

УДК 519.651, 517.518.85

О. М. Штундер¹, аспірант,
М. П. Дивак², д-р техн. наук, проф.,
Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль, Україна
shoksik@ukr.net, mdy@tneu.edu.ua

Метод побудови апроксимуючої функції багатьох аргументів із заданою точністю та мінімальною складністю

Розглянуто метод побудови апроксимуючої функції багатьох аргументів із заданою точністю у вузлових точках. Для мінімізації кількості коефіцієнтів апроксимуючої функції та забезпечення заданої точності апроксимації запропоновано використати методи аналізу інтервальних даних.

Ключові слова: апроксимуюча функція, інтервальний аналіз даних, інтервальна система лінійних алгебричних рівнянь (ІСЛАР), довірчий еліпсоїд.

Вступ

У технічних застосуваннях достатньо часто доводиться розв'язувати задачу апроксимації деякої таблично-заданої функції із заданою точністю у вузлових точках. Таке представлення таблично-заданих функцій із заданою точністю в аналітичному вигляді забезпечує визначення характеристики технічного пристрою для будь якого набору аргументів.

Однією із задач, де необхідне зазначене представлення, є задача проектування джерел вторинного живлення, побудованих на високочастотних магнітних перетворювачах [4]. У цьому випадку основною характеристикою є «енергетична характеристика» E магнітних перетворювачів, які мають різні масо-габаритні характеристики. В процесі проектування джерел вторинного живлення ці характеристики обирають виходячи із заданої напруги U_{bx} на виході джерела вторинного електроживлення та максимального струму навантаження I_n . Переважно енергетичну характеристику задають таблицею $E(U_{bx}, I_n) = E_i$, $i = 1, \dots, N$, використовуючи результатами експериментальних досліджень із відомою похибкою вимірювань для сімейства джерел вторинного електроживлення із магнітними перетворювачами, які мають різні масо-габарити та забезпечують відповідні потужності джерел вторинного електроживлення. Оскільки вартість матеріалу для виготовлення магнітного перетворювача з прямокутною петлею гістерезису є достатньо високою (коливається від 0,5 у.о до 3у.о. за 1 грам матеріалу), то в процесі проектування джерел вторинного електроживлення доводиться її мінімізувати виходячи із заданих напруги U_{bx} та струму I_n джерела. Для цього необхідно представити таблично-задану енергетичну характеристику $E(U_{bx}, I_n) = E_i$, деякою апроксимаційною

функцією $\tilde{E}(U_{bx}, I_n)$, із заданою точністю в межах похибок вимірювань. При цьому, з метою зниження складності задачі проектування джерел вторинного електроживлення (оптимізаційної задачі), на етапі побудови апроксимаційної функції необхідно забезпечити її простоту, наприклад мінімальну кількість коефіцієнтів.

Виходячи із вище зазначеного, актуальною є задача представлення характеристик технічного пристрою із заданою точністю у вузлах деякою, якомога простішою апроксимаційною функцією.

Постановка задачі

Розглянемо випадок, коли деяку характеристику технічного пристрою представлено таблично-заданою функцією у вигляді:

$$\bar{x}_i \longrightarrow z_i, i = 1, \dots, N,$$

де \bar{x}_i — вектор значень аргументів таблично-заданої функції для фіксованого вузла; z_i — значення функції у вузлі.

Будемо апроксимувати, вказану таблично-задану функцію, лінійним за параметрами рівнянням:

$$\tilde{z}(\bar{x}_i) = \vec{\varphi}^T(\bar{x}_i) \cdot \vec{\beta}, i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

де $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ — вектор невідомих коефіцієнтів функції; $\vec{\varphi}^T(\bar{x}_i) = (\varphi_1(\bar{x}_i), \dots, \varphi_m(\bar{x}_i))$ — вектор базисних функцій, відомого класу.

Задамо точність апроксимації ξ , різною у кожному вузлі

$$|z_i - \tilde{z}(\bar{x}_i)| \leq \xi_i, i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Такий випадок є типовим, коли характеристику технічного пристрою задають таблицею із відносною похибкою вимірювань.

Перепишемо умови точності апроксимації у такому вигляді:

$$\tilde{z}(\bar{x}_i) \in [z^-_i; z^+_i] = [z_i - \xi_i; z_i + \xi_i], i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Підставляючи у вираз (3) замість значення апроксимуючої функції $\tilde{z}(\bar{x}_i)$ його представлення

у вигляді виразу (1) для усіх вузлових точок, отримаємо таку інтервальну систему алгебричних рівнянь (ІСЛАР):

$$\begin{cases} z_1^- \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq z_1^+; \\ \vdots \\ z_i^- \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_i) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_i) \leq z_i^+; \\ \vdots \\ z_N^- \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_N) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_N) \leq z_N^+. \end{cases} \quad (4)$$

Особливості побудови розв'язків отриманої ІСЛАР досліджено у праці [1]. Зокрема, відомо [1], що розв'язками зазначеної системи є область оцінок Ω коефіцієнтів $\bar{\beta}$ апроксимуючої функції (1). Область Ω в просторі параметрів є опуклим многогранником.

Зауважимо, при побудові ІСЛАР ми вважали, що структура апроксимуючої функції є відомою. Проте, на практиці таке припущення часто є неприйнятним. Так, для зменшення складності подальшого оперування апроксимуючою функцією у задачах проектування технічних пристроїв, одночасно із забезпеченням точності апроксимуючої функції, доводиться розв'язувати задачу спрощення цієї функції. Задачу спрощення апроксимуючої функції будемо називати структурною оптимізацією. Проте, для відповіді на питання «яка найпростіша функція задовольняє вимогам заданої точності у сформованій ІСЛАР (4)?», необхідно комбінаторно формувати структури апроксимуючих функцій і кожен раз оцінювати області розв'язків складених ІСЛАР, що призводить до комбінаторного зростання обчислювальної складності. Метою даної праці є розробка ефективного, з точки зору обчислювальної складності реалізації, методу побудови найпростішої апроксимуючої функції із заданою точністю у вузлах, за рахунок встановлення необхідних умов «задовільності» структури апроксимуючої функції із мінімальними обчислювальними витратами.

