УДК 517.9

©2006. **А.А. Ковалевский, О.А. Рудакова**

О СИЛЬНОЙ СВЯЗАННОСТИ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА И КОМПАКТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изучается понятие сильной связанности последовательности весовых пространств Соболева. Устанавливаются условия на весовую функцию, которые вместе с сильной связанностью рассматриваемых пространств обеспечивают определенную компактность последовательностей функций с различными областями определения. Выясняются также условия на весовую функцию, гарантирующие для некоторого типа перфорированных областей сильную связанность соответствующих соболевских пространств.

1. Введение. Понятие сильной связанности пространств Соболева (или, в другой терминологии, соответствующих им n-мерных областей) играет важную роль в вопросах усреднения краевых и вариационных задач (см. прежде всего работу Е.Я. Хруслова [1], где это понятие было введено, а также [2]–[7]). Сильная связанность пространств, используемых при исследовании сходимости решений краевых и вариационных задач в переменных (например, густоперфорированных) областях, позволяет перейти от последовательности решений, каждое из которых содержится в "своем"пространстве, к ограниченной последовательности в некотором едином пространстве. Это является первым шагом к выделению некоторого предельного элемента и последующему доказательству того, что этот элемент есть решение соответствующей усредненной задачи.

В настоящей работе понятие сильной связанности изучается для последовательности весовых пространств Соболева. Устанавливаются условия на весовую функцию, которые вместе с сильной связанностью рассматриваемых пространств обеспечивают определенную компактность последовательностей функций с различными областями определения. Кроме того, выясняются условия на весовую функцию, гарантирующие для некоторого типа перфорированных областей сильную связанность соответствующих соболевских пространств.

2. Функциональные пространства. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $p \in (1, n)$.

Пусть ν — неотрицательная функция на Ω, причем $\nu > 0$ почти всюду в Ω,

$$\nu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{1}$$

Через $L^p(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω. $L^p(\nu, \Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega)} = \left(\int_\Omega \nu|u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Государственного Фонда Фундаментальных Исследований Украины (проект № 01.07/00252)

Заметим, что в силу неравенства Юнга и второго из включений (1) имеем

$$L^p(\nu,\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Через $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu,\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu,\Omega)$. $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \left(\int_\Omega \nu|u|^p\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nu|D_i u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Полнота пространства $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ устанавливается с использованием второго из включений (1). Рефлексивность этого пространства есть следствие его равномерной выпуклости, что доказывается с помощью неравенств Кларксона (относительно этих неравенств см., например, [8]).

В силу первого из включений (1) имеем

$$C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\nu,\Omega).$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega)$. $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ есть рефлексивное банахово пространство с индуцированной нормой пространства $W^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Рассмотрим некоторые условия компактности вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$.

Предложение 1 . Пусть $t \geqslant 1/(p-1)$, $t > n/p$, $t_1 > nt/(tp-n)$, и пусть имеют место следующие включения:

$$\frac{1}{\nu} \in L^t(\Omega), \quad \nu \in L^{t_1}(\Omega). \tag{2}$$

Тогда вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ компактно.

Доказательство. Положим $q = tp/(t+1)$. Поскольку $t \geqslant 1/(p-1)$, имеем $q \geqslant 1$.

Пусть $u \in W^{1,p}(\nu,\Omega)$. Очевидно, что

$$|u|^q = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{t/(t+1)} \nu^{t/(t+1)}\,|u|^{tp/(t+1)} \quad \text{п.в. на } \Omega. \tag{3}$$

Отсюда, используя неравенство Юнга с показателями $t+1$ и $(t+1)/t$, получаем

$$|u|^q \leqslant \left(\frac{1}{\nu}\right)^t + \nu|u|^p \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Учитывая это, а также первое из включений (2), заключаем, что $u \in L^q(\Omega)$. Аналогично устанавливаем, что для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ справедливо включение $D_i u \in L^q(\Omega)$. Следовательно, $u \in W^{1,q}(\Omega)$.

Таким образом, $W^{1,p}(\nu,\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$.

Далее, положим

$$C = (n+1)^{1/q}\left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{\nu}\right)^t dx\right\}^{1/q(t+1)}.$$

Пусть $u \in W^{1,p}(\nu,\Omega)$. Используя (3) и неравенство Гельдера, получаем

$$\int_\Omega |u|^q\,dx \leqslant \left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{\nu}\right)^t dx\right\}^{1/(t+1)} \left\{\int_\Omega \nu|u|^p\,dx\right\}^{t/(t+1)}.$$

Аналогично, для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ имеем

$$\int_\Omega |D_i u|^q\,dx \leqslant \left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{\nu}\right)^t dx\right\}^{1/(t+1)} \left\{\int_\Omega \nu|D_i u|^p\,dx\right\}^{t/(t+1)}.$$

Следовательно,

$$\|u\|^q_{W^{1,q}(\Omega)} = \int_\Omega |u|^q\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |D_i u|^q\,dx \leqslant (n+1)\left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{\nu}\right)^t dx\right\}^{1/(t+1)} \|u\|^q_{1,p,\nu}.$$

