ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПАРАМЕТРА ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Ткаченко В.Н., Шуба О.В.
Институт прикладной математики и механики, г. Донецк
Отдел теории управляющих систем
E-mail: tkachenko@iamm.ac.donetsk.ua

Abstract

Tkachenko V.N., Shuba O.V. Identification of distributed parameter of external heat exchange based on least square method. In the article the possibility of application of least square method is considered. Parameter distribution is approximated by **n**-degree polynom . The algorithm of identification of polynomial coefficients based on least square method are proposed. Results of calculation are presented.

В статье рассматривается задача идентификации параметра внешнего теплообмена в линейных граничных условиях теплообмена задачи теплопроводности. Задача относится к обратным задачам и является некорректно поставленной в классическом смысле. К настоящему времени наиболее популярным методом решения такого класса задач является метод регуляризации Тихонова [1,6]. Недостатком метода регуляризации является большой объем вычислений, связанный с процедурой поиска нужного значения параметра регуляризации, а также с овражностью регуляризирующего функционала. Другой существенный недостаток метода связан с самой идеей регуляризации: сглаживания решения в пределах погрешности измерений. Чем больше погрешность, тем можно получить более гладкую кривую, но при этом возрастает опасность получения хотя и более плавной кривой, но все в большей степени отклоняющейся от истинной. В этом смысле метод регуляризации принципиально отличается от ряда методов, которые обеспечивают получение достаточно точного решения при росте погрешности в исходных данных. К таким методам относится, например, метод наименьших квадратов.

В представленной работе для идентификации распределенных параметров модели теплофизического процесса предлагается применить идею метода наименьших квадратов.

Постановка задачи

Сформулируем обратную задачу нахождения коэффициента конвективного теплообмена для одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями 3-го рода. Ставится задача нахождения $\alpha = \alpha(\tau)$ как функции, зависящей от времени в виде аппроксимирующего полинома.

Математическая модель

Математическая модель процесса выглядит следующим образом

$$\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(\tau,x)}{\partial x^2}\ , \qquad o \le x \le l \tag{1}$$

с граничными условиями третьего рода

$$-\lambda \left.\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha_1\left[T_{гр.}(\tau) - T(\tau,o)\right], \tag{2}$$

$$\lambda \left.\frac{\partial T(\tau,x)}{\partial x}\right|_{x=l} = \alpha_2\left[T_{гр.}(\tau) - T(\tau,l)\right], \tag{3}$$

и начальным условием

$$T(0,x) = t_0(x)\,. \tag{4}$$

Где $T(\tau,x)$ - температура тела, $T_{гр.}(\tau)$ - температура греющей среды, λ - коэффициент теплопроводности среды, α_1, α_2 - коэффициенты конвективной теплоотдачи сверху и снизу.

Для решения обратных задач обычно требуются знания о температуре нагреваемого тела [3,5].

Для простоты изложения метода предполагаем нагрев симметричным, поэтому $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$. В этом случае минимальный объем необходимой для решения задачи информации соответствует измерению температуры тела в какой–либо одной точке одномерной области $o\le x\le l$. Предположим, известна температура тела на границе с внешней средой:

$$T(\tau,0)=f(\tau), \tag{5}$$

Задача состоит в нахождении $\alpha=\alpha(\tau)$ как функции, зависящей от времени. Предполагая функцию $\alpha(\tau)$ непрерывной, с целью аппроксимации искомой функции воспользуемся полиномом n- ой степени

$$\alpha(\tau)=a_0+a_1\cdot\tau+...+a_n\cdot\tau^n, \tag{6}$$

степень полинома будет определяться по принципу невязки.

Решение обратной задачи

Решив задачу Дирихле методом конечных разностей, получим температуры $T(\tau_i,x_j)$, которые будут необходимы для вычисления производной в граничном условии.

Используя разности вперед для аппроксимации производной по координате, получим

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T(\tau_i,x_{j+1})-T(\tau_i,x_j)}{\Delta x},$$

где $o\le x\le l$, $j=\overline{0,n}$, $\Delta x=\dfrac{l}{n}$, $i=\overline{0,\tilde{\tau}}$

На границе

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{T(\tau_i,x_1)-T(\tau_i,x_0)}{\Delta x}.$$

Теперь в граничном условии $\lambda\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=\alpha(\tau)\left[T_{гр.}(\tau)-T(\tau,0)\right]$ неизвестным является только величина конвективного теплообмена $\alpha(\tau)$.

