©2005. **А.А. Ковалевский, О.А. Рудакова**

О Г-КОМПАКТНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ИНТЕГРАНТАМИ

Рассматриваются интегральные функционалы, определенные на переменных соболевских пространствах. Формулируется теорема о выборе из рассматриваемой последовательности функционалов подпоследовательности, Г-сходящейся к некоторому интегральному функционалу.

Введение.

Г-сходимость – это особая сходимость функционалов, сопровождающаяся во многих важных случаях сходимостью решений соответствующих вариационных задач. Для функционалов с единой областью определения понятие Г-сходимости было введено в работе [1], где также впервые были описаны общие свойства этого вида сходимости функционалов и даны его приложения к вариационным задачам. Вопросам Г-сходимости интегральных функционалов с единой областью определения посвящены работы многих итальянских математиков (см. [2], [3] и библиографию в [3]), а также В.В.Жикова (см., например, [4]–[7]). Основными результатами этих исследований являются теоремы о Г-компактности для последовательностей функционалов вариационного исчисления и интегральном представлении их Г-пределов.

Для функционалов с переменной областью определения понятие Г-сходимости изучалось, например, в работах [8]–[11].

В настоящей статье рассматриваются интегральные функционалы, определенные на переменных соболевских пространствах. Особенностью предлагаемой ситуации является то, что условия роста и коэрцитивности на интегранты функционалов содержат весовую функцию и некоторую, вообще говоря, неограниченную последовательность добавочных слагаемых. В работе дается теорема о выборе из рассматриваемой последовательности функционалов подпоследовательности, Г-сходящейся к некоторому интегральному функционалу. При доказательстве этой теоремы использовались некоторые идеи работ [7], [11] и [12], связанные с предельными переходами. Отметим, что одним из элементов доказательства (как, например, и в [11]) является использование специальных локальных характеристик исследуемых функционалов. Подобные характеристики и связанные с ними условия сходимости точек минимума соответствующих интегральных функционалов, определенных на переменных соболевских пространствах, изучались ранее, например, в [13] и [14].

1. Исходные предположения, функциональные пространства и определение Г-сходимости.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in (1, n)$.

Пусть ν – неотрицательная функция на Ω такая, что $\nu > 0$ почти всюду на Ω,

$$\nu \in L^1_{loc}(\Omega), \quad \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1/(p-1)} \in L^1_{loc}(\Omega).$$

Через $L^p(\nu, \Omega)$ обозначим множество всех измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $\nu|u|^p \in L^1(\Omega)$.

Через $W^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in L^p(\nu,\Omega)$ таких, что для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu,\Omega)$.
$W^{1,p}(\nu,\Omega)$ – банахово пространство с нормой

$$\|\, u \,\|_{1,p,\nu} = \left(\int_\Omega \nu |u|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nu |D_i u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ обозначим замыкание множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\nu,\Omega)$.

Далее, пусть $\{\Omega_s\}$ – последовательность областей в $\mathbb{R}^n$, содержащихся в Ω. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\nu_s = \nu|_{\Omega_s}$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $L^p(\nu_s,\Omega_s)$ – множество всех измеримых функций $u : \Omega_s \to \mathbb{R}$ таких, что $\nu_s |u|^p \in L^1(\Omega_s)$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $W^{1,p}(\nu_s,\Omega_s)$ – множество функций $u \in L^p(\nu_s,\Omega_s)$ таких, что для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u \in L^p(\nu_s,\Omega_s)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $W^{1,p}(\nu_s,\Omega_s)$ – банахово пространство с нормой

$$\|\, u \,\|_{1,p,\nu,s} = \left(\int_{\Omega_s} \nu_s |u|^p \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_s} \nu_s |D_i u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Далее, пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ - множество всех функций $u : \Omega_s \to \mathbb{R}$, для каждой из которых найдется функция $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\tilde{u}|_{\Omega_s} = u$.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s,\Omega_s)$ обозначим замыкание множества $\widetilde{C}_0^\infty(\Omega_s)$ в $W^{1,p}(\nu_s,\Omega_s)$.

Пусть для любых $s \in \mathbb{N}$ и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ $q_s u = u|_{\Omega_s}$.

Определение 1. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ I_s – функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s,\Omega_s)$, I – функционал на $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Г-сходится к функционалу I, если:*

1) *для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ существует последовательность $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s,\Omega_s)$ такая, что*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s} \nu_s |w_s - q_s u|^p \, dx = 0$$

и

$$\lim_{s\to\infty} I_s(w_s) = I(u);$$

2) *для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu,\Omega)$ и любой последовательности $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s,\Omega_s)$ такой, что*

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s} \nu_s |u_s - q_s u|^p \, dx = 0$$

имеем

$$\liminf_{s\to\infty} I_s(u_s) \ge I(u).$$

2. Теорема о Г-компактности для интегральных функционалов.

