УДК 330.4, 621.31

ВИРИЧ С.А., доцент, к.т.н., ДИДОВИЧ Н.В., магистр, КОЗЛОВ А.А., магистр

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАМЕРА ПРИ РАСЧЁТЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В статті розглядається приклад розрахунку ланцюга постійного струму методами зворотної матриці та методом Крамера з застосуванням пакету MathCAD

Методы решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) делятся на прямые и итерационные. Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. К прямым методам решения СЛАУ относятся метод Гаусса, метод обратной матрицы, метод Крамера. Прямые методы используют обычно для сравнительно небольших систем (n < 200) с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем. Итерационные методы — это методы последовательных приближений. В них необходимо задать некоторое приближенное решение — начальное приближение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый итерацией. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью. К итерационным методам относятся метод простых итераций, метод Якоби, метод Зейделя.

Пакет MathCAD позволяет решать системы линейных алгебраических уравнений практически неограниченной размерности всеми известными в настоящее время способами, однако пользователь должен уметь грамотно и безошибочно составлять СЛАУ.

Запишем систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned}
&a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \ldots + a_{1n} * x_n = b_1 \\
&a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \ldots + a_{2n} * x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \ldots + a_{nn} * x_n = b_n
\end{aligned}$$

Совокупность коэффициентов этой системы запишем в виде матрицы коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Система уравнений с учетом матрицы A запишется в виде:

где X и B – вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец правых частей соответственно:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

где X и B – вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец правых частей.

Далее рассмотрим пример расчета цепи постоянного тока методами обратной матрицы и методом Крамера.

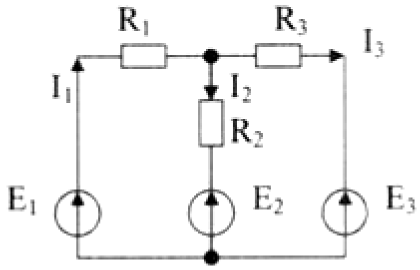

Рис.1 Линейная электрическая цепь.

Пусть дана электрическая цепь (рис.1), состоящая из трёх ветвей. Известны величины ЭДС источников и сопротивлений в каждой ветви. Необходимо определить токи, протекающие в каждой ветви.

Для трёх неизвестных токов I_1, I_2, I_3 составим систему из трёх уравнений согласно первому и второму законам Кирхгофа

$$\begin{cases} E_1 = I_1 * R_1 + I_2 * R_2 + E_2 \\ E_1 = I_1 * R_1 + I_3 * R_3 + E_3 \\ I_1 = I_2 + I_3 \end{cases}$$

и преобразуем ее следующим образом

$$\begin{cases} I_1 * R_1 + I_2 * R_2 + I_3 * 0 = E_1 - E_2 \\ I_1 * R_1 + I_2 * 0 + I_3 * R_3 = E_1 - E_3 \\ I_1 * 1 - I_2 * 1 - I_3 * 1 = 0 \end{cases}$$

Решение задачи по этапам в MathCAD приведено ниже

Этап 1: $R1 := 10 \cdot 10^3$ $\quad R2 := 2 \cdot 10^3$ $\quad R3 := 5 \cdot 10^3$

$E1 := 20$ $\quad E2 := 2$ $\quad E3 := 1$

Этап 2: $Mr := \begin{pmatrix} R1 & R2 & 0 \\ R1 & 0 & R3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Этап 3: $Me := \begin{pmatrix} E1 - E2 \\ E1 - E3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Этап 4: $Mi := Mr^{-1} \cdot Me$

Этап 5: $Mi = \begin{pmatrix} 1.6 \times 10^{-3} \\ 1 \times 10^{-3} \\ 6 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$

Рис 2

На первом этапе задаём в единицах СИ величину параметров электрической цепи - сопротивление R (Ом), ЭДС источников Е (В).

На втором и третьем этапах формируем матрицы коэффициентов и свободных членов. Искомое решение на четвёртом этапе легко получить методом обратной матрицы. Здесь M_r^{-1} - обратная матрица от матрицы коэффициентов, M_i - матрица токов (матрица решений СЛАУ). Следовательно величины искомых токов составят соответственно $I_1 = 1.6 * 10^{-3}$ А, $I_2 = 1 * 10^{-3}$ А, $I_3 = 6 * 10^{-3}$ А.

Проведём проверку найденных решений, используя первое уравнение СЛАУ

$$M_{i_0} * R_1 + M_{i_1} * R_2 + E_2 = 20$$

Проверка показывает правильность найденных решений. Данная СЛАУ несложно решается в пакете MathCAD и методом Крамера.

Для решения СЛАУ методом Крамера введём три дополнительных матрицы, получаемых заменой соответствующего столбца в матрице коэффициентов на вектор-столбец правых частей (рис.3).

$$M1 := \begin{pmatrix} E1 - E2 & R2 & 0 \\ E1 - E3 & 0 & R3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M2 := \begin{pmatrix} R1 & E1 - E2 & 0 \\ R1 & E1 - E3 & R3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M3 := \begin{pmatrix} R1 & R2 & E1 - E2 \\ R1 & 0 & E1 - E3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис.3

Решение системы методом Крамера J_1, J_2, J_3 определяется как отношение соответствующих частных определителей (от матриц М1, М2, М3) к полному определителю (Рис.4).

$$J_1 := \frac{|M1|}{|Mr|} \qquad J_2 := \frac{|M2|}{|Mr|} \qquad J_3 := \frac{|M3|}{|Mr|}$$

$$J_1 = 1.6 \times 10^{-3} \qquad J_2 = 1 \times 10^{-3} \qquad J_3 = 6 \times 10^{-4}$$

Рис.4

Как видим решения J_1, J_2, J_3 полученные методом Крамера совпадают с решениями, полученными методом обратной матрицы. СЛАУ, описывающая цепь переменного тока, решается аналогично, ответ получается в комплексном виде.

Список использованной литературы

1. В.Ю.Клепко, В.Л.Голецъ „Вища математика в прикладах і задачах” К. 2006.
2. Д.Письменный «Конспект лекций по высшей математике» ч. 1,2. М., 2006
3. www.mathcad.ru