УДК 517.9

©2007. **О.А. Рудакова**

О КОЭРЦИТИВНОСТИ ИНТЕГРАНТА Γ-ПРЕДЕЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА РАЗЛИЧНЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Рассматривается последовательность интегральных функционалов с интегрантами, удовлетворяющими определенным условиям роста и коэрцитивности с вырождением по пространственным переменным. При некоторых условиях относительно пространств, на которых определены функционалы, и связанных с ними n-мерных областей устанавливается Γ-компактность рассматриваемой последовательности функционалов и коэрцитивность интегранта Γ-предельного функционала.

Введение. Интерес к изучению Γ-сходимости функционалов и в особенности интегральных функционалов связан с тем, что во многих важных случаях она сопровождается сходимостью решений соответствующих вариационных задач. Вопросы Γ-сходимости функционалов с единой областью определения рассматривались во многих работах (см., например, [1]–[4]). Для функционалов с различными областями определения понятие Γ-сходимости изучалось, например, в работах [5]–[10]. При этом функционалы были определены на невесовых пространствах Соболева.

В статье [11] рассматривалась последовательность интегральных функционалов, определенных на различных весовых соболевских пространствах. При этом предполагалось, что условия роста и коэрцитивности на интегранты функционалов содержат весовую функцию и некоторую, вообще говоря, неограниченную последовательность слагаемых. В указанной работе установлена теорема о выборе из рассматриваемой последовательности функционалов подпоследовательности, Γ-сходящейся к некоторому интегральному функционалу. В настоящей статье дается уточнение этого результата, а именно, при дополнительных условиях относительно пространств, на которых определены функционалы, и связанных с ними n-мерных областей устанавливается коэрцитивность интегранта Γ-предельного функционала.

1. Функциональные пространства и основные определения. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $p \in (1,n)$. Пусть ν – неотрицательная функция на Ω, причем $\nu > 0$ почти всюду в Ω

$$\nu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Через $L^p(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω. $L^p(\nu,\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega)} = \left(\int_\Omega \nu |u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Через $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu,\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu,\Omega)$. $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \left(\int_\Omega \nu |u|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nu |D_i u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega)$. $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с индуцированной нормой пространства $W^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Далее, пусть $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω.

Аналогично пространствам, введенным выше, определим функциональные пространства, соответствующие областям Ω_s.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Через $L^p(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех измеримых функций $u : \Omega_s \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω_s. $L^p(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = \left(\int_{\Omega_s} \nu |u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Через $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu,\Omega_s)$ таких, что для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu,\Omega_s)$. $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu,s} = \left(\int_{\Omega_s} \nu |u|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_s} \nu |D_i u|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Через $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ обозначим множество всех сужений на Ω_s функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Через $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ обозначим замыкание множества $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$.

Заметим, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $u|_{\Omega_s} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$.

Определение 1. Если $s \in \mathbb{N}$, то q_s – отображение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такое, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ $\quad q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ такая, что:

1) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;

2) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ имеем $\quad q_s(l_s u) = u$ п.в. на Ω_s.

Понятие сильной связанности последовательности пространств Соболева (или, в другой терминологии, соответствующих им n-мерных областей) играет существенную роль в вопросах усреднения краевых и вариационных задач в областях со сложной структурой (см. прежде всего [12], а также [4]–[8] и [13]–[15]). Понятие сильной связанности последовательности пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ достаточно подробно исследовано в работе [16].

Далее понадобится более тонкое понятие по сравнению с понятием сильной связанности рассматриваемых пространств.

Для любых $y\in\mathbb{R}^n$ и $t\in\mathbb{N}$ положим

$$Q_t(y)=\Big\{x\in\mathbb{R}^n : |x_i-y_i|<\frac{1}{2t},\ i=1,\ldots,n\Big\}.$$

Определение 3. Будем говорить, что последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ регулярно сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, если существуют последовательность линейных непрерывных операторов $l_s:\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)\to\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и постоянная $c>0$ такие, что:

(i) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;

(ii) для любых $s\in\mathbb{N}$ и $u\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ имеем $q_s(l_su)=u$ п.в. на Ω_s;