Необхідні та достатні умови «задовільності» структури апроксимуючої функції

Питання вибору загального вигляду (структури) апроксимуючої функції (1) у повній мірі розглянуто у праці [3]. У зазначеній праці описано метод «нарошування» складності (кількості коефіцієнтів чи степеня) поліноміальної апроксимуючої функції для забезпечення заданої точності у вузлах. Проблемою такої побудови було суттєве зростання кількості коефіцієнтів апроксимуючої функції чи степеня поліному у випадку представлення апроксимуючої функції поліноміальною функцією, що своєю чергою призвело до зростання обчислювальної складності і погіршення апроксимаційних властивостей функції поза вузловими точками. Спираючись на

результати праці [3], пропонується, взамін формування ІСЛАР на усій сукупності вузлів, формувати ІСЛАР тільки для фіксованої кількості вузлів, у такий спосіб, щоб кількість інтервальних рівнянь (двохсторонніх нерівностей) співпадала із кількістю спеціально обраних вузлових точок, тобто $N_j = m$, де $N_j \ll N$ - кількість спеціально обраних вузлових точок на j -тій ітерації ускладнення апроксимуючої функції. Сформовану ІСЛАР, у вищезазначений спосіб, називатимемо насиченим блоком усієї ІСЛАР (4).

Формування ІСЛАР у вигляді насиченого блоку дає можливість представити умови точності апроксимації (2) у вузлових точках у такому вигляді:

$$\begin{cases} z_1^- \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq z_1^+; \\ \vdots \\ z_i^- \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_i) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_i) \leq z_i^+; \\ \vdots \\ z_m^- \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_m) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_m) \leq z_m^+. \end{cases} \quad (5)$$

У зазначеній системі (5) кількість невідомих коефіцієнтів співпадає із кількістю інтервальних рівнянь. Із праці [1] відомо, що розв'язком отриманої системи є область векторів оцінок $\bar{\beta}$ коефіцієнтів апроксимуючої функції у вигляді паралелотопа Ω_m , з центром симетрії:

$$\bar{\beta} = F^{-1} \cdot \bar{Z}, \quad (6)$$

де $F = \{ \varphi_j(\bar{x}_i); i=1, \dots, N_j = m, j=1, \dots, m \}$ — матриця значень базисних функцій апроксимуючої функції, $\bar{Z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)^T$ — вектор середніх арифметичних межових значень інтервалів (3), відповідно з компонентами $\bar{z}_i = (z_i^- + z_i^+)/2, i=1..m$.

Спираючись на лему 4.1, яку наведено у праці [1], при $N = m$ у паралелотоп Ω_m можна вписати m -вимірний еліпсоїд Q_m з максимальним об'ємом у такому вигляді:

$$Q_m = \left\{ \bar{\beta} \in R^m \left| \left(\bar{\beta} - \bar{\beta} \right)^T \cdot F^T \cdot E^{-2} \cdot F \cdot \left(\bar{\beta} - \bar{\beta} \right) \leq 1 \right. \right\}. \quad (7)$$

У виразі (7), матриця $E = \{ \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_m) \}$ є діагональною матрицею похибок апроксимації $\Delta_i = (z_i^+ - z_i^-)/2, i=1, \dots, m$; $\bar{\beta}$ — центр m -вимірного еліпсоїда (7), який співпадає з центром симетрії (6) паралелотопа Ω_m .

Застосування апроксимації паралелотопа Ω_m допусковим m -вимірним еліпсоїдом Q_m (7), уможливорює побудувати коридор $[\tilde{z}_j(\bar{x})] = [\tilde{z}_j^-(\bar{x}), \tilde{z}_j^+(\bar{x})]$ інтервальних значень апроксимуючої функції у такому вигляді:

$$[\tilde{z}_j(\bar{x})]_{\bar{\beta} \in Q_m} = [\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{\beta} - \frac{1}{2} \Delta_{\tilde{z}_j(\bar{x})} \Big|_{\bar{\beta} \in Q_m} ; \bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{\beta} + \frac{1}{2} \Delta_{\tilde{z}_j(\bar{x})} \Big|_{\bar{\beta} \in Q_m}] \quad (8)$$

де $\Delta_{\tilde{z}_j(\bar{x})} \Big|_{\bar{\beta} \in Q_m}$ — ширина коридору. Вираз для обчислення ширини коридору, згідно із [1], має такий вигляд:

$$\Delta_{\tilde{z}_j(\bar{x})} \Big|_{\bar{\beta} \in Q_m} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (F^T \cdot E^{-2} \cdot F)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x})} \quad (9)$$

Мало імовірною є ситуація, коли коридор апроксимуючої функції (8) на обраних довільним чином фіксованих $N_j = m$ вузлах, задовольняє умови точності апроксимації (2) для усіх інших вузлів $N - N_j$, що власне і спонукає у процесі пошуку апроксимуючої функції нарощувати її складність. З метою зменшення обчислювальної складності на кожній ітерації формування структури апроксимуючої функції, проведено аналіз взаємного розміщення коридору для апроксимуючих функцій (8) та інтервальних даних у вигляді (3) у вузлових точках з набору $N - N_j$ для випадків, коли ІСЛАР (4) виявляється сумісною. Проведений аналіз уможливив сформулювати необхідні умови «задовільності» структури апроксимуючої функції, що забезпечує умови точності (2):

$$[\tilde{z}_j(\bar{x}_i)] \cap [z_i^-; z_i^+] \neq \emptyset, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

де $[\tilde{z}_j(\bar{x}_i)]$ — інтервали значень апроксимуючої функції з поточною структурою на j -й ітерації в i -тому, вузлі коефіцієнти якої є гарантованими оцінками області розв'язків ІСЛАР (5). Отже, отримана умова (10) є необхідною для подальшого обчислення вектора коефіцієнтів $\bar{\beta}$, при яких виконується достатня умова: $\tilde{z}_j(\bar{x}_i) \in [z_i^-; z_i^+]$. При цьому, гарантовані оцінки вектора коефіцієнтів $\bar{\beta}$ можемо отримати методами аналізу інтервальних даних, які з обчислювальної точки зору є суттєво простішими у порівнянні із методами обчислення точного розв'язку ІСЛАР (5). Проте не усі методи гарантованого оцінювання вектора коефіцієнтів $\bar{\beta}$ є придатними для цих цілей.