Имеем систему уравнений граничных условий в r моментах времени:

$$\frac{\lambda}{\Delta x}(T(\tau_i,x_1)-T(\tau_i,x_0))=\alpha_i[T_{гр}-T(\tau_i,x_0)],\quad i=\overline{1,r}, \tag{7}$$

где α_k это значение полинома в момент времени k и $\alpha_k=a_0+a_1\cdot k\cdot\Delta\tau+...+a_nk^n\Delta\tau^n$, $k=\overline{1,r}$, $r>>n$;

Или в матричной форме

$$\frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix}T(\tau_1,x_1)-T(\tau_1,x_0)\\ T(\tau_2,x_1)-T(\tau_2,x_0)\\ ...\\ ...\\ T(\tau_r,x_1)-T(\tau_r,x_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\cdot(T_{гр}-T(\tau_1,x_0))\\ \alpha_2\cdot(T_{гр}-T(\tau_2,x_0))\\ ...\\ ...\\ \alpha_r\cdot(T_{гр}-T(\tau_r,x_0))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \alpha_2 & ... & 0\\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \alpha_r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}T_{гр}-T(\tau_1,x_0)\\ T_{гр}-T(\tau_2,x_0)\\ ...\\ ...\\ T_{гр}-T(\tau_r,x_0)\end{pmatrix} \tag{8}$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix} =$$

$$= a_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix} + \dots + a_n \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix}$$

Для удобства записи преобразований введем такие обозначения

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix},$$

$$P = \frac{\lambda}{\Delta x}\begin{pmatrix} T(\tau_1,x_1)-T(\tau_1,x_0) \\ T(\tau_2,x_1)-T(\tau_2,x_0) \\ \dots \\ \dots \\ T(\tau_r,x_1)-T(\tau_r,x_0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0. \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} T_{гр}-T(\tau_1,x_0) \\ T_{гр}-T(\tau_2,x_0) \\ \dots \\ \dots \\ T_{гр}-T(\tau_r,x_0) \end{pmatrix}.$$

P_k и H_k - k -тые элементы столбцов, A^i_{kk} - k -й элемент главной диагонали матрицы A^i .
Тогда уравнение (8) в матричной форме будет иметь вид

$$P = \tilde{\alpha}H \tag{9}$$

Метод наименьших квадратов

Для нахождения функции методом МНК введем меру отклонения в виде суммы квадратов разности измеренных температур от расчетных по модели (1)-(5).

$$S(\alpha) = \sum_{k=1}^{r}(P_k - \alpha_k H_k)^2 , \tag{10}$$

Используя введенные обозначения параметр α можно записать как $\alpha(\tau) = a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n$,

тогда квадратичный функционал будет иметь вид

$$S(\alpha) = \sum_{k=1}^{r}(P_k - \alpha_k H_k)^2 = (P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n) \cdot H)^T (P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n A^n) \cdot H) =$$

$$= P^T P - 2\sum_{k=0}^{n} a_k H^T A^k P + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j H^T A^{i+j} H;$$

Задача сводится к нахождению параметров полинома, которые бы минимизировали функционал $S(\alpha)$. Пусть, например, минимум достигается при $\alpha' = \alpha(\tau')$. Тогда в этой точке должно быть выполнено условие

$$\frac{dS(\alpha')}{da_m} = 0, \qquad m = \overline{0, n}; \tag{11}$$

Вычислим векторы первых производных суммы квадратов отклонений по компонентам $a_0, a_1, , a_n$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \frac{\partial\left[(P-\alpha H)^T (P-\alpha H)\right]}{\partial a_j} = 2a_0 H^T A^j H + 2a_1 H^T A^{j+1} H + \ldots + 2a_n H^T A^{j+n} H - 2H^T A^j P = 0,$$

$j = \overline{1, n}$;

Получили систему из $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{n} a_m H^T A^m H = H^T A^0 P, \\ \sum_{m=0}^{n} a_m H^T A^{m+1} H = H^T A^1 P, \\ \ldots \\ \sum_{m=0}^{n} a_m H^T A^{m+n} H = H^T A^n P; \end{cases} \tag{12}$$

Из структуры строк матрицы этой системы видна их линейная независимость, следовательно, детерминант не обращается в ноль и решение системы единственное.