(iii) для любых $y\in\Omega$ и $t\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\overline{Q_t(y)}\subset\Omega$, существует $s_0\in\mathbb{N}$ такое, что для любых $s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant s_0$, и $u\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ имеем

$$\int_{Q_{t+1}(y)}\nu|\nabla(l_su)|^p\,dx\leqslant c\int_{Q_t(y)\cap\Omega_s}\nu|\nabla u|^p\,dx.$$

Как мы увидим ниже, понятие регулярной сильной связанности рассматриваемых весовых пространств Соболева играет важную роль при изучении вопроса о коэрцитивности интегранта Γ-предельного функционала для последовательности интегральных функционалов, определенных на пространствах $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$. Идея использования этого понятия в исследовании данного вопроса принадлежит А.А. Ковалевскому.

Определение 4. Пусть для любого $s\in\mathbb{N}$ I_s – функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$, I – функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функционалу I, если выполняются условия:

1) для любой функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ существует последовательность $w_s\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty}\|w_s-q_su\|_{L^p(\nu,\Omega_s)}=0$ и $\lim\limits_{s\to\infty}I_s(w_s)=I(u)$;

2) для любой функции $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и любой последовательности $u_s\in\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такой, что $\lim\limits_{s\to\infty}\|u_s-q_su\|_{L^p(\nu,\Omega_s)}=0$, имеем $\liminf\limits_{s\to\infty}I_s(u_s)\geqslant I(u)$.

2. Основной результат. Пусть $b\in L^1(\Omega)$, $b\geqslant 0$ в Ω, и пусть $\{\psi_s\}$ – последовательность функций, удовлетворяющая следующим условиям:

для любого $s\in\mathbb{N}$ имеем $\psi_s\in L^1(\Omega_s)$ и $\psi_s\geqslant 0$ в Ω_s;

для любого открытого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ имеем

$$\limsup_{s\to\infty} \int_{Q\cap\Omega_s} \psi_s\,dx \leqslant \int_{Q\cap\Omega} b\,dx. \tag{1}$$

Пусть c_1, $c_2 > 0$ и $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, – последовательность функций такая, что:

для любых $s \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot,\xi)$ измерима на Ω_s;

для любого $s \in \mathbb{N}$ и почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x,\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$; (2)

для любого $s \in \mathbb{N}$, почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1\nu(x)|\xi|^p - \psi_s(x) \leqslant f_s(x,\xi) \leqslant c_2\nu(x)|\xi|^p + \psi_s(x)\,. \tag{3}$$

Определение 5. Если $s \in \mathbb{N}$, то J_s – функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ такой, что для любой функции $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$

$$J_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x,\nabla u)\,dx.$$

Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всех функций $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot,\xi)$ измерима на Ω; для почти всех $x \in \Omega$ функция $f(x,\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$; для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$-b(x) \leqslant f(x,\xi) \leqslant c_2\nu(x)|\xi|^p + b(x).$$

Определение 6. Если $f \in \mathcal{F}$, то J^f – функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ такой, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$

$$J^f(u) = \int_{\Omega} f(x,\nabla u)\,dx.$$

Через $\mathcal{F}_0$ обозначим множество всех функций $f \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих условию: существует постоянная $c' > 0$ такая, что для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем $f(x,\xi) \geqslant c'\nu(x)|\xi|^p - b(x)$.

Теорема 1. *Пусть вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ компактно и последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ регулярно сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Пусть существует ограниченная измеримая положительная функция b_1 на Ω такая, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$*

$$\liminf_{s\to\infty} \operatorname{meas}(Q\cap\Omega_s) \geqslant \int_Q b_1\,dx. \tag{4}$$

Предположим, что существует последовательность открытых множеств $\Omega^{(k)}$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что:

а) *для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{\Omega^{(k)}} \subset \Omega^{(k+1)} \subset \Omega$;*

б) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{meas}\bigl(\Omega \setminus \Omega^{(k)}\bigr) = 0$;

в) *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *функции* ν *и* b *ограничены на* $\Omega^{(k)}$.

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $f \in \mathcal{F}_0$ *такие, что последовательность* $\{J_{s_j}\}$ *Г-сходится к функционалу* J^f.

Изложим схему доказательства этой теоремы.

