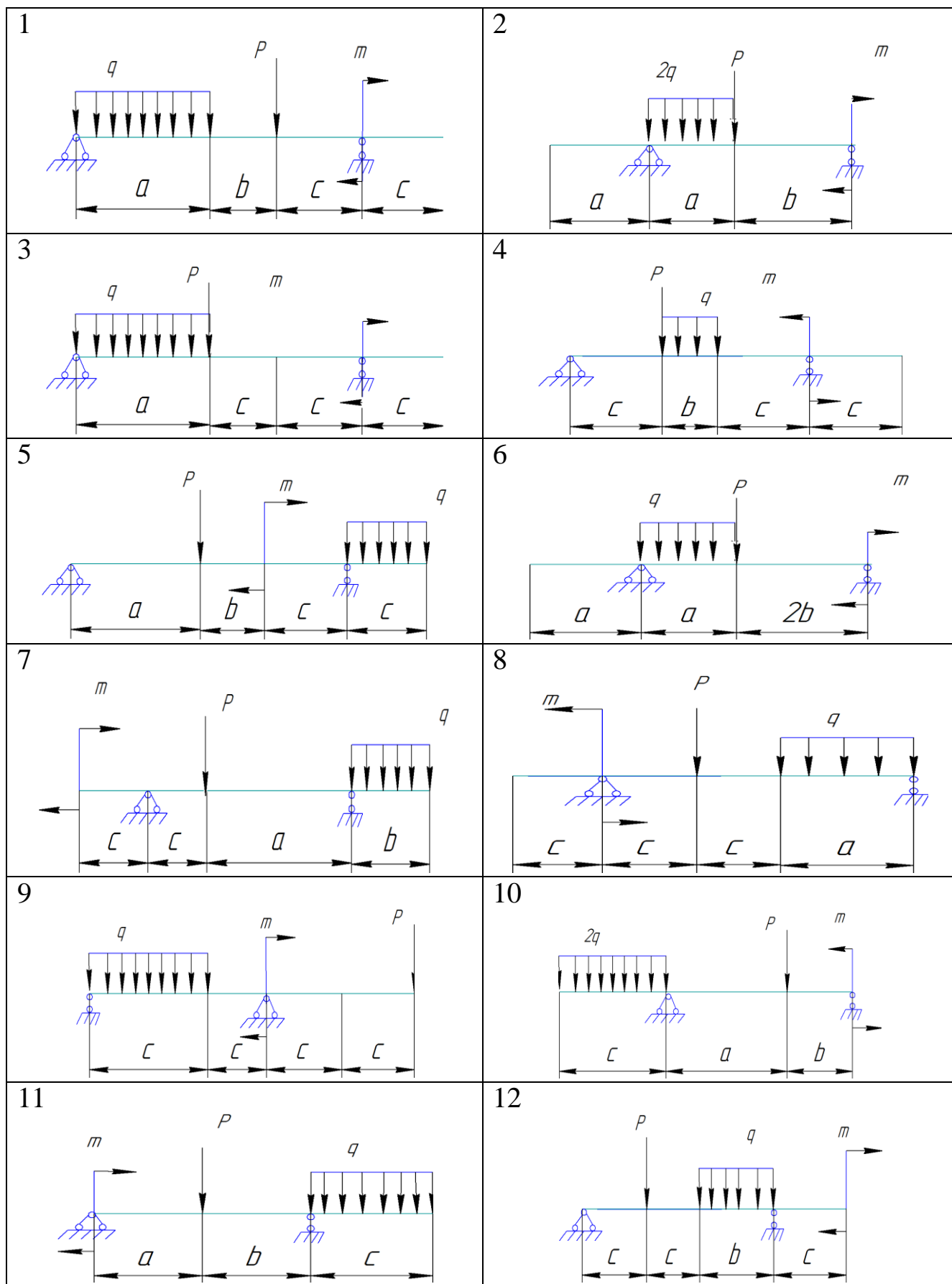


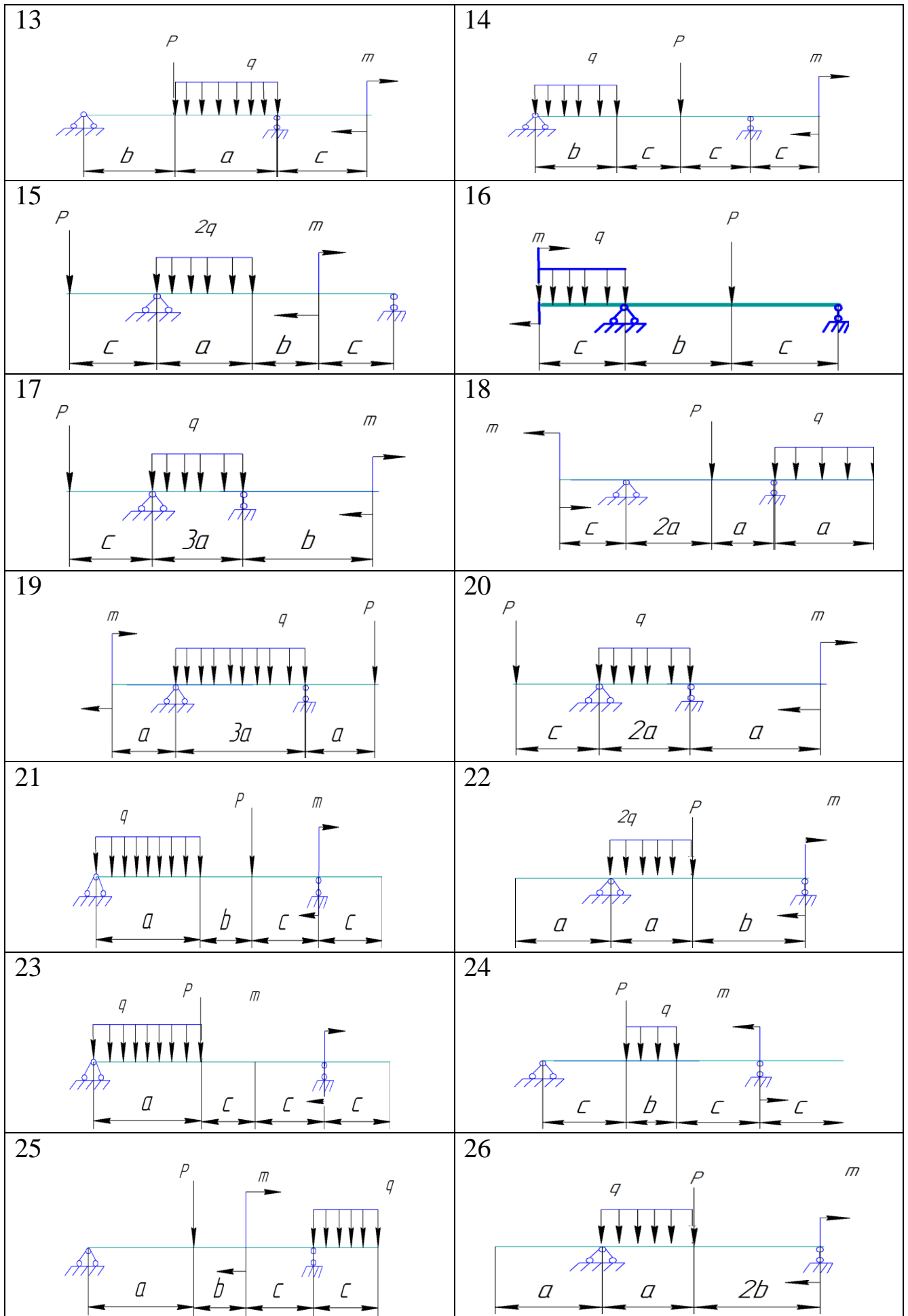
Таблиця А.1 – До індивідуальних завдань

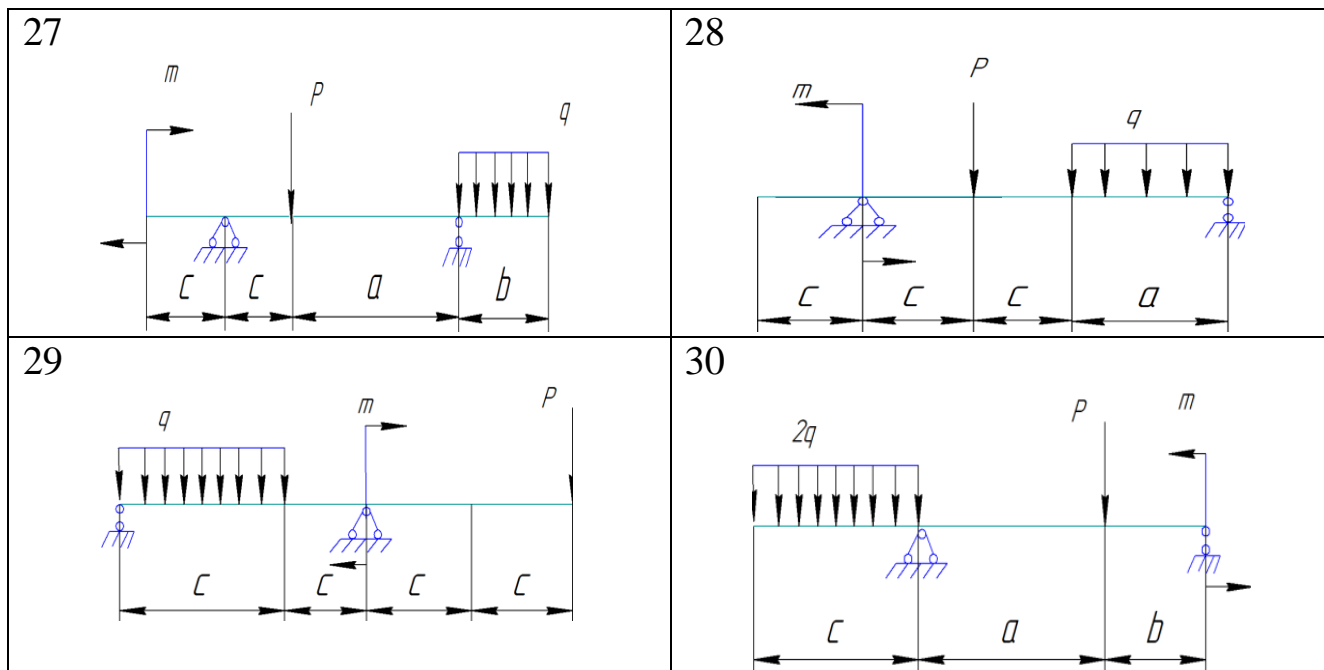
№ з/п	Розміри, мм				A, см <sup>2</sup>	Довідкові величини для осей					
						z-z			y-y		
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>		<i>I<sub>z</sub></i>	<i>W<sub>z</sub></i>	<i>S<sub>z</sub></i>	<i>I<sub>y</sub></i>	<i>W<sub>y</sub></i>	Маса, кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	23	17,9	6,49	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	33,7	27,9	8,72	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	46,8	41,9	11,5	13,7
16	160	81	5	7,8	20,2	873	109	62,3	58,6	14,5	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,2	1290	143	81,4	82,6	18,4	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	89,8	114	22,8	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104	115	23,1	21
