

## МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Г.М. Улитин<sup>1</sup>, С.Н. Царенко<sup>2</sup>

Рассмотрен метод усреднения переменных коэффициентов применительно к моделям продольного удара стержней переменного сечения. Решена задача о свободных колебаниях стержня. Приводится сравнение значений собственных частот для моделей упрощенной и точной. Получены зависимости для определения продольных деформаций и напряжений в сечениях стержня. Для сравнения найденных решений с известными результатами построены графики изменения усилия в ударном торце для конических стержней различной конфигурации.

*Ключевые слова:* метод усреднения; продольный удар; свободные колебания; стержень переменного сечения, напряжения; деформации.

Математической моделью для многих задач динамики элементов оборудования и сооружений является стержень с переменным сечением (ударный инструмент в силовых импульсных системах, стойки и сваи различной конфигурации и пр.). Основная трудность при решении таких задач состоит в том, что собственные функции соответствующих граничных задач являются решением уравнений с переменными коэффициентами. Для некоторых частных случаев найдены аналитические решения таких уравнений, например, в работах [1, 2] рассмотрены задачи продольного удара стержней конической и гиперболической формы, в статье [3], при исследовании собственных и вынужденных продольных колебаний в конических стойках трубчатого сечения решение получено в функциях Бесселя. В работе [4] решение уравнения продольных колебаний стержня неоднородной структуры находится в виде ряда, который строится на основе рекуррентной интегральной зависимости. Тем не менее, не существует общего метода для аналитического решения таких уравнений. Поэтому для практических расчетов широкое распространение получили численные методы, в том числе и на основе аппроксимации поверхности стержней различных форм последовательно сопряженными цилиндрическими участками [5]. Однако так как численное решение можно получить исключительно для объекта с заданными параметрами, такой подход практически не применим на стадии проектных разработок. Поэтому становится актуальным вопрос об использовании методов упрощения математической модели и проведения оценок таких методов.

В работе [6] представлены различные методы приведения уравнений колебаний упругих систем к уравнениям с постоянными коэффициентами. Одним из таких методов является метод усреднения переменных коэффициентов. Такой метод был, например, использован в задаче устойчивости буровых колон [7], а также при нахождении собственных значений для краевых спектральных задач четвертого порядка [8].

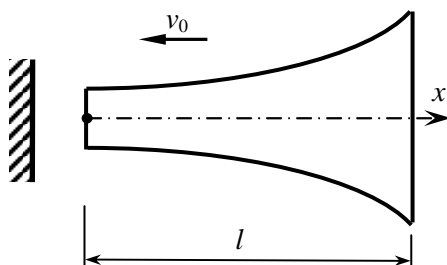


Рис. 1. Схема удара стержня переменного сечения о жесткий ограничитель

Поставим задачу об ударе стержня переменного сечения о жесткий ограничитель (рис. 1), принятая схема аналогична, рассмотренным в работах [1,2]. Для этого решим граничную задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u'(l, t) = 0. \quad (3)$$

С начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = -v_0 e(x), \quad (4)$$

<sup>1</sup> Улитин Геннадий Михайлович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Государственное высшее учебное заведение Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина.

<sup>2</sup> Царенко Сергей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой сопротивления материалов, Государственное высшее учебное заведение Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина.

E-mail: tzarenko@gmail.com

## Механика

где  $u(x, t)$  – продольное перемещение,  $F(x)$  – площадь поперечного сечения стержня, будем считать, монотонно-возрастающей на участке  $[0; l]$ ,  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность материала,  $e(x)$  – единичная функция.

Уравнение (1) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( F(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \gamma F(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где  $z = \frac{x}{l}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ),  $\gamma = \frac{l^2}{c^2}$ ,  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  – скорость волны продольных колебаний стержня.

Для решения уравнения (5) применим метод Фурье. Из соотношения (5) следует уравнение для определения собственных функций  $Z_n(z)$

$$Z_n'' + \frac{F'}{F} Z_n' + \lambda_n^2 Z_n = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda_n$  – собственные значения.