Шаг 1. Пусть для любого $t \in \mathbb{N}$ $Y_t = \{y \in \mathbb{R}^n : ty_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n\}$. Заметим, что

$$\forall\, t \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{y \in Y_t} \overline{Q_t(y)} = \mathbb{R}^n,$$

$$\forall\, t \in \mathbb{N} \quad \forall\, y,\ y' \in Y_t, \quad y \neq y', \quad Q_t(y) \cap Q_t(y') = \emptyset.$$

Далее, для любого $t \in \mathbb{N}$ положим $Y'_t = \{y \in Y_t : \overline{Q_t(y)} \subset \Omega\}$. Ясно, что существует $t_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, множество Y'_t непусто.

Пусть для любых $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, $s \in \mathbb{N}$ и $y \in Y'_t$

$$V_{t,s}(y) = \biggl\{ u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) : \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} \nu |u|^p \, dx \leqslant t^{-n-3p} \biggr\}.$$

Теперь для любых $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, $s \in \mathbb{N}$, $y \in Y'_t$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ положим

$$F_{t,s}(y, \xi) = t^n \inf_{u \in V_{t,s}(y)} \int_{Q_t(y) \cap \Omega_s} f_s(x, \xi + \nabla u) \, dx.$$

Числа $F_{t,s}(y, \xi)$ представляют собой определенные локальные характеристики функционалов J_s.

Шаг 2. Используя условия (1)–(3), устанавливаем, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность функций $\Phi_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, $y \in Y'_t$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{j \to \infty} F_{t,s_j}(y, \xi) = \Phi_t(y, \xi). \tag{5}$$

Шаг 3. Пусть для любых $t \in \mathbb{N}$ и $y \in \Omega$ таких, что $\overline{Q_t(y)} \subset \Omega$, $\chi_{t,y} : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества $Q_t(y)$.

Для любых $k, t \in \mathbb{N}$ положим $Y_{k,t} = \{y \in Y_t : Q_t(y) \subset \Omega^{(k)}\}$.

Дадим следующее определение: если $k, t \in \mathbb{N}$ и $Y_{k,t} \neq \emptyset$, то $H_t^{(k)}$ – функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой пары $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$

$$H_t^{(k)}(x, \xi) = \sum_{y \in Y_{k,t}} \chi_{t,y}(x) \Phi_t(y, \xi);$$

если $k, t \in \mathbb{N}$ и $Y_{k,t} = \emptyset$, то $H_t^{(k)}$ – функция на $\Omega \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой пары $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ $H_t^{(k)}(x, \xi) = 0$.

С помощью условий (1)–(3), предельного соотношения (5) и условий а) и в) теоремы устанавливаем, что существуют возрастающая последовательность

$\{t_i\} \subset \mathbb{N}$ и функция $f \in \mathcal{F}$ такие, что для любого $x \in \Omega$ функция $f(x, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и для любых $k \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ имеем

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\Omega^{(k)}} H^{(k)}_{t_i}(\cdot, \xi)\varphi\, dx = \int_{\Omega^{(k)}} f(\cdot, \xi)\varphi\, dx. \tag{6}$$

Шаг 4. Используя результат, полученный на предыдущем шаге, вышеопределенные локальные характеристики функционалов J_s и условие б) теоремы, доказываем, что последовательность $\{J_{s_j}\}$ Γ-сходится к функционалу J^f.

Подробное доказательство результатов, сформулированных в рамках изложенных шагов рассматриваемой схемы, будет представлено в ближайшей публикации автора. Отметим, что осуществление этого доказательства следует подходу работы [9] и использует некоторые идеи работы [17]. В связи с этим см. также работы [4] и [12] относительно локальных характеристик интегральных функционалов и соответствующих предельных переходов.

Далее более подробно остановимся на доказательстве коэрцитивности функции f.

