УДК 378.14

ЗНАННЯ І ВМІННЯ З ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ, НЕОБХІДНІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНИХ ОСНОВ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

О. Г.Євсеєва, О. В. Корощенко, Н. А. Прокопенко
Донецький національний технічний університет

Розглянуто знання і вміння з векторної алгебри необхідні для розв'язку типових задач з теоретичних основ електротехніки на основі предметної моделі студента. Наведено приклади застосування векторної алгебри в курсі ТОЕ.

Сучасна дійсність вимагає кваліфіковані інженерні кадри. Тому підготовці спеціалістів технічного профілю приділяється значна увага. Загальна професійна підготовка інженерів має багато складових, але однією з важливих є математична підготовка. Згідно з методологією діяльнісного навчання [1] зміст математичної підготовки задається характером майбутньої професійної діяльності, а саме тими задачами, які повинен вміти розв'язувати майбутній інженер.

Метою статті є аналіз знань і вмінь з векторної алгебри, необхідних для розв'язання типових задач з теоретичних основ електротехніки, на основі п'ятикомпонентної предметної моделі студента з вищої математики, що складається з семантичного, процедурного, операційного, тематичного і функціонального компонентів, яку описано в роботі [2].

Векторна алгебра є дуже важливим розділом дисципліни «Вища математика» в системі інженерної освіти. При формуванні цілей і змісту навчання векторної алгебри враховують, які вміння і знання з цього розділу використовуються як в самому курсі вищої математики, так і в інших дисциплінах [4]. Однією з таких дисциплін є ТОЕ (теоретичні основи електротехніки).

Курс ТОЕ фактично включає дві частини – теорію кіл і теорію електромагнітного поля. У теорії кіл векторна алгебра використовується в символічному (комплексному) методі розрахунку і аналізу кіл синусоїдного струму, а також в методі векторних діаграм (без застосування комплексних величин). У теорії електромагнітного поля векторна алгебра використовується вже в розрахунках. Особливо часто доводиться звертатися до векторної алгебри при розрахунку полів змінного струму.

Векторними величинами у курсі ТОЕ є струм $\overline{I}$ та напруга $\overline{U}$, з якими виконуються лінійні операції. Так, у законі Ома для резистора використовується операція множення вектора на число:

$$\overline{U} = r \cdot \overline{I}, \tag{1}$$

де r – опір, що є скалярною величиною.

Внаслідок того, що при множенні вектора на число виходить вектор, колінеарний наданому, маємо, що вектори $\overline{I}$ та $\overline{U}$ - колінеарні.

При послідовному з'єднанні декількох резисторів використовується властивість дистрибутивності по відношенню до векторного множника. Так, наприклад для трьох резисторів, опори яких відповідно дорівнюють r_1, r_2, r_3, маємо:

$$(r_1 + r_2 + r_3) \cdot \overline{I} = r_1 \cdot \overline{I} + r_2 \cdot \overline{I} + r_3 \cdot \overline{I} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3, \tag{2}$$

де $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3$ напруга у резисторах.

При використанні методу накладення, коли в одному резисторі протікає декілька складових струму, маємо:

$$r \cdot \left(\overline{I'} + \overline{I''}\right) = r \cdot \overline{I'} + r \cdot \overline{I''}, \tag{3}$$

де $\overline{I'}, \overline{I''}$ - складові струму.

При цьому використовується властивість дистрибутивності суми векторів по відношенню до числового множника.

При визначенні напруги як різниці потенціалів, які є синусоїдальними і можуть бути представлені векторами або в комплексній формі, маємо:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{\varphi}_A - \overline{\varphi}_B, \tag{4}$$

де $\overline{U}_{AB}$ – вектор напруги, спрямований від точки *B* до точки *A;*

$\overline{\varphi}_A$, $\overline{\varphi}_B$ – потенціали, що є радіус-векторами початку і кінця вектора напруги.

Наприклад, розглянемо топографічну діаграму потенціалів на комплексній площині (рис. 1).

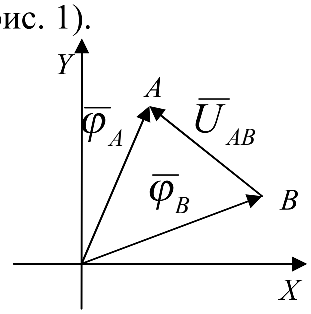

Рис. 1. Топографічна діаграма потенціалів.

На рис. 1. Вектор $\overline{U}_{AB}$ знайдено відніманням векторів $\overline{\varphi}_B$ та $\overline{\varphi}_A$ за правилом трикутника.

