УДК 621.31.213, 531.01

ВИРИЧ С.А, ДАНИЛЬЧУК О.Н., ЛАППО И.Н. (КИИ ДонНТУ)

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ РАСЧЕТЕ НАДЕЖНОСТИ ГОРНЫХ МАШИН

В данной статье представлен математический аппарат теории вероятности при решении задач теории надежности горных машин и комплексов.

Под теорией надежности понимают научную дисциплину, которая изучает закономерности сохранения во времени техническими средствами свойства выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования.

Теория надёжности является комплексной дисциплиной и состоит из разделов: математическая теория надёжности; надёжность по отдельным физическим критериям отказов; прогнозирование надёжности; мероприятия по повышению надёжности; контроль надёжности; теория восстановления надёжности; экономика надёжности.

Представляемый далее математический аппарат теории вероятности лежит в основе теории надёжности. Основополагающим понятием в теории вероятностей является понятие события, под которым понимают всякий факт, могучий произойти или не произойти в результате опыта. Несколько событий называются несовместимыми в опыте, если ни какие два из них не могут произойти вместе. Типичным примером является отказ и безотказная работа объекта. Рассмотрим основные теоремы и их применение в теории надёжности.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1 + A_2 +... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) +... + P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A{\cdot}B).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A{\cdot}B) - P(A{\cdot}C) - P(B\cdot C) + +P(A{\cdot}B{\cdot}C)$$

Следствие 1. Если появление хотя бы одного из n несовместных событий является достоверным событием, то события A составляет полную группу несовместных событий.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) = 1$$

так как одно из событий явилось достоверным.

В этом случае вероятность $P(A_m)$ появления m и более событий ($1 \le m \le n$) будет равна

$$P(Am) = \sum_{i=m}^{n} P(Ai)$$

а вероятность события $A_{m\text{-}1}$, заключающегося в появлении меньше, чем m событий,

$$P(A_{m-1}) = \sum_{i=1}^{m-1} P(Ai)$$

Следствие 2. Два несовместных события A и $\bar{A}$, образующие полную группу случайных событий, называются противоположными событиями. Поскольку противоположные события образуют полную группу и несовместны, сумма их вероятности

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Теоремы умножения вероятностей

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A\cdot A_2\cdot A3\cdot\ldots\cdot An) = P(A_1)\cdot P(A2)\cdot P(A3)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B);$$
$$P(AB)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события уже появились.

$$P(A\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot An)=P(A_1)\cdot PA_1(A_2)\cdot P_{A1A2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A1\ldots An-1}P(An),$$

где $P_{A1\ldots An-1}P(An)$- вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2,..., A_{n-1} наступили.

Теорема вероятности появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, ..., $P(A_n) = p_n$, а в результате испытаний могут наступить все события, либо часть из них.

Вероятность наступления события A , состоящего в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятности противоположных событий

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$$

где $q_1 = P(\bar{A}_1),\ q_2 = P(\bar{A}_2),\ \ldots q_n = P(\bar{A}n)$.

В частности, если все n событий имеют одинаковую вероятность, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Теорема полной вероятности

Теорема полной вероятности формируется на основании теорем сложения и умножения вероятностей.

Пусть сложное событие A может произойти только с осуществлением n некоторых других несовместных событий - предположений, называемых гипотезами H_i, образующими полную группу несовместных событий H.

$$H = H_1 + H_2 + \ldots + H_i + \ldots + H_n,$$

$$P(H) = \sum_{i=1}^{n} P(Hi) = 1$$

Событие A может осуществлиться, если произойдет одно из следующих парных событий: H_i с вероятностью $P(H_i)$ и A / H_i с вероятностью $P(A / H)$.

Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Hi) \cdot P(A / H_I)$$

Пример. Требуется определить вероятность отказа секции механизированной крепи q_c за время работы t, если вероятности независимых отказов q_i элементов: гидростоек (ГС), гидроцилиндров передвижки (ГП), металлоконструкции (МК) и блока управления секцией (БУ) составляют для времени t соответственно:$q_{гс} = 0,05$; $q_{гп} = 0,02$; $q_{МК} = 0,03$ и $q_{бу} = 0,04$.

Дадим понятие события «отказ секции крепи». Секция крепи откажет, если откажут: гидростойка или гидроцилиндр передвижки, или металлоконструкция, или блок управления, или гидростойка и гидроцилиндр, или гидростойка и металлоконструкция и т. д.

Поэтому для рассматриваемого события следует, что для расчета вероятности отказа q_c секции механизированной крепи следует использовать теорему сложения вероятностей для совместных событий, а для определения вероятности безотказной работы теорему умножения вероятностей для независимых событий.

Таким образом:

$q_c = q_{гс} + q_{гп} + q_{мк} + q_{бу} - q_{гс} \cdot q_{гп} - q_{гс} \cdot q_{мк} - q_{гс} \cdot q_{бу} - q_{гп} \cdot q_{мк} - q_{гп} \cdot q_{бу} - q_{мк} \cdot q_{бу} + q_{гс} \cdot q_{гп} \cdot q_{мк} + q_{гс} \cdot q_{гп} \cdot q_{бу} + q_{гс} \cdot q_{мк} \cdot q_{бу} + q_{гп} \cdot q_{мк} \cdot q_{бу} - q_{гс} \cdot q_{гп} \cdot q_{мк} \cdot q_{бу}$

Подставим вместо q_i их величины, получим

q_c= 0,05+0,02+0,03+0,04-0,05-0,02-0,05-0,03-0,05-0,04-0,02-0,03-0,02-0,04-0,03 - 0,04+0,05 -0,02 -0,03+0,05 -0,02 -0,04+0,05 -0,03 -0,04+0,02 -0,03 0,04-0,05-0,02-0,03-0,04 = 0,133.

Для решения поставленной задачи может быть применена теорема умножения вероятностей для независимых событий. Событие «безотказная работа» секции крепи P_c за время t осуществляется, если безотказно будут работать ГС, ГП, МК и БУ, тогда

$$P_c = P_{ГС} \cdot P_{ГП} \cdot P_{МК} \cdot P_{бу}$$

Поскольку отказ и «безотказная работа» секции крепи - события противоположные, то величины $P_{ГС}$, $P_{ГП}$, $P_{МК}$, $P_{бу}$ могут быть найдены по заданным значениям $q_{гс}$, $q_{гп}$, $q_{мк}$, $q_{бу}$, а именно

$$P_{ГС} = 1 - q_{гс}\,;\; P_{ГП} = 1 - q_{гп}\,;\; P_{МК} = 1 - q_{мк}\,;\; P_{бу} = 1 - q_{бу}$$

В итоге получаем

$$P_c = (1-0,05)\cdot(1-0,02)\cdot(1-0,03)\cdot(1-0,04) = 0,867$$

$$q_c = 1 - P_c = 1 - 0,867 = 1,33$$