Отсюда выводим, что для любой функции $u \in W^{1,p}(\nu,\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{1,p,\nu}. \tag{4}$$

Полученный результат позволяет заключить, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega). \tag{5}$$

Положим

$$q^* = \frac{nq}{n-q}, \quad r = \frac{t_1 p}{t_1 - 1}.$$

Поскольку $t > n/p$ и $t_1 > nt/(tp-n)$, имеем $p < r < q^*$. Как известно (см., например, [9]), $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega)$ и

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega) \ \text{ компактно вложено в } \ L^r(\Omega). \tag{6}$$

Пусть теперь $u_j \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Тогда в силу (4) и (5) $u_j \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$. Отсюда и из (6) вытекает, что

$$u_j \to u \quad \text{сильно в } \ L^r(\Omega). \tag{7}$$

Учитывая второе из включений (2) и используя неравенство Гельдера с показателями t_1 и $t_1/(t_1-1)$, находим, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \nu|u_j - u|^p\,dx \leqslant \left(\int_\Omega \nu^{t_1}\,dx\right)^{1/t_1} \left(\int_\Omega |u_j - u|^r\,dx\right)^{(t_1-1)/t_1}.$$

Отсюда и из (7) следует, что $u_j \to u$ сильно в $L^p(\nu,\Omega)$. Значит, вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ компактно. Предложение доказано. □

Следствие 2. Пусть $p < n/(n-1)$, функция ν ограничена на Ω и $(1/\nu)^{1/(p-1)} \in L^1(\Omega)$. Тогда вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ компактно.

Доказательство. Положим $t = 1/(p-1)$. Поскольку $p < n/(n-1)$, имеем $t > n/p$. Зафиксируем произвольное число $t_1 > nt/(tp-n)$. Ясно, что $1/\nu \in L^t(\Omega)$ и $\nu \in L^{t_1}(\Omega)$. Таким образом, выполнены все условия предложения 1, из которого и выводим требуемый результат. Следствие доказано. □

Заметим, что при условиях вида (2) вложения весовых пространств Соболева в невесовые и весовые пространства Лебега рассматривались, например, в [10]–[14].

Далее, напомним (см. например,[15]), что класс Макенхаупта A_p есть множество всех функций $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(i) w неотрицательна на $\mathbb{R}^n$ и $w > 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$;

(ii) $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\left(\dfrac{1}{w}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$;

(iii) существует $c_{p,w} > 0$ такое, что для любого замкнутого шара $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\left(\int_B w\,dx\right)\left(\int_B \left(\frac{1}{w}\right)^{1/(p-1)} dx\right)^{p-1} \leqslant c_{p,w}(\mathrm{meas}B)^p.$$

Предложение 3 . Пусть функция ν есть сужение на Ω некоторой функции w из A_p. Тогда вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ компактно.

Доказательство. В силу условия предложения имеем $\nu \in L^1(\Omega)$ и $(1/\nu)^{1/(p-1)} \in L^1(\Omega)$.

Пусть $v \in L^p(\nu,\Omega)$. Ясно, что

$$|v| = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/p} \nu^{1/p}\,|v| \quad \text{п.в. на } \ \Omega. \tag{8}$$

Отсюда, используя неравенство Юнга с показателями $p/(p-1)$ и p, получаем

$$|v| \leqslant \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} + \nu|v|^p \quad \text{п.в. на } \ \Omega.$$

Следовательно, $v \in L^1(\Omega)$. Заметим еще, что в силу (8) и неравенства Гельдера

$$\int_\Omega |v|\,dx \leqslant \left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} dx\right\}^{(p-1)/p} \left\{\int_\Omega \nu\,|v|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Положим

$$C = (n+1)\left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} dx\right\}^{(p-1)/p}.$$

Вышеприведенные рассуждения для произвольной функции v из $L^p(\nu,\Omega)$ позволяют заключить, что $W^{1,p}(\nu,\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ и для любой функции $u \in W^{1,p}(\nu,\Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{1,p,\nu}. \tag{9}$$

Отсюда вытекает, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega). \tag{10}$$

Кроме того, в силу условия предложения и теоремы вложения для A_p-весов (см. [15, с.304]) существуют $p_1 > p$ и $C_1 > 0$ такие, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ имеем

$$\int_\Omega \nu|u|^{p_1}\,dx \leqslant C_1\Big(\int_\Omega \nu|\nabla u|^p\,dx\Big)^{p_1/p}. \tag{11}$$

Пусть теперь $u_j \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Отсюда и из (9) и (10) следует, что $u_j \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$. Тогда, как известно,

$$u_j \to u \ \text{ сильно в } \ L^1(\Omega). \tag{12}$$

Кроме того, ввиду (11) и ограниченности последовательности $\{u_j\}$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ существует $C_2 > 0$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \nu\,|u_j|^{p_1}\,dx \leqslant C_2. \tag{13}$$