Формула (4) – це є вираз вектора $\overline{U}_{AB}$ через радіуси-вектори його початку $\overline{\varphi}_B$ і кінця $\overline{\varphi}_A$, що також можна бачити на діаграмі.

При складанні напруг при послідовному з'єднанні елементів резистора, індуктивності, місткості (*r, L, C*) доводиться мати справу з сумою протилежно спрямованих векторів: $\overline{U}_L$ і $\overline{U}_C$. Якщо $\left|\overline{U}_L\right| = \left|\overline{U}_C\right|$, то $\overline{U}_L = -\overline{U}_C$, тобто спостерігається режим резонансу напруг.

Аналогічна ситуація спостерігається при вивченні резонансу струмів, коли елементи *r, L, C* сполучені паралельно і додаються протилежно направлені струми $\bar{I}_L$ і $\bar{I}_C$: $\bar{I}_L = -\bar{I}_C$.

Наведемо приклад задачі з курсу ТОЕ, для розв’язання якої використовується векторна алгебра [3]. Задача: вздовж тонкого провідника, що є колом радіусу a = 1,2 см і створює виток, тече струм I = 5 А. Необхідно визначити магнітну індукцію на осі витка.

Розв’язання:

1. Розташуємо виток у площині XOY декартової системи координат так, щоб початок координат співпадав з центром кола, що утворює виток, а напрям осі Oz – з позитивним напрямом нормалі до площини витка, як це показано на рис. 2.

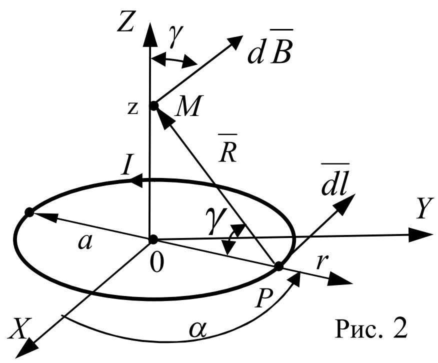

Рис. 2

2. Обчислимо магнітну індукцію на осі витка, тобто у довільній точці $M(0;0;z)$ вісі OZ. Магнітна індукція на вісі кругового струму обчислюється за формулою: $B = \int_0^{2\pi} dB_z$, де $dB_z = \left|d\overline{B}\right| \cdot \cos\gamma$ – проекція вектора $d\overline{B}$ на вісь OZ; $d\overline{B}$ - частка $\overline{B}$ для кожного малого елемента кола., $\overline{B}$ - вектор магнітної індукції, γ – кут між вектором $d\overline{B}$ та віссю OZ.

Розрахунок магнітної індукції виконаємо за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа $d\overline{B} = \dfrac{\mu_0 I \cdot \overline{dl} \times \overline{R_0}}{4\pi \cdot \overline{R}^2}$, де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* – магнітна стала, $\overline{dl}$ - елемент кола і $\overline{R_0}$ - орт вектора $\overline{R}$, де $\overline{R} = \overline{PM}$, P – точка кола. Модуль вектора $d\overline{B}$ дорівнює $\left|d\overline{B}\right| = \dfrac{\mu_0 I \cdot \left|\overline{dl} \times \overline{R_0}\right|}{4\pi \cdot \overline{R}^2}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{dl} \perp \overrightarrow{R_0}$, $\left|\overline{R_0}\right| = 1$, $\left|\overline{dl}\right| = dl$, маємо за визначенням модуля векторного добутку векторів: $\left|\overrightarrow{dl} \times \overrightarrow{R_0}\right| = \left|\overrightarrow{dl}\right| \cdot \left|\overrightarrow{R_0}\right| \cdot \sin 90 = dl$. З трикутника *MOP* $\cos\gamma = \dfrac{OP}{PM} = \dfrac{a}{\left|\overline{R}\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}}$. Далі маємо:

$\left|d\overline{B}\right| = \dfrac{\mu_0 I \cdot \left|\overline{dl} \times \overline{R_0}\right|}{4\pi \cdot \overline{R}^2} = \dfrac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi \cdot \left|\overline{R}\right|^2} = \dfrac{\mu_0 I \cdot a \cdot d\alpha}{4\pi \cdot \left(z^2 + a^2\right)}$. Магнітна індукція на осі кругового струму за формулою (1):

$$B = \int_0^{2\pi} dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a \cdot d\alpha}{z^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \alpha\Big|_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2\sqrt{(z^2 + a^2)^3}}.$$

У площині круга, де $z = 0$, числове значення індукції дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 I \cdot a^2}{2 \cdot a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2}} = 26{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{тл.}$$

Для розв‘язання цієї задачі необхідні такі вміння з векторної алгебри:

- за наданими модулем вектора і його напрямними косинусами знаходити координати вектора;
- за наданим вектором визначати його орт;
- за наданими модулями двох векторів і куту між ними знаходити модуль векторного добутку цих векторів;
- визначати колінеарність векторів;
- за наданим модулем вектору знаходити його скалярний квадрат.

