Векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса

Н.П. Волчкова

Донецкий национальный технический университет, Донецк, Украина

volna936@gmail.com

Пусть $0 < r < R \leq \infty$, $\mathbf{V}_r(B_R)$ – множество непрерывных векторных полей $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$, имеющих нулевой поток через все сферы радиуса r, лежащие в B_R. (Символ B_R обозначает открытый шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центом в нуле.) Пусть S^{n-1} – единичная сфера из $\mathbb{R}^n$ с центом в нуле, $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1}. Пусть d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Для точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho = |\mathbf{x}|$, а если $\mathbf{x} \neq 0$, то $\sigma = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, R), \quad f_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma.$$

Обозначим через ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t)$ гипергеометрическую функцию с индексами (1,2). Пусть также $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$ – векторное поле класса C^∞. Тогда $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathbf{V}_r(B_R)$ в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^s(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in B_R,$$

где $\mathbf{A}^s$ – соленоидальное векторное поле класса C^∞, B – скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l} \rho^k {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m \rho}{2r}\right)^2\right),$$

в которых константы $\gamma_{m,k,l}$ убывают быстрее любой степени ν_m при $m \to \infty$.

Отметим, что теорема 1 является развитием результатов В.В. Волчкова об описании функций с нулевыми интегралами по сферам фиксированного радиуса (см. [1]), а также усиливает один из результатов Д. Смита [2].

Список литературы

[1] Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Acad. Publ. – 2003. – 454 pp.

[2] Smith J. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416.