Положим

$$C_3 = C_2^{p/p_1} + \Big(\int_\Omega \nu\,|u|^{p_1}\,dx\Big)^{p/p_1}.$$

Предположим, что последовательность $\{u_j\}$ не сходится сильно к u в $L^p(\nu,\Omega)$. Тогда, учитывая (12), получаем: существуют $\tau > 0$ и возрастающая последовательность $\{j_t\} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall\, t \in \mathbb{N} \quad \|u_{j_t} - u\|_{L^p(\nu,\Omega)} \geqslant \tau, \tag{14}$$

$$u_{j_t} \to u \ \text{ п.в. на } \ \Omega. \tag{15}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\nu \in L^1(\Omega)$, в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, удовлетворяющего неравенству $\operatorname{meas} G \leqslant \delta$, имеем

$$\int_G \nu\,dx \leqslant \Big(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}C_3}\Big)^{p_1/(p_1-p)}. \tag{16}$$

Далее, ввиду (15) и теоремы Егорова существует измеримое множество $\Omega' \subset \Omega$ такое, что

$$\operatorname{meas}(\Omega \setminus \Omega') \leqslant \delta, \tag{17}$$

$$u_{j_t} \to u \ \text{ равномерно на } \ \Omega'. \tag{18}$$

Из (16) и (17) вытекает, что

$$\Big(\int_{\Omega\setminus\Omega'} \nu\,dx\Big)^{(p_1-p)/p_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{p+1}C_3}, \tag{19}$$

а в силу (18) существует $t_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant t_0$, и $x \in \Omega'$

$$|u_{j_t}(x) - u(x)| \leqslant \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega \nu\,dx\Big)^{-1/p}. \tag{20}$$

Пусть $t \in \mathbb{N}$, $\;t \geqslant t_0$. Ввиду (20) имеем

$$\int_{\Omega'} \nu\, |u_{j_t} - u|^p\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Тогда

$$\int_{\Omega} \nu\, |u_{j_t} - u|^p\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\Omega\setminus\Omega'} \nu\, |u_{j_t} - u|^p\, dx. \tag{21}$$

Используя неравенство Гельдера, (13) и (19), устанавливаем, что

$$\int_{\Omega\setminus\Omega'} \nu\, |u_{j_t}|^p\, dx = \int_{\Omega\setminus\Omega'} \nu^{(p_1-p)/p_1} \nu^{p/p_1} |u_{j_t}|^p\, dx$$
$$\leqslant \left(\int_{\Omega\setminus\Omega'} \nu\, dx\right)^{(p_1-p)/p_1} \left(\int_{\Omega} \nu\, |u_{j_t}|^{p_1}\, dx\right)^{p/p_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{p+1}C_3} C_2^{p/p_1}. \tag{22}$$

Аналогично,

$$\int_{\Omega\setminus\Omega'} \nu\, |u|^p\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{p+1}C_3} \left(\int_{\Omega} \nu\, |u|^{p_1}\, dx\right)^{p/p_1}. \tag{23}$$

Из неравенств (21)–(23) выводим, что

$$\int_{\Omega} \nu\, |u_{j_t} - u|^p\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\|u_{j_t} - u\|_{L^p(\nu,\Omega)} \to 0$, что противоречит (14). Полученное противоречие позволяет заключить, что $u_j \to u$ сильно в $L^p(\nu,\Omega)$. Значит, вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ в $L^p(\nu,\Omega)$ компактно. Предложение доказано. □

Далее, пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω.

Аналогично пространствам, введенным выше, определим функциональные пространства, соответствующие областям Ω_s.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Через $L^p(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех измеримых функций $u : \Omega_s \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\nu|u|^p$ суммируема на Ω_s. $L^p(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} = \left(\int_{\Omega_s} \nu |u|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

В силу второго из включений (1) имеем

$$L^p(\nu,\Omega_s) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_s).$$

Через $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu,\Omega_s)$ таких, что для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu,\Omega_s)$. $W^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{1,p,\nu,s} = \left(\int_{\Omega_s} \nu |u|^p\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_s} \nu |D_i u|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Через $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ обозначим множество всех сужений на Ω_s функций из $C_0^\infty(\Omega)$. В силу первого из включений (1) имеем

$$\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s) \subset W^{1,p}(\nu, \Omega_s).$$

Через $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ обозначим замыкание множества $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ в $W^{1,p}(\nu, \Omega_s)$.

3. Условия компактности последовательностей функций с различными областями определения. Заметим, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $u|_{\Omega_s} \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$.

Определение 4 . Если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ такое, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ $\quad q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Определение 5 . Будем говорить, что последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такая, что:

(i) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;

(ii) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ имеем $\; q_s(l_s u) = u\;$ п.в. на Ω_s.