Рисунок 1 ілюструє виконання «необхідної умови» у випадку використання інтервальних гарантованих оцінок коефіцієнтів апроксимуючої функції, отриманих за процедурами апроксимації многогранної області розв'язків ІСЛАР (5), областю, у вигляді прямокутної призми. Такий підхід переважно використовують в інтервальному аналізі [1]. Проте, він є непридатним для пошуку однієї апроксимуючої функції, оскільки гарантована оцінка області розв'язків ІСЛАР (5) у вигляді прямокутної призми є занадто грубою, що в результаті

призводить до занадто широкого коридору значень апроксимуючої функції.

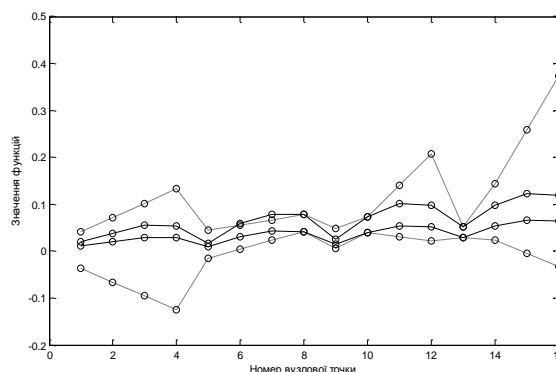


Рисунок 1 – Ілюстрація до виконання «необхідної умови»: перетин усіх інтервалів $[z_i^-; z_i^+]$ — суцільна лінія, з інтервалами $[\tilde{z}_j^-(\bar{x}_i); \tilde{z}_j^+(\bar{x}_i)]$ — штрихова лінія.

Слід зауважити, що вибір вектора коефіцієнтів апроксимуючої функції на гарантованій області у такий спосіб, щоб забезпечити «умови достатності», є окремою достатньо складною задачею. Так, у розглянутому вище прикладі, обравши за цей вектор - центр опуклого многогранника, який є множиною розв'язків ІСЛАР (5), було отримано апроксимуючу функцію, значення якої у вузлових точках не належать усім інтервалам (3), що не забезпечує «умову достатності». Такий випадок проілюстровано на рисунку 2.

Як видно із рисунка 2, значення апроксимуючої функції $\tilde{z}_j(\bar{x}_i)$ у вузлах №1—№4, №12 та №16 не належать до інтервалів $[z_i^-; z_i^+]$. Отже можемо констатувати, що успіх, щодо виконання «умов достатності», в значній мірі залежить від вибору способу опису області апроксимації многогранної області розв'язків ІСЛАР (5). У праці [1] обґрунтовано доцільність використання для цих цілей не прямокутної призми, а областей у вигляді багатовимірних еліпсоїдів (7).

Отже, для перевірки «умов необхідності», тобто, що задана структура апроксимуючої функції може забезпечити побудову апроксимуючої функції із заданими умовами точності (2), потрібно: виділити початкову вибірку вузлових точок, таких що $N_j = m$, де $N_j \ll N$; на основі цієї вибірки скласти ІСЛАР (5); апроксимувати область розв'язків ІСЛАР (5) довірчим m -вимірним еліпсоїдом Q_m і отримати коридор інтервальних значень апроксимуючої функції $[\tilde{z}_j(\bar{x})]$ у вигляді (8).

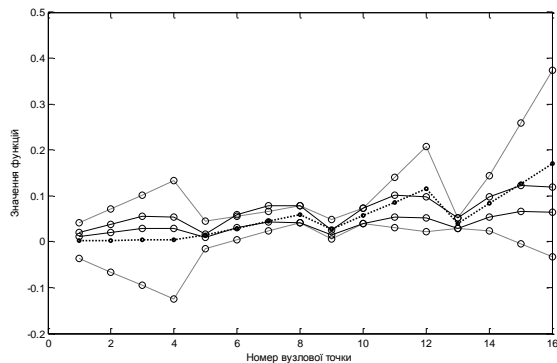


Рисунок 2 – Ілюстрація випадку не забезпечення «умови достатності»: значення апроксимуючої функції $\tilde{z}_j(\bar{x}_i)$ — жирна пунктирна лінія; інтервали $[z_i^-, z_i^+]$ — суцільна лінія.

Метод перевірки «умов достатності»

Як було зазначено вище, умови (10) не обов'язково гарантують знаходження, серед апроксимуючих функцій коридору (8), апроксимуючої функції, яка забезпечує умови точності (2). Проте виконання «умов необхідності» (10) означає доцільність подальшого продовження досліджень апроксимуючої функції із фіксованою структурою, з метою обчислення таких її коефіцієнтів, які забезпечать виконання умов точності (2).

Для безпосереднього знаходження коефіцієнтів апроксимуючої функції, в межах області визначеної еліпсоїдом у вигляді (7), запропоновано розглянути три методи:

1. Метод Монте Карло із використанням нормального закону розподілу відхилень компонент вектора коефіцієнтів $\vec{\beta}$ від відповідних компонент вектора $\vec{\bar{\beta}}$, який обчислюємо за формулою (6). При цьому коваріаційна матриця для нормального закону розподілу, з точністю до множника співпадає із матрицею конфігурації еліпсоїда (7).

2. Оптимізаційні методи випадкового пошуку коефіцієнтів апроксимуючої функції, які наведено у праці [1].

