МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО–ДОРОЖНІЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»
М.М. Чальцев
06.12.2011 р.

Кафедра «Опір матеріалів та будівельна механіка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ
«ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 6.070106
«АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»)

10/37-2011-02

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична комісія
факультету «Автомобільний
транспорт»
Протокол № 2
від «19» 09 2011р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра
«Опір матеріалів та
будівельна механіка»
Протокол №_1
від «20»09 2011р.

Горлівка – 2011

УДК 539.3(07)

Методичні вказівки з дисципліни «Теоретична механіка» до виконання розрахунково–проектувальної роботи «Динаміка матеріальної точки» (для студентів спеціальності 6.070106 «Автомобільний Транспорт») [Електронний ресурс] / укладачі: М.М. Чальцев, Т.І. Алтухова, М.В. Неклюдов. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2011. – 1 електрон. опт. диск (CD–ROM): 12 см. – Системні вимоги: Pentium; 32 Mb RAM; WINDOWS 98/2000/NT/XP; MS Word 97–2000. – Назва з титул. екрану.

Наведено короткі відомості з курсу «Теоретична механіка» та приклади розрахунку. Надано варіанти індивідуальних завдань.

Укладачі: Чальцев М.М., к.т.н, проф.
Алтухова Т.І.
Неклюдов М.В.

Відповідальний за випуск: Чальцев М.М., к.т.н, проф. каф. «Опір матеріалів та будівельна механіка»

Рецензент: Кізілов В.В., к.т.н, доц. каф. «Будівельно-дорожні машини і деталі машин»

ЗМІСТ

Вступ

Дані методичні вказівки мають на меті ознайомити студентів механічних спеціальностей з послідовністю і порядком виконання розрахунково-графічних робіт з динаміки матеріальної точки.

Методичні вказівки включають в себе відомості з розділу "Динаміка матеріальної точки" курсу теоретичної механіки. Особлива увага приділяється розгляду питання складання розрахункових схем механічних об'єктів і послідовності розв'язку задач з динаміки матеріальної точки.

В методичних вказівках наведено приклади виконання розрахунково-графічних робіт.

1 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1 Основні припущення розрахунку. Розрахункові формули

Механічний рух завдяки своїй простоті і популярності є формою руху, що найбільше вивчається.

Часто для складання уявлення про рух деякого об’єкта цілком достатньо знати закон руху центра маси цього об’єкта. В таких випадках розрахункова схема об’єкта може бути сильно спрощена і представлена у вигляді матеріальної точки, до якої прикладені всі сили, які діють на об’єкт. Математичне рівняння для такої схеми руху описується одним векторним рівнянням. Способи складання і методи інтегрування диференційного рівняння руху матеріальної точки викладаються в розділі механіки, яка називається динамікою матеріальної точки.

Для матеріальної точки, що рухається відносно умовно нерухомої системи координат, у відповідності з аксіомами динаміки, диференційне рівняння руху можна записати у вигляді:

$$m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \,, \tag{1.1}$$

де m – маса матеріальної точки;

$\overline{a}$ – прискорення точки.

Векторна сума всіх, діючих на точку сил представляє собою рівнодіючу цих сил. Згідно з аксіомою динаміки напрямок прискорення $\overline{a}$ співпадає з напрямком рівнодіючої всіх сил $\sum_{K=1}^{n} \overline{F}_K$.

Для отримання диференційного рівняння руху матеріальної точки в деякій системі координат необхідно векторне рівняння (1.1) спроектувати на вісі цієї системи координат.

В прямокутній системі декартових координат, враховуючи співвідношення між прискоренням, швидкістю і координатами, отримаємо:

$$\begin{cases} ma_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} \\ ma_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} \\ ma_z = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} ,або \quad \begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} ,або \quad \begin{cases} m\ddot{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} \\ m\ddot{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} \\ m\ddot{z} = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} \tag{1.2}$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz}$ – проекції рівнодіючої всіх сил, діючих на точку, на ті ж осі.

1.2 Послідовність розв’язку задач динаміки матеріальної точки

При розв’язанні задач динаміки точки зручно дотримуватися наступної послідовності:

1) скласти розрахункову схему;
2) обрати систему координат;
3) записати початкові умови руху точки;
4) скласти диференційні рівняння руху;
5) розв’язати складені рівняння;
6) проаналізувати отримані результати;
7) визначити шукані величини.

Матеріальна точка (в подальшому просто – точка) з прикладеними до неї зовнішніми силами представляє собою розрахункову схему. Для її складання на заданій схемі зображають можливу траєкторію руху точки. Показують початкове, кінцеве і деяке проміжне положення точки. Для зручності орієнтування координатних осей необхідно вказати напрямок швидкості точки у вибраному довільному проміжному положенні точки. Слід пам’ятати, що напрямок вектора швидкості співпадає з напрямком руху точки вздовж дотичної до траєкторії. У випадку прямої лінії – співпадає з траєкторією. Далі показуємо всі діючі на тіло сили і реакції зв’язків для вибраного проміжного положення точки.

Початок декартової системи координат часто обирають в початковому положенні точки. Напрямок осей координат обирають таким чином, щоб координати точки і проекції вектора швидкості точки на ці осі були додатними для вибраного довільного положення точки.

Початкові умови руху визначають положення точки та її швидкості в деякий фіксований момент часу. Частіше ці умови записують для початкового моменту часу $t = 0$. В цьому випадку початкові умови записуються у вигляді: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ – координати точки та $v_x = v_{x0}$, $v_y = v_{y0}, v_z = v_{z0}$ – проекції швидкості на осі вибраної системи координат. У випадку, коли початок координатних осей співпадає з початковим положенням точки, початкові умови спрощуються: $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = 0$, $z = z_0 = 0$.

Для складання диференційних рівнянь необхідно на координатні вісі спроектувати всі сили, які діють на точку в довільному проміжному положенні і підставити суму проекцій всіх сил в праву частину рівнянь (1.2).

Метод інтегрування рівнянь залежить від виду диференційних рівнянь руху, що визначаються характером діючих сил.

Після інтегрування рівнянь руху точки визначають сталі інтегрування, використовуючи для цього початкові умови, записані вище. Іноді вдається проінтегрувати рівняння у визначених межах, тоді використовують для нижньої межі початкове значення підінтегральної величини, а для верхньої – кінцеве.

1.3 Приклад розрахунку

Тіло рухається з точки ***A*** на ділянці ***AB*** (довжина якої l) похилої площини, що утворює кут $\boldsymbol{\alpha}$ з горизонтом, протягом $\boldsymbol{\tau}$ секунд. Його початкова швидкість v_A. Коефіцієнт тертя ковзання тіла з площиною становить f .

В точці ***B*** тіло залишає площину ***AB*** зі швидкістю v_B і падає зі швидкістю v_C в точці ***C***, залишаючись в повітрі ***T*** секунд.

Задачу розв'язати при наступних вихідних даних:

$\alpha = 30^o$; $v_A = 35\ ^{м}\!/_{c}$; $f \neq 0$; $l = 8\ м$; $d = 10\ м$; $\beta = 60^O$.

Необхідно визначити: v_B ; $\boldsymbol{\tau}$; рівняння траєкторії на ділянці ***BC*** $y = f(x)$; T ; v_C .

Розв'язок.

Всі невідомі величини можуть бути визначені, якщо тіло розглядати як матеріальну точку. На ділянках ***AB*** і ***BC*** на цю точку діють різні сили, тому будемо досліджувати рух точки на цих ділянках окремо.

Ділянка АВ.

На похилій площині позначимо точку, що рухається (рис. 1.1) в початковому положенні (точка ***A***), кінцевому положенні (точка ***B***) і в довільному положенні. Позначимо напрямок швидкості точки в довільному положенні точки. В цій точці покажемо всі діючі сили: власну вагу $m\overline{g}$, силу тертя $\overline{F}_{тер}$, реактивну силу тиску $\overline{N}$.

Точка рухається прямолінійно вздовж похилої площини, тому її положення на цій площині можна визначити однією координатою. Проте для визначення характеру руху точки на ділянці ***AB*** виберемо плоску прямокутну систему координат з початком в точці ***A***. Ось A_{x_1} покажемо вздовж площини, в напрямку швидкості точки.

Запишемо початкові умови.

При $t = 0$ точка знаходиться в положенні ***A***. Відповідно маємо: $x = x_A = 0; v = v_A$.

При $t = \tau$, коли точка знаходиться в положенні ***B***. Відповідно маємо: $x = x_B = l;\ v = v_B$.

Диференційне рівняння руху точки (1.2) складаємо в декартових координатах для осей x_1 і y_1:

$$m\ddot{x}_1 = -mg\sin\alpha - F_{тер}, \tag{1.3}$$

$$m\ddot{y}_1 = N - mg\cos\alpha, \tag{1.4}$$

де $\overline{F}_{тер}$ – сила тертя, визначається за формулою:

$$F_{тер} = f \cdot N. \tag{1.5}$$

З рівняння (1.4), враховуючи що $y_1 = const$, а тому $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$N = mg\cos\alpha. \tag{1.6}$$

Підставивши рівняння (1.5) і (1.6) в рівняння (1.3), отримаємо:

$$m\ddot{x}_1 = -mg\sin\alpha - f \cdot mg\cos\alpha. \tag{1.7}$$

Оскільки $m \neq 0$, тому скорочуємо рівняння на цю величину і, виконуючи елементарні перетворення, отримаємо диференційне рівняння руху точки:

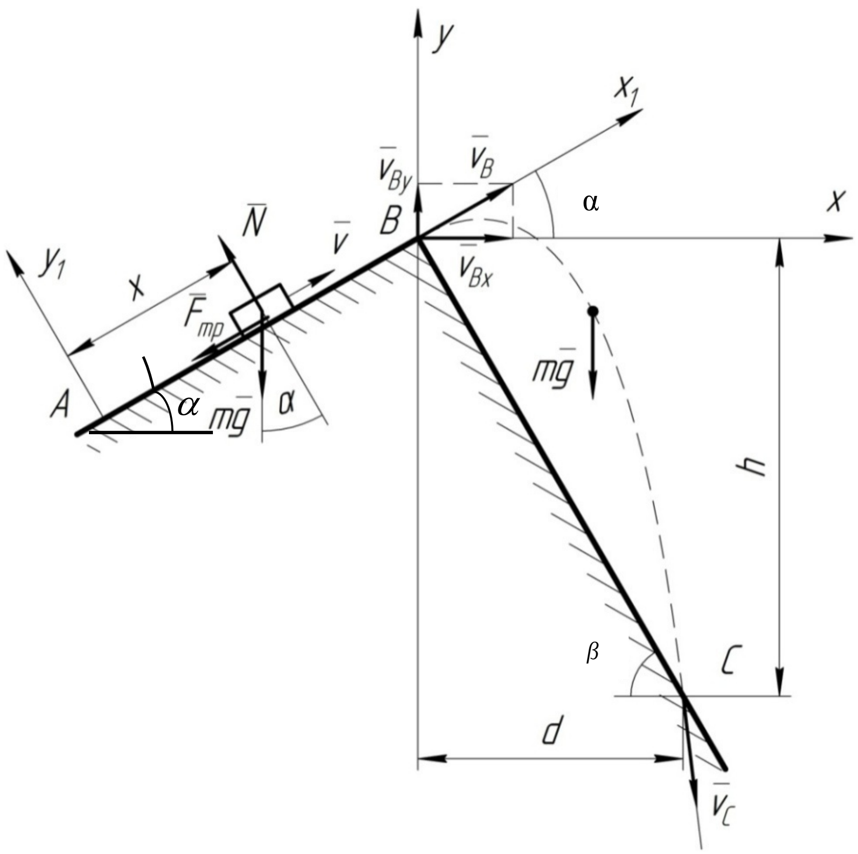


Рисунок 1.1 – Розрахункова схема

$$\ddot{x}_1 = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right), \tag{1.8}$$

оскільки $\ddot{x} = \dfrac{dv_x}{dt}$, рівняння (1.8) приймає вигляд:

$$\frac{dv_{x_1}}{dt} = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right). \tag{1.9}$$

Диференційне рівняння (1.9) є рівнянням зі змінними, що розділяються. Для їх розділення помножимо обидві частини рівняння на dt, отримаємо:

$$dv_{x_1} = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)dt. \tag{1.10}$$

Інтегруємо рівняння (1.10), отримаємо:

$$\int dv_{x_1} = \int -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)dt, \tag{1.11}$$

$$v_{x_1} = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)t + C_1 \tag{1.12}$$

З початкових умов визначаємо постійну інтегрування C_1:

при $t = 0$ точка знаходиться в положенні $\boldsymbol{A}$: $v_x = v_A$.

$$v_A = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot 0 + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = v_A \ ,$$

$$v_{x_1} = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)t + v_A \ . \tag{1.13}$$

Отримане рівняння (1.13) є рівнянням закону зміни швидкості на ділянці ***AB***. Запишемо його, враховуючи, що $v_x = \dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{dx_1}{dt} = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)t + v_A \ . \tag{1.14}$$

Розділюємо змінні, помноживши на dt обидві частини рівняння:

$$dx_1 = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)tdt + v_A dt \ , \tag{1.15}$$

Інтегруємо рівняння (1.15):

$$\int dx_1 = \int -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)tdt + \int v_A dt \ ,$$

$$x_1 = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot\frac{t^2}{2} + v_A t + C_2 \tag{1.16}$$

Постійну інтегрування C_2 визначаємо з початкової умови:

при $t = 0$ точка знаходиться в положенні ***A***: $x = x_A = 0$.

$$0 = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot\frac{0^2}{2} + v_A\cdot 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0 \ ,$$

$$x_1 = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot\frac{t^2}{2} + v_A t \ . \tag{1.17}$$

Отримане рівняння (1.17) є законом руху точки на ділянці ***AB***.

Отже, при русі точки на ділянці ***AB*** отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} v_{x_1} = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)t + v_A \\ x_1 = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot\dfrac{t^2}{2} + v_A t \end{cases} . \tag{1.18}$$

Ділянка ВС.

Покажемо на рисунку можливу траєкторію руху точки на ділянці. На ній покажемо довільне положення точки, також початкове в т. ***B*** і кінцеве в т. ***C***. Покажемо напрямок швидкості, що співпадає з дотичною до траєкторії. На точку на ділянці ***BC*** діє одна сила – власна вага $m\overline{g}$, направлена вертикально донизу. Початок координат візьмемо в т. ***B***, а координатні вісі направимо вертикально і горизонтально таким чином, щоб вектор швидкості матеріальної точки в початку координат (відповідно $\overline{v}_B$) проектувався на них зі знаком плюс. В точці ***C*** покажемо можливий напрямок швидкості матеріальної точки $\overline{v}_C$, поки що невідомої.

Початкові умови. Враховуючи, що в новій системі координат можна взяти нову початкову точку відліку часу, приймемо, що в положенні ***B*** $t=0$, тоді $x=x_B=0$; $y=y_B=0$; $v_x=v_B\cdot\cos\alpha$; $v_y=v_B\cdot\sin\alpha$.

Складаємо диференційні рівняння руху точки на ділянці ***BC***:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0 \\ m\ddot{y}=-mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=-g \end{cases} \tag{1.19}$$

Враховуючи співвідношення:

$$\begin{cases} \ddot{x}=\dfrac{dv_x}{dt} \\ \ddot{y}=\dfrac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} v_x=\dfrac{dx}{dt} \\ v_y=\dfrac{dy}{dt} \end{cases} \tag{1.20}$$

отримуємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt}=0 \\ \dfrac{dv_y}{dt}=-g \end{cases}. \tag{1.21}$$

Розділяючи змінні, отримаємо:

$$\begin{cases} dv_x=0\cdot dt \\ dv_y=-g\cdot dt \end{cases}, \tag{1.22}$$

$$\begin{cases} \int dv_x=\int 0\cdot dt+C_3 \\ \int dv_y=\int -g\cdot dt+C_4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} v_x=C_3 \\ v_y=-gt+C_4 \end{cases}, \tag{1.23}$$

Постійні інтегрування C_3 і C_4 визначимо з початкових умов: при $t=0$, тоді $v_x=v_B\cdot\cos\alpha$; $v_y=v_B\cdot\sin\alpha$, тоді:

$$\begin{cases} v_B\cdot\cos\alpha=C_3 \\ v_B\cdot\sin\alpha=-g\cdot 0+C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=v_B\cdot\cos\alpha \\ C_4=v_B\cdot\sin\alpha \end{cases}, \tag{1.24}$$

остаточно маємо, підставивши (1.24) в (1.23):

$$\begin{cases} v_x=v_B\cdot\cos\alpha \\ v_y=-gt+v_B\cdot\sin\alpha \end{cases}. \tag{1.25}$$

Використовуючи друге співвідношення з (1.20), отримаємо:

(1.26)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_B \cdot \cos\alpha \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_B \cdot \sin\alpha \end{cases}.$$

Розділяємо змінні і інтегруємо отримані рівняння:

$$\begin{cases} dx = v_B \cdot \cos\alpha\, dt \\ dy = -gtdt + v_B \cdot \sin\alpha dt \end{cases}, \tag{1.27}$$

$$\begin{cases} \int dx = \int v_B \cdot \cos\alpha\, dt \\ \int dy = \int -gtdt + \int v_B \cdot \sin\alpha dt \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = v_B \cdot \cos\alpha\, t + C_5 \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t + C_6 \end{cases}. \tag{1.28}$$

Постійні інтегрування отримаємо з початкових умов:
при $t = 0$, $x = x_B = 0$; $y = y_B = 0$;

$$\begin{cases} 0 = v_B \cdot \cos\alpha \cdot 0 + C_5 \\ 0 = -g\dfrac{0^2}{2} + v_B \cdot \sin\alpha \cdot 0 + C_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases}.$$

Підставимо отримані значення в рівняння (1.28):

$$\begin{cases} x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t \end{cases}. \tag{1.29}$$

Система рівнянь (1.29) є законом руху точки в параметричних рівняннях вздовж осей x і y на ділянці ***BC***.