Предложение 6 . Пусть вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $L^p(\nu, \Omega)$ компактно и последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\quad u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, причем последовательность норм $\|u_s\|_{1,p,\nu,s}$ ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\nu, \Omega_{s_j})} = 0.$$

Доказательство. Поскольку последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii) из определения 5. Ввиду условия (ii) имеем

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad q_s(l_s u_s) = u_s \;\text{ п.в. на }\; \Omega_s. \tag{24}$$

Пусть M_1 и M_2 — мажоранты для последовательностей норм $\|l_s\|$ и $\|u_s\|_{1,p,\nu,s}$ соответственно. Имеем $\{l_s u_s\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\|l_s u_s\|_{1,p,\nu} \leqslant \|l_s\| \|u_s\|_{1,p,\nu,s} \leqslant M_1 M_2.$$

Значит, последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Тогда в силу рефлексивности пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такие, что $l_{s_j} u_{s_j} \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$. Отсюда, учитывая, что вложение $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ в $L^p(\nu, \Omega)$ компактно, получаем

$$\lim_{j\to\infty} \|l_{s_j} u_{s_j} - u\|_{L^p(\nu, \Omega)} = 0. \tag{25}$$

Но в силу (24) и определения отображений q_s для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|u_s - q_s u\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} \leqslant \|l_s u_s - u\|_{L^p(\nu,\Omega)}.$$

Отсюда и из (25) выводим требуемый результат. Предложение доказано. □

4. Сильная связанность пространств в специальном случае. Для любых $y \in \mathbb{R}^n$ и $\rho > 0$ через $B(y,\rho)$ и $\overline{B}(y,\rho)$ обозначим соответственно открытый и замкнутый шары в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке y и радиусом ρ.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ J_s — непустое конечное множество, и пусть для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ имеем $x_s^j \in \Omega$ и $r_s^j > 0$.

Предположим, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \Omega \setminus \Omega_s = \bigcup_{j \in J_s} \overline{B}(x_s^j, r_s^j), \tag{26}$$

$$\lim_{s\to\infty} \max_{j \in J_s} r_s^j = 0. \tag{27}$$

Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ через ρ_s^j обозначим расстояние от $\overline{B}(x_s^j, r_s^j)$ до множества $\bigcup\limits_{J_s \ni i \neq j} \overline{B}(x_s^i, r_s^i) \bigcup \partial\Omega$.

Предположим, что существует $\alpha > 1$ такое, что

$$\text{для любых} \quad s \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ j \in J_s \qquad 2(\alpha - 1) r_s^j \leqslant \rho_s^j. \tag{28}$$

В силу (26) и (28) имеем:

$$\text{если} \quad s \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ j \in J_s, \ \text{ то } \ \overline{B}(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \subset \Omega; \tag{29}$$

$$\text{если} \quad s \in \mathbb{N} \ \text{ и } \ j, i \in J_s, \ \ j \neq i, \ \text{ то } \ B(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \cap B(x_s^i, \alpha\, r_s^i) = \emptyset. \tag{30}$$

Лемма 7 . Пусть $s \in \mathbb{N}$ и функция ν ограничена на множестве $\bigcup\limits_{j \in J_s} B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$. Пусть u — функция на Ω такая, что

$$u|_{\Omega_s} \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s), \tag{31}$$

$$\forall j \in J_s \quad u|_{B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)} \in W^{1,p}(B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)). \tag{32}$$

Тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$.

Доказательство. Ясно, что существует $M > 0$ такое, что

$$\text{для любых} \quad j \in J_s \ \text{ и } \ x \in B(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \qquad \nu(x) \leqslant M. \tag{33}$$

В силу (31) существует функция $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\forall\, x \in \Omega_s \qquad u(x) = \tilde{u}(x). \tag{34}$$

Очевидно, что существует $M_1 > 0$ такое, что

$$\forall\, x \in \Omega \qquad |\tilde{u}(x)| + \sum_{i=1}^n |D_i \tilde{u}(x)| \leqslant M_1. \tag{35}$$

Покажем, что $u \in L^p(\nu, \Omega)$. В силу (31) и (32) функция u измерима на Ω. Пусть $\chi : \Omega \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества $\operatorname{supp} \tilde{u}$. В силу первого из включений (1) функция $\nu\,\chi$ суммируема на Ω. Используя (34) и (35), получаем, что $\nu\,|u|^p \leqslant M_1^p \nu\,\chi$ на Ω_s. Следовательно, сужение функции $\nu\,|u|^p$ на Ω_s есть суммируемая функция. Далее, если $j \in J_s$ и $x \in \overline{B}(x_s^j, r_s^j)$, то в силу (33) имеем $(\nu\,|u|^p)(x) \leqslant M|u|^p(x)$. Отсюда и из (32) вытекает, что сужения функции $\nu\,|u|^p$ на шары $\overline{B}(x_s^j, r_s^j)$, $j \in J_s$, суммируемы. Теперь, учитывая (26), заключаем, что функция $\nu\,|u|^p$ суммируема на Ω. Следовательно, $u \in L^p(\nu, \Omega)$.