Уравнение (6) является уравнением с переменным коэффициентом. Усредним переменный коэффициент

$$2\alpha = - \int_0^1 \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \ln k,$$

где  $k = \frac{F(0)}{F(1)}$  ( $k \leq 1$ ) – отношение площади поперечного сечения меньшего торца к площади большего.

Тогда уравнение (6) представим уравнением с постоянными коэффициентами

$$Z_n'' - 2\alpha Z_n' + \lambda_n^2 Z_n = 0. \quad (7)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$Z_n = e^{\alpha z} (C_1 \cos \beta_n z + C_2 \sin \beta_n z), \quad (8)$$

где  $\beta_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}$ .

Следует отметить, что при  $k=1$ , уравнение (7) будет соответствовать уравнению для стержня постоянного сечения, а функция (8) будет его точным решением. Из граничного условия (2) находим  $C_1 = 0$ , тогда выражение для собственных функций примет вид

$$Z_n(z) = e^{\alpha z} \sin \beta_n z. \quad (9)$$

Из условия (3) получим уравнение для определения собственных значений

$$\tan \beta_n = -\frac{\beta_n}{\alpha}, \text{ или } \tan \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4} \ln^2 k} = -\frac{2\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4} \ln^2 k}}{\ln k}. \quad (10)$$

Из зависимости (10) видно, что при  $\beta_n \rightarrow 0$   $\alpha \rightarrow 1$ , таким образом, получаем наименьшее значение параметра  $k_{\min} = 1/e^2$ , для которого можно определить собственные значения из уравнения (10).

На графиках рис. 2 показаны зависимости первых двух собственных значений от параметра  $k$ . Пунктирная линия отображает соответствующие зависимости, построенные на основании аналитических решений для стержней конической и гиперболической форм [1,2]. Из полученных зависимостей определяем наибольшее расхождение между значениями первого собственного числа, найденных из аналитического решения и по методу усреднения, в точке  $k_{\min}$  составит 1,3 %, для второго, как и для всех последующих, расхождение не будет превышать 1 %. Таким образом, на основании сравнения собственных значений (собственных частот) следует вывод о том, что предложенная модель, с достаточной точностью, может использоваться для практиче-

ских расчетов стержней переменного сечения, у которых отношение площадей торцов не менее чем  $1/e^2$ .

Уравнение собственных продольных колебаний с учетом первого начального условия (4) будет иметь вид:

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \sin \omega_n t, \quad (11)$$

где  $\omega_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\lambda_n c}{l}$  – частота собственных колебаний,  $A_n$  – произвольные постоянные.