Отримаємо рівняння траєкторії руху точки з (1.29), для цього з першого рівняння визначимо параметр t і підставимо його в друге:

$$t = \frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha},$$

$$y = -g\frac{x^2}{2{v_B}^2 \cdot \cos^2\alpha} + v_B\frac{x \cdot \sin\alpha}{v_B \cdot \cos\alpha},$$

$$y = -g\frac{x^2}{2{v_B}^2 \cdot \cos^2\alpha} + x \cdot tg\alpha\ . \tag{1.30}$$

З рисунка 1.1 видно, що в т. ***C*** при $t = T$ тіло має координати $x = d$, $y = -h$, а також $h = d \cdot tg\beta$ тоді рівняння (1.30) приймає вигляд:

$$-h=-g\frac{d^2}{2{v_B}^2\cdot\cos^2\alpha}+d\cdot tg\alpha \ ,$$

$$-d\cdot tg\beta=-g\frac{d^2}{2{v_B}^2\cdot\cos^2\alpha}+d\cdot tg\alpha \ \Big| :d \ ,$$

$$-tg\beta=-g\frac{d}{2{v_B}^2\cdot\cos^2\alpha}+tg\alpha \ ,$$

$$g\frac{d}{2{v_B}^2\cdot\cos^2\alpha}=tg\alpha+tg\beta \ ,$$

$$\frac{1}{{v_B}^2\cdot}=\frac{2}{g\cdot d}\left(tg\alpha+tg\beta\right)\cdot\cos^2\alpha \ ,$$

$${v_B}^2=\frac{g\cdot d}{2\cdot\left(tg\alpha+tg\beta\right)\cdot\cos^2\alpha} \ ,$$

$$v_B=\sqrt{\frac{g\cdot d}{2\cdot\left(tg\alpha+tg\beta\right)\cdot\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{9,81\cdot10}{2\cdot\left(tg30^\circ+tg60^\circ\right)\cdot\cos^2 30^\circ}}=5,32\,{}^{м}\!/_{с}$$

З рівняння (1.29) маємо:

$$t=\frac{x}{v_B\cdot\cos\alpha} \ .$$

Використовуючи записану вище граничну умову, отримаємо:

$$T=\frac{d}{v_B\cdot\cos\alpha}=\frac{10}{5,32\cdot\cos30^\circ}=2,17 \ с \ .$$

Отримали час руху точки по ділянці ***BC***.

Невідому швидкість матеріальної точки в положенні т. ***C*** - $\overline{v}_C$ можна отримати за формулою:

$$v_C=\sqrt{v_{C_x}^2+v_{C_y}^2} \ .$$

Використовуючи граничні умови для рівняння (1.25), отримаємо:

$$\begin{cases} v_{C_x}=v_B\cdot\cos\alpha=5,32\cdot\cos30^\circ=4,61(м/с) \\ v_{C_y}=-gT+v_B\cdot\sin\alpha=-9,81\cdot2,17+5,32\cdot\sin30^\circ=-18,63(м/с) \end{cases} ,$$

$$v_C=\sqrt{4,61^2+\left(-18,63\right)^2}=19,19\,{}^{м}\!/_{с} \ .$$

Знаючи швидкість тіла в т. ***B***, повертаємося до системи рівнянь (1.18): при $t=\ \tau$, маємо: $x_1=x_B=l=8\ м$; $v=v_B=5,32\,{}^{м}\!/_{с}$.

$$\begin{cases} v_B = -g\left(\sin\alpha + f\cdot\cos\alpha\right)\cdot\ \tau + v_A \\ l = -g\left(\sin\alpha + f\cdot\cos\alpha\right)\cdot\dfrac{\tau^2}{2} + v_A\ \tau \end{cases}.$$

Звідки маємо:

$$\tau = \frac{v_B - v_A}{-g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)} = \frac{v_A - v_B}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}\ ,$$

$$l = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_A - v_B}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}\right)^2 + v_A\frac{v_A - v_B}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}\ ,$$

$$l = -g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v_A^2 - 2v_A\cdot v_B - v_B^2}{\left(g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)\right)^2} + \frac{v_A^2 - v_A\cdot v_B}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}\ ,$$

$$l = -\frac{1}{2}\cdot\frac{v_A^2 - 2v_A\cdot v_B - v_B^2}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)} + \frac{v_A^2 - v_A\cdot v_B}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}\ ,$$

$$l = \frac{1}{g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right)}\cdot\left(\frac{v_A^2 - 2v_A\cdot v_B - v_B^2}{2} + v_A^2 - v_A\cdot v_B\right),$$

$$g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right) = \frac{1}{l}\cdot\left(-\frac{v_A^2}{2} + v_A\cdot v_B - \frac{v_B^2}{2} + v_A^2 - v_A\cdot v_B\right),$$

$$g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right) = \frac{1}{l}\cdot\left(\frac{v_A^2}{2} - \frac{v_B^2}{2}\right),$$

$$g\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right) = \frac{v_A^2 - v_B^2}{2l}\ ,$$

$$\tau = \frac{v_A - v_B}{v_A^2 - v_B^2}\cdot 2l = 2l\cdot\frac{v_A - v_B}{\left(v_A - v_B\right)\cdot\left(v_A + v_B\right)} = \frac{2l}{v_A + v_B}\ ,$$

$$\tau = \frac{2\cdot l}{v_A + v_B} = \frac{2\cdot 8}{35 + 5{,}32} = 0{,}40\ \ c\ .$$

Відповідь: $v_B = 5{,}32\ {}^{м}\!/\!_{c}$, $\tau = 0{,}40\,c$, $y_{BC} = -g\dfrac{x^2}{2\cdot {v_B}^2\cdot\cos^2\alpha} + x\cdot tg\alpha$, $T = 2{,}17\ \ c$, $v_C = 19{,}19\ {}^{м}\!/\!_{c}$

2. ВІДНОСНИЙ РУХ ТОЧКИ

2.1 Загальні відомості

Закон руху вільної матеріальної точки визначається лише характером прикладених до неї сил і початковими умовами.
Другий закон динаміки і отримані з нього рівняння та теореми справедливі лише для, так званого, абсолютного руху, тобто руху відносно інерціальної (нерухомої) системи відліку.

$$m\overline{a}_{абс} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \ ,$$

де $a_{абс}$ – абсолютне прискорення точки, що визначається за формулою:

$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_{кор} \ .$$

Тоді:

$$m\left(\overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_{кор}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \ ,$$

$$m\overline{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \left(-m\overline{a}_e\right) + \left(-m\overline{a}_{кор}\right) .$$

Назвемо $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$ – переносною силою інерції, а $\overline{\Phi}_{кор} = -m\overline{a}_{кор}$ – коріолісовою (поворотною) силою інерції. Тоді отримаємо рівняння:

$$m\overline{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_{кор} \qquad (2.1)$$

де $\overline{\Phi}_e$ – переносна сила інерції, яка залежить тільки від характеру руху рухомої системи координат;

$\overline{\Phi}_{кор}$ – коріолісова сила інерції, залежить як від характеру руху рухомої системи координат, так і від характеру відносного руху матеріальної точки.

Рівняння (2.1) є диференційним рівнянням відносного руху матеріальної точки.

Сили інерції є поправками до другого закону Ньютона, вони не є результатом взаємодії матеріальної точки з чим-небудь. Поява їх у рівнянні (2.1) обумовлена операцією переходу від нерухомої системи координат до рухомої і бажанням зберегти в основній формі основний закон динаміки (другий закон Ньютона). Тому на ці сили слід дивитися як на фіктивні, які вводяться в рівняння руху як поправки, що враховують характер руху рухомої системи координат.

2.2 Випадок поступального руху

Якщо рухома система координат здійснює поступальний рух тобто кутова швидкість рухомої системи дорівнює нулеві $(\overline{\omega}_e = 0)$, то прискорення Коріоліса дорівнює $a_{кор} = 2 \cdot |\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin(\overline{\omega}_e \wedge \overline{v}_r) = 0$ і, відповідно, коріолісова сила інерції дорівнює $\overline{\Phi}_{кор} = -m\overline{a}_{кор} = 0$, рівняння (2.1) приймає вигляд:

$$m\overline{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e \qquad (2.2)$$

2.3 Випадок рівномірного руху рухомої системи координат

Коли рухома система координат буде рухатися відносно нерухомої без прискорення $(\overline{a}_e = 0, \overline{v}_r = \mathrm{const})$, рівномірно і прямолінійно, здійснюючи поступальний рух, то сили інерції будуть дорівнювати $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e = 0$, $\overline{\Phi}_{кор} = -m\overline{a}_{кор} = 0$. Основне рівняння відносного руху (2.1) прийме вигляд:

$$m\overline{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (2.3)$$

Рівняння (2.3) відповідає основному рівнянню динаміки.

2.4 Випадок покою рухомої системи координат

Якщо точка перебуває в стані покою відносно рухомої системи координат, то її відносна швидкість дорівнює $\overline{v}_r = 0$ і, відповідно, відносне прискорення $\overline{a}_r = 0$. Тоді рівняння (2.3) запишемо у вигляді:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e \qquad (2.4)$$

2.5 Випадок рівномірного прямолінійного руху рухомої систем координат

Якщо точка здійснює рівномірний прямолінійний рух $(\overline{v}_r = const, \overline{a}_r = 0)$, тоді з рівняння (2.1) отримаємо:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_{кор} \qquad (2.5)$$

2.6 Порядок розв’язку задач на переносний рух матеріальної точки

Задачу краще розв’язувати в такому порядку:

– визначити відносний та переносний рух точки;
– обрати рухому систему координат;
– визначити і показати всі активні сили та реакції зв’язків, а також сили інерції;
– записати необхідне диференційне рівняння руху точки в векторній формі (необхідне з (2.1) – (2.5));
– записати диференційне рівняння в проекціях на осі системи координат;
– розв’язати диференційні рівняння;
– визначити шукані величини.

Необхідно, перш за все, встановити, який рух точки є відносним (відносно чого) і який переносним, виходячи з умови задачі. Зобразити розрахункову схему, де прийняти напрямок рухомої і нерухомої систем координат. Рухома система координат не обов’язково має бути декартовою. Показати на рисунку матеріальну точку в початковому, довільному проміжному і, якщо дозволяє умова задачі, кінцевому положенні.

Звільнити точку від зв’язків, замінивши їх реакціями. Показати всі задані сили і сили інерції.

Записати диференційне рівняння в векторній формі, після чого спроектувати його на відповідні координатні вісі. Отримані рівняння розв’язуємо, визначаємо сталі інтегрування, якщо необхідно, з початкових умов.

З отриманих інтегралів визначаємо шукані величини.

2.7 Умова задачі. Приклад розрахунку.

Тіло ***M*** розглядаємо як матеріальну точку, яка рухається циліндричним каналом рухомого тіла ***A*** (рис. 2.1). Знайти рівняння відносного руху тіла ***M*** – $x = f(t)$, прийнявши за початок відліку т. ***O***, яка є початком рухомої системи координат.

Тіло ***A*** рухається поступово, паралельно вертикальним напрямним в площині $O_1y_1z_1$ в прикладі № 1, поступово, паралельно горизонтальній прямій на рухомому візку в площині $O_1y_1z_1$ в прикладі № 2 і обертається навколо вертикальної осі O_1z_1 з постійною швидкістю в прикладі № 3.

Також необхідно визначити координату x_τ і тиск тіла ***M*** на стінки каналу в заданий момент часу $t = \tau$.

В задачі прийняті наступні позначення: $\boldsymbol{m}$ – маса тіла $\boldsymbol{M}$; ω – постійна кутова швидкість тіла $\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{c}$ – коефіцієнт жорсткості пружини, до якої прикріплене тіло $\boldsymbol{M}$; l_0 – довжина недеформованої пружини; f – коефіцієнт тертя ковзання тіла $\boldsymbol{M}$ по стінках каналу; x_0, $\dot{x}_0$ – початкова координата тіла $\boldsymbol{M}$ і, відповідно, проекція початкової швидкості на вісь $\boldsymbol{x}$.

2.8 Приклад №1

Дано: вихідні дані наведені в таблиці (2.1)

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до розрахунку

α, *град*	m, *кг*	x_0, *м*	$\dot{x}_0$, $м/с$	τ *с*	z_1, *м*	f
30°	0,05	0,5	0,3	0,1	$0{,}1\cdot\cos 2\pi\, t$	0,2

Визначити: $x = f(t)$ – закон відносного руху точки $\boldsymbol{M}$, x_τ - координату точки $\boldsymbol{M}$ при $t = \tau$, N_τ - тиск точки $\boldsymbol{M}$ на стінки каналу при $t = \tau$.

Розрахункова схема наведена на рис. 2.1.

Розв’язок

Покажемо сили, що діють на т. $\boldsymbol{M}$.

$\Phi_{кор} = 0$, так як $a_{кор} = 0$ (тіло $\boldsymbol{A}$ рухається поступово);

$F_{тер} = N \cdot f$ – сила тертя;

$m\overline{g}$ – власна вага;

$\overline{N}$ – сила тиску на стінки каналу.