Далее, в силу (29) и (32) для любого $j \in J_s$ существует функция $u_s^j \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ такая, что
$$u_s^j = u \quad \text{на} \quad B(x_s^j, \alpha\, r_s^j). \tag{36}$$
Ясно, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ существует функция $v_{s,k}^j \in C_0^1(\Omega)$ такая, что
$$\|v_{s,k}^j - u_s^j\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \frac{1}{k}. \tag{37}$$

Пусть $\chi_s : \Omega \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества $\Omega \setminus \bigcup\limits_{j \in J_s} B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$, и пусть для любого $j \in J_s$ $\chi_s^j : \Omega \to \mathbb{R}$ — характеристическая функция множества $B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$, а ψ_s^j — функция из $C^1(\Omega)$ такая, что $0 \leqslant \psi_s^j \leqslant 1$ на Ω, $\psi_s^j = 0$ на $B(x_s^j, r_s^j)$, $\psi_s^j = 1$ на $\Omega \setminus B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$ и $|\nabla \psi_s^j| \leqslant c_0 / r_s^j$ на Ω (c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и α).

Положим для любого $k \in \mathbb{N}$
$$w_k = \tilde{u}\,\chi_s + \sum_{j \in J_s} [\psi_s^j \tilde{u} + (1 - \psi_s^j) v_{s,k}^j]\,\chi_s^j. \tag{38}$$

Имеем
$$\{w_k\} \subset C_0^1(\Omega). \tag{39}$$
Кроме того, для любых $k \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$
$$D_i w_k = \chi_s D_i \tilde{u} + \sum_{j \in J_s} [\psi_s^j D_i \tilde{u} + (1 - \psi_s^j) D_i v_{s,k}^j + (\tilde{u} - v_{s,k}^j) D_i \psi_s^j]\,\chi_s^j. \tag{40}$$

Покажем, что
$$w_k \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\nu, \Omega). \tag{41}$$
Действительно, пусть $k \in \mathbb{N}$. В силу (26), (34) и (38) имеем
$$w_k = u \quad \text{на} \quad \Omega \setminus \bigcup_{j \in J_s} B(x_s^j, \alpha\, r_s^j).$$

Тогда, учитывая (29) и (30), получаем
$$\int_\Omega \nu |w_k - u|^p\, dx = \sum_{j \in J_s} \int_{B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)} \nu |w_k - u|^p\, dx. \tag{42}$$

Пусть $j \in J_s$ и $x \in B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$. В силу (38) имеем
$$w_k(x) = \psi_s^j(x) \tilde{u}(x) + (1 - \psi_s^j(x)) v_{s,k}^j(x). \tag{43}$$

Предположим, что $x \in \overline{B}(x_s^j, r_s^j)$. Тогда $\psi_s^j(x) = 0$. Отсюда и из (43) вытекает, что $w_k(x) = v_{s,k}^j(x)$. Кроме того, ввиду (36) $u_s^j(x) = u(x)$. Следовательно,

$$|w_k(x) - u(x)| = |v_{s,k}^j(x) - u_s^j(x)|.$$

Пусть теперь $x \notin \overline{B}(x_s^j, r_s^j)$. Тогда $x \in \Omega_s$ и в силу (34) имеем $u(x) = \tilde{u}(x)$. Отсюда и из (36) и (43) вытекает, что

$$|w_k(x) - u(x)| \leqslant |v_{s,k}^j(x) - u_s^j(x)|.$$

Теперь можно заключить, что

$$|w_k - u| \leqslant |v_{s,k}^j - u_s^j| \quad \text{на} \quad B(x_s^j, \alpha\, r_s^j).$$

Тогда, учитывая (33), получаем

$$\int_{B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)} \nu\, |w_k - u|^p\, dx \leqslant M \int_{B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)} |v_{s,k}^j - u_s^j|^p\, dx.$$

Отсюда и из (37) и (42) выводим, что

$$\int_\Omega \nu |w_k - u|^p\, dx \leqslant \frac{M|J_s|}{k^p}, \tag{44}$$

где $|J_s|$ — число элементов множества J_s.

Из (44) следует, что утверждение (41) справедливо.

Далее, пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Положим

$$z_i = \chi_s D_i \tilde{u} + \sum_{j \in J_s} \chi_s^j D_i u_s^j. \tag{45}$$

Используя (33), (35) и принадлежность функций $u_s^j,\ j \in J_s$ пространству $W^{1,p}(\Omega)$, устанавливаем, что функция $\nu|z_i|^p$ суммируема на Ω. Значит, $z_i \in L^p(\nu, \Omega)$.

Покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega \nu |D_i w_k - z_i|^p\, dx = 0. \tag{46}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. В силу (29), (30), (40) и (45) имеем

$$\int_\Omega \nu |D_i w_k - z_i|^p\, dx = \sum_{j \in J_s} \int_{B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)} \nu |D_i w_k - z_i|^p\, dx. \tag{47}$$

Из (40) и (45) следует, что для любых $j \in J_s$ и $x \in B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$

$$\begin{aligned} D_i w_k(x) - z_i(x) &= \psi_s^j(x)[D_i \tilde{u}(x) - D_i u_s^j(x)] \\ &+ (1 - \psi_s^j(x))[D_i v_{s,k}^j(x) - D_i u_s^j(x)] + [\tilde{u}(x) - v_{s,k}^j(x)] D_i \psi_s^j(x). \end{aligned} \tag{48}$$

Пусть $j \in J_s$. Имеем $\psi_s^j = 0$ на $\overline{B}(x_s^j, r_s^j)$ и $D_i \psi_s^j = 0$ на $\overline{B}(x_s^j, r_s^j)$. Отсюда и из (48) и (33) вытекает неравенство

$$\int_{\overline{B}(x_s^j, r_s^j)} \nu |D_i w_k - z_i|^p\, dx \leqslant M \int_{\overline{B}(x_s^j, r_s^j)} |D_i v_{s,k}^j - D_i u_s^j|^p\, dx. \tag{49}$$

В силу (34) и (36) имеем

$$\tilde{u} = u_s^j \quad \text{на} \quad B(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \setminus \overline{B}(x_s^j, r_s^j) \tag{50}$$

и, следовательно,

$$D_i\tilde{u} = D_i u_s^j \quad \text{п.в. на} \quad B(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \setminus \overline{B}(x_s^j, r_s^j). \tag{51}$$

Из (48), (50), (51) и свойств функции ψ_s^j вытекает, что

$$|D_i w_k - z_i| \leqslant |D_i v_{s,k}^j - D_i u_s^j| + (c_0/r_s^j)|v_{s,k}^j - u_s^j| \ \text{ п.в. на } \ B(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \setminus \overline{B}(x_s^j, r_s^j).$$

Отсюда, учитывая (33), выводим, что

$$\int_{B(x_s^j,\alpha\, r_s^j)\setminus\overline{B}(x_s^j,r_s^j)} \nu|D_i w_k - z_i|^p\, dx \leqslant 2^p\, M \int_{B(x_s^j,\alpha\, r_s^j)\setminus\overline{B}(x_s^j,r_s^j)} |D_i v_{s,k}^j - D_i u_s^j|^p\, dx$$
$$+ (2\, c_0/r_s^j)^p\, M \int_{B(x_s^j,\alpha\, r_s^j)} |v_{s,k}^j - u_s^j|^p\, dx. \tag{52}$$

Из (37), (47), (49) и (52) вытекает, что

$$\int_\Omega \nu|D_i w_k - z_i|^p\, dx \leqslant \frac{2^p M}{k^p}[1 + (c_0/\min_{j\in J_s} r_s^j)^p]\, |J_s|$$

и, следовательно, (46) справедливо.

Используя (41), (46) и второе из включений (1), стандартным образом устанавливаем, что существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u = z_i$ п.в. на Ω.

Теперь в силу принадлежности функций u и z_i, $i = 1,\ldots,n$, пространству $L^p(\nu,\Omega)$ и (41), (46) имеем $u \in W^{1,p}(\nu,\Omega)$ и $\|w_k - u\|_{1,p,\nu} \to 0$. Отсюда, учитывая (39) и включение $C_0^1(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$, выводим, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Лемма доказана. □

Предложение 8. Пусть существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\text{для любых} \ \ s \in \mathbb{N},\ j \in J_s \ \text{ и } \ x, y \in B(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \quad \text{имеем} \quad \nu(x) \leqslant \sigma\nu(y). \tag{53}$$

Тогда последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Доказательство. Положим $K = B(0,\alpha)\setminus\overline{B}(0,1)$. В силу изложенного в доказательстве предложения 2.2 из [6] существуют линейный непрерывный оператор $l : W^{1,p}(K) \to W^{1,p}(B(0,\alpha))$ и $\alpha_1 > 0$ такие, что для любой функции $u \in W^{1,p}(K)$ имеем

$$(lu)|_K = u, \tag{54}$$

$$\|\nabla(lu)\|_{L^p(B(0,\alpha))} \leqslant \alpha_1 \|\nabla u\|_{L^p(K)}. \tag{55}$$

Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ положим

$$K_s^j = B(x_s^j, \alpha\, r_s^j) \setminus \overline{B}(x_s^j, r_s^j).$$

Очевидно, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ имеем $K_s^j \subset \Omega_s$. Заметим еще, что если $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$ и $x \in K$, то $x_s^j + r_s^j\, x \in K_s^j$. Если же $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$ и $x \in B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$, то $\dfrac{1}{r_s^j}(x - x_s^j) \in B(0,\alpha)$.

Пусть для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ ν_s^j — функция на $B(0,\alpha)$ такая, что для любого $x \in B(0,\alpha)$
$$\nu_s^j(x) = \nu(x_s^j + r_s^j x).$$
Из условия (53) вытекает, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ функция ν_s^j ограничена на $B(0,\alpha)$.

