Асимптотические разложения сферических функций

Н.П. Волчкова

Донецкий национальный технический университет

В работе исследуются асимптотические свойства обобщенных сферических функций $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2}; \alpha+1; \sin^2 r\right)$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq -1,-2,\ldots; 0 < r < \pi/2)$ на симметрических пространствах ранга один компактного типа при $\lambda \to \infty$. Получено разложение для $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r)$, аналогичное асимптотическому ряду Бесселя.

Положим $a_{2k}(r) = \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k)!}$, $a_{2k-1}(r) = \frac{(-1)^k}{2(2k-1)!}\operatorname{tg} r$, $d_{2k}(r) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, $d_{2k-1}(r) = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\operatorname{ctg} r$, $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$, $A_k = \frac{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1)\sin^{-2\alpha} r}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)\cos^{\beta+1/2} r}\ k! \sum_{m=0}^{k} \gamma_m c_{k-m}$, где

$$\gamma_k = \sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k} \frac{(-1)^{l_1+\cdots+l_k}(1/2-\alpha)_{l_1+\cdots+l_k}}{l_1!\ldots l_k!(\sin r)^{1/2-\alpha}} d_1^{l_1}(r)\ldots d_k^{l_k}(r),$$

$$c_k = \sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k} \frac{(1/2+\beta)_{l_1+\cdots+l_k}(1/2-\beta)_{l_1+\cdots+l_k}}{l_1!\ldots l_k!(1/2+\alpha)_{l_1+\cdots+l_k}} a_1^{l_1}(r)\ldots a_k^{l_k}(r).$$

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \in (0,\pi)$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $|\arg\lambda| \leq \pi - \varepsilon$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) \sim 2\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1+2\alpha)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(1+2\alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!} \frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{1}{2}}} +$$

$$2\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1+2\alpha)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(3+2\alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

Относительно различных частных случаев теоремы 1 см., например, [1]–[3].

Литература

1. Гобсон Е.В. *Теория сферических и эллипсоидальных функций.* –М.: ИЛ, 1952. – 476 с.

2. Volchkov V.V. *Integral geometry and convolution equations.* – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Acad. Publ., 2003.

3. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.* –London: Springer., 2009.