3. Метод, суть якого полягає у подальшій локалізації розв'язків усієї ІСЛАР (4) із використанням паралелотопа Ω_m .

Розглянемо детально третій метод. Геометрично, локалізація розв'язків усієї ІСЛАР (4) із використанням паралелотопа Ω_m , означає поступове переміщення граней опуклого многогранника, з метою отримання наближених розв'язків ІСЛАР (5), апроксимованих паралелотопом Ω_m . Особливістю паралелотопа Ω_m - як геометричної фігури, є фіксована

кількість вершин 2^m , а його грані попарно паралельні. Виділимо із ІСЛАР (4) насичений блок рівнянь (5) на вузлових точках (при $N_j = m$). Додаватимемо до насиченого блоку послідовно рівняння, що задають інтервал значень апроксимуючої функції у точках $i = 1, \dots, N - N_j$, у порядку зменшення деякого показника «узгодження» $\delta(\bar{x}_i)$ між інтервалами значень $[z_i^-, z_i^+]$ і інтервалами значень апроксимуючої функції $[\tilde{z}_j(\bar{x}_i)]$, які отримуватимемо з виразу (8). Зазначений показник «узгодження» $\delta(\bar{x}_i)$ визначимо у такому вигляді.

$$\delta(\bar{x}_i) = \max_{i=1..N} \{ \text{wid}([\tilde{z}_j(\bar{x}_i)]) - \text{wid}([\tilde{z}_j(\bar{x}_i)] \cap [z(\bar{x}_i)]) \} \quad (11)$$

де $\text{wid}(\bullet)$ – операція визначення ширини інтервалу.

Опишемо детальніше вище зазначену схему реалізації методу.

Нехай, при побудові апроксимуючої функції $\tilde{z}_j(\bar{x})$, задано $N_j = m$ вузлових точок, фіксованих для j -тої ітерації пошуку структури апроксимуючої функції. Із урахуванням заданої точності апроксимації (2), представимо умови для знаходження апроксимуючої функції за обраними вузловими точками у вигляді ІСЛАР (5). Як відомо [1], розв'язком такої системи є область векторів коефіцієнтів $\vec{\beta}$ у вигляді паралелотопа Ω_m із вершинами \vec{b}_s , координати яких обчислюємо за такою формулою:

$$\vec{b}_s = F_m^{-1} \cdot \vec{Z}_s, \quad (12)$$

де $\vec{Z}_s = (z_1^+, z_2^-, z_3^+, \dots, z_m^-)^T$ — вектор, складений із межових значень інтервалів $[z_i^-, z_i^+]$. Спираючись на отриману оцінку області коефіцієнтів апроксимуючої функції у вигляді паралелотопа Ω_m , отриману на основі обраних $N_j = m$ вузлових точок, побудуємо гарантовану наближену оцінку області коефіцієнтів у вигляді паралелотопа, але з урахуванням його розмірів за рештою $N - N_j$ інтервальних рівнянь. Для цього розв'язуватимемо задачу мінімізації об'єму паралелотопа V_{Ω_m} , із виконанням умов належності загального розв'язку ІСЛАР (4) до області розв'язків ІСЛАР (5) у вигляді паралелотопа Ω_m . Формально, зазначена задача матиме такий вигляд:

$$V_{\Omega_m} \longrightarrow \min, \quad \Omega \subseteq \Omega_m \quad (13)$$

Задачу (13) будемо розв'язувати по-кроково. Схематично, при фіксованій матриці F кожен крок означає зменшення відстаней між попарно-паралельними гранями паралелотопа, враховуючи розміщення гіперсмуг $\bar{\Omega}$, заданих одним

інтервальним рівнянням із решти $N - N_j$ інтервальних рівнянь системи (4). При відомій фіксованій матриці F , задача (13) мінімізації об'єму локалізаційної області у вигляді паралелотопа стає еквівалентною таким задачам:

$$z_i^+ \longrightarrow \min, z_i^- \longrightarrow \max, \forall i = 1, \dots, m, \quad (14)$$

$$\Omega \subseteq \Omega_m.$$

Для розв'язування задачі локалізації (14) на $k + 1$ -тому кроці, значення $z_i^-(k + 1)$ та $z_i^+(k + 1)$ для базових N_j рівнянь обчислюємо за такими формулами:

$$z_i^-(k + 1) = z_i^-(k) + \delta_i^-(k + 1),$$

$$z_i^+(k + 1) = z_i^+(k) - \delta_i^+(k + 1), \quad (15)$$

$$i = 1, \dots, m.$$

При цьому у формулах (15) значення $\delta_i^-(k + 1)$ та $\delta_i^+(k + 1)$ максимізуємо із урахуванням обмежень:

$$\Omega \subseteq \{ \Omega_m(k) \cap \tilde{\Omega}(k + 1) \} \subseteq \Omega_m(k + 1), \quad (16)$$

де $\Omega_m(k + 1)$ – m -вимірний паралелотоп, отриманий на $k + 1$ -тому кроці; $\tilde{\Omega}(k + 1)$ – "гіперсмуга", яка визначена $k + 1$ -тим інтервальним рівнянням ($k = 1, \dots, N - N_j$) із тих, що залишились у системі (4) після вибору N_j базових рівнянь. Інтервальне рівняння для побудови $k + 1$ -ї "гіперсмуги" обиратимемо із решти $N - N_j$ інтервальних рівнянь за максимальним значенням показника узгодження $\delta(\bar{x}_i)$. Вирази для обчислення значень $\delta_i^-(k + 1)$ та $\delta_i^+(k + 1)$ на кожній ітерації було отримано у праці [1], виходячи із наведених нижче міркувань.