Пусть $b \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ в Ω, и пусть $\{\psi_s\}$ – последовательность функций, удовлетворяющая следующим условиям:
(i) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\psi_s \geq 0$ в Ω_s;

(ii) для любого открытого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\limsup_{s\to\infty} \int_{Q\cap\Omega_s} \psi_s\, dx \leq \int_{Q\cap\Omega} b\, dx\,.$$

Пусть c_1, $c_2 > 0$ и $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – последовательность функций такая, что:
1) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на Ω_s;

2) для любого $s \in \mathbb{N}$ и почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$;

3) для любого $s \in \mathbb{N}$, почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$c_1\nu(x)|\xi|^p - \psi_s(x) \leq f_s(x,\xi) \leq c_2\nu(x)|\xi|^p + \psi_s(x)\,.$$

Определение 2. *Если $s \in \mathbb{N}$, то I_s – функционал на $\widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s, \Omega_s)$ такой, что для любой функции $u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s, \Omega_s)$*

$$I_s(u) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla u)\, dx.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех функций $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:
1) *для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot, \xi)$ измерима на Ω;*

2) *для почти всех $x \in \Omega$ функция $f(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$;*

3) *для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$-b(x) \leq f(x,\xi) \leq c_2\nu(x)|\xi|^p + b(x).$$

Определение 3. *Если $f \in \mathcal{F}$, то I^f – функционал на $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ такой, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$*

$$I^f(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u)\, dx.$$

Теорема. *Пусть существует последовательность открытых множеств $\Omega^{(k)}$ такая, что:*

(а) *для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{\Omega^{(k)}} \subset \Omega^{(k+1)} \subset \Omega$;*

(б) $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{meas}\big(\Omega \setminus \Omega^{(k)}\big) = 0$;

(в) *для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\sup\limits_{x\in\Omega^{(k)}} b(x) < +\infty$, и $\sup\limits_{x\in\Omega^{(k)}} \nu(x) < +\infty$.*

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ *и* $f \in \mathcal{F}$ *такие, что последовательность* $\{I_{s_j}\}$ *Г-сходится к функционалу* I^f.

Схема доказательства теоремы следующая.

1. Для произвольных $t\,, s \in \mathbb{N}$, $y \in Y'_t$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ вводятся числа

$$F_{t,s}(y,\xi) = t^n \inf_{u \in V_{t,s}(y)} \int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} f_s(x, \xi + \nabla u)\, dx.$$

Здесь

$$Q_t(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \frac{1}{2t},\ i = 1, \ldots, n\},$$

$$Y'_t = \{y \in \mathbb{R}^n : ty_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n;\ \overline{Q_t(y)} \subset \Omega\},$$

$$V_{t,s}(y) = \{u \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s, \Omega_s) : \int_{Q_t(y)\cap\Omega_s} \nu_s |u|^p\, dx \le t^{-n-3m}\}.$$

Числа $F_{t,s}(y,\xi)$ являются определенными локальными характеристиками функционалов I_s.

2. С помощью ряда предельных переходов (аналогично изложенному в [11] и [12]) по этим локальным характеристикам строится некоторая функция f и доказывается, что $f \in \mathcal{F}$. При этом выделяется некоторая возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$.

3. Для произвольных функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и последовательности $u_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s, \Omega_s)$ такой, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s} \nu_s |u_s - q_s u|^p\, dx = 0,$$

устанавливается неравенство

$$\liminf_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \ge I^f(u).$$

4. Для произвольной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ доказывается существование последовательности $w_s \in \widetilde{W}_0^{1,p}(\nu_s, \Omega_s)$ такой, что

$$\lim_{s\to\infty} \int_{\Omega_s} \nu_s |w_s - q_s u|^p\, dx = 0,$$

$$\limsup_{j\to\infty} I_{s_j}(w_{s_j}) \le I^f(u).$$

5. Переходя в результатах пунктов 3 и 4 от функций класса $C_0^\infty(\Omega)$ к произвольным функциям из $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\nu, \Omega)$, устанавливаем Г-сходимость последовательности $\{I_{s_j}\}$ к функционалу I^f.

В заключение отметим, что Г-сходимость последовательности интегральных функционалов, определенных на некотором весовом пространстве Соболева и имеющих квадратичные интегранты с весовым множителем и ограниченными быстро осциллирующими периодическими коэффициентами, была исследована в работе [15].

1. *De Giorgi E., Franzoni T.* Su un tipo di convergenza variazionale // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis.mat. e natur. – 1975. – **58**, №6. – P.842–850.
2. *Sbordone C.* Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. sci.– 1975. – **2**. – P.617–638.
3. *Dal Maso G.* An introduction to Γ-convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993.–337p.
4. *Жиков В.В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционала вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, №5. – С.961–998.
5. *Жиков В.В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для одного класса функционалов вариационного исчисления // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, №3 – С.524–528.
6. *Жиков В.В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, №4. – С.675–710.
7. *Жиков В.В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. – 1992. – **183**, №8. – С.47–84.
8. *Ковалевский А.А.* Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1988. – №8. – С.6–9.
9. *Ковалевский А.А.* Условия Г-сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР.– 1991. – №4. – С.5–8.
10. *Ковалевский А.А.* О необходимых и достаточных условиях Г-сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейн. граничн. задачи.–1992. –Вып.4. – С.29–39.
11. *Ковалевский А.А.* О Г-сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, №5. – С.614–628.
12. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On the convergence of solutions of degenerate nonlinear elliptic high order equations // Nonlinear Analysis, Theory Methods Appl. – 2002. – **49**. – P.335–360.
13. *Хруслов Е.Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. – 1978. – **106**, №4. – С.604–621.
14. *Панкратов Л.С.* О сходимости решений вариационных задач в слабосвязанных областях. – Харьков, 1988.– 25 с. – (Препринт / АН УССР. Физ.-техн.ин-т низких температур; 53.88).
15. *De Arcangelis R., Donato P.* Homogenization in weighted Sobolev spaces // Ric. Mat. – 1985. – **34**. – P.289–308.

Институт прикладной математики и механики
ул. Р.Люксембург, 74,
83114, г.Донецк, Украина

Получено 22.12.2004