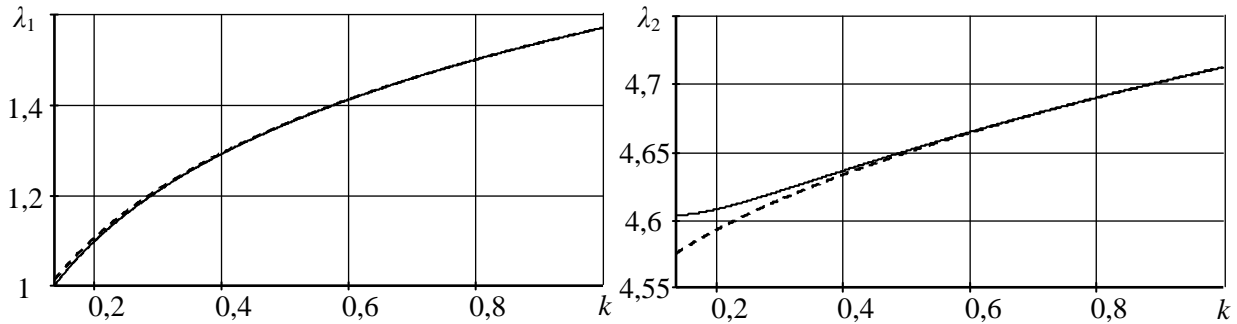


Рис. 2. Зависимость  $\lambda_n$  от величины параметра  $k$

Для нахождения коэффициентов  $A_n$ , при наличии аналитического решения, используется свойство ортогональности собственных функций. В нашем случае они не будут ортогональны. Покажем, что функция  $Y_m(z) = e^{-\alpha z} \sin \beta_m z$  будет ортогональна с функцией  $Z_n(z)$  на промежутке  $[0; 1]$  для всех  $m \neq n$

$$\int_0^1 Z_n Y_m dz = \int_0^1 \sin \beta_n z \sin \beta_m z dz = \frac{\cos \beta_n \cos \beta_m}{\beta_n^2 - \beta_m^2} (\beta_m \tan \beta_n - \beta_n \tan \beta_m), \quad (12)$$

так, как  $\beta_n \neq \beta_m$ , а также учитывая, что  $\alpha \neq 0$ , то подставив в уравнение (12) зависимость (10) получим

$$\int_0^1 Z_n Y_m dz = \frac{\cos \beta_n \cos \beta_m}{\alpha(\beta_n^2 - \beta_m^2)} (\beta_m \beta_n - \beta_n \beta_m) = 0. \quad (13)$$

Из второго начального условия следует уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n Z_n(z) = -v_0 e(z). \quad (14)$$

Умножим обе части равенства (14) на  $Y_m(z)$  и проинтегрируем на участке  $[0; 1]$ , тогда с учетом свойства (13) получим

$$A_n \omega_n \int_0^1 Z_n Y_n dz = -v_0 \int_0^1 Y_n dz,$$

откуда находим произвольные постоянные

$$A_n = -\frac{v_0 \int_0^1 Y_n dz}{\omega_n \int_0^1 Z_n Y_n dz} = -\frac{4v_0 l (\lambda_n^2 - \alpha^2)}{c \sqrt{\lambda_n^3} \left( 2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}) \right)}. \quad (15)$$

Подставив выражение (15) в уравнение (11), получим зависимость для определения продольных перемещений сечений стержня

$$u(z,t) = -\frac{4v_0 l}{c} e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 - \alpha^2) \sin(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} z)}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}))} \sin \omega_n t.$$

Выражение для напряжений будет иметь вид:

$$\sigma(z,t) = -E \frac{4v_0}{c} e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 - \alpha^2) (\alpha \sin(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} z) + \sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} \cos(\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} z))}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}))} \sin \omega_n t.$$

Усилие в ударном торце определяется зависимостью

$$P(t) = -EF_0 \frac{4v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(\lambda_n^2 - \alpha^2)^3}}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \alpha^2}))} \sin \omega_n t, \quad (16)$$

где  $F_0 = F(0)$

В работе [5] представлены результаты численных исследований на основе аппроксимации конической поверхности стержней последовательно сопряженными цилиндрическими участками. В качестве базовой модели был принят стержень постоянного сечения диаметром  $d_0 = 0,025$  м и длиной  $l = 1$  м, конические стержни, по отношению к базовому, имели такой же диаметр ударного торца и массу, а углы уклона  $\varphi$ , составляли:  $0,5^\circ$ ;  $1^\circ$ ;  $3^\circ$ ;  $6^\circ$  и  $9^\circ$ . Для сравнения результатов, найденных численным методом и методом усреднения, определим расчетное значение параметра  $k$  для конических стержней по формуле [2]

$$k_\varphi = \sqrt[3]{\left(\frac{d_0}{6l \tan \varphi + d_0}\right)^2},$$

откуда находим:  $k_{0,5} = 0,471$ ;  $k_1 = 0,334$ ;  $k_3 = 0,176$ ;  $k_6 = 0,113$ ;  $k_9 = 0,087$ . По полученным значениям видим, что для стержней с уклоном  $6^\circ$  и  $9^\circ$  рассматриваемый метод не применим, так как соответствующие значения  $k$  меньше предельного  $k_{\min} = 1/e^2 \approx 0,135$ .