Позначимо за $\bar{b}_s(k)$ ($s = 1, \dots, 2^m$) вершину паралелотопа $\Omega_m(k)$ і перетворимо формулу (12) до вигляду, придатного для обчислення координат вершин на k -тій ітерації:

$$\bar{b}_s(k) = F_m^{-1} \cdot \bar{Z}_s(k), \quad (17)$$

де $\bar{Z}_s(k)$ – вектор, складений із комбінацій модифікованих за формулою (15) значень $z_i^-(k)$ та $z_i^+(k)$ кожного із базових N_j інтервальних рівнянь. Важливою властивістю паралелотопа $\Omega_m(k)$ є те, що вершини $\bar{b}_s(k)$ належать одній грані, якщо у формулі (17) відповідні вектори $\bar{Z}_s(k)$ мають хоча б по одній спільній компоненті. Таким чином, покрокове "переміщення" меж $z_i^-(k)$ та $z_i^+(k)$, із застосуванням виразу (15), у просторі параметрів, означає переміщення відповідних граней паралелотопа $\Omega_m(k)$ в сторону зменшення його розмірів.

У праці [1], для оцінки розміщення вершин $\bar{b}_s(k)$ паралелотопа $\Omega_m(k)$ відносно меж гіперсмуги $\tilde{\Omega}(k + 1)$, утвореної $k + 1$ рівнянням, запропоновано використати такі скалярні функції:

$$L_s(k) = z_{k+1}^- - \bar{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \bar{b}_s(k),$$

$$L'_s(k) = \bar{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \bar{b}_s(k) - z_{k+1}^+ = -L_s(k) - \Delta_{k+1} \quad (18)$$

де \bar{x}_{k+1} – вектор значень аргументів таблично-заданої функції для фіксованої $k + 1$ вузлової точки, яка визначає $k + 1$ рівняння у системі (4); z_{k+1}^-, z_{k+1}^+ – нижнє та верхнє інтервальні значення таблично-заданої функції у $k + 1$ вузловій точці;

$$\Delta_{k+1} = z_{k+1}^+ - z_{k+1}^-.$$

На основі уведених скалярних функцій (18), у праці [1] виведено співвідношення для обчислення $\delta_i^-(k + 1)$ та $\delta_i^+(k + 1)$ у вигляді:

$$\delta_i^-(k + 1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{ L_s(k) / |\bar{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \bar{f}_i| \}, \\ \text{якщо } L_s(k) > 0, \bar{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \bar{f}_i \neq 0; \\ 0, \text{ якщо } L_s(k) \leq 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\delta_i^+(k + 1) = \begin{cases} \min_{s=1, \dots, 2^{m-1}} \{ L'_s(k) / |\bar{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \bar{f}_i| \}, \\ \text{якщо } L'_s(k) > 0, \bar{\varphi}^T(\bar{x}_{k+1}) \cdot \bar{f}_i \neq 0; \\ 0, \text{ якщо } L'_s(k) \leq 0, \end{cases} \quad (20)$$

Отже, для реалізації одного кроку, розглянутого локалізаційного методу необхідно виконати таку послідовність обчислень [1]:

1. Обчислити значення скалярних функцій $L_s(k)$ та $L'_s(k)$ для усіх вершин паралелотопа.
2. Обчислити $\delta_i^-(k + 1)$ та $\delta_i^+(k + 1)$, відповідно, за формулами (19) та (20).
3. Обчислити межі інтервалу $[z_i^-(k + 1); z_i^+(k + 1)]$ за формулами (15).

Таким чином в результаті виконання $N - N_j$ кроків, отримаємо апроксимацію області розв'язків Ω загальної ІСЛАР (4) паралелотопом Ω_m^* - областю розв'язків такої ІСЛАР:

$$\begin{cases} z_1^{*-} \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_1) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_1) \leq z_1^{*+}; \\ \vdots \\ z_i^{*-} \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_i) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_i) \leq z_i^{*+}; \\ \vdots \\ z_m^{*-} \leq \beta_1 \varphi_1(\bar{x}_m) + \dots + \beta_m \varphi_m(\bar{x}_m) \leq z_m^{*+}, \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{де } [z_i^{*-}; z_i^{*+}] = [z_i^-(k + 1 = N - N_j); z_i^+(k + 1 = N - N_j)], \quad i = 1, \dots, m, \quad (22)$$

які обчислено з рекурентних співвідношень (15) після виконання $N - N_j$ кроку.

Центр симетрії паралелограма Ω_m^* визначаємо за формулою:

$$\bar{\beta}^* = F^{-1} \cdot \bar{Z}^*, \quad (24)$$

де $\bar{Z}^* = (\bar{z}_1^{*+}, \bar{z}_2^{*-}, \bar{z}_3^{*+}, \dots, \bar{z}_m^{*-})^T$ — вектор складений із меж інтервалів $[z_i^{*-}, z_i^{*+}]$

Тепер область Ω_m^* розв'язків ІСЛАР (21) апроксимуємо довірчим m -вимірним еліпсоїдом Q_m^* :

$$Q_m^* = \left\{ \bar{\beta} \in R^m \left| \left(\bar{\beta} - \bar{\beta}^* \right)^T \cdot F^T \cdot E^{*-2} \cdot F \cdot \left(\bar{\beta} - \bar{\beta}^* \right) \leq 1 \right. \right\}, \quad (25)$$

де матриця $E^* = \{ \text{diag}(\Delta_1^*, \dots, \Delta_i^*, \dots, \Delta_m^*) \}$ — діагональна матриця з елементами $\Delta_i^* = (z_i^{*+} - z_i^{*-})/2, i = 1, \dots, m$.