Цілі навчання для ТОЕ задаються характером майбутньої професійної діяльності. Необхідність досягнення цих цілей визначає зовнішню компоненту змісту, яку складають певні вміння. Цей зміст засвоюється за допомогою певних засобів — знань і умінь, які самі повинні бути заздалегідь освоєні. Для організації цього необхідно виділити проміжні цілі-уміння. Це задає внутрішню компоненту змісту. Зрозуміло, що знання і вміння з векторної алгебри – це є внутрішня компонента змісту курсу ТОЕ. Ці знання і вміння складають відповідні спектри — спектр знань і спектр умінь з векторної алгебри, необхідних для засвоєння курсу ТОЕ.

Задача визначення змісту навчального курсу вирішується в процесі моделювання навчальної предметної області. Це моделювання полягає в побудові предметної моделі студента.

Предметна модель студента з векторної алгебри складається з п'-яти компонентів: семантичного, процедурного, операційного, тематичного і функціонального. Наведемо приклади фрагментів цих компонентів, які використовуються у курсі ТОЕ.

Тематичний компонент.

ТК1. Види векторів.

ТК2. Операції з векторами, заданими геометрично.

ТК3. Кут між векторами. Проекція вектора на вектор.

ТК4. Координати вектора в прямокутній системі координат.

ТК5. Операції з векторами, що задані своїми координатами.

ТК6. Скалярний добуток векторів.

ТК7. Векторний добуток векторів.

ТК8. Мішаний добуток векторів.

ТК9. Умови колінеарності, перпендикулярності та компланарності векторів.

ТК10. Геометричні та механічні застосування векторів.

Семантичний компонент предметної моделі студента є безпосередньо предметними знаннями, структурованими у вигляді окремих висловлювань, що виражають одну закінчену думку, і які розташовані в послідовності їх вивчення. Як правило, семантична модель подається у вигляді так званого семантичного конспекту. Семантичний конспект – це повний набір лаконічно поданих думок предметної області. Виданий окремо, він є дуже тонкою брошурою, тому що в ній немає викладень, доведень і пояснень. Проте, вона містить усі положення курсу, що вивчається. Дидактичну сутність семантичного конспекту передає його інша назва – опорний конспект, оскільки він містить думки, на які необхідно спиратися при вивченні предмету [2, 4].

Всі висловлювання семантичного конспекту пронумеровані. Кожне висловлювання має номер, що складається з двох частин, розділених крапкою. Перша частина – це номер розділу, до якого належить висловлювання, друга частина – його номер в даному розділі. Крім того, деякі номери стоять також після висловлювань. Це номери інших висловлювань, від яких надане залежить, якими воно визначається, з яких виходить. Зв'язки між висловлюваннями можуть бути дуже простими, наприклад, посилання на терміни, які вживаються в даному вислові, і складнішими, більш глибокими, наприклад, зв'язок причини і наслідків.

Наведемо фрагмент семантичного конспекту, який використовується у курсі ТОЕ у наданих вище прикладах.

СК.1.1. Спрямованим відрізком називається відрізок, один кінець якого - початкова точка, а інший кінець – кінцева точка.

СК.1.2. Вектором називається спрямований відрізок.(СК.1.1)

СК.1.3. Початком вектора називається початкова точка відрізка, який задає вектор.(СК.1.1)

СК.1.4. Точкою прикладання вектора називається початок вектора.(СК.1.3)

СК.1.5. Кінцем вектора називається кінцева точка відрізка, який задає вектор.(СК.1.1)

СК.1.6. На кресленні напрям вектора вказується стрілкою в кінці вектора.(СК.1.5)

СК.1.7. Вектор з початком в точці А і кінцем в точці В позначається $\overline{AB}$. (СК.1.2, СК.1.3, СК.1.5)

СК.1.8. Вектори можна позначати малими латинськими буквами.(СК.1.2)

СК.1.9. Модулем вектора називається довжина відрізка, що задає вектор.(СК.1.2)