Напрямок переносної сили інерції $\overline{\Phi}_e$ визначаємо за напрямком прискорення $\overline{a}_e$. Для цього двічі продиференціюємо рівняння руху тіла $\boldsymbol{A}$:

$$\dot{z}_1 = (0{,}1\cdot cos 2\pi t)' = -0{,}1\cdot \sin 2\pi t \cdot 2\pi = -0{,}2\pi \cdot \sin 2\pi t$$

$$\ddot{z}_1 = (-0{,}2\pi \cdot \sin 2\pi t)' = -0{,}4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t$$

Знак мінус вказує на те, що прискорення $a_e = \ddot{z}_1 = -0{,}4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t$ направлене в бік, протилежний збільшенню координати z_1 , тобто донизу, а переносна сила інерції $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$ – в протилежному напрямку – доверху. Величина сили $\Phi_e = m\left|a_e\right| = m \cdot 0{,}4\pi^2 \cdot cos 2\pi t = 0{,}4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t$

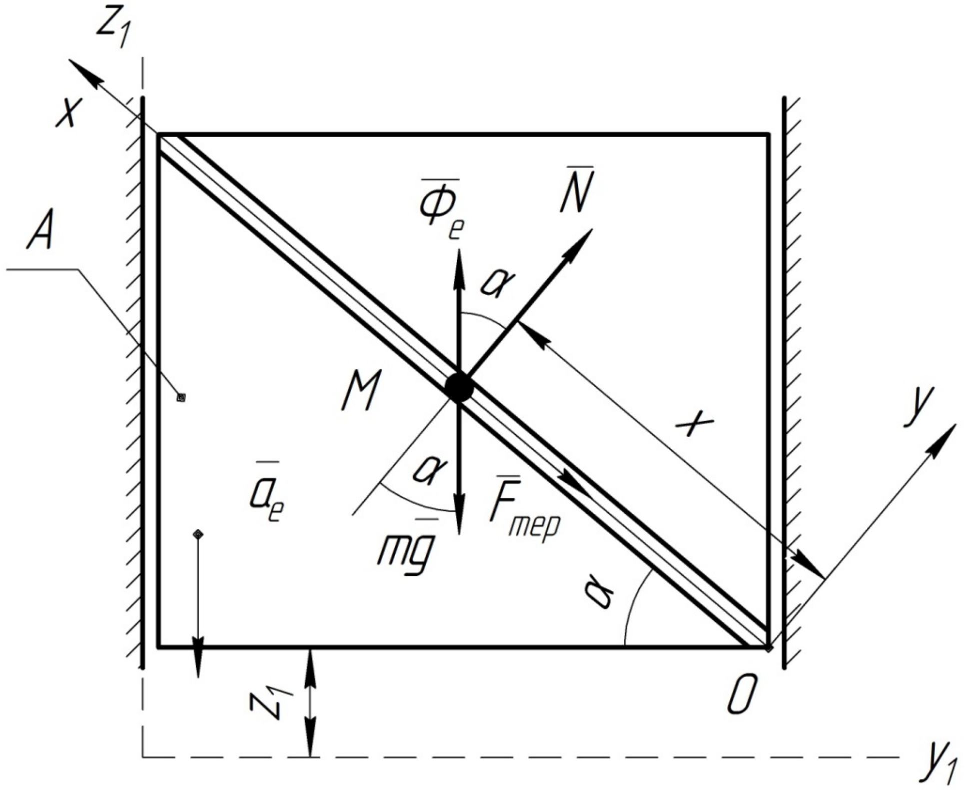


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема

Основне рівняння (2.1) відносного руху т. ***M*** в даному випадку матиме вигляд:

$$m\overline{a}_r = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e + \overline{F}_{тер}$$

Складемо диференційні рівняння відносного руху т. ***M*** вздовж осей ***x*** і ***y***:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \cdot \sin\alpha + \Phi_e \cdot \sin\alpha - F_{тер} \\ m\ddot{y} = -mg \cdot \cos\alpha + N + \Phi_e \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Враховуючи, що $y = const$, а тому $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$m\ddot{y} = -mg \cdot \cos\alpha + N + \Phi_e \cdot \cos\alpha = 0\ ,$$

$$N = mg \cdot \cos\alpha - 0{,}4m\pi^2 \cdot \cos 2\pi t \cdot \cos\alpha (g - 0{,}4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t)\,.$$

Тоді отримаємо:

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \sin\alpha + 0{,}4m\pi^2 \cdot \cos 2\pi t \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha - N \cdot f\ ,$$

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \sin\alpha + 0{,}4m\pi^2 \cdot \cos 2\pi t \cdot \sin\alpha - m \cdot \cos\alpha \cdot (g - 0{,}4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t) \cdot f, \Big| : m$$

$$\ddot{x} = -g \cdot \sin\alpha + 0{,}4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot (g - 0{,}4\pi^2 \cdot \cos 2\pi t) \cdot f\ .$$

Підставимо в це рівняння відомі величини, отримаємо:

$$\ddot{x} = -9{,}81 \cdot \sin 30° + 0{,}4 \cdot 3{,}14^2 \cdot \cos 2\pi t \cdot \sin 30° - \\ \cos 30° \cdot (9{,}81 - 0{,}4 \cdot 3{,}14^2 \cdot \cos 2\pi) \cdot 0{,}2\ ,$$

$$\ddot{x} = -4{,}905 + 1{,}974 \cdot \cos 2\pi t - 1{,}699 + 0{,}684 \cdot \cos 2\pi,$$

$$\ddot{x} = 2{,}658 \cdot \cos 2\pi t - 6{,}604\,.$$

З кінематики відомо, що $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv}{dt}$, тоді отримане рівняння приймає вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = 2,658 \cdot \cos 2\pi t - 6,604$$

Розділивши змінні інтегрування, отримаємо рівняння:

$$dv = \left(2,658 \cdot \cos 2\pi t - 6,604\right) dt \ .$$

Проінтегруємо його:

$$\int dv = \int \left(2,658 \cdot \cos 2\pi t - 6,604\right) + C_1 \ ,$$

$$v = 2,658 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin 2\pi t - 6,604t + C_1 \ ,$$

$$v = \dot{x} = 0,423 \cdot \sin 2\pi t - 6,604t + C_1 \ .$$

Для визначення сталої інтегрування C_1, використаємо початкові умови руху: при $t = 0, \dot{x}_0 = 0,3 \ ^{м}/_{c}$, отримаємо:

$$0,3 = 0,423 \cdot \sin 0 - 6,604 \cdot 0 + C_1 \ ,$$

$$C_1 = 0,3 \ ,$$

$$v = \dot{x} = 0,423 \cdot \sin 2\pi t - 6,604t + 0,3 \ .$$

Оскільки $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, отримане рівняння можна записати так:

$$\frac{dx}{dt} = 0,423 \cdot \sin 2\pi t - 6,604t + 0,3 \ .$$

Розділяємо змінні інтегрування:

$$dx = \left(0,423 \cdot \sin 2\pi t - 6,604t + 0,3\right) dt \ .$$

Інтегруємо отримане рівняння:

$$\int dx = \int \left(0,423 \cdot \sin 2\pi t - 6,604t + 0,3\right) dt \ ,$$

$$x = \int 0,423 \cdot \sin 2\pi t dt - \int 6,604 t dt + \int 0,3 dt + C_2 \ ,$$

$$x = -0,423 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \cos 2\pi t - 6,604 \cdot \frac{t^2}{2} + 0,3t + C_2 \ .$$

Для визначення сталої інтегрування C_2, використаємо початкові умови руху: при $t = 0, x_0 = 0,5 \ м$, отримаємо:

$$0,5 = -0,0673 \cdot \cos 0 - 3,302 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0 + C_2 \ ,$$

$$C_2 = 0,5673 \ .$$

Отже, рівняння відносного руху точки ***M*** буде наступним:

$$x = -0,0673 \cdot \cos 2\pi t - 3,302t^2 + 0,3t + 0,5 \ .$$

Визначимо координату точки ***M*** при $t=\tau=0,1$ с, тобто:

$$x_\tau=-0,0673\cdot\cos 2\pi\cdot 0,1^2+0,3\cdot 0,1+0,5=$$

$$=-0,0673\cdot 0,809-3,302\cdot 0,01+0,03+0,5=0,443\ (м).$$

Для визначення тиску точки ***M*** на стінки каналу, використовуємо формулу:

$$N_\tau=m\cdot\cos\alpha\cdot\left(g-0,4\pi^{2}\cdot\cos 2\pi t\right)=$$

$$=0,05\cdot\cos 30°\cdot\left(9,81-0,4\cdot 3,14^2\cdot\cos 2\pi\cdot 0,1\right)=$$

$$=0,05\cdot 0,866\cdot(9,81-3,948\cdot 0,809)=0,05\cdot 0,866\cdot 5,862=2,538\ (H)$$

Відповідь: $x=-0,0673\cdot\cos 2\pi t-3,302t^2+0,3t+0,5;$

$x_\tau=0,443$ *м*, $N_\tau=2,538$ *Н*

2.9 Приклад №2

Дано: вихідні дані наведені в таблиці (2.2)

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до розрахунку

m, *кг*	x_0, *м*	$\dot{x}_0$, *м/с*	τ, *с*	y_1, *м*	c, *Н/м*	ℓ_0, *м*
0,05	0,4	-0,4	0,1	$8t-t^3$	4	0,2

Визначити: $x=f(t)$ – закон відносного руху точки ***M***, x_τ – координату точки ***M*** при $t=\tau$, N_τ - тиск точки ***M*** на стінки каналу при $t=\tau$.

Розв’язок

Покажемо сили, що діють на т.***M.***

$\Phi_{кор}=0$, т.я. $a_{кор}=0$ (тіло ***A*** рухається поступово);

$m\bar{g}$ – власна вага;

$F=c\cdot(x-l_0)$ – відновлююча сила пружини;

N – сила тиску на стінки каналу.

Напрямок переносної сили інерції $\bar{\Phi}_e$ визначаємо за напрямком прискорення $\bar{a}_e$. Для цього двічі продиференціюємо рівняння руху тіла ***A***:

$$\dot{y}_1=\left(8t-t^3\right)'=8-3t^2$$

$$\ddot{y}_1=\left(8-3t^2\right)'=-6t$$

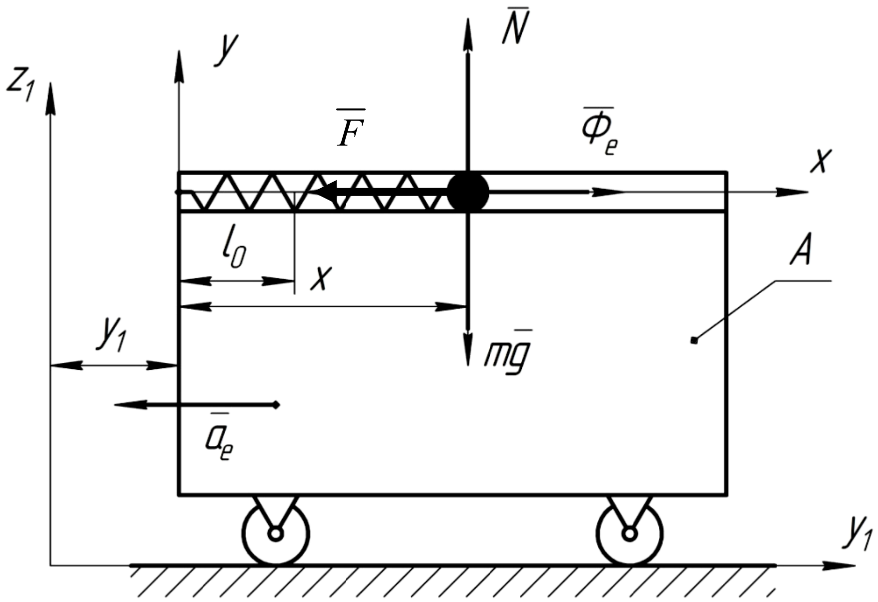


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема

Знак мінус вказує на те, що прискорення $a_e = \ddot{y}_1 = -6t$ направлене в бік, протилежний збільшенню координати y_1, тобто ліворуч, а переносна сила інерції $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ – в протилежному напрямку – праворуч. Величина сили $\Phi_e = m \cdot 6t = 6mt$.

Сила $F = c \cdot (x - l_0)$ направлена від точки ***M*** до точки ***O***, тобто вважаємо, що пружина розтягнута.

Основне рівняння (2.1) відносного руху т. ***M*** в даному випадку матиме вигляд:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e + \bar{F} \ .$$

Складемо диференційні рівняння відносного руху т.***M*** вздовж осей ***x*** і ***y***:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Phi_e - F \\ m\ddot{y} = -mg + N \end{cases}$$

Враховуючи, що $y = const$, а тому $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$m\ddot{y} = -mg + N = 0 \ ,$$

$$N = mg \ .$$

Далі отримаємо:

$$m\ddot{x} = 6mt - c(x - l_0) = 6mt - cx + cl_0 \ \Big| : m \ ,$$

$$\ddot{x} = 6t - \frac{c}{m} \cdot x + \frac{c}{m} \cdot l_0 \ .$$

Введемо позначення:

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{4}{0{,}05} = 80 \ ,$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{80} = 8{,}944 \ ,$$

перенесемо всі члени рівняння з $x(t)$ та її похідними ліворуч, тоді отримаємо:

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 6t + k^2 \cdot l_0 \ .$$

Отримане рівняння є лінійним неоднорідним диференційним рівнянням другого порядку, його розв'язок, як відомо з математики, шукаємо у вигляді (див. додаток Б.1):

$$x(t) = x_{заг} + x_{част}$$

Загальний розв'язок отримаємо, розв'язавши відповідне однорідне рівняння:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \ .$$

Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$z^2 + k^2 = 0 \ ;$$

$$z^2 = -k^2$$

$$z_1 = \sqrt{-k^2} = k \cdot \sqrt{-1} = ik \ ;$$

$$z_2 = -\sqrt{-k^2} = -k \cdot \sqrt{-1} = -ik \ .$$

Як відомо, при комплексних коренях характеристичного рівняння розв'язок матиме вигляд:

$$x_{заг} = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt \ .$$

Частковий розв'язок отримаємо з правої частини. Як видно, в правій частині стоїть вираз у вигляді поліному першого ступеня від часу ***t***, тому частковий розв'язок шукаємо так:

$$x_{част} = B_1 \cdot t + B_2 \ .$$

Для визначення констант B_1 і B_2 знайдемо похідні від функції і підставимо їх в диференційне рівняння:

$$\dot{x}_{част} = B_1, \ \ddot{x}_{част} = 0 \ ,$$

$$0 + k^2 \left(B_1 \cdot t + B_2\right) = 6t + k^2 \cdot l_0 \ ,$$

$$k^2 \cdot B_1 \cdot t + k^2 \cdot B_2 = 6t + k^2 \cdot l_0 \ \Big| : k^2 \ ,$$

$$B_1 \cdot t + B_2 = \frac{6}{k^2} \cdot t + l_0 \ .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t і вільні члени, отримаємо:

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{6}{k^2} \\ B_2 = l_0 \end{cases}$$

Тоді частковий розв'язок матиме вигляд:

$$x_{част} = \frac{6}{k^2} \cdot t + l_0 \ .$$

Повний розв'язок:

$$x(t) = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt + \frac{6}{k^2} \cdot t + l_0 \ ,$$

$$\dot{x}(t) = -k \cdot C_1 \cdot \sin kt + k \cdot C_2 \cdot \cos kt + \frac{6}{k^2} \ .$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2, використаємо початкові умови руху: при $t = 0,\ x_0 = 0,4\ м,\ \dot{x}_0 = -0,4\ м/с$,отримаємо

$$\begin{cases} 0,4 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 + \dfrac{6}{k^2} \cdot 0 + l_0 \\ -0,4 = -k \cdot C_1 \cdot \sin 0 + k \cdot C_2 \cdot \cos 0 + \dfrac{6}{k^2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 0,4 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + 0 + l_0 \\ -0,4 = -k \cdot C_1 \cdot 0 + k \cdot C_2 \cdot 1 + \dfrac{6}{k^2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} 0,4 = k \cdot C_1 + l_0 \\ -0,4 = k \cdot C_2 + \dfrac{6}{k^2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1 = 0,4 - l_0 \\ C_2 = -\dfrac{0,4}{k} - \dfrac{6}{k^3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1 = 0,4 - 0,2 = 0,2 \\ C_2 = -\dfrac{0,4}{8,944} - \dfrac{6}{8,944^3} = -0,0531 \end{cases}.$$

Отже, рівняння відносного руху точки ***M*** буде наступним:

$$x(t) = 0{,}2 \cdot \cos 8{,}944t - 0{,}0531 \cdot \sin 8{,}944t + \frac{6}{80} \cdot t + 0{,}2\ ,$$

$$x(t) = 0{,}2 \cdot \cos 8{,}944t - 0{,}0531 \cdot \sin 8{,}944t + 0{,}075 \cdot t + 0{,}2\,.$$

Визначимо координату точки ***М*** при $t = \tau = 0{,}1$ с, тобто:

Тиск точки ***М*** на стінки каналу:

$$N_\tau = m \cdot g = 0{,}05 \cdot 9{,}81 = 0{,}4905\ (H)\ .$$

Відповідь: $x(t) = 0{,}2 \cdot \cos 8{,}944t - 0{,}0531 \cdot \sin 8{,}944t + 0{,}075 \cdot t + 0{,}2$;

$x_\tau = 0{,}2914\ м,\ N_\tau = 0{,}4905\ H$.

2.10 Приклад №3

Дано: вихідні дані наведені в таблиці (2.3)

Таблиця 2.3 – Вихідні дані до розрахунку

α, *град*	m, *кг*	x_0, *м*	$\dot{x}_0$, $м/с$	ω, $рад/с$	τ, *с*	r, *м*	f
30°	0,02	0	0,3	$\pi/2$	0,1	0,2	0

Визначити: $x = f(t)$ – закон відносного руху точки ***М***, x_τ – координату точки ***М*** при $t = \tau$, N_τ – тиск точки ***М*** на стінки каналу при $t = \tau$.

Розв’язок.

Покажемо сили, що діють на т. ***М***.

$F_{тер} = N \cdot f = 0$ – сила тертя;

$m\bar{g}$ – власна вага;

$\bar{N}_1, \bar{N}_2$ – сила тиску на стінки каналу.