Тоді коридор значень апроксимуючої функції $[\tilde{z}_j^-(\bar{x}_i), \tilde{z}_j^+(\bar{x}_i)]$, у випадку локалізації області оцінок параметрів Ω_m^* m -вимірним еліпсоїдом Q_m^* , матиме такий вигляд:

$$\left[\tilde{z}_j(\bar{x}) \right]_{\bar{\beta}^* \in Q_m^*} = \left[\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{\beta}^* - \frac{1}{2} \Delta_{z_j(\bar{x})} \right]_{\bar{\beta}^* \in Q_m^*}; \quad (26)$$

$$\left[\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot \bar{\beta}^* + \frac{1}{2} \Delta_{z_j(\bar{x})} \right]_{\bar{\beta}^* \in Q_m^*}$$

$$\text{де } \Delta_{z_j(\bar{x})}^* \Big|_{\bar{\beta}^* \in Q_m^*} = 2 \cdot \sqrt{\bar{\varphi}^T(\bar{x}) \cdot (F^T \cdot E^{*-2} \cdot F)^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{x})}.$$

Оскільки виконується умова $\Omega \subseteq \Omega_m \subseteq \Omega_m^*$, то ширина коридору (26) буде меншою від ширини коридору (8).

Зазначимо, що в процесі модифікації (5) до ІСЛАР (21) враховано умови (2) для усіх $N - N_j$ точок, то імовірно, що будь-який вектор коефіцієнтів апроксимуючої функції, обраний на області (25), забезпечить умови точності (2) для усіх вузлових точок. Тому за коефіцієнти апроксимуючої функції достатньо вибрати вектор коефіцієнтів, який, наприклад, співпадає з точкою (24) — центром еліпсоїда (25).

У кінцевому випадку апроксимуючу функцію запишемо у такому вигляді:

$$\tilde{z}(\bar{x}_i) = \bar{\varphi}^T(\bar{x}_i) \cdot \bar{\beta}^*, i = 1, \dots, N \quad (27)$$

Зауважимо, якщо структура апроксимуючої функції на j -тій ітерації обрана невірно, то ІСЛАР (4) виявиться несумісною і відповідно процедура локалізації за рекурентними формулами (15) сформує порожню множину розв'язків. Саме цей факт є надійною умовою ускладнення структури апроксимуючої функції.

Приклад

Для прикладу розглянемо задачу апроксимації функції, яку представлено у таблиці 1.

Встановимо відносну похибку апроксимації таблично-заданої функції у 10%. Тоді абсолютна похибка апроксимації в усіх вузлових точках буде різною: $\xi_i = z_i \cdot 0,1$.

Таблиця 1. Таблично-задана функція.

№	x	y	z
1	0.100	0.100	0.015
2	0.225	0.100	0.0294
3	0.350	0.100	0.0421
4	0.475	0.100	0.0419
5	0.100	0.225	0.0133
6	0.225	0.225	0.0448
7	0.350	0.225	0.0606
8	0.475	0.225	0.0598
9	0.100	0.350	0.02
10	0.225	0.350	0.0566
11	0.350	0.350	0.0778
12	0.475	0.350	0.0751
13	0.100	0.475	0.0401
14	0.225	0.475	0.0755
15	0.350	0.475	0.0947
16	0.475	0.475	0.0919

Оберемо деякі початкові вузлові точки для формування насиченого блоку ІСЛАР у вигляді (5). Зазначені вузлові точки в таблиці 1 за номерами 8, 10, 13.

Використовуючи метод «нарощування» складності апроксимуючої функції, описаний у праці [3], було отримано структуру апроксимуючої функції, яка забезпечує достатні умови (10):

$$\tilde{z}_j(\bar{x}) = \beta_1 \cdot \varphi_1(\bar{x}) + \beta_2 \cdot \varphi_2(\bar{x}) + \beta_3 \cdot \varphi_3(\bar{x}) + \beta_4 \cdot \varphi_4(\bar{x}) + \beta_5 \cdot \varphi_5(\bar{x}) + \beta_6 \cdot \varphi_6(\bar{x}), \quad (28)$$

де $\bar{\varphi}(\bar{x}) = \{x; y; xy; y^3; x^4; x^4 y\}$ — вектор базисних функцій.

При цьому за базові встановлено такі вузлові точки із таблиці 1: №3, №6, №8, №10, №13, №15. Як бачимо, кількість базових вузлових точок співпадає з кількістю невідомих коефіцієнтів апроксимуючої функції, тобто $N_j = m = 6$. ІСЛАР у вигляді насиченого блоку (5) за цих умов матиме такий вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} 0,03609 &\leq \beta_1 \cdot 0,100 + \beta_2 \cdot 0,475 + \beta_3 \cdot 0,0475 + \\ &\beta_4 \cdot 0,1072 + \beta_5 \cdot 0,0001 + \beta_6 \cdot 0,000048 \leq 0,04411; \\ 0,05382 &\leq \beta_1 \cdot 0,475 + \beta_2 \cdot 0,225 + \beta_3 \cdot 0,1069 + \\ &\beta_4 \cdot 0,0114 + \beta_5 \cdot 0,0509 + \beta_6 \cdot 0,011454 \leq 0,06578; \\ 0,05094 &\leq \beta_1 \cdot 0,225 + \beta_2 \cdot 0,350 + \beta_3 \cdot 0,0788 + \\ &\beta_4 \cdot 0,0429 + \beta_5 \cdot 0,0026 + \beta_6 \cdot 0,000897 \leq 0,06226; \\ 0,03789 &\leq \beta_1 \cdot 0,350 + \beta_2 \cdot 0,100 + \beta_3 \cdot 0,0350 + \\ &\beta_4 \cdot 0,0010 + \beta_5 \cdot 0,0150 + \beta_6 \cdot 0,001501 \leq 0,04631; \\ 0,08523 &\leq \beta_1 \cdot 0,350 + \beta_2 \cdot 0,475 + \beta_3 \cdot 0,1663 + \\ &\beta_4 \cdot 0,1072 + \beta_5 \cdot 0,0150 + \beta_6 \cdot 0,007128 \leq 0,10417; \\ 0,04032 &\leq \beta_1 \cdot 0,225 + \beta_2 \cdot 0,225 + \beta_3 \cdot 0,0506 + \\ &\beta_4 \cdot 0,0114 + \beta_5 \cdot 0,0026 + \beta_6 \cdot 0,000577 \leq 0,04928; \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Розв'язком отриманої ІСЛАР (29) є область коефіцієнтів апроксимуючої функції (28) у