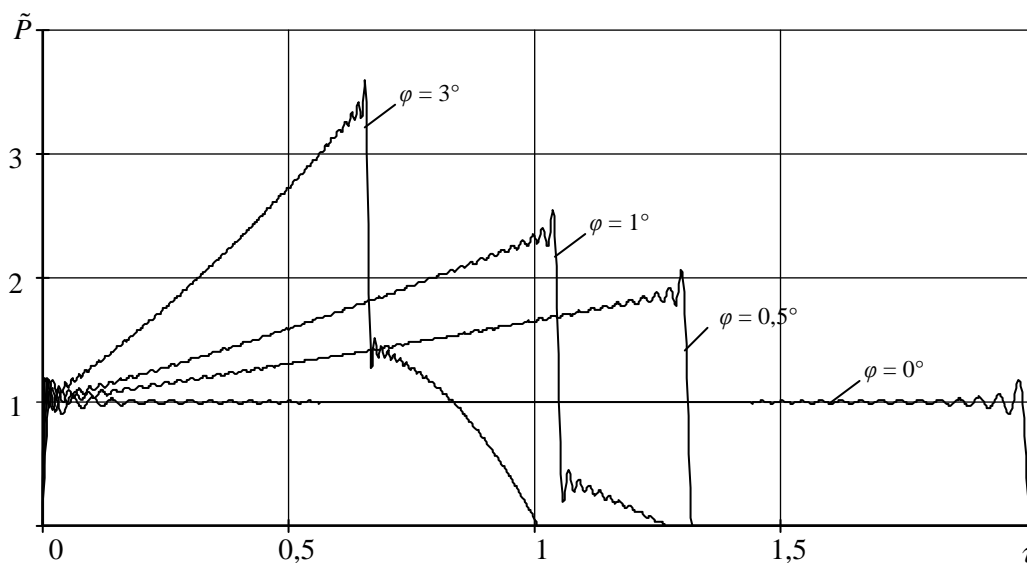


Рис. 3. Зависимость величины усилия в ударном торце  $\tilde{P}$  от безразмерного времени  $\tau$

На рис. 3 представлены графики безразмерной величины усилия в ударном сечении  $\tilde{P} = -\frac{P}{EF_0} \frac{c}{v_0}$  в зависимости от безразмерного времени  $\tau = \frac{c}{l} t$  для конических стержней с различным углом уклона  $\varphi$ . Графики (рис. 3) практически полностью согласуются по характеру поведения и расчетным значениям с представленными в литературе [5], например, для стержня с  $\varphi = 3^\circ$   $\tilde{P}_{\max} = 3,632$  [5], а максимальное значение, найденное из зависимости (16),  $\tilde{P}_{\max} = 3,595$ , т.е. расхождение составляет порядка 1 %.

На основании полученных результатов, можно сделать вывод, что метод усреднения переменных коэффициентов дает достаточную точность для технических расчетов в моделях продольного удара стержней переменного сечения. При этом он ограничен предельной величиной соотношения площадей поперечных сечений, а также условием монотонности изменения площади в пределах длины стержня или участка. Учитывая, что полученные расчетные формулы не зависят от формы сечения и очертания стержня, то данный метод, с достаточной точностью для инженерных решений, дает обоснование выбора шага (участок длины стержня, в пределах которого отношение площадей сечений составляет менее чем  $1/e^2$ ) для аппроксимации сложных поверхностей участками конической или другой формы, для которой известно аналитическое решение.