Напрямок переносної відцентрової сили інерції $\bar{\Phi}_e^n$ залежить від напрямку відценторового прискорення $\bar{a}_e^n$:

$$\Phi_e^n = m a_e^n\,,$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot (r + x \cdot \sin\alpha),$$

$$\Phi_e^n = m\omega^2 \cdot (r + x \cdot \sin\alpha).$$

Напрямок прискорення Коріоліса $\bar{a}_{кор}$ знайдемо за правилом Жуковського. Припустимо, що напрямок відносної швидкості $\bar{v}_r$ точки ***М*** співпадає з додатнім напрямком осі x. В цьому випадку $\bar{a}_{кор}$ матиме напрямок «від нас», тоді коріолісова сила інерції $\bar{\Phi}_{кор}$ - «до нас»:

$$\Phi_{кор} = m \cdot a_{Кор},$$

$$a_{кор} = 2 \cdot |\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin\left(\bar{\omega}_e \wedge \bar{v}_r\right),$$

$\omega_e = \omega,\ v_r = \dot{x}$, то

$$\Phi_{кор} = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \dot{x} \cdot \sin\alpha$$

Основне рівняння (2.1) відносного руху т. ***М*** в даному випадку матиме вигляд:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_{кор}$$

Складемо диференційні рівняння відносного руху т. ***М*** вздовж осей x і y:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \cdot \cos\alpha + \Phi_e^n \cdot \sin\alpha \\ m\ddot{y} = -N_2 + \Phi_{кор} \\ m\ddot{z} = -mg \cdot \sin\alpha + N_1 - \Phi_e^n \cdot \cos\alpha \end{cases} .$$

Враховуючи, що $y = const$, а тому $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$m\ddot{y} = -N_2 + \Phi_{кор} = 0;$$

$$N_2 = \Phi_{кор} = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \dot{x} \cdot \sin\alpha .$$

Враховуючи що $z = const$, а тому $\ddot{z} = 0$, отримуємо:

$$m\ddot{z} = -mg \cdot \sin\alpha + N_1 - \Phi_e^n \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$N_1 = mg \cdot \sin\alpha + \Phi_e^n \cdot \cos\alpha ;$$

$$N_1 = mg \cdot \sin\alpha + m\omega^2 \cdot \left(r + x \cdot \sin\alpha\right) \cdot \cos\alpha .$$

Для визначення закону руху точки ***М***, використаємо перше рівняння:

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \cos\alpha + \Phi_e^n \cdot \sin\alpha ;$$

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \cos\alpha + m\omega^2 \cdot \left(r + x \cdot \sin\alpha\right) \cdot \sin\alpha \ \Big| \cdot \frac{1}{m};$$

$$\ddot{x} = -g \cdot \cos\alpha + \omega^2 \cdot r \cdot \sin\alpha + \omega^2 \cdot x \cdot \sin^2\alpha \ ;$$

$$\ddot{x} - \omega^2 \cdot x \cdot \sin^2\alpha = -g \cdot \cos\alpha + \omega^2 \cdot r \cdot \sin\alpha ;$$

Отримане рівняння є лінійним неоднорідним диференційним рівнянням другого порядку, його розв'язок, як відомо з курсу вищої математики, шукаємо у вигляді (див. додаток Б.1):

$$x\left(t\right) = x_{заг} + x_{част} .$$

Загальний розв'язок отримаємо, розв'язавши відповідне однорідне рівняння:

$$\ddot{x} - \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot x = 0 .$$

Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\lambda^2 - \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha = 0 ;$$

$$\lambda^2 = \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha ;$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\omega^2 \cdot \sin^2 \alpha} = \omega \cdot \sin \alpha ;$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\omega^2 \cdot \sin^2 \alpha} = -\omega \cdot \sin \alpha .$$

Як відомо, при дійсних коренях характеристичного рівняння, розв'язок матиме вигляд:

$$x_{заг} = C_1 \cdot e^{\omega \cdot \sin \alpha \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\omega \cdot \sin \alpha \cdot t} .$$

Частковий розв'язок отримаємо з вигляду правої частини. Як видно, в правій частині стоїть вираз у вигляді постійної величини, тому частковий розв'язок шукаємо так:

$$x_{част} = B .$$

Для визначення константи B знайдемо похідні від функції і підставимо їх в диференційне рівняння:

$$\dot{x}_{част} = 0, \ \ddot{x}_{част} = 0,$$

$$0 - \omega^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot B = \omega^2 \cdot r \cdot \sin \alpha - g \cdot \cos \alpha \ \Big| \cdot \frac{-1}{\omega^2 \cdot \sin^2 \alpha} ,$$

$$B = -\frac{r}{\sin \alpha} + \frac{g \cdot \cos \alpha}{\omega^2 \cdot \sin^2 \alpha} .$$

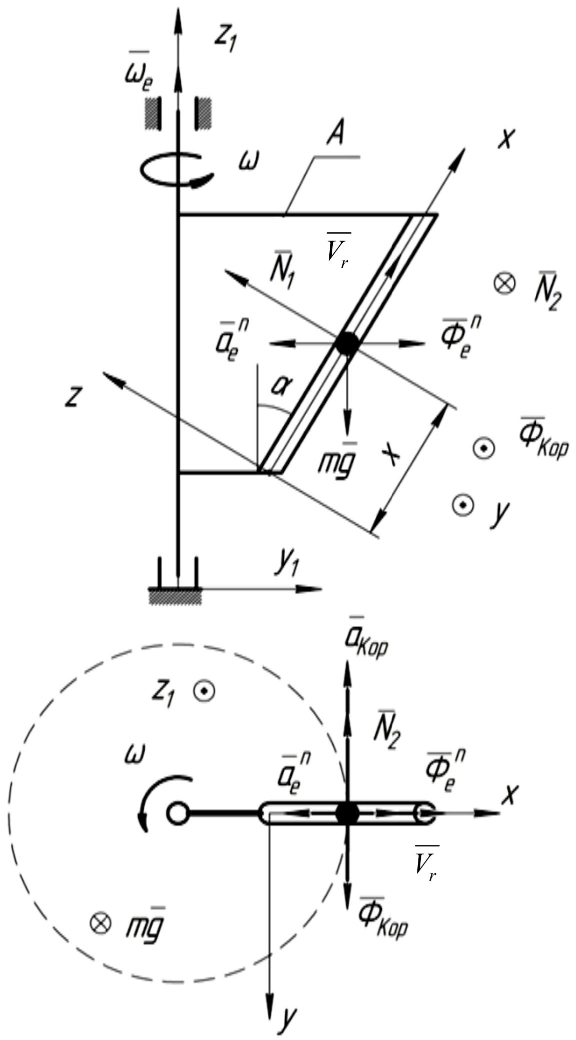


Рисунок 2.3 – Розрахункова схема

Тоді частковий розв'язок матиме вигляд:

$$x_{част} = -\frac{r}{\sin\alpha} + \frac{g\cdot\cos\alpha}{\omega^2\cdot\sin^2\alpha}.$$

Повний розв'язок:

$$x(t) = C_1\cdot e^{\omega\cdot\sin\alpha\cdot t} + C_2\cdot e^{-\omega\cdot\sin\alpha\cdot t} - \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{g\cdot\cos\alpha}{\omega^2\cdot\sin^2\alpha},$$

$$\dot{x}(t) = \omega\cdot\sin\alpha\cdot C_1\cdot e^{\omega\cdot\sin\alpha\cdot t} - \omega\cdot\sin\alpha\cdot C_2\cdot e^{-\omega\cdot\sin\alpha\cdot t}.$$

Підставимо в отримані рівняння числові дані:

$$x(t) = C_1\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot\sin 30°\cdot t} + C_2\cdot e^{-\frac{\pi}{2}\times\sin 30°\cdot t} - \frac{0,2}{\sin 30°} + \frac{9,81\cdot\cos 30°}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\sin^2 30°};$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\pi}{2}\cdot\sin 30°\cdot C_1\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot\sin 30°\cdot t} - \frac{\pi}{2}\cdot\sin 30°\cdot C_2\cdot l^{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin 30°\cdot t}.$$

Отримаємо:

$$x(t)=C_1\cdot e^{0,785\cdot t}+C_2\cdot e^{-0,785\cdot t}+13,373;$$
$$\dot{x}(t)=0,785\cdot C_1\cdot e^{0,785\cdot t}-0,785\cdot C_2\cdot e^{-0,785\cdot t}.$$

Для визначення сталих інтегрування, скористуємося граничними умовами, а саме, при $t=0,\ x_0=0\ м,\ \dot{x}_0=0,3\ м/с$, отримаємо:

$$\begin{cases}0=C_1\cdot e^{0,785\cdot 0}+C_2\cdot e^{-0,785\cdot 0}+13,373\\ 0,3=0,785\cdot C_1\cdot e^{0,785\cdot 0}-0,785\cdot C_2\cdot e^{-0,785\cdot 0}\end{cases},$$

$$\begin{cases}0=C_1\cdot 1+C_2\cdot 1+13,373\\ 0,3=0,785\cdot C_1\cdot 1-0,785\cdot C_2\cdot 1\end{cases},$$

$$\begin{cases}C_1+C_2=-13,373\\ C_1-C_2=\dfrac{0,3}{0,785}=0,382\end{cases}.$$

Звідки отримаємо, склавши спочатку рівняння, а потім віднявши одне від одного:

$$\begin{cases}2C_1=-13,373+0,382=-12,991\\ 2C_2=-13,373-0,382=-13,755\end{cases},$$

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{-12,991}{2}=-6,496\\ C_2=\dfrac{-13,755}{2}=-6,878\end{cases}.$$

Таким чином отримаємо рівняння руху точки ***M***:

$$x(t)=-6,496\cdot e^{0,785\cdot t}-6,878\cdot e^{-0,785\cdot t}+13,373,$$
$$\dot{x}(t)=-5,099\cdot e^{0,785\cdot t}+5,399\cdot C_2\cdot e^{-0,785\cdot t}.$$

Визначимо координату точки ***M*** при $t=\tau=0,1$ с, тобто:

$$x_\tau=-6,496\cdot e^{0,785\cdot 0,1}-6,878\cdot e^{-0,785\cdot 0,1}+13,373=-0,012\ (м),$$

$$\dot{x}_\tau = -5,099 \cdot e^{0,785 \cdot 0,1} + 5,399 \cdot C_2 \cdot e^{-0,785 \cdot 0,1} = -0,524 \left(м/с \right).$$

Для визначення тиску точки ***M*** на стінки каналу використовуємо формулу:

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$N_1 = mg \cdot \sin\alpha + m\omega^2 \cdot \left(r + x_\tau \cdot \sin\alpha \right) \cdot \cos\alpha =$$

$$= 0,02 \cdot 9,81 \cdot \sin 30° + 0,02 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \left(0,2 + \left(-0,012 \right) \cdot \sin 30° \right) \cdot \cos 30° = 0,1064 \left(H \right)$$

$$N_2 = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \dot{x}_\tau \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 0,02 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \sin 30° = 0,0166 \left(H \right),$$

$$N = \sqrt{0,1064^2 + 0,0166^2} = 0,1077 \left(H \right).$$

Відповідь:

$$x(t) = -6,496 \cdot e^{0,785 \cdot 0,1} - 6,878 \cdot e^{-0,785 \cdot 0,1} + 13,373 = -0,012 \;;$$

$$x_\tau = -0,012 \; м, \; N = 0,1077 \; H.$$

Додаток А

А.1 Вихідні дані до розрахункової роботи з динаміки матеріальної точки.

Умова задачі:

Тіло рухається з точки ***A*** на ділянці ***AB*** (довжина якої l) похилої площини, що утворює кут α з горизонтом, протягом τ секунд. Його початкова швидкість v_A. Коефіцієнт тертя ковзання тіла з площиною становить f.

В точці ***B*** тіло залишає площину ***AB*** зі швидкістю v_B і падає зі швидкістю v_C у точці ***C***, залишаючись в повітрі T секунд.

Вихідні дані до розрахунку наведені в таблиці А.1, а розрахункові схеми на рисунках А.1 – А.5

Номер варіанта обрати за останніми цифрами номера залікової книжки.

А.2 Вихідні дані до розрахункової роботи з вивчення відносного руху точки.

Умова задачі:

Тіло ***M*** розглядаємо як матеріальну точку, яка рухається циліндричним каналом тіла ***A***. Знайти рівняння відносно рухомого тіла ***M*** $x = f(t)$, прийнявши за початок відліку рухомої системи координат т***O***. Координату x_τ і тиск т. ***M*** на стінки каналу при заданому значенні $t = \tau$.

В задачі прийняті наступні позначення: m – маса тіла ***M***; ω – постійна кутова швидкість тіла ***A***; c – коефіцієнт жорсткості пружини, до якої прикріплене тіло ***M***; l_0 – довжина недеформованої пружини; f – коефіцієнт тертя ковзання тіла ***M*** по стінках каналу; x_0, $\dot{x}_0$ – початкова координата тіла ***M*** і, відповідно, проекція початкової швидкості на вісь x.

Вихідні дані до розрахунку наведені в таблиці А.2, а розрахункові схеми на рисунках А.6 – А.10.

Номер варіанта обрати за останніми цифрами номера залікової книжки.

Таблиця А.1 – Вихідні дані до розрахунку

Номер схеми	Варіант	α	β	v_A	v_B	ℓ	d	h	f	τ	T	F	Знайти
		град.		$м/с$.		м.				с.		кН	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	001	30	60	0	-	10	-	-	0,2	-	-	0	$\tau,\ h$
1	011	15	45	22	-	-	-	4	0,2	-	-	0	$\ell,\ y_{AB}=f(x)$
1	021	30	50	2,5	-	8	-	-	-	-	-	0	$v_C,\ \tau,\ f$
1	031	-	60	0	-	9,8	-	-	0	2	-	0	$\alpha,\ T$
1	041	30	45	0	-	9,8	-	-	-	3	-	0	$v_C,\ f$
1	051	30	60	0	-	-	-	-	0,2	2,5	-	0	$\ell,\ h,\ v_C$
1	061	30	60	0	-	10	-	-	-	2,5	-	0	$h,\ f,\ d$
1	071	15	45	2	-	-	-	4	-	-	-	0	$\tau,\ \ell,\ T,\ d$
1	081	30	60	2,5	-	8	-	10	-	-	-	0	$\tau,\ \ell,\ T,\ v_C$
1	091	30	45	0	-	9,8	-	-	-	3	-	0	$h,\ f,\ T,\ d,\ v_C$
2	002	20	30	-	-	-	-	40	0,1	0,2	-	0	$\ell,\ v_C$
2	012	15	45	16	-	5	-	-	0,1	-	-	0	$v_B,\ T$
2	022	21	60	20	-	-	-	-	0	0,3	-	0	$h,\ d$
2	032	15	45	-	-	-	-	$30\sqrt{2}$	0,1	0,3	-	0	$v_B,\ v_A$
2	042	15	60	25	-	-	50	-	0	-	-	0	$\tau,\ y_{AB}=f(x)$
2	052	20	-	-	30	-	-	40	0,1	0,2	-	0	$\ell,\ T,\ d$
2	062	15	45	16	-	5	-	-	0,1	-	-	0	$h,\ \tau,\ T,\ d,\ v_C$
2	072	-	60	21	20	-	-	-	0	0,3	-	0	$\alpha,\ h,\ d,\ v_C$
2	082	15	45	-	-	-	-	-	0,1	0,3	-	0	$\ell,\ d,\ v_B,\ v_C$
2	092	15	60	25	-	-	50	-	0	-	-	0	$\ell,\ d,\ h,\ \tau,\ v_C$
3	003	30	-	0	4,5	40	3	-	-	-	-	-	$\tau,\ h$
3	013	30	-	-	4,5	40	-	1,5	0	-	-	0	$d,\ v_A$
3	023	30	-	0	-	-	3	1,5	0	20	-	-	$\ell,\ F/m$
3	033	30	-	0	-	40	-	5	0,1	-	-	2,2m	$v_B,\ v_C$
3	043	30	-	0	-	50	4	2	0,1	-	-	2	$T,\ m$
3	053	30	-	0	4,5	40	3	-	-	-	-	-	$h,\ T,\ v_C$
3	063	30	-	-	4,5	40	-	1,5	0,1	-	-	0	$d,\ \tau,\ v_C$
3	073	30	-	0	-	40	3	1,5	0,1	20	-	-	$T,\ v_B,\ v_C,\ F/m$
3	083	30	-	0	-	40	5	2	-	-	-	2,2m	$f,\ \tau,\ T,\ v_C$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	093	30	-	0	-	50	4	2	-	-	-	2	f, τ, T, v_B
4	004	30	-	1	-	3	-	-	0,2	-	-	0	h, T
4	014	45	-	-	$2v_A$	6	-	6	-	1	-	0	f, d
4	024	30	-	0	-	2	3	-	0,1	-	-	0	τ, h
4	034	15	-	-	3	3	2	-	-	1,5	-	0	h, f, v_B
4	044	45	-	0	-	-	2	4	0,3	-	-	0	ℓ, τ
4	054	30	-	1	-	3	-	-	0,2	-	-	0	τ, T, v_B
4	064	45	-	-	$2v_A$	6	-	6	-	1	-	0	d, T, v_C
4	074	30	-	0	-	2	3	-	0,1	-	-	0	T, v_B, v_C
4	084	15	-	-	3	-	2	-	0,1	1,5	-	0	h, T, v_A, v_C
4	094	45	-	0	-	-	2	4	0,3	-	-	0	ℓ, T, v_B, v_C
5	005	30	-	1	-	-	-	10	0,1	-	-	0	d, v_B
5	015	45	-	0	-	10	-	-	-	2	-	0	f, $y_{AB} = f(x)$
5	025	-	-	0	-	9,81	-	20	0	2	-	0	α, T
5	035	30	-	0	-	10	12	-	0,2	-	-	0	τ, h
5	045	30	-	0	-	6	-	4,5	0,2	-	-	0	τ, v_C
5	055	30	-	1	-	-	-	10	0,1	1,5	-	0	ℓ, T, v_C
5	065	45	-	0	-	10	-	10	-	2	-	0	d, f, T, v_B
5	075	-	-	0	-	9,81	-	20	0	2	-	0	d, T, v_B, v_C
5	085	30	-	0	-	10	12	-	0,2	-	-	0	h, T, v_C
5	095	30	-	0	-	6	-	4,5	0,2	-	-	0	d, T, v_B
6	006	-	-	7	-	8	-	20	0,2	-	-	0	d, v_C
6	016	-	-	4	-	-	2	-	0,1	2	-	0	h, v_B
6	026	-	-	-	3	3	-	5	0,3	-	-	0	T, v_A
6	036	-	-	3	1	2,5	-	20	-	-	-	0	d, f
6	046	-	-	-	-	-	3	5	0,25	-	-	0	τ, v_A
6	056	-	-	7	-	8	-	20	0,2	-	-	0	τ, T, v_C
6	066	-	-	4	-	-	2	-	0,1	2	-	0	ℓ, T, v_C
6	076	-	-	-	3	3	-	5	0,3	-	-	0	d, T, v_C, v_A
6	086	-	-	3	1	2,5	-	20	-	-	-	0	f, T, v_C
6	096	-	-	-	-	4	3	5	0,25	-	-	0	τ, T, v_C, v_A
7	007	-	-	0	-	8	-	20	0,2	-	-	0,5P	τ, v_C
7	017	-	-	1	-	-	2	-	0,1	2	-	0,5P	h, v_B