Введем следующие вспомогательные операторы:

(i) если $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$, то $f_s^j : \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s) \to W^{1,p}(K)$, причем для любых $v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ и $x \in K$ имеем
$$(f_s^j v)(x) = v(x_s^j + r_s^j x);$$

(ii) если $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$, то $g_s^j : W^{1,p}(B(0,\alpha)) \to W^{1,p}(B(x_s^j, \alpha\, r_s^j))$, причем для любых $v \in W^{1,p}(B(0,\alpha))$ и $x \in B(x_s^j, \alpha\, r_s^j)$ имеем
$$(g_s^j v)(x) = v\left(\frac{1}{r_s^j}(x - x_s^j)\right).$$

Учитывая условие (53) и используя формулу замены переменных в интеграле Лебега, устанавливаем, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$, $v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ и $w \in W^{1,p}(B(0,\alpha))$ имеют место равенства
$$\int_K \nu_s^j\, |f_s^j v|^p\, dx = (r_s^j)^{-n} \int_{K_s^j} \nu\, |v|^p\, dx, \tag{56}$$
$$\int_K \nu_s^j\, |D_i(f_s^j v)|^p\, dx = (r_s^j)^{p-n} \int_{K_s^j} \nu\, |D_i v|^p\, dx, \quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{57}$$
$$\int_{B(x_s^j,\alpha\, r_s^j)} \nu\, |g_s^j w|^p\, dx = (r_s^j)^n \int_{B(0,\alpha)} \nu_s^j |w|^p\, dx, \tag{58}$$
$$\int_{B(x_s^j,\alpha\, r_s^j)} \nu\, |D_i(g_s^j w)|^p\, dx = (r_s^j)^{n-p} \int_{B(0,\alpha)} \nu_s^j |D_i w|^p\, dx, \quad i = 1,\dots,n. \tag{59}$$
Для любых $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$ положим
$$l_s^j = g_s^j \circ l \circ f_s^j.$$

Используя линейность и непрерывность оператора l и (53)–(59), устанавливаем следующее: если $s \in \mathbb{N}$ и $j \in J_s$, то
$$\text{оператор} \quad l_s^j \quad \text{линеен;} \tag{60}$$
$$\text{для любых} \quad v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s) \quad \text{и} \quad x \in K_s^j \quad \text{имеем} \quad (l_s^j v)(x) = v(x); \tag{61}$$
для любой функции $v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ справедливы неравенства
$$\int_{B(x_s^j,\alpha\, r_s^j)} \nu |l_s^j v|^p\, dx \leqslant \sigma^2 \|l\|^p \left(\int_{K_s^j} \nu |v|^p\, dx + (r_s^j)^p \sum_{i=1}^n \int_{K_s^j} \nu |D_i v|^p\, dx\right), \tag{62}$$
$$\sum_{i=1}^n \int_{B(x_s^j,\alpha\, r_s^j)} \nu |D_i(l_s^j v)|^p\, dx \leqslant n\sigma^2 (\alpha_1 n)^p \sum_{i=1}^n \int_{K_s^j} \nu |D_i v|^p\, dx. \tag{63}$$

Далее, в силу (29) существует $\alpha_2 \geqslant 1$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \max_{j \in J_s} r_s^j \leqslant \alpha_2. \tag{64}$$

Положим

$$M = (1+\sigma)^2(1 + \alpha_1 n^2 + \alpha_2 \|l\|).$$

Зафиксируем произвольное $s \in \mathbb{N}$. Для любой функции $v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ определим функцию $\bar{v} : \Omega \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } x \in \Omega_s, \\ (l_s^j v)(x), & \text{если } j \in J_s \text{ и } x \in \overline{B}(x_s^j, r_s^j). \end{cases}$$

В силу (53), (61)–(64) и леммы 7 имеем: если $v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$, то $\bar{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ и $\|\bar{v}\|_{1,p,\nu} \leqslant M\|v\|_{1,p,\nu,s}$. Пусть $\bar{l}_s$ — оператор из $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такой, что для любой функции $v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ $\bar{l}_s v = \bar{v}$. Ясно, что для любой функции $v \in \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ имеем

$$\|\bar{l}_s v\|_{1,p,\nu} \leqslant M\|v\|_{1,p,\nu,s}, \tag{65}$$

$$q_s(\bar{l}_s v) = v. \tag{66}$$

Кроме того, в силу (60)

$$\text{оператор} \quad \bar{l}_s \quad \text{линеен.} \tag{67}$$

Далее, пусть для любой функции $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ $G(v)$ — множество всех последовательностей $\{v_j\} \subset \widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ таких, что $\|v_j - v\|_{1,p,\nu,s} \to 0$. Используя (65) и (67), устанавливаем: если $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$, то существует функция $\tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такая, что для любой последовательности $\{v_j\} \in G(v)$ имеем $\|\bar{l}_s v_j - \tilde{v}\|_{1,p,\nu} \to 0$. Следовательно, существует оператор $l_s : \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такой, что для любых $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$ и $\{v_j\} \in G(v)$ имеем