Из системы (12) получаем вектор неизвестных компонент параметра $\alpha(\tau)$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T A^0 H & H^T A^1 H & \ldots & H^T A^n H \\ H^T A^1 H & H^T A^2 H & \ldots & H^T A^{n+1} H \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H^T A^n H & H^T A^{n+1} H & \ldots & H^T A^{2n} H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} H^T A^0 P \\ H^T A^1 P \\ \ldots \\ H^T A^n P \end{pmatrix}; \tag{13}$$

Достаточное условие минимума

Для того чтобы убедиться, что уравнения (11) определяют минимум, достаточно убедиться, что матрица вторых производных (матрица Гессе) полуположительно определена [2]. Для функционала среднеквадратичного отклонения матрица Гессе равна

$$G = \begin{pmatrix} H^T A^0 H & H^T A^1 H & \ldots & H^T A^n H \\ H^T A^1 H & H^T A^2 H & \ldots & H^T A^{n+1} H \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H^T A^n H & H^T A^{n+1} H & \ldots & H^T A^{2n} H \end{pmatrix} \tag{14}$$

Для главных миноров этой матрицы введем такие обозначения:
G_1-минор размерностью 1×1, G_2-минор размерностью 2×2, G_i-минор размерностью $i \times i$;

Рассмотрим матрицу G: эта матрица не зависит от $a_0, a_1, \ldots, a_n$, симметрична и все ее элементы положительны, каждый из них является суммой r слагаемых. Например,

$$H^T A^0 H = \sum_{k=1}^{r} H_k^2 A_{kk}^0, \qquad H^T A^1 H = \sum_{k=1}^{r} H_k^2 A_{kk}, \qquad H^T A^i H = \sum_{k=1}^{r} H_k^2 A_{kk}^i .$$

Заметим, что матрица G представима в виде произведения двух матриц, размерностями $n+1\times r$ и $r \times n+1$. Причем эти матрицы будут транспонированными по отношению друг к другу.

Т.е. матрицу (14) можно записать в таком виде

$$G=\begin{pmatrix} H_1A_{11}^0 & H_2A_{22}^0 & \ldots & H_rA_{rr}^0 \\ H_1A_{11} & H_2A_{22} & \ldots & H_rA_{rr} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_1A_{11}^n & H_2A_{22}^n & \ldots & H_rA_{rr}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_1A_{11}^0 & H_1A_{11} & \ldots & H_1A_{11}^n \\ H_2A_{22}^0 & H_2A_{22} & \ldots & H_2A_{22}^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_rA_{rr}^0 & H_rA_{rr} & \ldots & H_rA_{rr}^n \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Обозначим матрицы-множители как $Q(n+1\times r)$ и соответственно $Q^T(r\times n+1)$.

Заметим, что любой из главных миноров G_i $(i=\overline{1,n+1})$ является произведением первых i строк матрицы Q и первых i столбцов матрицы Q^T ($G_i = Q_i \cdot Q_i^T$).

А детерминант G_i равен сумме квадратов детерминантов всех $i\times i$ матриц, которые можно составить из столбцов Q_i. Т.е. $\det G_i = \sum_{k=1}^{C_r^i}(\det D_k)^2$, где D_k ($k=\overline{1,C_r^i}$) - описанные $i\times i$ матрицы, $i=\overline{1,n+1}$.

Из сказанного выше следует, что $\det G_i > 0, \quad \forall i=\overline{1,n+1}$.

По критерию Сильвестра для положительно определенных матриц, из того, что все главные миноры матрицы Гессе положительны, получаем положительную определенность матрицы G.

Т.о. мы показали, что условия (11) определяют глобальный минимум функционала $S(\alpha)$.

И из полученного соотношения (13) можем найти вектор параметра аппроксимирующего полинома (6).

Свойства оценки параметра.