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	027	-	-	-	3	2	-	5	0,3	-	-	0,5P	d, v_A, v_C
7	037	-	-	3	1	2,5	-	20	-	-	-	0,5P	d, f, v_C
7	047	-	-	-	-	2,04	3	4,9	0,3	-	-	0,5P	τ, v_A
7	057	-	-	0	-	8	-	20	0,2	-	-	0,5P	d, v_C
7	067	-	-	1	-	-	2	-	0,1	2	-	0,5P	h, ℓ
7	077	-	-	-	3	2	-	5	0,3	-	-	0,5P	τ, v_C
7	087	-	-	3	1	2,5	-	20	-	-	-	0,5P	d, f, T
7	097	-	-	-	-	-	6	4,9	-	-	-	0,5P	v_B, v_C
8	008	30	-	1	-	4,8	5	-	0,2	-	-	0,5P	h, T
8	018	30	-	-	5,6	5,45	-	2	-	1	-	0,5P	d, f
8	028	30	-	0	-	-	3	-	0,2	-	20	0,5P	h, τ
8	038	30	-	-	5,8	1,95	15	-	-	0,5	-	0,5P	h, v_C
8	048	30	-	0	-	-	2	4	0,3	-	-	0,5P	ℓ, τ
8	058	30	-	1	-	4,8	5	-	0,2	-	-	0,5P	τ, v_B, v_C
8	068	30	-	-	5,6	5,45	5	-	-	1	-	0,5P	T, v_C
8	078	30	-	0	-	2	3	-	0,2	-	-	0,5P	T, v_C
8	088	30	-	-	5,8	1,95	15	-	-	0,5	-	0,5P	h, T, v_B
8	098	30	-	0	-	-	2	4	-	-	-	0,5P	$\zeta\ v_B, v_C$
9	009	-	50	0	-	10	-	-	0,2	-	-	0,4P	τ, d, v_C
9	019	-	45	2	-	-	-	19,6	0,2	-	-	0,4P	ℓ, v_C
9	029	-	60	2	-	8	10	-	-	-	-	0,4P	τ, T, v_B
9	039	-	60	0	-	-	-	-	0	2	-	0,4P	ℓ, T, v_C
9	049	-	45	0	-	4	-	-	-	2	-	0,4P	h, f, v_C
9	059	-	-	0	60	10	-	-	0,2	-	-	0,4P	d, T, v_C
9	069	-	45	2	-	-	-	19,6	0,2	-	-	0,4P	ℓ, T
9	079	-	60	2	-	8	10	-	-	-	-	0,4P	τ, v_C
9	089	-	60	0	-	-	-	-	0,2	2	-	0,4P	d, ℓ, T
9	099	-	60	0	-	4	-	-	-	2	-	0,4P	d, f, v_C
10	010	30	-	0	4,9	9,8	3	-	-	-	-	P	τ, v_C
10	020	30	-	-	4,9	2,45	-	1,5	0,2	-	-	1,17P	d, v_C
10	030	30	-	0	-	-	3	1,5	0,2	1	-	P	ℓ, v_C
10	040	30	-	0	-	2,45	5	-	0,2	-	-	P	v_B, v_C

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	050	30	-	0	-	9,8	4	2	-	-	-	P	f, T
10	060	30	-	0	4,9	9,8	3	-	-	-	-	P	τ, v_C
10	070	30	-	-	4,9	1	-	1,5	0,2	-	-	1,17P	$d,\ T, v_A$
10	080	30	-	0	-	-	3	1,5	0,2	1	-	P	ℓ, T
10	090	30	-	0	-	2,45	5	-	0,2	-	-	P	T, v_C
10	100	30	-	0	-	9,8	4	2	-	-	-	P	f, v_B, v_C

Таблиця А.2 – Вихідні дані до розрахунку

Варіант	Номер схеми	α, *град*	m, *кг*	ω, $рад/с$	Початкові параметри		τ. с	C, $Н/м$	ℓ_0, *м*	r, *м*	Рівняння руху тіла А, м	f
					x_0, *м*	$\dot{x}_0$, $м/с$						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
01	1	-	0,02	π	0	0	0,1	-	-	-	-	0,1
11	1	-	0,03	$-\pi$	0,1	0,6	0,2	-	-	-	-	0,1
21	1	-	0,02	$\pi/2$	0,2	0	0,2	-	-	-	-	0,1
31	1	-	0,01	$3\pi/2$	0,5	0,4	0,1	-	-	-	-	0,2
41	1	-	0,02	$-\pi$	0,2	0	0,3	-	-	-	-	0,1
51	1	-	0,03	-2π	0	0	0,5	-	-	-	-	0,1
61	1	-	0,02	$-\pi/2$	0	0,5	0,1	-	-	-	-	0,3
71	1	-	0,03	π	0,5	-0,2	0,2	-	-	-	-	0,2
81	1	-	0,02	$-\pi$	0,1	0	0,3	-	-	-	-	0,1
91	1	-	0,05	π	0,4	-0,6	0,1	-	-	-	-	0,2
02	2	-	0,01	$\pi/2$	0,6	0	0,3	10	0,15	-	-	0
12	2	-	0,02	$-\pi$	0,2	0,4	0,2	20	0,1	-	-	0
22	2	-	0,03	$\pi/2$	0,4	-0,5	0,1	40	0,2	-	-	0

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
32	2	-	0,02	$3\pi/2$	0,8	-0,2	0,5	40	0,1	-	-	0
42	2	-	0,04	$-\pi$	0,5	0	0,4	20	0,1	-	-	0
52	2	-	0,05	π	0,1	0	0,1	20	0,2	-	-	0
62	2	-	0,02	$-\pi$	0	0,2	0,3	30	0,15	-	-	0
72	2	-	0,03	$\pi/2$	0	0,3	0,2	10	0,1	-	-	0
82	2	-	0,03	$3\pi/2$	0,2	0,4	0,1	20	0,2	-	-	0
92	2	-	0,02	$-\pi$	0	0,8	0,3	20	0,3	-	-	0
03	3	30	0,03	-	0,2	0,3	0,2	-	-	-	$z_1 = 0,1\cos(\pi \cdot t)$	0,2
13	3	45	0,05	-	0,1	0,1	0,3	-	-	-	$z_1 = 0,2\cos(\pi \cdot t)$	0,1
23	3	60	0,02	-	0,2	0	0,2	-	-	-	$z_1 = 0,1\cos(2\pi \cdot t)$	0,3
33	3	15	0,01	-	0	0,4	0,1	-	-	-	$z_1 = 5 - 10 \cdot t^2$	0,1
43	3	75	0,02	-	0,2	-0,1	0,2	-	-	-	$z_1 = 0,1\sin(2\pi \cdot t)$	0,1
53	3	30	0,03	-	0,4	0	0,2	-	-	-	$z_1 = 2 + t^3$	0,2
63	3	45	0,01	-	0	0,5	0,1	-	-	-	$z_1 = -0,1\sin(2\pi \cdot t)$	0,1
73	3	60	0,03	-	0,5	-0,2	0,4	-	-	-	$z_1 = 2 \cdot t - 3 \cdot t^3$	0,1
83	3	15	0,02	-	0,1	0	0,5	-	-	-	$z_1 = 1 + 2 \cdot t^2$	0,1
93	3	75	0,04	-	0,4	-0,6	0,1	-	-	-	$z_1 = -0,2\cos(\pi \cdot t)$	0,2
04	4	30	0,01	-	0	0,2	0,2	20	0,2	-	$z_1 = 1 - 2 \cdot t^3$	0
14	4	45	0,04	-	0,2	-0,2	0,2	10	0,1	-	$z_1 = 0,2\cos(2\pi \cdot t)$	0
24	4	60	0,03	-	0,2	0,4	0,4	30	0,15	-	$z_1 = t - 8 \cdot t^3$	0
34	4	15	0,02	-	0,8	-0,2	0,5	40	0,2	-	$z_1 = 2 + 2 \cdot t^2$	0
44	4	75	0,04	-	0,5	0	0,3	10	0,15	-	$z_1 = 2 \cdot t^2 - 1$	0
54	4	30	0,02	-	0,1	0,2	0,1	20	0,2	-	$z_1 = 0,2\sin(\pi \cdot t/2)$	0

64	4	45	0,02	-	0	0,4	0,2	10	0,1	-	$z_1 = 1 - 2 \cdot t^2$	0
74	4	60	0,03	-	0,5	0,3	0,1	20	0,3	-	$z_1 = 0,4 + 2 \cdot t^3$	0
84	4	15	0,04	-	0,2	0,4	0,4	40	0,15	-	$z_1 = 2 - 3 \cdot t^3$	0
94	4	75	0,02	-	0,1	0,8	0,3	20	0,3	-	$z_1 = 4 - 2 \cdot t^2$	0
05	5	30	0,02	$\pi/2$	0,1	0,1	0,4	-	-	-	-	0
15	5	45	0,01	$-\pi$	0,2	0	0,5	-	-	-	-	0
25	5	60	0,02	$\pi/2$	0	0,4	0,3	-	-	-	-	0
35	5	15	0,03	$3\pi/2$	0,2	-0,1	0,1	-	-	-	-	0
45	5	75	0,03	$-\pi$	0,4	0	0,2	-	-	-	-	0
55	5	30	0,02	π	0	0,5	0,1	-	-	-	-	0
65	5	45	0,04	$-\pi$	0	0,2	0,3	-	-	-	-	0
75	5	60	0,02	$\pi/2$	0,2	-0,2	0,2	-	-	-	-	0
85	5	15	0,01	$3\pi/2$	0,2	0,4	0,1	-	-	-	-	0
95	5	75	0,02	$-\pi$	0,8	-0,2	0,3	-	-	-	-	0
06	6	30	0,01	π	0,1	0,2	0,4	40	0,2	-	-	0
16	6	45	0,03	$-\pi$	0	0,4	0,5	10	0,15	-	-	0
26	6	60	0,02	$\pi/2$	0	0,2	0,3	20	0,2	-	-	0
36	6	15	0,02	$3\pi/2$	0,2	-0,2	0,1	10	0,1	-	-	0
46	6	75	0,01	$-\pi$	0,2	0,4	0,2	10	0,15	-	-	0
56	6	30	0,02	-2π	0,8	-0,2	0,1	20	0,2	-	-	0
66	6	45	0,03	$-\pi/2$	0,5	0	0,4	10	0,1	-	-	0
76	6	60	0,01	π	0,1	0,2	0,5	20	0,3	-	-	0
86	6	15	0,02	$-\pi$	0	0,4	0,5	40	0,2	-	-	0
96	6	75	0,03	π	0,5	0,3	0,3	10	0,15	-	-	0

07	7	30	0,03	-	0,2	0,4	0,1	-	-	-	$y_1 = 0,6 - 2\cdot t^3$	0,2
17	7	45	0,02	-	0	0,5	0,4	-	-	-	$y_1 = 4\cdot t^3$	0,1
27	7	60	0,04	-	0	0,2	0,5	-	-	-	$y_1 = 0,6\cdot t^3$	0,2
37	7	15	0,05	-	0,2	-0,2	0,5	-	-	-	$y_1 = 0,1\sin(\pi\cdot t)$	0,1
47	7	75	0,02	-	0,2	0,4	0,3	-	-	-	$y_1 = 8\cdot t - t^3$	0,1
57	7	30	0,03	-	0,8	-0,2	0,2	-	-	-	$y_1 = 2 + t^2$	0,2
67	7	45	0,02	-	0,1	0,1	0,4	-	-	-	$y_1 = 0,1\cos(1,5\pi\cdot t)$	0,2
77	7	60	0,04	-	0	0,4	0,5	-	-	-	$y_1 = 8 - 5\cdot t^3$	0,1
87	7	15	0,05	-	0,2	-0,1	0,3	-	-	-	$y_1 = 8 + t^3$	0,2
97	7	75	0,02	-	0,4	0	0,1	-	-	-	$y_1 = 2 - 5\cdot t^2$	0,1
08	8	30	0,01	-	0	0,2	0,1	20	0,1	-	$y_1 = -2\cdot t^3$	0
18	8	45	0,03	-	0,2	-0,2	0,2	40	0,15	-	$y_1 = 0,2\cos(2\pi\cdot t)$	0
28	8	60	0,02	-	0,2	0,4	0,2	20	0,2	-	$y_1 = t - 8\cdot t^3$	0
38	8	15	0,02	-	0,8	-0,2	0,4	20	0,1	-	$y_1 = 4 - t^2$	0
48	8	75	0,01	-	0,1	0,1	0,5	20	0,2	-	$y_1 = 2\cdot t^2 - 1$	0
58	8	30	0,02	-	0,2	0	0,3	20	0,15	-	$y_1 = 0,1\sin(\pi\cdot t/2)$	0
68	8	45	0,03	-	0	0,4	0,1	30	0,2	-	$y_1 = 2 - 3\cdot t^2$	0
78	8	60	0,01	-	0,2	-0,1	0,2	20	0,1	-	$y_1 = 0,4 - t^3$	0
88	8	15	0,02	-	0,4	0	0,2	40	0,15	-	$y_1 = 6 - 3\cdot t^3$	0
98	8	75	0,03	-	0	0,5	0,2	40	0,2	-	$y_1 = 4 + 2\cdot t^2$	0
09	9	-	0,03	$\pi/2$	0,2	-0,2	0,5	-	-	0,2	-	0
19	9	-	0,02	$3\pi/2$	0,2	0,4	0,3	-	-	0,2	-	0
29	9	-	0,02	$-\pi$	0,8	-0,2	0,2	-	-	0,3	-	0,1
39	9	-	0,01	-2π	0,1	0,1	0,2	-	-	0,15	-	0

49	9	-	0,02	$-\pi/2$	0,2	0	0,4	-	-	0,1	-	0
59	9	-	0,03	π	0	0,4	0,5	-	-	0,2	-	0,2
69	9	-	0,01	$-\pi$	0,2	-0,1	0,3	-	-	0,2	-	0
79	9	-	0,02	π	0,4	0	0,1	-	-	0,2	-	0
89	9	-	0,03	$-\pi$	0	0,5	0,2	-	-	0,5	-	0,2
99	9	-	0,01	π	0	0,2	0,1	-	-	0,4	-	0
00	10	-	0,02	$\pi/2$	0,2	0,4	0,2	40	0,2	0,2	-	0
10	10	-	0,02	$3\pi/2$	0,8	-0,2	0,4	20	0,1	0,15	-	0
20	10	-	0,01	$-\pi$	0,1	0,1	0,5	20	0,3	0,2	-	0
30	10	-	0,02	-2π	0,2	0	0,3	10	0,2	0,2	-	0
40	10	-	0,03	π	0	0,4	0,1	30	0,15	0,2	-	0
50	10	-	0,01	$-\pi$	0,2	-0,1	0,2	20	0,2	0,5	-	0
60	10	-	0,02	$\pi/2$	0,4	0	0,1	40	0,15	0,4	-	0
70	10	-	0,03	$3\pi/2$	0	0,5	0,4	20	0,2	0,3	-	00
80	10	-	0,01	$-\pi$	0	0,2	0,3	10	0,15	0,2	-	0
90	10	-	0,03	-2π	0,2	-0,2	0,1	10	0,2	0,15	-	0

Примітка: Наведені в таблиці значення кутової швидкості ω зі знаком "мінус" необхідно на розрахунковій схемі показати в протилежному напрямку, в розрахунку використовувати їх зі знаком "плюс".