вигляді паралелотопа з центром, координати якого обчислені за формулою (6):

$$\vec{\beta} = (-0.078; 0.148; 0.7; -0.617; 0.921; -3.306)^T$$

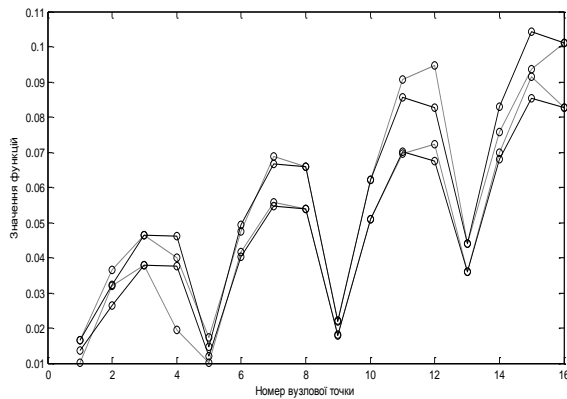


Рисунок 3 – Коридор значень: апроксимуючої функції $[\tilde{z}_j^-(\bar{x}), \tilde{z}_j^+(\bar{x})]$ — штрихова лінія; таблично-заданої функції $[z_i^-; z_i^+]$ — суцільна лінія.

Апроксимація розв’язку ІСЛАР (29) допусковим еліпсоїдом (7) уможливила побудову коридору значень апроксимуючої функції (28) у вигляді (8). Отриманий коридор графічно наведено на рисунку 3.

Як бачимо, рисунок 3 підтверджує виконання необхідної умови «задовільності» структури апроксимуючої функції.

Обравши за вектор коефіцієнтів апроксимуючої функції координати центра паралелотопа $\vec{\beta}$, на рисунку 4 бачимо, що умова достатності не виконується для частини вузлових точок: $\tilde{z}_j(\bar{x}_i) \notin [z_i^-; z_i^+]$.

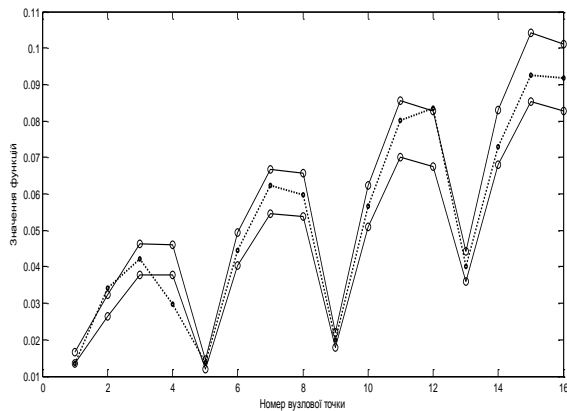


Рисунок 4 – Графік для апроксимуючої функції $\tilde{z}_j(\bar{x}_i)$ — пунктирна лінія, та інтервалів таблично-заданої функції $[z_i^-; z_i^+]$ у вузлових точках — суцільні лінії.

Застосовуючи метод локалізації розв’язків ІСЛАР, побудованої на основі усієї таблиці 1, із використанням паралелотопа Ω_m — розв’язків ІСЛАР (29), отримуємо таку модифіковану ІСЛАР

(30). Розв’язком ІСЛАР (30) є паралелотоп Ω_m^* із центром:

$$\vec{\beta}^* = (0,06917; 0,11063; 0,02745; 0,01183; 0,00797; 0,00096)^T$$

$$\begin{cases} 0,03979 \leq \beta_1 \cdot 0,100 + \beta_2 \cdot 0,475 + \beta_3 \cdot 0,0475 + \\ \beta_4 \cdot 0,1072 + \beta_5 \cdot 0,0001 + \beta_6 \cdot 0,000048 \leq 0,04101; \\ 0,05782 \leq \beta_1 \cdot 0,475 + \beta_2 \cdot 0,225 + \beta_3 \cdot 0,1069 + \\ \beta_4 \cdot 0,0114 + \beta_5 \cdot 0,0509 + \beta_6 \cdot 0,011454 \leq 0,06148; \\ 0,05444 \leq \beta_1 \cdot 0,225 + \beta_2 \cdot 0,350 + \beta_3 \cdot 0,0788 + \\ \beta_4 \cdot 0,0429 + \beta_5 \cdot 0,0026 + \beta_6 \cdot 0,000897 \leq 0,05926; \\ 0,04115 \leq \beta_1 \cdot 0,350 + \beta_2 \cdot 0,100 + \beta_3 \cdot 0,0350 + \\ \beta_4 \cdot 0,0010 + \beta_5 \cdot 0,0150 + \beta_6 \cdot 0,001501 \leq 0,04381; \\ 0,08601 \leq \beta_1 \cdot 0,350 + \beta_2 \cdot 0,475 + \beta_3 \cdot 0,1663 + \\ \beta_4 \cdot 0,1072 + \beta_5 \cdot 0,0150 + \beta_6 \cdot 0,007128 \leq 0,10007; \\ 0,04329 \leq \beta_1 \cdot 0,225 + \beta_2 \cdot 0,225 + \beta_3 \cdot 0,0506 + \\ \beta_4 \cdot 0,0114 + \beta_5 \cdot 0,0026 + \beta_6 \cdot 0,000577 \leq 0,04621; \end{cases} \quad (30)$$

Підставляючи відповідні компоненти отриманого вектора $\vec{\beta}^*$ у вираз (28), отримуємо апроксимуючу функцію:

$$\tilde{z}(x, y) = 0,06917x + 0,11063y + 0,02745xy + 0,01183y^3 + 0,00797x^4 + 0,00096x^4y.$$

На рисунку 5 представлено графічне співставлення функції, заданої таблицею 1 із точністю 10% у вузлових точках та отриманої в аналітичному вигляді апроксимуючої функції.