В обратной задаче теплопроводности наряду с температурой поверхности тела используется еще ряд измеряемых величин. Это такие величины, как, время, координата датчика, толщина образца. Предполагается, что все они, за исключением температуры, известны точно. А измерения температуры являются основным источником погрешностей и неопределенностей и ее погрешность предполагается белым шумом.

Оценки параметров, получаемые по методу МНК, при условии выполнения предпосылок относительно случайных погрешностей наблюдений, будут обладать следующими свойствами:

1. оценки параметров являются несмещенными, т.е. математическое ожидание оценок параметров равно истинному значению параметров. Данное свойство является логическим следствием второго предположения о характере погрешности. Несмещенность означает, что выборочные оценки параметров концентрируются вокруг неизвестных истинных параметров;
2. оценки состоятельны, иначе говоря, дисперсия оценки параметра стремится к нулю с возрастанием числа наблюдений r.
3. оценки являются эффективными в том смысле, что они имеют минимальную дисперсию по сравнению с любыми другими оценками этого параметра.

Если предположение 3 или 4 нарушено, то свойство несмещенности и состоятельности оценок сохраняется, однако оценки оказываются менее эффективными, чем в случае, когда эти допущения соблюдаются.

Совершенно очевидно, что не безразлично, какими свойствами обладает оценка. Что касается свойства несмещенности, то оно является необходимым. В самом деле, смещенные оценки априори дают неверное положение кривой в пространстве независимых переменных. Свойство состоятельности означает, что при увеличении объема наблюдения оценки параметров становятся более надежными в вероятностном смысле, т.е. с ростом r оценки все плотнее концентрируются вокруг истинных неизвестных значений параметров. Свойство эффективности, в общем, является наиболее важным, поскольку оно определяет степень возможной ошибки прогноза.

Вычислительный эксперимент.

Для проверки работоспособности полученных соотношений была выполнена программная реализация алгоритма на языке С и проведен численный расчет по нахождению функции $\alpha(\tau)$. В качестве тестовой функции, т.е. истинного распределения значений параметра, взята функция

$$\alpha_{true}(\tau) = 73.9 \cdot x^4 - 274.28 \cdot x^3 + 246.78 \cdot \tau^2 + 28 \cdot \tau + 30;$$

На истинные значения температуры поверхности тела был нанесен шум, имитирующий погрешность измерений [4]. Математическое ожидание случайной величины погрешности равно нулю.

Тогда из соотношений (13) и (6) для случая аппроксимации константой, функциями первой-четвертой степеней (α_i, $i = \overline{0,4}$) имеем (см. Рис 1)