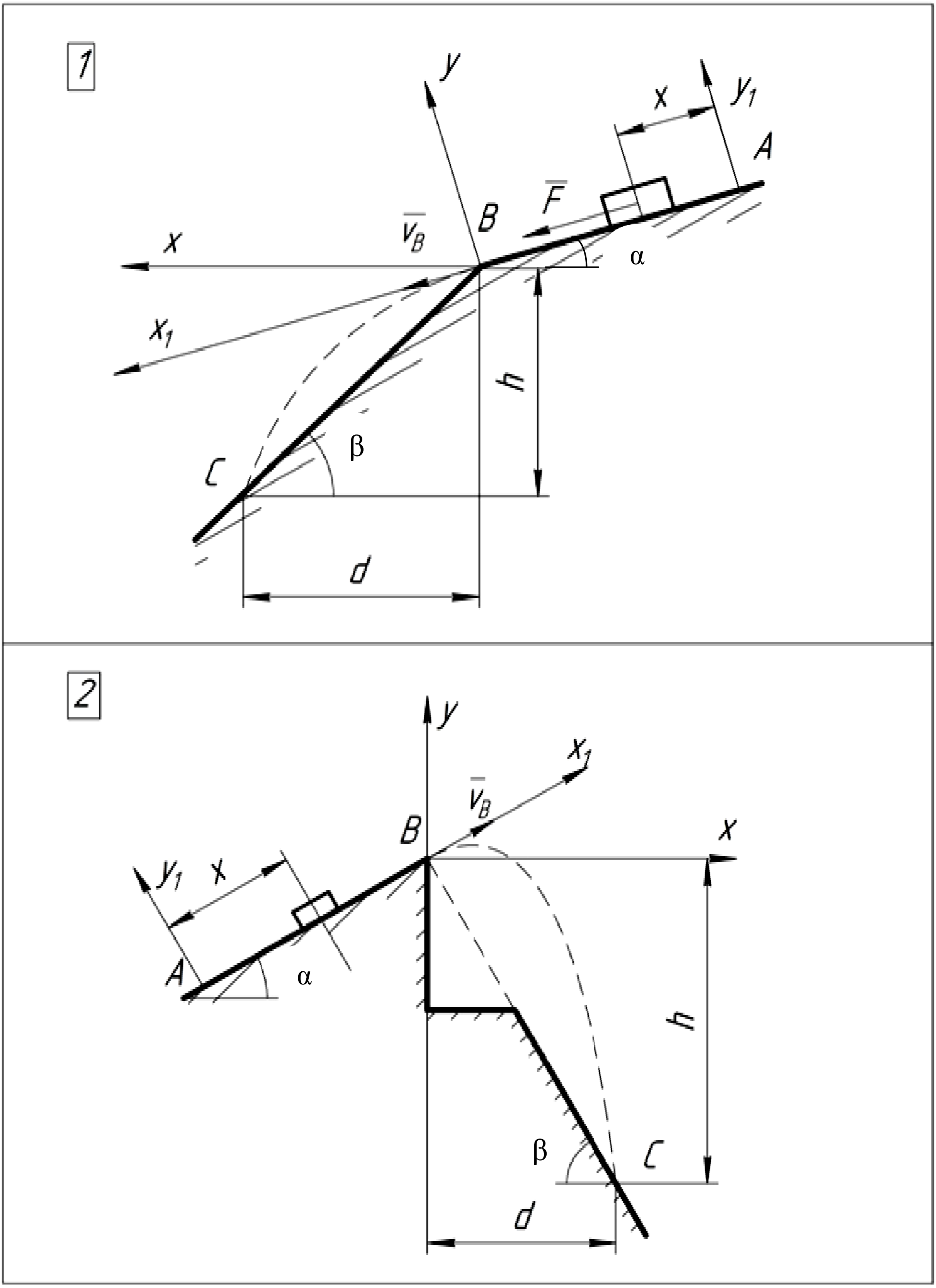


Рисунок А.1 – Розрахункова схема

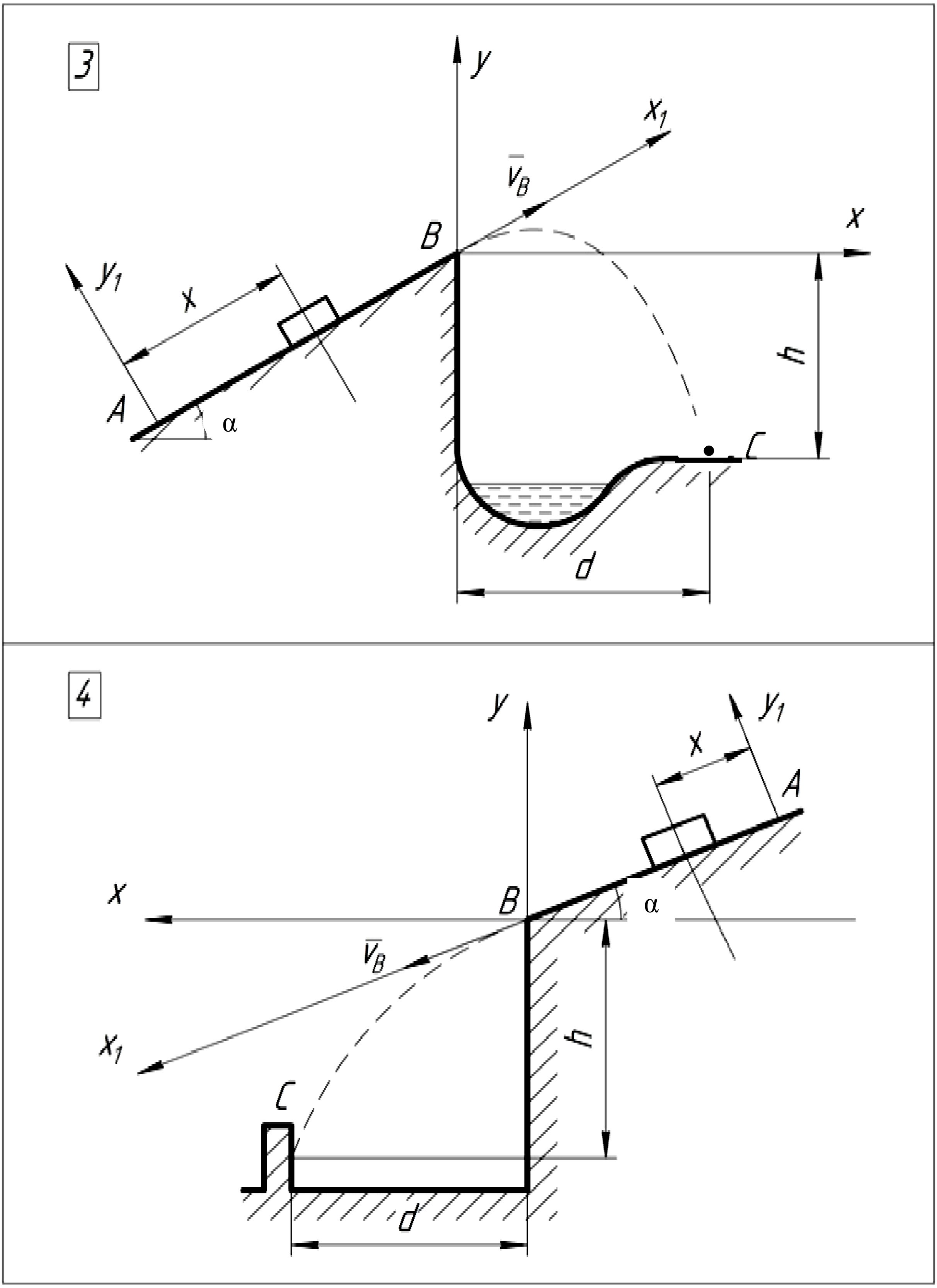


Рисунок А.2 – Розрахункова схема

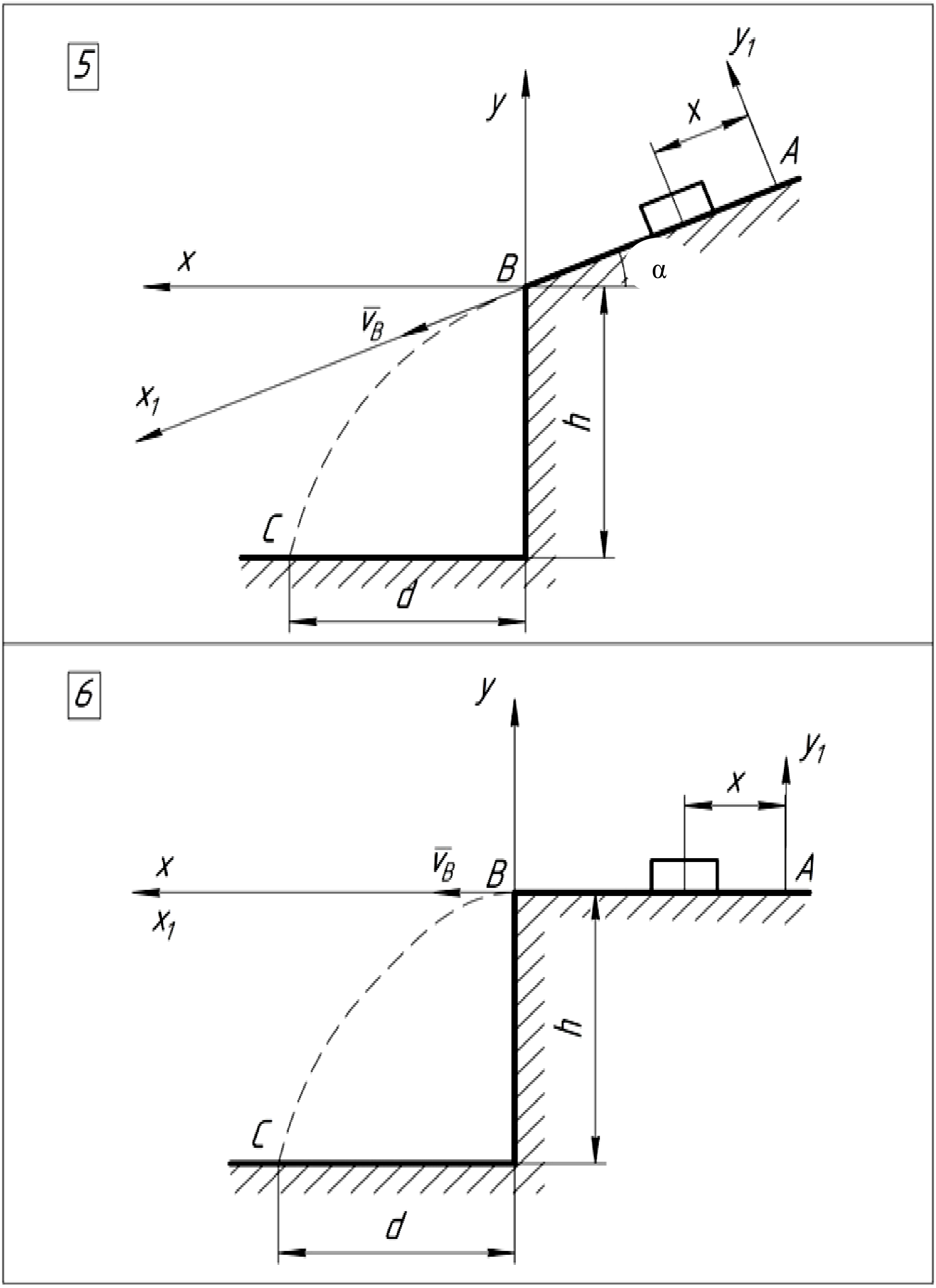


Рисунок А.3 – Розрахункова схема

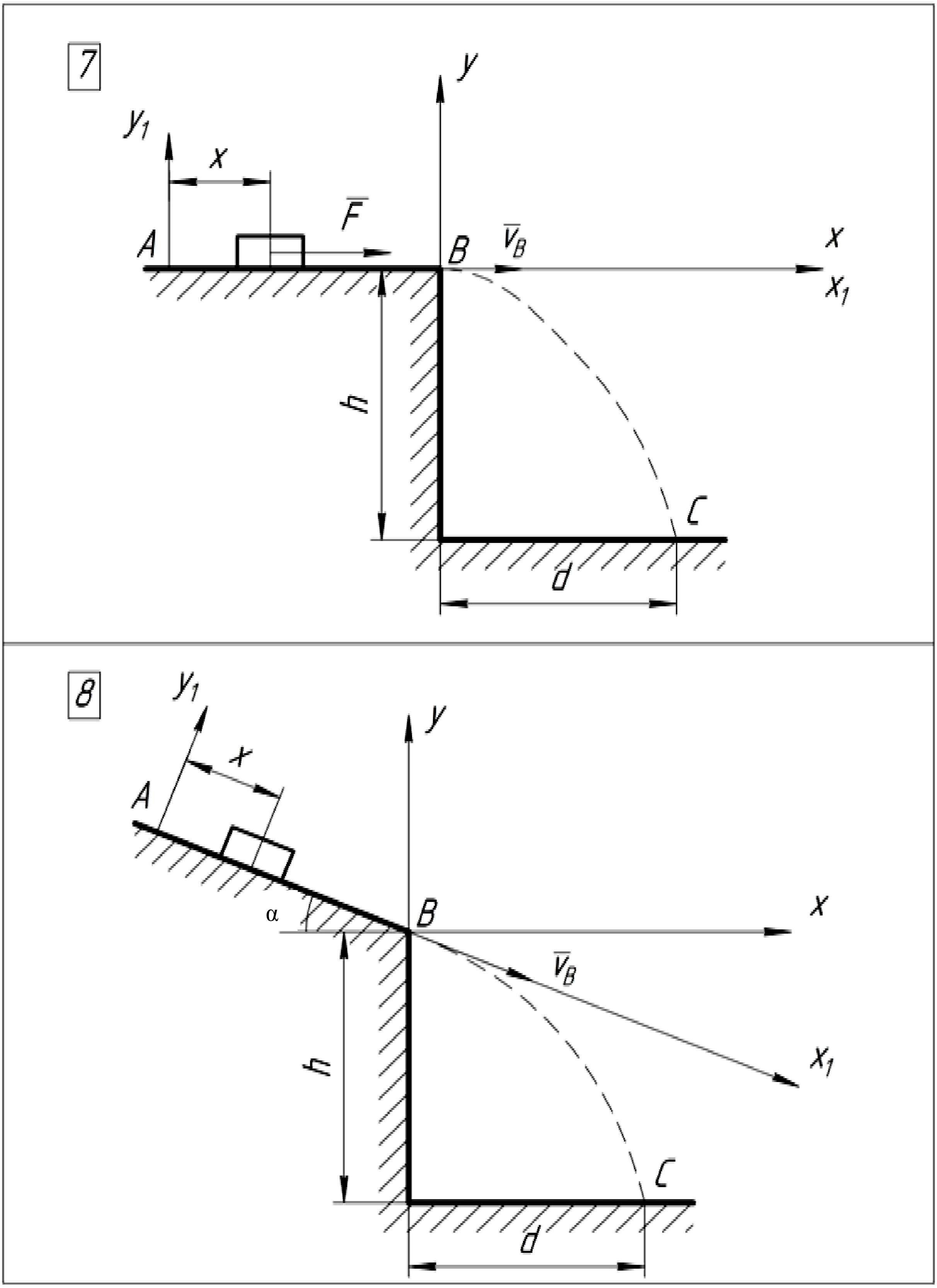


Рисунок А.4 – Розрахункова схема