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	114	155	28,2	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131	157	28,6	24
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	143	206	34,3	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	178	260	41,6	29,4
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5	31,5
27a	270	135	6	10,2	43,2	5500	407	229	337	50	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	292	436	60,1	39,2
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1	48,6
40	400	155	8,3	13	72,6	19062	963	545	667	86,1	57
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	708	808	101	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	919	1043	123	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	1181	1356	151	92,6
60	600	196	12	17,8	138	76806	2560	1491	1725	182	108

## ДОДАТОК Б

### ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ







ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

**Чальцев Михайло Миколайович**  
**Хникін Леонід Михайлович**  
**Космак Володимир Олексійович**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**З САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ДО ВИКОНАННЯ**  
**РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ «РОЗРАХУНОК**  
**СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНОЇ БАЛКИ НА МІЦНІСТЬ ТА**  
**ЖОРСТКІСТЬ» З ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»**  
**(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.060101**  
**«БУДІВНИЦТВО»)**

Підписано до випуску 18.04.2013 р. Гарнітура Times New.  
Умов. друк. арк. 1,87. Зам. № 103.

---

Державний вищий навчальний заклад  
«Донецький національний технічний університет»  
Автомобільно-дорожній інститут  
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51  
E-mail: druknf@rambler.ru

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів  
видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007 р.