Шаг 5. Поскольку последовательность пространств $\widetilde{W}^{1,p}_0(\nu, \Omega_s)$ регулярно сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, существуют последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : \widetilde{W}^{1,p}_0(\nu, \Omega_s) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и постоянная $c > 0$ такие, что:

($*_1$) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;

($*_2$) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in \widetilde{W}^{1,p}_0(\nu, \Omega_s)$ имеем $q_s(l_s u) = u$ п.в. на Ω_s;

($*_3$) для любых $y \in \Omega$ и $t \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\overline{Q_t(y)} \subset \Omega$, существует $s_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s_0$, и $u \in \widetilde{W}^{1,p}_0(\nu, \Omega_s)$ имеем

$$\int_{Q_{t+1}(y)} \nu|\nabla(l_s u)|^p\, dx \leqslant c \int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} \nu|\nabla u|^p\, dx.$$

Пусть $\widetilde{\Omega}$ – объединение всех множеств $\Omega^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. В силу условий а) и б) теоремы $\operatorname{meas}(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}) = 0$.

Через $\mathbb{Q}^n$ обозначим множество всех элементов из $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами, а через E^f – пересечение множеств лебеговых точек функций ν, b и $f(\cdot, \xi)$, $\xi \in \mathbb{Q}^n$. Заметим, что $\operatorname{meas}(\Omega \setminus E^f) = 0$.

Зафиксируем $z \in E^f \cap \widetilde{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{Q}^n$. Очевидно, что существуют $k \in \mathbb{N}$ и $\tau_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $\overline{Q_{\tau_0}(z)} \subset \Omega^{(k)}$.

Зафиксируем $\tau \in \mathbb{N}$, $\tau > \tau_0$, и для любого $t \in \mathbb{N}$ положим $\widetilde{Y}_t = \{y \in Y_t : Q_t(y) \subset Q_\tau(z)\}$. Легко видеть, что для любого $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2\tau$, множество $\widetilde{Y}_t$ непусто.

Дадим следующее определение: если $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 2\tau$, то

$$\lambda_t = \sum_{y\in\widetilde{Y}_t} \Phi_t(y, \xi)\, t^{-n};$$

если $t \in \mathbb{N}$, $t < 2\tau$, то $\lambda_t = 0$.

Используя (1), (3) и (5), устанавливаем, что при достаточно больших $t \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{Q_\tau(z)} H_t^{(k)}(\cdot, \xi)\, dx - \lambda_t \right| \leqslant t^{-1/2}.$$

Отсюда и из (6) вытекает, что

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_{t_i} = \int_{Q_\tau(z)} f(\cdot, \xi)\, dx. \tag{7}$$

Далее, пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, причем $\varphi = 1$ на $Q_\tau(z)$, и пусть w – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ $w(x) = (x - z, \xi)\, \varphi(x)$. Ясно, что $w \in C_0^\infty(\Omega)$.

Зафиксируем $t \in \mathbb{N}$, $t > \max\{t_0, 2\tau\}$, и пусть для любого $y \in \widetilde{Y}_t$ φ_y – функция класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leqslant \varphi_y \leqslant 1$ на Ω, $\varphi_y = 1$ на $Q_{t+1}(y)$, $\varphi_y = 0$ на $\Omega \setminus Q_t(y)$ и $|\nabla \varphi_y| \leqslant c_0\, t^2$ на Ω ($c_0 > 0$ зависит только от n).

Пусть $y \in \widetilde{Y}_t$ и $s \in \mathbb{N}$. Ясно, что существует функция $w_{y,s} \in V_{t,s}(y)$ такая, что

$$\int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, \xi + \nabla w_{y,s})\, dx \leqslant F_{t,s}(y, \xi)\, t^{-n} + t^{-n-1}. \tag{8}$$

Из (3) и (8) следует неравенство

$$c_1 \int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} \nu|\xi + \nabla w_{y,s}|^p\, dx \leqslant F_{t,s}(y, \xi) t^{-n} + t^{-n-1} + \int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} \psi_s\, dx. \tag{9}$$

Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$v_s^{(t)} = q_s w + \sum_{y\in\widetilde{Y}_t} w_{y,s}\varphi_y.$$

Используя (1), (3) и (9), находим, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\|v_s^{(t)}\|_{1,p,\nu,s} \leqslant M, \tag{10}$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от t и s. Кроме того, учитывая включение $w_{y,s} \in V_{t,s}(y)$ (для $y \in \widetilde{Y}_t$ и $s \in \mathbb{N}$), получаем, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega_s} \nu|v_s^{(t)} - q_s w|^p\, dx \leqslant t^{-p}. \tag{11}$$