### Литература

1. Улітін, Г.М. Удар конічного стрижня об жорстку перешкоду / Г.М. Улітін, С.М. Царенко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – № 93. – С. 56–63.
2. Улитин, Г.М. Моделирование динамических процессов в бойках гиперболической формы в механизмах ударного действия / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 3(75). – С. 37–42.
3. Улитин, Г.М. О продольных колебаниях упругих стержней переменного сечения / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Прикладная механика. – 2015. – № 1. – С. 123–129.
4. Крутий, Ю.С. Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой / Ю.С. Крутий // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 1. – С. 25–33.
5. Манжосов, В.К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В.К. Манжосов, В.В. Слепухин. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 208 с.
6. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.
7. Улитин, Г.М. Оценка метода усреднения в задачах устойчивости буровых колон / Г.М. Улитин // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Гірничо-геологічна». – 2005. – № 85. – С. 69–72.
8. Абзалимов, Р.Р. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями / Р.Р. Абзалимов, Е.В. Саяхова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2008. – № 11. – С. 3–11.

Поступила в редакцию 5 апреля 2015 г.

## METHOD OF AVERAGING FOR THE TASKS ON LONGITUDINAL IMPACT OF VARIABLE SECTION RODS

G.M. Ulitin<sup>1</sup>, S.N. Tsarenko<sup>2</sup>

The method of averaging of variable coefficients is applied to the models of longitudinal impact of variable section rods. The task of free vibrations of a rod is solved. The values of the proper frequencies for the two models: simplified and accurate ones are compared. The dependencies to determine the longitudinal strains and stresses in the rod sections are obtained. To compare the obtained results with the earlier outcomes the graphs of effort change in the impact end of conical rods for different configurations are created.

*Keywords: method of averaging; longitudinal impact; free oscillations; rod with variable cross section, voltage; strain.*

### References

1. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Udar konichnogo strizhnyya ob zhorstku pereshkodu [Impact conical rod on hard limiter]. *Opir materialiv i teoriya sporud*, 2014, no. 93, pp. 56–63. (in Ukr.).
2. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Modelirovaniye dinamicheskikh protsessov v boykakh giperbolicheskoy formy v mekhanizmax udarnogo deystviya [Modeling of dynamic processes in the rods hyperbolic shape impact mechanisms]. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnologiyakh*, 2014, no. 3(75), pp. 37–42. (in Ukr.).
3. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. Longitudinal Vibrations of Elastic Rods of Variable Cross-Section. *Int. Appl. Mech.* 2015. Vol. 51, no. 1, pp. 123–129. DOI: 10.1007/s10778-015-0676-8
4. Krutiy Yu.S. Prodol'nye kolebaniya neodnorodnogo pryamogo sterzhnya peremennogo secheniya s nepreryvno raspredelennoy massoy. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, 2011, no. 1, pp. 25–33. (in Russ.).
5. Manzhosov V.K., Slepukhin V.V. *Modelirovanie prodol'nogo udara v sterzhnevyykh sistemakh neodnorodnoy struktury* [Simulation of longitudinal impact in rod systems of heterogeneous structure]. Ul'yanovsk: UIGTU Publ, 2011, 208 p. (in Russ.).
6. Panovko Ya.G. *Osnovy prikladnoy teorii uprugikh kolebaniy* [Fundamentals of applied theory of elastic vibrations]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1967, 316 p. (in Russ.).
7. Ulitin, G.M. Naukovi pratsi Donets'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universitetu. Seriya "Girnichno-geologichna". 2005, no. 85, pp. 69–72. (in Ukr.).
8. Abzalimov R.R., Salyakhova Ye.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika.* 2008, no. 11, pp. 3–11. (in Russ.).

*Received April 5, 2015*

---

<sup>1</sup> Ulitin Gennadiy Mikhaylovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of Higher Mathematics Department, State Higher Education Institution Donetsk National Technical University, Donetsk, Ukraine.

<sup>2</sup> Tsarenko Sergey Nikolaevich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Head of Strength of Materials Department, State Higher Education Institution Donetsk National Technical University, Donetsk, Ukraine.

E-mail: tzarenko@gmail.com