Як бачимо з рисунка 5, отримана апроксимуюча функція задовольняє заданій точності $\xi = z_i \cdot 0,1$ в усіх вузлових точках, а її значення належать до інтервалів значень у вузлових точках для таблично-заданої функції $[z_i^-; z_i^+]$.

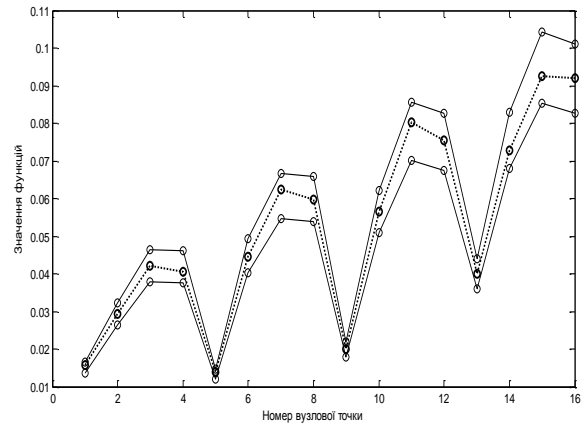


Рисунок 5 – Співставлення графічного представлення функції, заданої таблицею 1 із точністю 10% та отриманої апроксимуючої функції.

Рисунок 5 підтверджує виконання умови $\Omega \subseteq \Omega_m \subseteq \Omega_m^*$ і в цілому працездатність запропонованого методу.

Висновки

Розглянуто метод побудови апроксимаційної функції багатьох аргументів для наближення таблично-заданої функції із заданою точністю у вузлових точках. Запропоновано та обґрунтовано процедуру поступового нарощення апроксимаційної функції. Із застосуванням методів аналізу інтервальних даних встановлено необхідні та достатні умови забезпечення достатньої кількості коефіцієнтів апроксимуючої функції для заданої точності у вузлових точках.

При цьому отримано такі нові наукові результати:

1. Вперше запропоновано та обґрунтовано метод побудови апроксимуючої функції із

мінімізацією її складності та за умов заданої точності апроксимації, різної у всіх вузлових точках.

2. З метою зменшення обчислювальної складності реалізації зазначеного методу, запропоновано та обґрунтовано необхідні та достатні умови вибору структури апроксимуючої функції та співвідношень для обчислення її коефіцієнтів.

3. Отримані теоретичні результати підтверджено на прикладі побудови апроксимуючої функції для таблично-заданої функції з визначеними умовами щодо точності апроксимації

Список літератури

1. Дивак М. П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. – Тернопіль: Видавництво ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216 с.
2. Дивак М. П. Використання властивостей інтервальних похибок при моделюванні технологічних процесів / М. П. Дивак, І. Р. Пітух, Н. Г. Шклярченко, Ю. П. Франко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах : Зб. наук. праць. Вип. 7. — 2000. — С. 204–208.
3. Штундер О. М. Математичне моделювання характеристик джерел вторинного електроживлення на високочастотних магнітних ключах методами аналізу інтервальних даних / О. М. Штундер, М. П. Дивак // Контроль і управління в складних системах (КУСС-2012). XI Міжнародна конференція. Тези доповідей. — Вінниця: ВНТУ — 2012. — С. 35.
4. Яськів В. І. Нові методи проектування імпульсних джерел вторинного електроживлення засобів комп'ютерної техніки // Теоретична електротехніка: Збірник наукових праць Випуск 56. . — Львів: ЛНУ імені Івана Франка.— 2002. — С. 135-141.

Надійшла до редакції 25.03.2013

О. М. ШТУНДЕР, Н. П. ДИВАК

Тернопольский национальный экономический университет

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ И МИНИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТЬЮ

Рассмотрен метод построения аппроксимирующей функции многих аргументов с заданной точностью в узловых точках. Для минимизации количества коэффициентов аппроксимирующей функции и обеспечения заданной точности аппроксимации предложено использовать методы анализа интервальных данных.

Ключевые слова: аппроксимирующая функция, интервальный анализ данных, интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ), доверительный эллипсоид.

O.M. SHTUNDER, M. P. DYVAK

Ternopil National Economic University

A METHOD OF CONSTRUCTING AN APPROXIMATING FUNCTION WITH MULTIPLE ARGUMENTS WITH A GIVEN ACCURACY AND MINIMAL COMPLEXITY.

In many technical applications it is often necessary to find some approximation of a certain table-given function with a given accuracy in nodal points. Transformation of a table-given function with a given accuracy into analytical form helps to determine the characteristics of a technical device for any set of arguments. So it is important to present the characteristics of a technical device with a given accuracy in nodal points with a simpler function.

The paper describes a method of constructing approximating functions with multiple arguments and with a given accuracy in nodal points. We propose a procedure of step-by-step increasing of the approximating function for providing a given accuracy in nodes. The methods of interval data analysis helped to define the necessary and sufficient conditions for providing the required number of approximating function coefficients for a given accuracy in nodal points.

To find approximating function coefficients within an ellipsoid area we suggest using three methods: Monte Carlo method, which uses normal distribution of coefficient vector components deviations; optimization methods of random search of approximating function coefficients; a method of step-by-step localization of the solutions of the entire Interval System of Linear Algebraic Equations (ISLAE) with saturated block separation. Localization of ISLAE solutions is studied in detail and its step-by-step implementation is described. Geometrically the localization method consists in step-by-step moving of the faces of a convex polyhedron with the purpose of obtaining approximate solutions.

The results of our research are the following:

1. A method of constructing an approximating function with minimization of its complexity and with a given approximation accuracy (different in all nodal points) is developed.
2. The necessary and sufficient conditions for choosing the structure of an approximating function and equations for calculating its coefficients with the purpose of reducing the computational complexity of the above method are considered.
3. The obtained theoretical results are confirmed by developing an approximating function for a table-given function with the given conditions of the approximation accuracy.

Key words: approximating function, interval data analysis, interval system of linear algebraic equations (ISLAE), tolerance ellipsoid.