В силу (10) и утверждения ($*_1$) последовательность $\{l_s v_s^{(t)}\}$ ограничена в $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$, и, следовательно, существуют возрастающая последовательность $\{r_m\} \subset \{s_j\}$ и функция $v^{(t)} \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такие, что

$$l_{r_m} v_{r_m}^{(t)} \to v^{(t)} \text{ слабо в } \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega). \tag{12}$$

Отсюда и из компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ выводим, что $l_{r_m} v_{r_m}^{(t)} \to v^{(t)}$ сильно в $L^p(\nu,\Omega)$. Тогда, учитывая утверждение $(*_2)$ и (11), получаем, что

$$\limsup_{m\to\infty} \int_{\Omega_{r_m}} \nu |v^{(t)} - w|^p \, dx \leqslant t^{-p}.$$

Из этого неравенства и условия (4) вытекает, что

$$\int_{\Omega} b_1 \nu |v^{(t)} - w|^p \, dx \leqslant t^{-p}. \tag{13}$$

Далее, в силу утверждения $(*_3)$ существует $s_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s_0$,

$$\int_{Q_{\tau+1}(z)} \nu |\nabla(l_s v_s^{(t)})|^p \, dx \leqslant c \int_{Q_\tau(z)\cap\Omega_s} \nu |\nabla v_s^{(t)}|^p \, dx.$$

Отсюда, используя (9), получаем, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant s_0$,

$$\int_{Q_{\tau+1}(z)} \nu |\nabla(l_s v_s^{(t)})|^p \, dx \leqslant c\gamma_t \sum_{y\in\widetilde{Y}_t} t^{-n} F_{t,s}(y,\xi) + c\gamma_t t^{-1}\tau^{-n}$$
$$+ c\gamma_t \int_{Q_\tau(z)\cap\Omega_s} \psi_s \, dx + c n^{p+3} \tau^{-n} (t^{-1/2} + t^{-1}\tau)(n_k |\xi|^p + c_0^p),$$

где $n_k = \sup\limits_{x\in\Omega^{(k)}} \nu(x)$ и $\gamma_t = c_1^{-1}(1 - t^{-1/2(p-1)})^{1-p}$.

Поэтому, учитывая (1), (5) и (12), находим, что

$$\int_{Q_{\tau+1}(z)} \nu |\nabla v^{(t)}|^p \, dx \leqslant c\gamma_t \lambda_t + c\gamma_t t^{-1}\tau^{-n} + c\gamma_t \int_{Q_\tau(z)} b \, dx$$
$$+ c n^{p+3} \tau^{-n} (t^{-1/2} + t^{-1}\tau)(n_k |\xi|^p + c_0^p). \tag{14}$$

Заметим еще, что в силу (10) и (12)

$$\|v^{(t)}\|_{1,p,\nu} \leqslant M_1, \tag{15}$$

где M_1 – положительная постоянная, не зависящая от t.

Итак, ввиду (13)–(15) существуют ограниченная в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ последовательность $\{v^{(t)}\}$ и последовательность положительных чисел $\gamma_t \to 1/c_1$ такие, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\Omega} b_1 \nu |v^{(t)} - w|^p \, dx = 0$$

и для любого $t \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (14). Ясно, что $v^{(t)} \to w$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Отсюда и из (14) и (7) выводим, что

$$c_1 \int_{Q_{\tau+1}(z)} \nu |\nabla w|^p \, dx \leqslant c \int_{Q_\tau(z)} f(\cdot,\xi) \, dx + c \int_{Q_\tau(z)} b \, dx.$$

Тогда, учитывая, что $\nabla w = \xi$ на $Q_\tau(z)$, получаем неравенство

$$c_1|\xi|^p\,\tau^n \int_{Q_{\tau+1}(z)} \nu\,dx \leqslant c\tau^n \int_{Q_\tau(z)} f(\cdot,\xi)\,dx + c\tau^n \int_{Q_\tau(z)} b\,dx.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\tau \to +\infty$, заключаем, что для любых $z \in E^f \cap \widetilde{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{Q}^n$

$$c_1\nu(z)|\xi|^p \leqslant cf(z,\xi) + cb(z).$$

Отсюда, учитывая, что для любого $x \in \Omega$ функция $f(x,\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, выводим, что для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$f(x,\xi) \geqslant \frac{c_1}{c}\nu(x)|\xi|^p - b(x).$$

Следовательно, $f \in \mathcal{F}_0$.