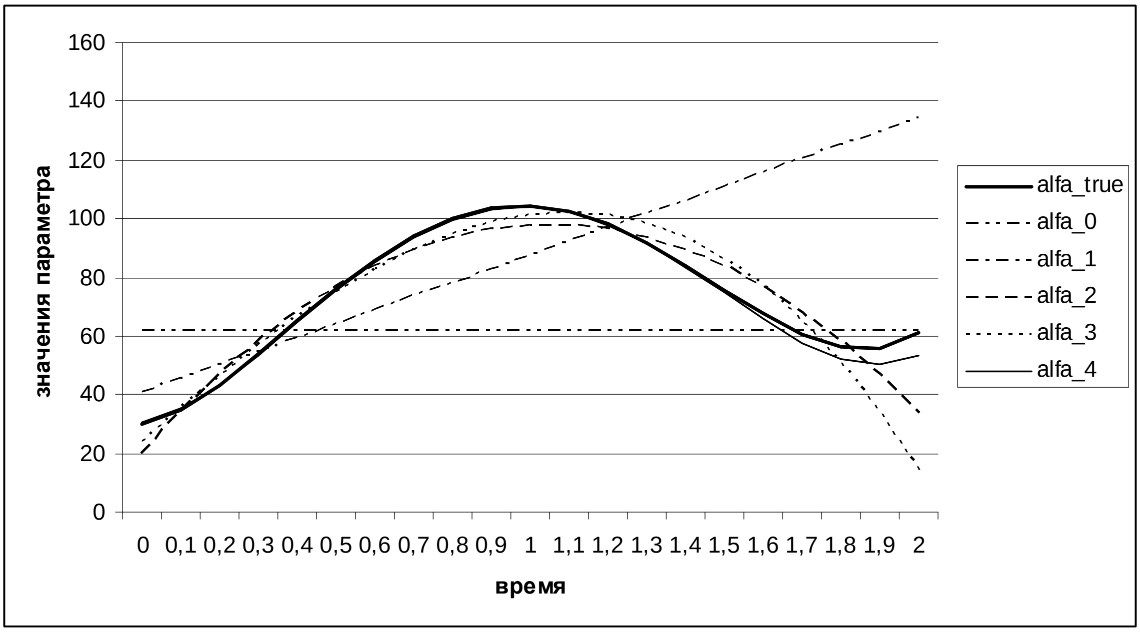

Рис. 1 Графики аппроксимирующих полиномов от нулевой до 4-той степеней.

Чтобы убедиться в качестве полученных оценок введем величину σ, характеризующую погрешность в решении. Для параметра $\alpha(\tau)$ величину σ будем находить по формуле

$$\sigma_{\alpha} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (\alpha_{true}(\tau_k) - \alpha_i(\tau_k))^2}{N}},$$

где $\alpha_i(\tau)$ - найденные функции параметра конвективного теплообмена при аппроксимации полиномом с соответствующей степенью $i = \overline{0,4}$, N-количество измерений.

Чтобы оценить погрешность измерений с помощью σ воспользуемся формулой

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}(T_{true}(\tau_k, x_0) - T_{measure}(\tau_k, x_0))^2}{N}},$$

где $T_{true}(\tau, x)$ и $T_{measure}(\tau, x)$ - истинная и измеренная температура на поверхности тела соответственно.

Для оценки погрешности в температуре $T_{calc}(\tau, x)$ рассчитанной при полученном $\alpha_i(\tau)$, $i = \overline{0,4}$, величину σ найдем следующим образом

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}(T_{measure}(\tau_k, x_0) - T^{i}{}_{calc}(\tau_k, x_0))^2}{N}}$$

Расчеты погрешностей σ найденых решений и отклонения измеренных температур от расчетных приведены в таблице для 2-х значений погрешности измерений из интервала $\xi \in [-10^0 C, 10^0 C]$, $\sigma_{\xi} = 5.96^0 C$ и $\xi \in [-20^0 C, 20^0 C]$, $\sigma_{\xi} = 11.9\ ^0 C$.

Характеристи-ки погрешнос-ти измерений	Степень аппр. полинома для $\alpha(\tau)$	0	1	2	3	4
$\xi \in [-10^0 C, 10^0 C]$ $\sigma_{\xi} = 5.96^0 C$	σ_{α}	25,71	33,92	6,56	9,61	2,18
	σ_T	60,36	26,50	15,32	11,53	6,83
$\xi \in [-20^0 C, 20^0 C]$ $\sigma_{\xi} = 11.9\ ^0 C$	σ_{α}	26,14	31,7	8,31	12,77	7,47
	σ_T	62,73	28,60	19,05	15,23	12,91

Таб. 1. Погрешности найденых решений и отклонения измеренных температур от расчетных.

Основные результаты и выводы.

В статье предложен эффективный метод идентификации распределенных параметров внешнего теплообмена в линейных граничных условиях теплообмена задачи теплопроводности. Искомое решение аппоксимируется полиномом **n –** степени, коэффициенты которого отыскиваются методом наименьших квадратов. Разработан алгоритм идентификации, который программно реализован на языке С. Численные исследования наглядно показали, что предложенный метод успешно решает поставленную задачу и обладает рядом преимуществ по сравнению с известными методами решения обратных задач на основе идеи регуляризации.

Литература.

1. Алифанов О.М. О методах решения некорректных обратных задач. Инженерно-физический журнал, 1983, т.45, 5, - с.742 - 752.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матиц. М.: Наука, 1966, 576 с.

3. Бэк Дж., Блакуэлл Б., Ч.Сент-Клэр мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности. - М.: Мир, 1989, - 310 с.

4. Коздоба Л. А., Круковский П.Г .Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка, 1982, - 385с.

5. Мацевитый Ю.М.. Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. : – НАН Украины, Институт проблем машиностроения.- Киев:Наукова думка,2003.

6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач - М.: Наука, 1974, - 224 с.