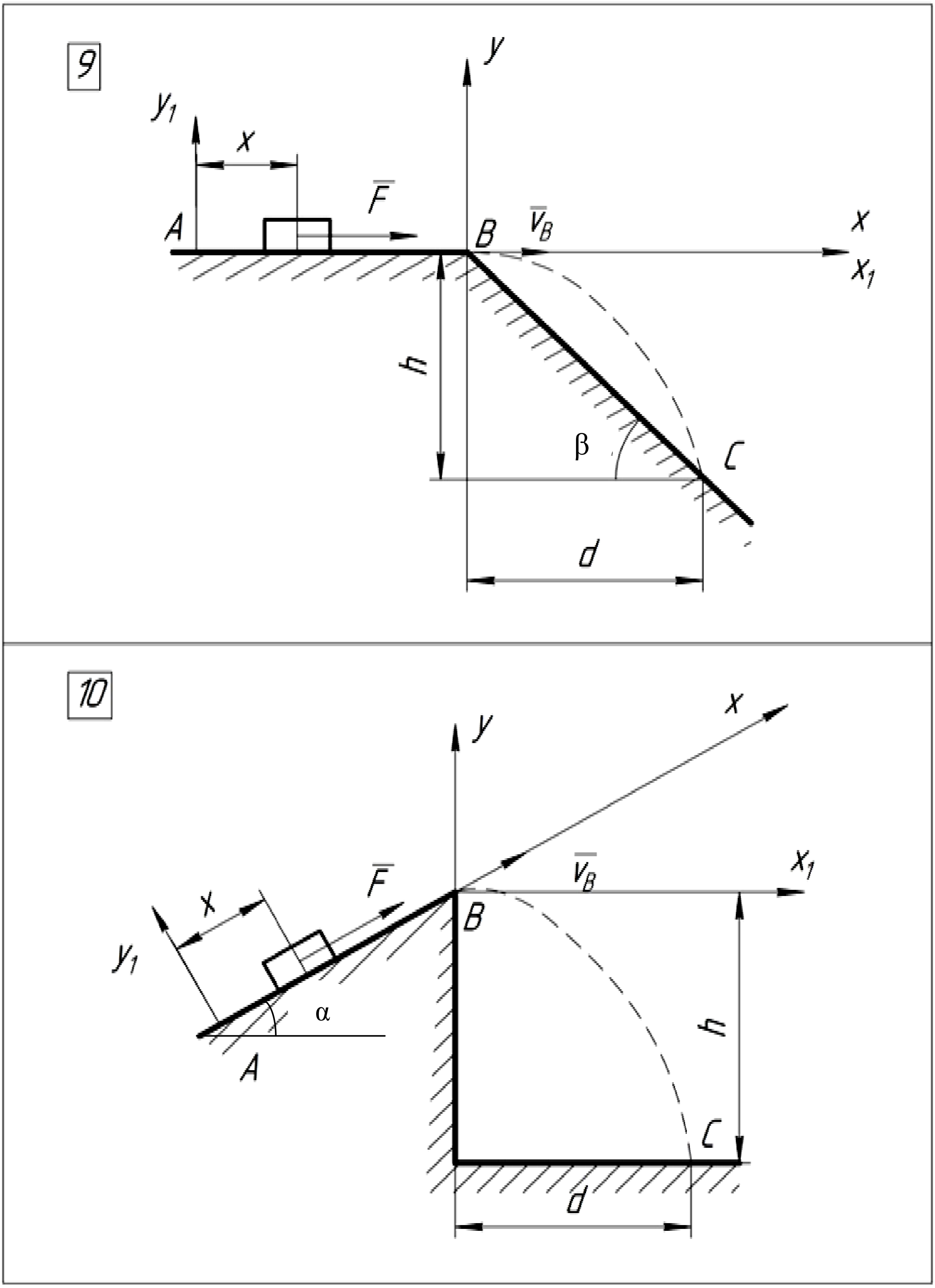


Рисунок А.5 – Розрахункова схема

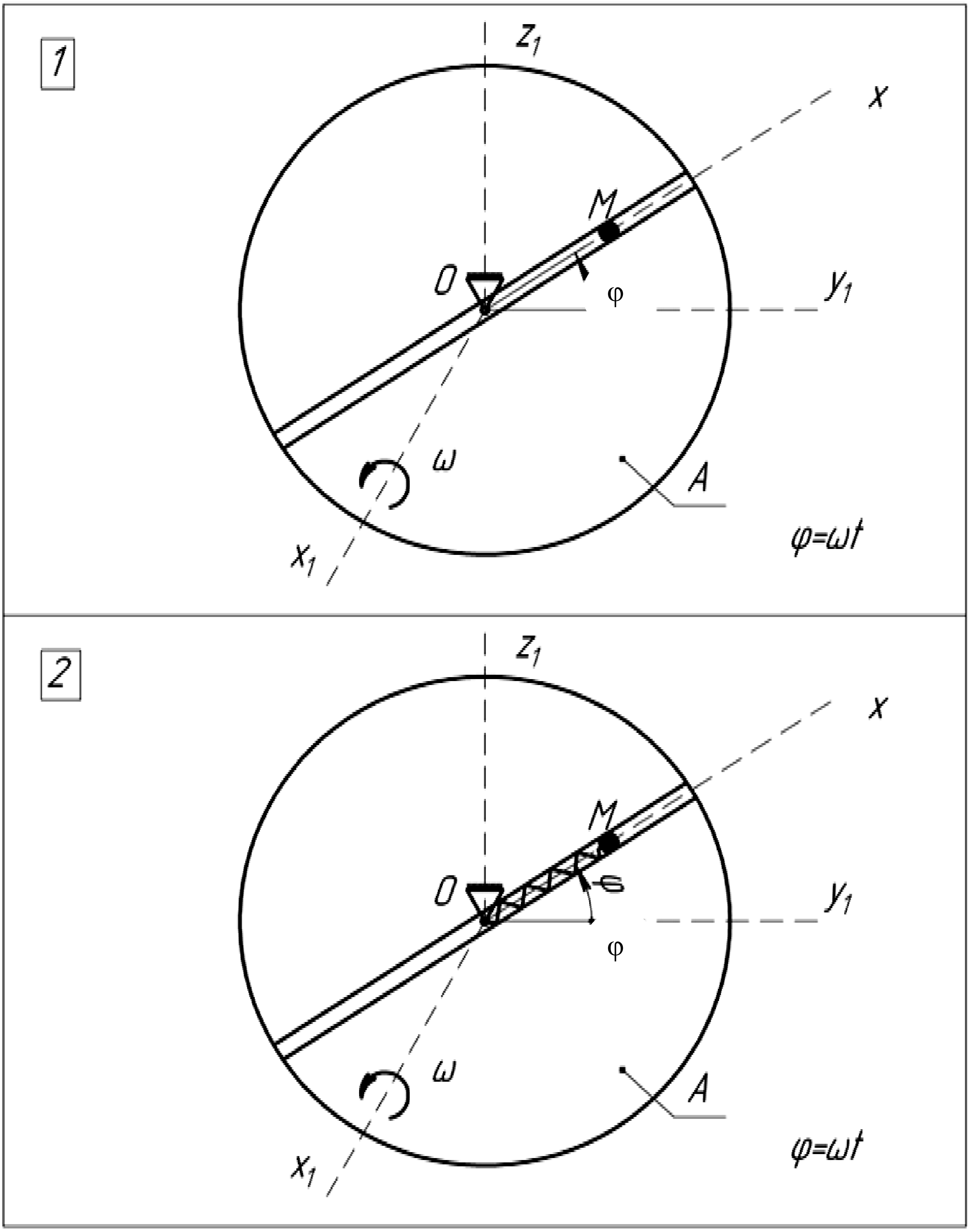


Рисунок А.6 – Розрахункова схема

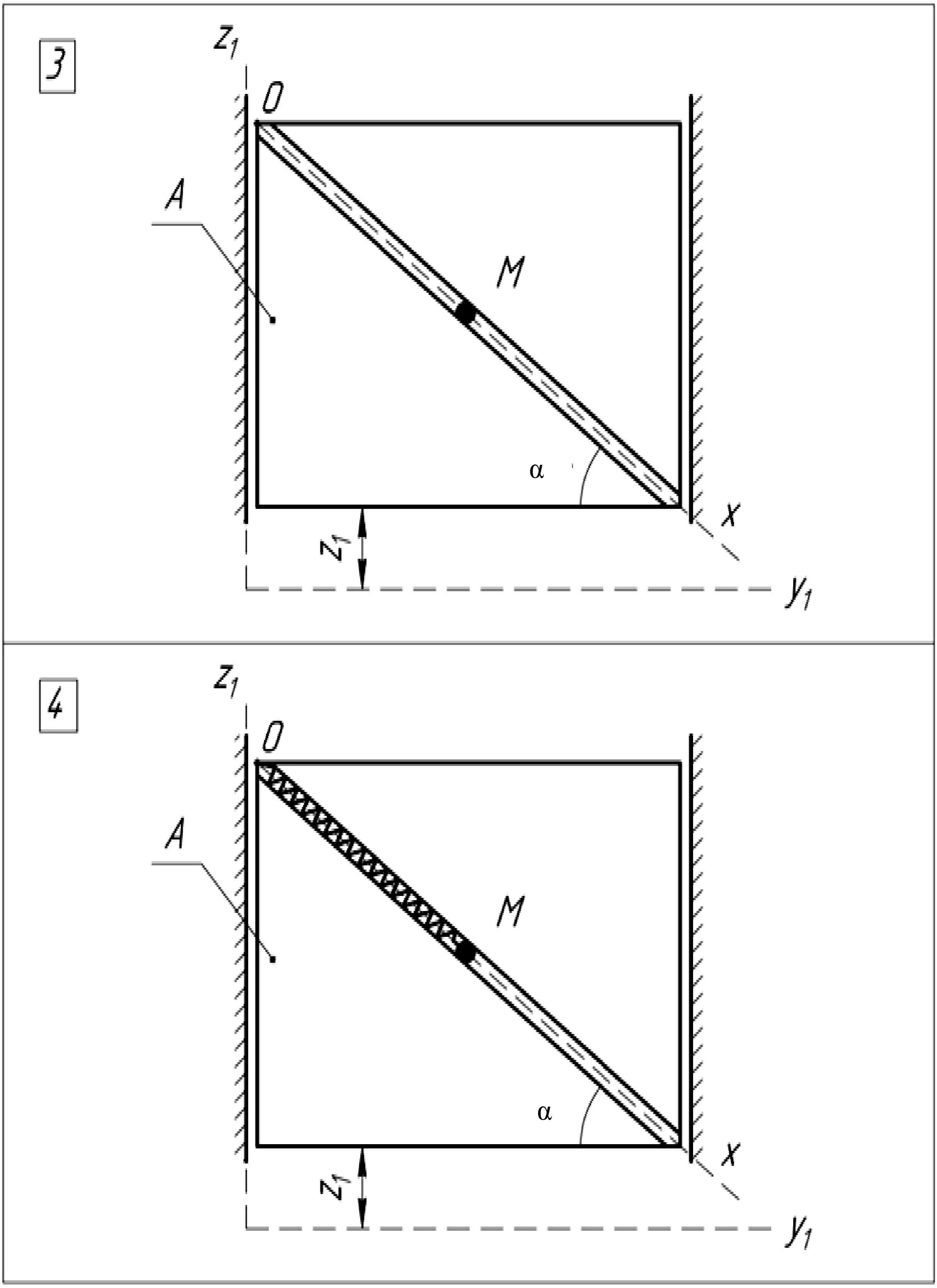


Рисунок А.7 – Розрахункова схема

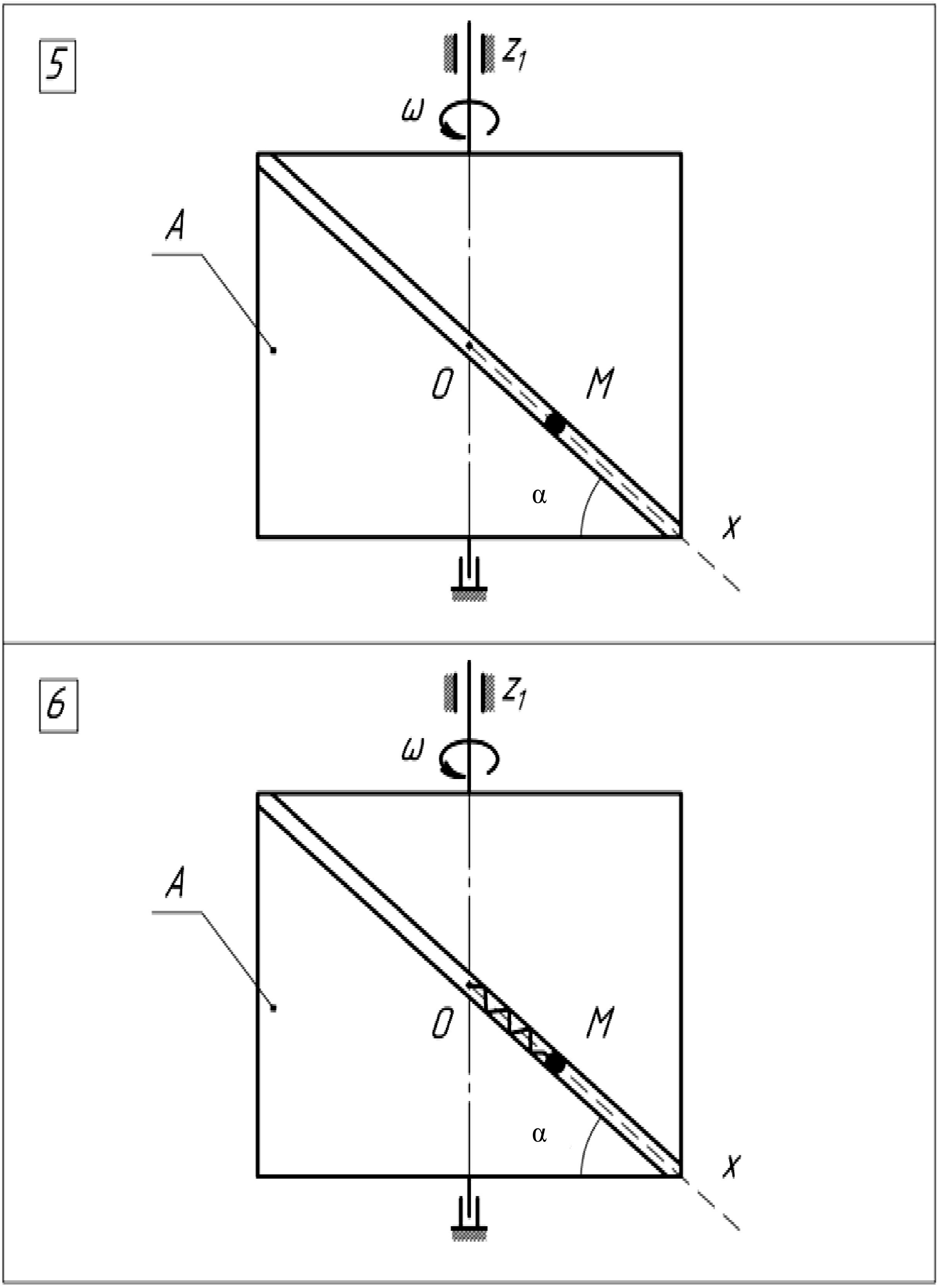
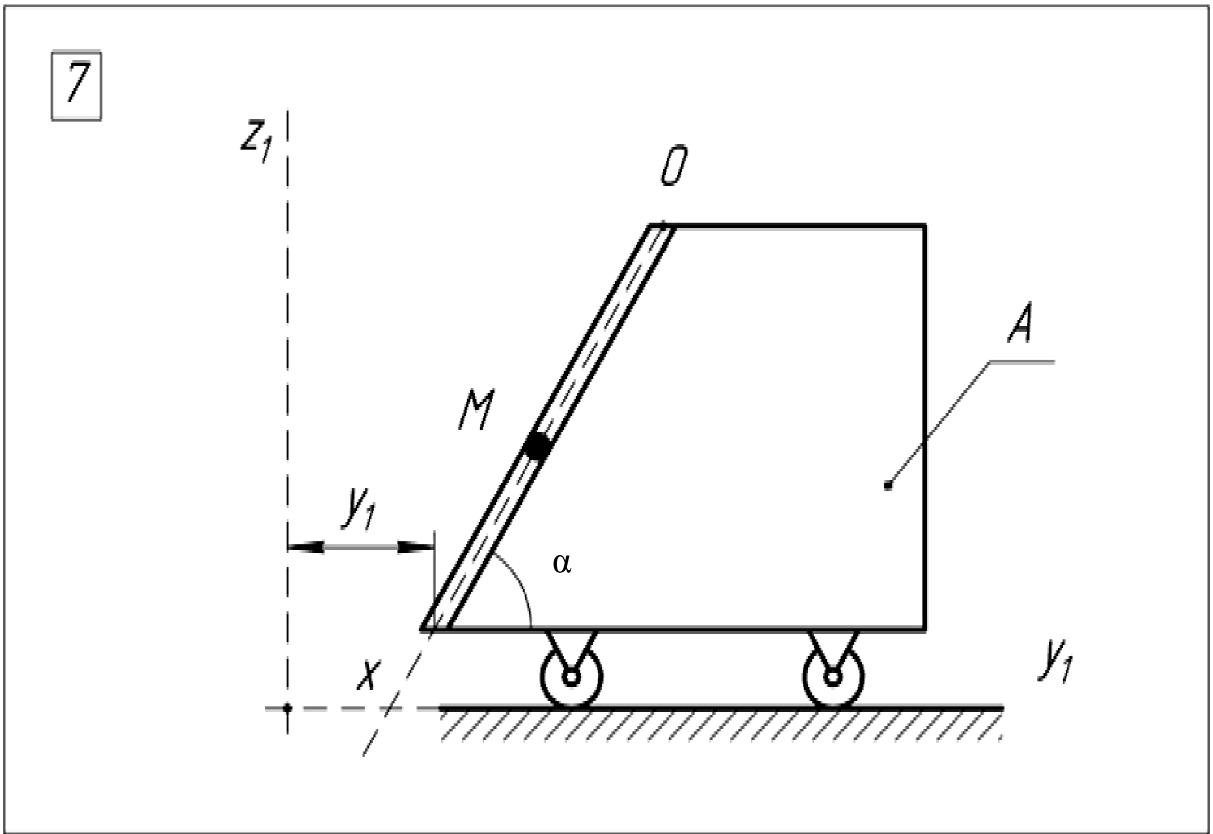