Это приводит к заключению теоремы.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Пусть J – функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и последовательность $\{J_s\}$ Г-сходится к функционалу J. Тогда существует функция $f \in \mathcal{F}_0$ такая, что $J = J^f$.*

Этот результат означает, что при условиях теоремы 1 Г-предел последовательности интегральных функционалов J_s (если он существует) есть интегральный функционал, причем его интегрант "наследует" свойства интегрантов f_s исходных функционалов, и, в частности, является коэрцитивным.

Дадим несколько замечаний относительно требований теоремы 1. Условия на весовую функцию ν, при которых вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ компактно, подробно рассмотрены в статье [16]. Регулярная сильная связанность последовательности пространств $\widetilde{W}{}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и условие (4) имеют место, например, в случае специальным образом перфорированных областей. Такие области также рассмотрены в [16]. Условия а)– в) теоремы 1 выполняются, если, например, функции ν и b ограничены в Ω или непрерывны в Ω за исключением замкнутого множества меры нуль.

Наконец, отметим, что в случае интегральных функционалов с невырожденными интегрантами и перфорированных областей, дополнения к которым удовлетворяют некоторому условию регулярного измельчения, коэрцитивность интегрантов соответствующих Г-пределов была установлена в [18].

Автор благодарит А.А. Ковалевского за внимание к работе и полезные рекомендации.

1. *De Giorgi E., Franzoni T* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat.e Natur. – 1975. – **58**, № 6. – P.842–850.
2. *Dal Maso G.* An introduction to Γ-convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. – 337p.
3. *Жиков В.В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционала вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, №5. – С.961-998.
4. *Жиков В.В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. – 1992. – **183**, №8. – С.47-84.

5. *Ковалевский А.А.* О связанности подмножеств соболевских пространств и Г-сходимости функционалов с переменной областью определения // Нелинейн. граничн. задачи. – 1989. – Вып.1. – С.48-54.
6. *Ковалевский А.А.* О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Современный анализ и его приложения: Сб. научн. тр. Киев: Наук. думка. – 1989. – С.62-70.
7. *Ковалевский А.А.* Условия Г-сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР.– 1991. – №4. – С.5-8.
8. *Ковалевский А.А.* О необходимых и достаточных условиях Г-сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейн. граничн. задачи. – 1992. – Вып.4. – С.29-39.
9. *Ковалевский А.А.* О Г-сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, №5. – С.614-628.
10. *Amaziane B., Goncharenko M., Pankratov L.* Γ_D-convergence for a class of quasilinear elliptic equations in thin structures // Math. Methods Appl. Sci. – 2005. – **28**, №15. – P.1847-1865.
11. *Ковалевский А.А., Рудакова О.А.* О Г – компактности интегральных функционалов с вырожденными интегрантами // Нелинейн. граничн. задачи. – 2005. – Вып. 15. – С.149-153.
12. *Хруслов Е.Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, №4. – С.604-621.
13. *Берлянд Л.В., Чудинович И.Ю.* Усреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами // ДАН СССР. – 1983. – **272**, №4. – С.777-780.
14. *Ковалевский А.А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Известия РАН. Сер. мат. – 1994. – **58**, №3. – С.3-35.
15. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наук. думка, 2005. – 550с.
16. *Ковалевский А.А., Рудакова О.А.* О сильной связанности весовых пространств Соболева и компактности последовательностей их элементов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – **12**. – С.85-99.
17. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On the convergence of solutions of degenerate nonlinear elliptic high order equations // Nonlinear Analysis, Theory Methods Appl. – 2002. – **49**. – P.335-360.
18. *Ковалевский А.А.* Вопросы сходимости и усреднения для интегральных функционалов, связанных с областями сложной структуры: Дис. ... канд. физ.-мат.наук. – Донецк, 1985. – 128с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
rudakova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 12.12.07