СК.1.10. Модуль вектора $\overline{AB}$ позначається $\left|\overline{AB}\right|$.(СК.1.9)

СК.1.11. Модуль вектора $\overline{a}$ позначається $|\overline{a}|$. (СК.1.9)

СК.1.12. Колінеарними векторами називаються вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих.(СК.1.2)

СК.1.13. Колінеарність векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначається: $\overline{a} \,||\, \overline{b}$. (СК.1.12)

СК.1.14. Однаково спрямованими векторами називаються колінеарні вектори, які мають однаковий напрям. (СК.1.12)

СК.1.15. Однаково спрямовані вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначаються $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. (СК.1.14)

СК.1.16. Протилежно спрямованими векторами називаються колінеарні вектора, які мають протилежний напрям. (СК.1.12)

СК.1.17. Протилежно спрямовані вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначаються $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$. (СК.1.16)

СК.1.18. Радіус-вектором точки М називається вектор, точка прикладання якого – початок координат, а кінець – точка М. (СК.1.2, СК.1.4, СК.1.5)

СК.1.19. Радіус-вектор точки М позначається $\overline{r}_M$. (СК.1.18)

СК.2.1. Для векторів визначені лінійні операції: додавання, віднімання та множення на число.

СК.2.2. Сумою двох векторів є вектор, який можна одержати додаванням цих векторів за правилом трикутника або за правилом паралелограма. (СК.1.2)

СК.2.3. Сума векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначається $\overline{a} + \overline{b}$. (СК.2.1)

СК.2.4. Вектор $\overline{a}+\overline{b}$ знаходиться за правилом трикутника, якщо початок вектора $\overline{b}$ співпадає з кінцем вектора $\overline{a}$. (СК.1.3, СК.1.5, СК.2.3)

СК.2.5. Вектор $\overline{a}+\overline{b}$, що знаходиться за правилом трикутника, називається вектор, початок якого співпадає з початком вектора $\overline{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\overline{b}$.(СК.1.3, СК.1.5, СК.2.3, СК.2.4)

СК.2.6. Вектор $\overline{a}+\overline{b}$ знаходиться за правилом паралелограма, якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ мають загальний початок. (СК.1.3, СК.2.3)

СК.2.7. Вектор $\overline{a}+\overline{b}$, що знаходиться за правилом паралелограма, називається вектор, початок якого співпадає з загальним початком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, та який є діагоналлю паралелограма, що побудовано на цих векторах. (СК.1.3, СК.2.3, СК.2.6)

СК.2.8. Різницею двох векторів називається вектор, який можна одержати відніманням цих векторів за правилом трикутника або за правилом паралелограма. (СК.1.2)

СК.2.9. Різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначається $\overline{a}-\overline{b}$. (СК.2.8)

СК.2.10. Вектор $\overline{a}-\overline{b}$ знаходиться за правилом трикутника, якщо вектора $\overline{a}$ і $\overline{b}$ мають загальний початок. (СК.1.3, СК.2.9)

СК.2.11. Вектор $\overline{a}-\overline{b}$, що знаходиться за правилом трикутника, називається вектор, початок якого співпадає з кінцем вектора $\overline{b}$, а кінець – з початком вектора $\overline{a}$. (СК.1.3, СК.1.5, СК.2.9, СК.2.10)

Висновки. Таким чином, нами визначено знання і вміння з векторної алгебри, необхідні для розв'язання задач з ТОЕ. Описано тематичний і семантичний компоненти предметної моделі студента з вищої математики. В результаті ми дійшли висновку, що в системі інженерної освіти при навчанні спеціальних дисциплін, таких як теоретичні основи електротехніки, буде корисним надати студентам семантичний (опорний) конспект з векторної алгебри. В цьому конспекті у дуже зручному дискретному вигляді подані всі знання, на які має спиратися студент при вивченні спеціальних дисциплін.

Література

1. Атанов Г. О. Теорія діяльнісного навчання. – К.: Кондор, 2007.

2. Євсеєва О. Г. П'ятикомпонентна предметна модель студента технічного університету з вищої математики. Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – №1. – Бердянськ: Вид-во БДПУ, 2010. – С. 163-169.

3.Євсеєва О. Г., Прокопенко Н. А. Визначення цілей і змісту навчання векторної алгебри студентів технічного університету./ Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «ПМО-2010». 24-26 листопада. М. Черкаси. С. 202-204.

4. Рибалко М. П. Есауленко В. О, Костенко В. І. Теоретичні основи електротехніки: лінійні електричні кола: Підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003. – 513с.