Рисунок А.8 – Розрахункова схема



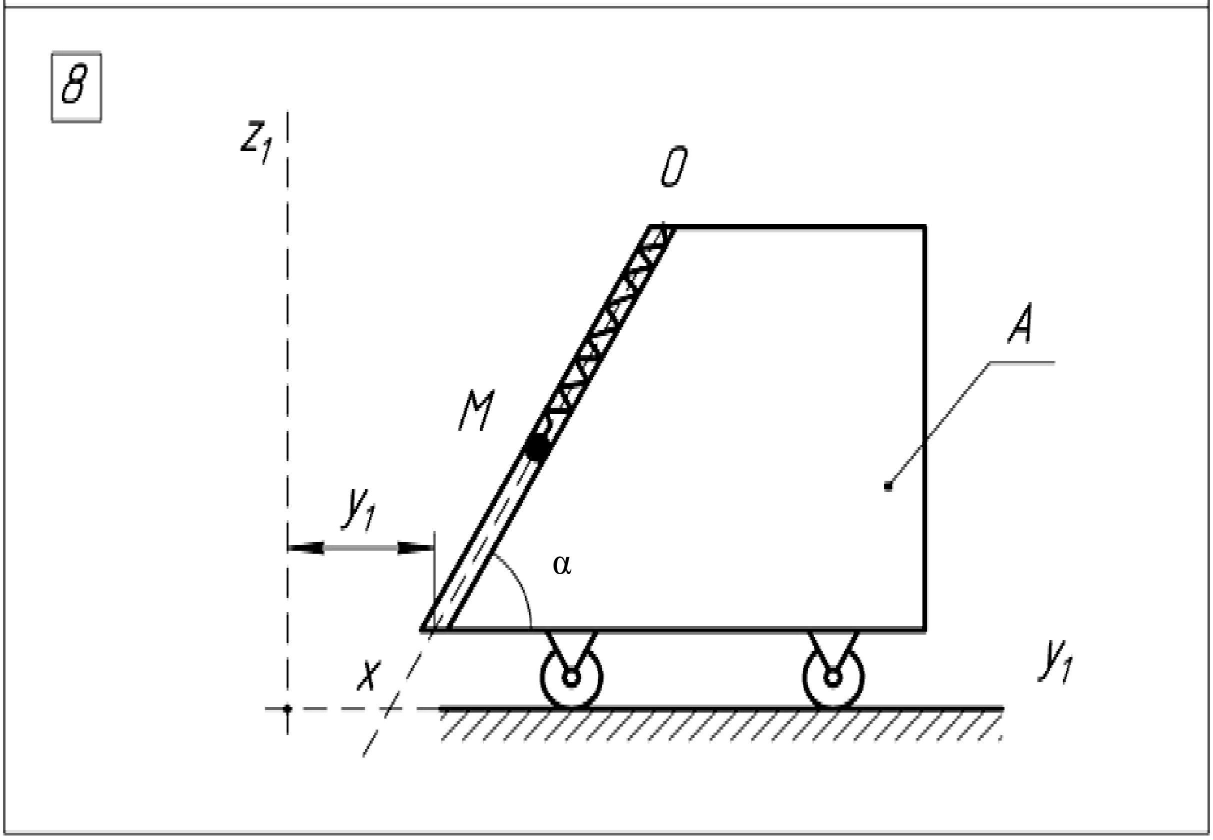


Рисунок А.9 – Розрахункова схема

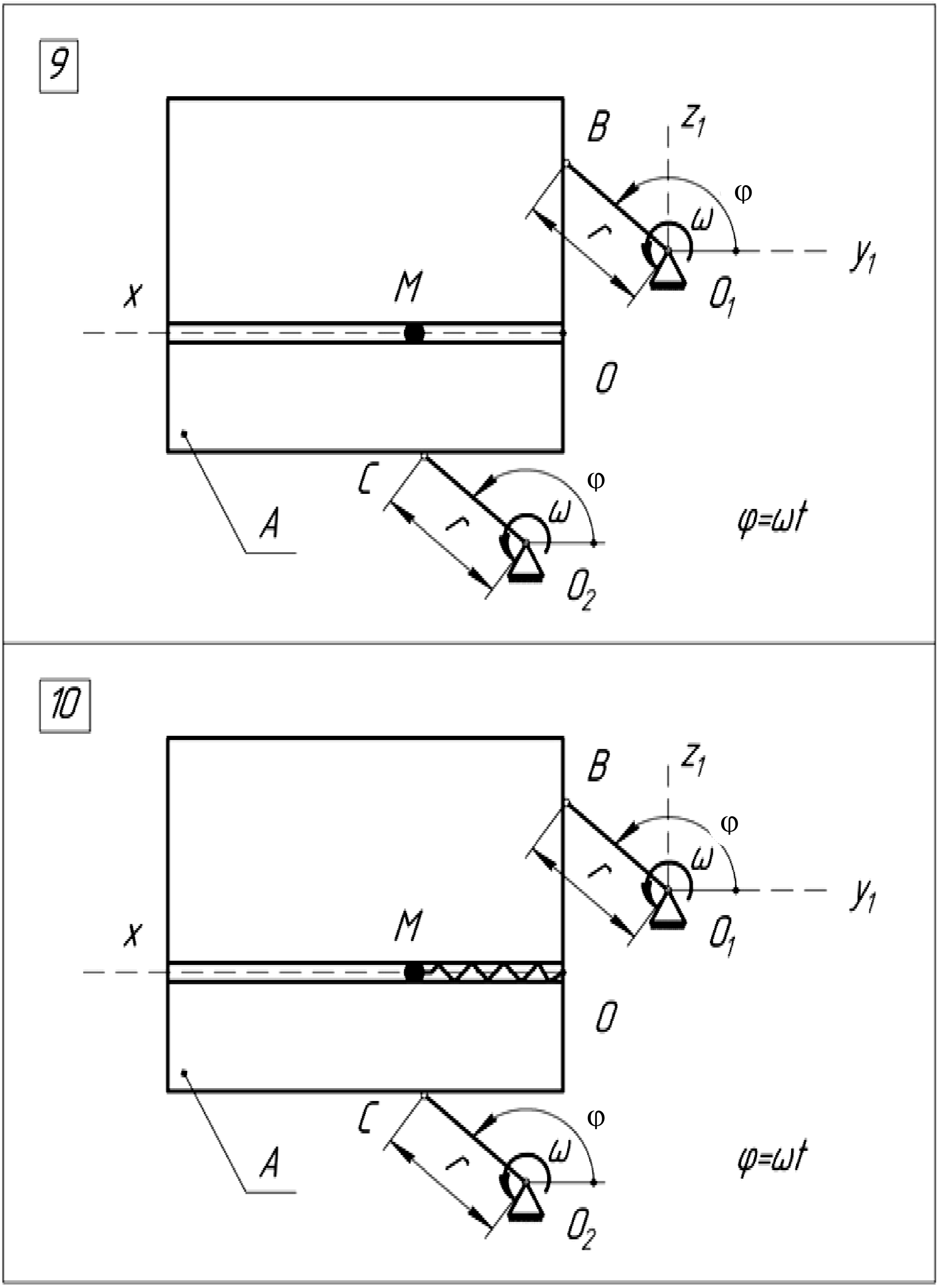


Рисунок А.10 – Розрахункова схема

Додаток Б

Б.1 Короткі відомості про розв'язання неоднорідних лінійних диференційних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами

Неоднорідне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами можна записати у вигляді:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t),$$

де $x,\ \dot{x},\ \ddot{x}$ – шукана функція $x(t)$ та її похідні;
$f(t)$ – деяка функція.

Розв'язок такого рівняння шукаємо у вигляді:

$$x(t) = x_{заг} + x_{част},$$

де $x_{заг}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння;
$x_{част}$ – частковий розв'язок неоднорідного рівняння.

Для отримання загального розв'язку $x_{заг}$ необхідно розв'язати однорідне рівняння, отримане з заданого, заміною правої частини на нуль, тобто наступного:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0.$$

Для його розв'язання складають характеристичне рівняння, замінюючи похідні функції деяким постійним коефіцієнтом z того ж ступеня, а функцію – одиницею $\left(x \to 1,\ \dot{x} \to z,\ \ddot{x} \to z^2\right)$:

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Розв'язуючи дане квадратне рівняння, отримаємо:

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Можливі наступні варіанти коренів:

$z_1 \neq z_2$, до того ж вони є дійсними числами, тому загальний розв'язок матиме вигляд:

$$x_{заг} = C_1 \cdot e^{Z_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{Z_2 \cdot t}$$

Якщо z_1 i z_2 – комплексні числа, то їх можна подати у вигляді :

$$z_1 = \alpha + \beta i$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді загальний розв'язок

$$x_{заг} = e^{\alpha t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos \beta \cdot t + C_2 \cdot \sin \beta \cdot t \right)$$

У випадку, якщо $\alpha = 0,\ i\ z_1 = \beta i,\ z_2 = -\beta i$:

$$x_{заг} = C_1 \cdot \cos \beta \cdot\ t + C_2 \cdot \sin \beta \cdot\ t,$$

де $z_1 = z_2 = z$, до того ж вони є дійсними числами, тому загальний розв'язок матиме вигляд:

$$x_{заг} = C_1 \cdot e^{Z_1 \cdot t} + C_2 \cdot t \cdot e^{Z_2 \cdot t}$$

Б.2 Таблиці значень тригонометричних і показникових функцій деяких аргументів

Таблиці значень тригонометричних функцій (табл. Б.1 і Б.2) складені з кроком в 1. Проміжні значення необхідно визначати за лінійною інтерполяцією. Наприклад (див. зноску на стор. 32), для визначення значення $\sin 51{,}245°$, розкладемо це число на складові:

$$51{,}245° = 50° + 1° + 0{,}245°.$$

В таблиці знаходимо колонки «50°» і строку «1°», на їх перетині маємо 0,777, тобто $\sin 51° = 0{,}777$. Для того, щоб врахувати 0,245°, знайдемо наступне значення для $\sin 52° = 0{,}788$.

$$\sin 51{,}245° = \sin 51° + \frac{\sin 52° - \sin 51°}{52° - 51°} \cdot \left(51{,}245° - 51° \right) =$$

$$= 0{,}777 + \frac{0{,}788 - 0{,}777}{1°} \cdot 0{,}245 = 0{,}780$$

Для того, щоб скористатися таблицями, необхідно перевести значення куту з радіан в градуси, якщо це необхідно, за формулою:

$$\alpha° = \alpha_{рад} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Таблиця Б.1 – Значення тригонометричних функцій деяких аргументів

sin	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º
0º	0,000	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985
1º	0,017	0,191	0,358	0,515	0,656	0,777	0,875	0,946	0,988
2º	0,035	0,208	0,375	0,530	0,669	0,788	0,883	0,951	0,990
3º	0,052	0,225	0,391	0,545	0,682	0,799	0,891	0,956	0,993
4º	0,070	0,242	0,407	0,559	0,695	0,809	0,899	0,961	0,995
5º	0,087	0,259	0,423	0,574	0,707	0,819	0,906	0,966	0,996
6º	0,105	0,276	0,438	0,588	0,719	0,829	0,914	0,970	0,998
7º	0,122	0,292	0,454	0,602	0,731	0,839	0,921	0,974	0,999
8º	0,139	0,309	0,469	0,616	0,743	0,848	0,927	0,978	0,999
9º	0,156	0,326	0,485	0,629	0,755	0,857	0,934	0,982	1,000
10º	0,174	0,342	0,500	0,643	0,766	0,866	0,940	0,985	1,000

Таблиця Б.2 – Значення тригонометричних функцій деяких аргументів

cos	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0°	1,000	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174
1°	1,000	0,982	0,934	0,857	0,755	0,629	0,485	0,326	0,156
2°	0,999	0,978	0,927	0,848	0,743	0,616	0,469	0,309	0,139
3°	0,999	0,974	0,921	0,839	0,731	0,602	0,454	0,292	0,122
4°	0,998	0,970	0,914	0,829	0,719	0,588	0,438	0,276	0,105
5°	0,996	0,966	0,906	0,819	0,707	0,574	0,423	0,259	0,087
6°	0,995	0,961	0,899	0,809	0,695	0,559	0,407	0,242	0,070
7°	0,993	0,956	0,891	0,799	0,682	0,545	0,391	0,225	0,052
8°	0,990	0,951	0,883	0,788	0,669	0,530	0,375	0,208	0,035
9°	0,988	0,946	0,875	0,777	0,656	0,515	0,358	0,191	0,017
10°	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	0,500	0,342	0,174	0,000

Таблиця Б.3 – Значення тригонометричних функцій деяких аргументів

tg	0º	10º	20º	30º	40º	50º	60º	70º	80º
0º	0,000	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671
1º	0,017	0,194	0,384	0,601	0,869	1,235	1,804	2,904	6,314
2º	0,035	0,213	0,404	0,625	0,900	1,280	1,881	3,078	7,115
3º	0,052	0,231	0,424	0,649	0,933	1,327	1,963	3,271	8,144
4º	0,070	0,249	0,445	0,675	0,966	1,376	2,050	3,487	9,514
5º	0,087	0,268	0,466	0,700	1,000	1,428	2,145	3,732	11,43
6º	0,105	0,287	0,488	0,727	1,036	1,483	2,246	4,011	14,30
7º	0,123	0,306	0,510	0,754	1,072	1,540	2,356	4,331	19,08
8º	0,141	0,325	0,532	0,781	1,111	1,600	2,475	4,705	28,64
9º	0,158	0,344	0,554	0,810	1,150	1,664	2,605	5,145	57,29
10º	0,176	0,364	0,577	0,839	1,192	1,732	2,747	5,671	∞

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для техн. ВУЗов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон и др. – 4 изд. – М.: Высш. школа, 1985. – 367 с.
2. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах, Т. І. Статика. Кинематика: учеб. пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 7 изд. – М.: Наука, 1973. – Т. 1.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Статика. Кинематика: учеб. для ВУЗов / А.А. Яблонский, В.М. Никифоров. – изд. 5, испр. – М.: Высш. школа, 1977.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механіки: учеб. для ВУЗов / С.М. Тарг. – 12 изд. – М.: Высш. школа, 2002.
5. Теоретична механіка. Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін. – К.: Техніка, 2007.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Чальцев Михайло Миколайович
Алтухова Тетяна Іванівна
Неклюдов Михайло Володимирович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА» ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО–ПРОЕКТУВАЛЬНОЇ РОБОТИ «ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ» (ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 6.070106 «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»)

Підписано до випуску 06.12.2011 р. Гарнітура Times New.
Умов. друк. арк. 3,31. Зам. № 379

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно–дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51
E–mail: druknf@rambler.ru

Редакційно–видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007р.