$$\|\bar{l}_s v_j - l_s v\|_{1,p,\nu} \to 0. \tag{68}$$

В силу (65), (67) и (68) оператор l_s линеен и непрерывен, причем $\|l_s\| \leqslant M$. Заметим, наконец, что для любой функции $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$

$$q_s(l_s v) = v \quad \text{п.в. на} \quad \Omega_s. \tag{69}$$

Действительно, пусть $v \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu, \Omega_s)$. Возьмем $\{v_j\} \in G(v)$. Имеем

$$\|v_j - v\|_{1,p,\nu,s} \to 0 \tag{70}$$

и в силу определения оператора l_s

$$\|\bar{l}_s v_j - l_s v\|_{1,p,\nu} \to 0.$$

Тогда

$$\|q_s(\bar{l}_s v_j) - q_s(l_s v)\|_{L^p(\nu, \Omega_s)} \to 0. \tag{71}$$

Но в силу (66) для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|q_s(l_s v) - v\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} \leqslant \|q_s(\bar{l}_s v_j) - q_s(l_s v)\|_{L^p(\nu,\Omega_s)} + \|v_j - v\|_{1,p,\nu,s}.$$

Отсюда и из (70) и (71) выводим (69).

Теперь можно заключить, что последовательность пространств $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu,\Omega_s)$ сильно связана с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Предложение доказано. □

Заметим, что при условиях (26)–(28) сильная связанность последовательности пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$ была установлена в [6] (см. также [1], где был дан использованный в [6] и частично в настоящей работе способ доказательства сильной связанности пространств $W^{1,2}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,2}(\Omega)$ в случае периодически перфорированных областей Ω_s).

В заключение рассмотрим пример выполнения условия (53).

Пример 9 . Пусть $0 \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, μ — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$\mu(x) = |x|^\lambda.$$

Пусть существует $\sigma_1 > 0$ такое, что

$$\text{для любых} \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad j \in J_s \quad \text{имеем} \quad B(0, \sigma_1 r_s^j) \cap B(x_s^j, \alpha r_s^j) = \emptyset. \tag{72}$$

Тогда для любых $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$ и $x, y \in B(x_s^j, \alpha r_s^j)$ имеем

$$\mu(x) \leqslant \left(1 + \frac{2\alpha}{\sigma_1}\right)^{|\lambda|} \mu(y). \tag{73}$$

Действительно, пусть $s \in \mathbb{N}$, $j \in J_s$ и $x, y \in B(x_s^j, \alpha r_s^j)$. В силу (72) $|y| \geqslant \sigma_1 r_s^j$. Учитывая это, получаем

$$|x| \leqslant |y| + |x - y| \leqslant |y| + |x - x_s^j| + |y - x_s^j| \leqslant |y| + 2\alpha r_s^j \leqslant \left(1 + \frac{2\alpha}{\sigma_1}\right)|y|.$$

Следовательно, $|x| \leqslant (1 + 2\alpha/\sigma_1)|y|$. Аналогично имеем $|y| \leqslant (1 + 2\alpha/\sigma_1)|x|$. Из этих неравенств выводим неравенство (73). Тем самым требуемое доказано.

1. *Хруслов Е.Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, № 4. – С.604–621.
2. *Марченко В.А., Хруслов Е.Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наукова думка, 2005. – 550с.
3. *Берлянд Л.В., Чудинович И.Ю.* Усреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами // ДАН СССР. – 1983. – **272**, № 4. – С.777–780.
4. *Ковалевский А.А.* Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 8. – С.6–9.
5. *Ковалевский А.А.* Условия Γ-сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР. – 1991. – № 4. – С.5–8.
6. *Ковалевский А.А.* G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Известия РАН. Сер. матем. – 1994. – **58**, № 3. – С.3–35.
7. *Жиков В.В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. – 1992. – **183**, № 8. – С.47–84.

8. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Москва: Наука, 1988. – 336с.
9. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973. – 576с.
10. *Murthy M.K.V., Stampacchia G.* Boundary value problem for some degenerate elliptic operators // Ann. Math. Pura Appl. – 1969. – **80**. – P.1–122.
11. *Guglielmino F., Nicolosi F.* Sulle W-soluzioni dei problemi al contorno per operatori ellittici degeneri // Ricerche di Matematica. – 1987. – **36**. – P.59–72.
12. *Cirmi G.R., Porzio M.M.* L^∞-solutions for some nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations // Ann. Math. Pura Appl. – 1995. – **169**. – P.67–86.
13. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order // Applicable Analysis. – 1997. – **65**. – P.225–249.
14. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On the convergence of solutions of degenerate nonlinear elliptic high order equations // Nonlinear Analysis. – 2002. – **49**. – P.335–360.
15. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. – Oxford: Clarendon Press, 1993. – 363p.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 18.05.2006